



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА



**МОДЕЛ ПРОЦЕНЕ ТРЖИШНОГ РИЗИКА
ОСИГУРАВАЈУЋИХ КОМПАНИЈА ЗАСНОВАН НА
ТЕХНИЦИ ДУБОКОГ УЧЕЊА
ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА**

Ментори:

Проф. др Љиљана Поповић

Доц. др Марко Арсеновић

Кандидат:

Саша Меза

Нови Сад, 2026. године

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА¹

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Саша Меза
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција):	др Љиљана Поповић, ванредни професор, Факултет техничких наука др Марко Арсенивић, доцент, Факултет техничких наука
Наслов рада:	Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења
Језик и писмо рада:	Српски (ћирилица)
Физички опис рада:	Страница: 206 Поглавља: 4 Референци: 176 Табела: 11 Слика: 26
Научна област:	Индустријско инжењерство и инжењерски менаџмент
Ужа научна област (научна дисциплина):	Производни и усложни системи, организација и менаџмент
Кључне речи / предметна одредница:	Управљање ризицима; Тржишни ризик; Осигурање; Вештачке неуронске мреже; Value at Risk (VaR); Expected Shortfall (ES)
Апстракт на језику рада:	У дисертацији је развијен модел за процену тржишног ризика заснован на неуронским мрежама у комбинацији са непараметарским, параметарским и полупараметарским VaR и ES моделима. Прецизније, основни циљ дисертације јесте унапређење модела за процену тржишног ризика коме су изложени портфолији осигуравајућих друштва у складу са Директивом солвентности II, како би се искористиле предности параметарских и непараметарских модела за процену тржишног ризика али и примене ANN. Модел је намењен осигуравајућим компанијама које послују на тржиштима у развоју. Резултати тестирања валидности модела спроведени су на примеру осигуравајућих друштва која послује у Републици Србији. Резултати валидности показују да модел генерише поуздане процене VaR и ES у складу са директивом, као и да производи боље процене у поређењу са популарним и широко коришћеним VaR и ES моделима.
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	20.11.2025.
Датум одбране: (Попуњава накнадно институција)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник: др Срђан Сладојевић, редовни професор, Факултет техничких наука Члан: др Ђорђе Ђосић, редовни професор, Факултет техничких наука Члан: др Ненад Медић, доцент, Факултет техничких наука Члан: др Александар Алексић, редовни професор, Факултет инжењерских наука
Напомена:	

¹ Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и дозвола за објављивање личних података;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају у институцији у штампаном и електронском облику и не кориче се са радом.

KEY WORD DOCUMENTATION²

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Saša Meza
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Dr. Ljiljana Popović, Associate Professor, Faculty of Technical Sciences Dr. Marko Arsenović, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences
Thesis title in English:	A Deep Learning-Based Model for Market Risk Assessment of Insurance Companies
Language and script:	Serbian language (Cyrillic script)
Physical description:	Pages: 206 Chapters: 4 References: 176 Tables: 11 Illustrations: 26
Scientific field:	Industrial Engineering and Engineering Management
Scientific subfield (scientific discipline):	Production and Service Systems, Organization and Management
Subject, Key words:	Risk Management; Market Risk; Insurance; Artificial Neural Networks; Value at Risk (VaR); Expected Shortfall (ES)
Abstract in English:	The dissertation develops a model for assessing market risk based on neural networks in combination with non-parametric, parametric and semi-parametric VaR and ES models. More precisely, the main aim of the dissertation is to improve the model for assessing the market risk to which the portfolios of insurance companies are exposed in accordance with the Solvency II Directive, to take advantage of the advantages of parametric and non-parametric models for assessing market risk, as well as the application of ANN. The model is intended for insurance companies operating in emerging markets. The results of the model validity testing were conducted on the example of insurance companies operating in the Republic of Serbia. The validity results show that the model generates reliable VaR and ES estimates in accordance with the Solvency II Directive, as well as producing better estimates compared to popular and widely used VaR and ES models.
Date of endorsement by the scientific board:	20.11.2025.
Date of defence: (Filled in by the institution)	
Thesis defence board: (title, first name, last name, position, institution)	Chair: Dr. Srđan Sladojević, Full Professor, Faculty of Technical Sciences Member: Dr. Đorđe Ćosić, Full Professor, Faculty of Technical Sciences Member: Dr. Nenad Medić, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences Member: Dr. Aleksandar Aleksić, Full Professor, Faculty of Engineering
Note:	

² The author of the doctoral dissertation has signed the following Statements:

56 – Statement on the authorship,

5B – Statement that the printed and e-version of the doctoral dissertation are identical and authorization to use personal data,

5r – Copyright statement.

The paper and e-versions of Statements are held at the institution and are not included into the printed thesis.

САДРЖАЈ

Садржај табела	6
Садржај слика.....	7
УВОД	8
<i>Први део</i>	17
РЕГУЛАТИВА ЗА ПРОЦЕНУ ТРЖИШНИХ РИЗИКА У ОСИГУРАЊУ	17
1. Ризик - суштина осигурања као делатности.....	17
1.1. <i>Врсте ризика у осигурању као делатности</i>	27
1.2. <i>Класификација ризика у осигурању као делатности</i>	34
2. Скуп могућег, ефикасног и оптималног портфолија.....	37
3. Директива солвентности I.....	49
4. Захтев за солвентним капиталом за покриће тржишних ризика у осигурању - Директива солвентности II.....	52
4.1. Стандардизовани приступ за утврђивање захтеваног капитала солвентности за покриће тржишних ризика у осигурању	60
4.2. Приступ интерних модела VaR за утврђивање захтеваног капитала солвентности за покриће тржишних ризика у осигурању	69
<i>Други део</i>	75
VaR МОДЕЛИ ЗА ПРОЦЕНУ ТРЖИШНИХ РИЗИКА У ОСИГУРАЊУ.....	75
1. Параметарски VaR модели.....	75
1.1. Варијанса-коваријанса VaR модел.....	77
1.2. <i>RiskMetrics</i> VaR модел.....	81
1.3. VaR модели засновани на фамилији GARCH модела волатилности.....	85
2. Непараметарски VaR модели.....	94
2.1. Модел историјске симулације	95
2.2. Модел огледала историјске симулације	98
2.3. Bootstrap модел историјске симулације.....	99
3. Полу-параметарски VaR модели	101
3.1. Филтрирани модел историјске симулације	102
3.2. Хибридни модел историјске симулације.....	104
4. Модел процене тржишног ризика заснован на техници дубоког учења.....	108

Трећи део.....	114
ПОУЗДАНОСТ И ВАЛИДАЦИЈА VaR И ES МОДЕЛА ЗА ПРОЦЕНУ ТРЖИШНОГ РИЗИКА У ОСИГУРАЊУ	114
1. Модели вероватноће покрића губитка.....	114
1.1. Модел безусловног покрића	119
1.2. Модел условног покрића.....	122
2. Модели засновани на техникама симулације за валидацију VaR модела.....	124
2.1. Модели засновани на Monte Carlo симулацији за валидацију VaR модела	125
2.2. Модели засновани на Bootstrap симулацијама за валидацију VaR модела	129
3. Модели за валидацију ES модела.....	132
3.1. Модел заснован на Bootstrap резидуалима.....	135
3.2. Gaussian приступ за валидацију ES модела предложеном од стране Berkowitz-a (2001) - Berkowitz модел.....	137
3.3. Мултиномни ES <i>backtesting</i> модел.....	139
3.4. Модел безусловног покрића Acerbi и Szekely.....	140
3.5. Bayer-Dimitriadis модел за валидацију ES модела.....	142
4. Унапређење модела за валидацију ES модела применом Bootstrap симулације	144
Четврти део.....	148
ТЕСТИРАЊЕ ВАЛИДНОСТИ МОДЕЛА ПРОЦЕНЕ ТРЖИШНОГ РИЗИКА ЗАСНОВАНОГ НА ТЕХНИЦИ ДУБОКОГ УЧЕЊА.....	148
1. Преглед досадањих емпиријских истраживања примене вештачке интелигенције у процени тржишних ризика.....	148
2. Варијабле и методологија истраживања.....	152
3. Процена тржишног ризика оптималног портфолија за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији	161
4. Тестирање валидности модела за процену ризика	174
5. Дискусија добијених резултата	179
6. Ограничења истраживања.....	182
ЗАКЉУЧАК	184
Литература.....	188

Садржај табела

Табела 1. Структура инвестиционог портфолија осигурања у Републици Србији према правилима прудеционе контроле	44
Табела 3. Матрица корелације	65
Табела 4. Хипер-параметри и перформансе мреже	160
Табела 5. Дескриптивна статистика оптималног портфолија	163
Табела 6. Резултати Ljung-Box Q теста	165
Табела 7. Резултати теста присуства ARCH ефекта	166
Табела 8. Оцене параметара GARCH модела коришћени за процену ризика RM500 моделом.....	167
Табела 9. Оцене GPD дистрибуције	168
Табела 10. Резултати процене валидности модела	175
Табела 11. Резултати компарације перформанси модела	178

Садржај слика

Слика 1. Концепт ризика финансијских институција	21
Слика 2. Подела ризика у осигурању	30
Слика 3. Сет могућих портфолија	38
Слика 4. Криве индиферентности менаџмента финансијске институције.....	40
Слика 5. Мапе криве индиферентности менаџмента финансијских институција у зависности од склоности ка ризику	41
Слика 6. Оптимални портфолио	42
Слика 7. Промена оптималног портфолија у зависности од промене склоности ка ризику.....	43
Слика 8. Граница ефикасности након увођења безризичне активе	45
Слика 9. Оптимални портфолио у условима могућности инвестирања у безризичну активу	46
Слика 10. Тржишни портфолио.....	48
Слика 11. Три стуба прудеционе контроле под Директивном солвентности II	53
Слика 12. Графички приказ VaR процене	72
Слика 13. Графички приказ предложеног DMMLP-ANN модела	110
Слика 14. Структура оптималног портфолија на дан 01.01.2022. године.....	156
Слика 15. Кретање дневних логаритамских приноса оптималног портфолија	162
Слика 16. Емпиријска дистрибуција дневних приноса оптималног портфолија	164
Слика 17. Резултати ACF и PACF теста	165
Слика 18. VaR/ES процена HS500.....	169
Слика 19. VaR/ES процена MHS500	170
Слика 20. VaR/ES процена BHS500	170
Слика 21. VaR/ES процена GARCH-RM500	171
Слика 22. VaR/ES процена EGARCH-RM500.....	171
Слика 23. VaR/ES процена TGARCH-RM500.....	172
Слика 24. VaR/ES процена FHS500.....	172
Слика 25. VaR/ES процена EVT-VaR/ES500.....	173
Слика 26. VaR/ES процена DLMLP250	173

УВОД

Још од најранијих дана људи су користили различите методе и технике да се заштите од ризика. Примена различитих техника и принципа управљања ризицима обезбеђивала им је сигурност у односу на будуће исходе. Међутим, иако су људи од најранијих дана до данас користили различите методе заштите од ризика, у савременим условима пословања, осигурање као вид организоване заштите од ризика засновано на солидарности и реципроцитету, представља најзначајнији вид заштите од ризика (Njegomir, 2011). Традиционално, осигуравајућа друштва управљају ризиком кроз задржавање ризика, формирајући техничке резерве као заштитни слој (енгл. *buffer*). Немогућност предвиђања плаћања по основу обавеза, како по висини, тако и по роковима настанка, чини неопходним формирање техничких резерви као директне подршке обезбеђењу солвентности и ликвидности осигуравајуће компаније. Међутим, будући да техничке резерве, с аспекта динамике новчаних токова представљају имобилисану активу компаније, која директно лимитира зарађивачку снагу компаније, формирање оптималних техничких резерви значи направити компромис између безусловне солвентности и ликвидности, са једне и тежње акционара да максимизирају принос од улагања, са друге стране.

С аспекта националне економије, значај који осигуравајућа друштва имају за развој финансијских тржишта, процес креирања и трговине финансијским инструментима и ефикасну алокацију капитала, утиче на потребу регулаторних институције за снажном регулацијом формирања техничких резерви и могућности њиховог инвестирања, што додатно добија на значају уколико се у обзир узме и њихов неспоран утицај на сектор реалне економије, корпоративно финансирање, сигурност прихода и генерално развој целокупне привреде. То је и разлог зашто је инвестирање капитала у свим земљама предмет строге законске регулативе. Циљ је да се обезбеди уређена, поштена и контролисана трговина финансијском активом, да се спрече евентуалне нерегуларности и криза на финансијским тржиштима (Станчић & Радивојевић, 2021).

Дакле, имајући у виду значај осигурања и функције осигуравајућих друштава, осигуравајући супервизори предузели су низ значајних активности да обезбеде

адекватну заштиту учесницима на тржишту осигурања и финансијском тржишту кроз дефинисање капиталних захтева за амортизовање ових ризика и адекватну њихову контролу. Међутим, комплексност регулисања пословања осигуравајућих компанија произилази из чињенице да идеална синхронизација новчаних токова: прилива по основу премија осигурања и одлива по основу исплата преузетих обавеза из осигурања у реалности није сасвим могућа. Прописивањем регулаторних стандарда као мера којима се остварују наведени циљеви регулаторних органа, често не одражава стваран ризик којима су изложени портфолији осигуравајућих друштава формирани од дела техничких резерви. Поред тога, прописивањем једнаких стандарда за све, не уважавају се инвестиционе способности менаџмента осигуравајућих друштава. Такође, не уважавају се ефекти диверсификације, односно степен корелисаности између различитих актива и тржишта (Rae et al., 2018).

На парадигми преузете из области банкарства, да се за мерење тржишног ризика не може дефинисати јединствен стандард који ће одговарати свим портфолијима, већ да ниво захтеваног капитала за покриће тржишног ризика треба детерминисати у складу са стварном изложеношћу портфолија тржишном ризику, која је конзистентна са филозофијом пословања осигуравајућих друштава, супервизори су усвојили Директиву солвентности II.

Прецизније, на принципу тржишне конзистентности и снажног управљања ризицима у осигуравајућим компанијама, супервизори су прописали низ правила којима се регулишу услови и начини управљања ризицима у осигуравајућим компанијама.

Усвајање Директиве предствља најзначајнију промену у области регулације солвентности на нивоу Европске уније у последњих пар деценија. Директива дозвољава осигуравајућим друштвима, да поред Стандардизованог приступа, ниво капитала потребног за покриће тржишног ризика (енгл. *Solvency Capital Requirement - SCR*) утврђује применом интерних модела за процену вредности при ризику (енгл. *Value at Risk - VaR*). Уместо да се дефинише проценат захтеваног капитала за различите степене изложености ризицима, директивом су прописани захтеви који морају бити испуњени за примену интерних модела VaR. На овај начин осигуравајућа друштва добила су могућност да користе нови инструмент за управљање тржишним ризицима. Нови инструмент омогућава им да реалније процене ризичност својих портфолија и ниво капиталне адекватности уз минимизирање капиталних трошкова, јер SCR је конзистентан стварним степеном изложености ризика. На тај начин Директива пружа подстицај слабим компанијама да држе више капитала и/или смање своју изложеност

ризик без значајног нарушавања одлука финансијски здравих осигураваача. Поред тога, будући да ниво SCR који су осигуравајућа друштва дужна да издвоје за покриће тржишног ризика зависи од валидности VaR модела, осигуравајућа друштва мотивисана су да перманентно раде на унапређивању истих. Са развојем нових ефикаснијих модела, не само да се повећава валидност процене ризика и смањује ризик од несолвентности, већ се и смањују капитални трошкови. Пошто се на овај начин усклађују циљеви управљања и надзора усклађени су и подстицаји, а самим тим редукује се и агенцијски проблем.

Дакле, Директива захтева од осигуравајућих друштва да модели VaR буду подешени према сету прецизно дефинисаних квантитативних и квалитативних правила и да буду интегрисани у процес управљања ризицима. Директива не прописује врсту модела, али захтева да се модели континуирано преиспитују у погледу њихове способности прецизног предвиђања максималног губитка. Међутим, правилна употреба модела VaR захтева испуњење одређених, изузетно рестриктивних претпоставки (Radivojevic et al., 2022). Избор теоријске дистрибуције која најбоље описује дистрибуцију емпиријских података пресудна је детерминанта валидности модела у обезбеђивању условног или безусловног покрића ризика. Директива претпоставља да су промене вредности портфолија стохастичке природе и да по правилу следе нормалну дистрибуцију. Популарни и широко коришћени модели на развијеним тржиштима по правилу су развијени на претпоставци да се промене у вредности портфолија могу описати једним фиксним параметром и случајном варијаблом, која следи независну и идентичну дистрибуцију (енгл. *Independently and Identically Distributed* - IID). Међутим, бројна емпиријска истраживања показују да серије приноса финансијске активе не следе IID и нормалну расподелу (Al Janabi et al., 2017; BenSaïda et al., 2018; Eling & Jung, 2018; Arreola Hernandez, & Al Janabi, 2020; González-Sánchez, 2021; Chung & Sester, 2024; Mesquita, et al. 2024; Nordström, 2024; Qiu, 2024). Даље, емпиријска истраживања указују да флукуације у серији приноса финансијске активе не прате стохастичке процесе, који се једноставно могу представити моделом случајног хода, коришћењем ARCH/GARCH модела (енгл. *Generalized /Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* - GARCH), као и линеарних ARMA или ARIMA модела (енгл. *Autoregressive (Integrated) Moving Average* - AR(I)MA) (Radivojevic et al., 2020). У таквим условима, примена традиционалних модела ризика, као и њихових деривата, напредних варијанти заснованих на различитим техникама моделирања волатилности, постаје упитна (Doncic et al., 2023). Са друге стране, резултати испитивања тачности моделирања и предвиђања волатилности

финансијске активе спроведених од стране Batista et al. (2023), Itankan et al. (2023), Коо и Kim, (2023), Srivastava et al. (2023), Tian et al. (2023) јасно указују на предности и потенцијал примене неуронских мрежа у моделирању волатилности на финансијским тржиштима, чак и условима високе нестабилности тржишта која је изазвана пандемијом Covid19 (Zahid & Saleem, 2023; Fraszka-Sobczyk, & Zakrzewska, 2024).

Отуда, потреба да се траже нова решења, пре свега у примени *data mining*-а, *mechanical learnig* односно вештачких неуронских мрежа (енгл. *Artificial Neural Network* - ANN) и сл. како у развоју нових VaR модела, тако и развоју нових мера ризика као што је очекивани губитак (енгл. *Expected Shortfall* - ES). Употреба овог приступа у управљању ризицима мотивисана је жељом да се превазиђу ограничења традиционалних техника за предвиђање образаца понашања активе на финансијским тржиштима. Резултати истраживања аутора попут, Xing et al. (2018), Hiransha et al. (2018), Fischer и Krauss (2018), Rundo et al. (2019), Nti et al. (2019), Shah et al. (2019), Sezer et al. (2020), Chen et al. (2023), Di-Giorgi et al. (2023) Jumoorthy et al. (2023), Sahiner et al., (2023), Ge et al. (2023) и Mohsin и Jamaani (2023), Fraszka-Sobczyk и Zakrzewska (2024) указују на предности примене неуронске мреже у моделовању временских серија у односу на традиционалне статистичке технике. Нарочито су модели засновани на неуронским мрежама показали боље перформансе у предвиђању реализоване волатилности, о чему сведоче резултати истраживања Amirshahi и Lahmiri (2023), Bucci et al. (2023), Li et al. (2023), Manevich и Ignatov (2023), Souto и Moradi (2023), Diane и Brijlal (2024), Gunnarsson et al. (2024), као и Souto и Moradi (2024).

Међутим, VaR је мера ризика која снажно зависи од репа дистрибуције вероватноће. Стога је тачно моделирање репа дистрибуције вероватноће од суштинског значаја за процену VaR (Asadi et al., 2020). Са друге стране, ANN модели нису у стању да ухвате екстремне приносе, пошто реп дистрибуције обично укључује мали број приноса, примена класичних ANN модела у контексту Директиве солвентности II захтева посебну пажњу и опрез. Наиме, изузетно висок ниво поверења који се поставља од стране Директиве приликом израчунавања SCR имплицира мали број екстремних случајева у репу дистрибуције, што лимитира употребу класичних модела ANN заснованих на историјским подацима и вредностима портфолија осигуравајућих друштава. Сем тога, ANN модели су засновани на претпоставци независности између посматрања, што утиче на њихову способност да кооптирају хетероскедастичност у серији приноса (Meza et al., 2025).

Претходно речено, имплицира да примена ANN на тржиштима у настајању јесте прилично дискутабилна, будући да се она одликују релативно кратком историјом финансијских тржишта. Такође одликују се и чињеницом да серије приноса активе нису независне и случајне променљиве, које прате мартингал процес, већ да су значајно корелисане варијабле које показују снажну тенденцију груписања у кластере волатилности. Међутим, могућност кооптирања нелинеарних зависности применом ANN, које се јављају међу факторима ризика портфолија осигуравајућих компанија као последица националних регулатива која ограничавају структуру улагања у активу дела техничких резерви осигуравајућих друштава, оправдавају напор у развоју нових VaR и ES модела за процену ризика у контексту Директиве солвентности II, заснованим на ANN.

Независно од горе наведеног, у развоју модела ANN увек постоји проблем проналажења оптималне архитектуре јер зависи од способности модела да препозна научне обрасце и генерализује када се појави непознати образац. Отуда, **предмет проучавања дисертације** јесте испитивање могућности примене ANN у сврху предвиђања/процене тржишних ризика коме су изложена портфолија осигуравајућих друштава која послују на тржиштима у настајању (енгл. *emerging markets*).

Основни циљ истраживања јесте да се развије нови модел ризика заснован на неуронским мрежама који ће бити лак за имплементацију и који ће моћи да обухвати кључне карактеристике серија приноса портфолија осигуравајућих друштава које послују на финансијским тржиштима у настајању. Прецизније, основни циљ дисертације јесте унапређење модела за процену тржишног ризика коме су изложени портфолији осигуравајућих друштава у складу са Директивом солвентности II, како би се искористиле предности параметарских и непараметарских модела за процену тржишног ризика али и примене ANN. Развијани су модели ANN који у себи инкорпорирају параметарске или непараметарске моделе VaR и ES, али нема оних који комбинују обе групе модела. Управо, развој информационе-комуникационе технологије омогућава да се искористе предности обе групе модела, како би се успешно кооптирале све карактеристике портфолија осигуравајућих компанија које послују на финансијским тржиштима у настајању.

Идеја је да се применом стандардног модела вишеслојног перцептрона развије модел за процену ризика (VaR и ES), који ће моћи да обухвати нелинеарне зависности између фактора ризика портфолија; који је способан да апроксимира велики број континуираних функција, односно може да кооптира понашање великог броја фактора

ризика портфолија осигуравајућих друштава и њихов утицај на укупни ризик; и који ће бити способан да пружи поуздане процене ризика у ситуацијама када су портфолији изложени великом броју екстерних фактора. Радови Sirignano и Cont (2019) и Choi et al., (2023) указују на исправност оваквог приступа.

Поред основног циља истраживања могуће је идентификовати и низ субординирајућих циљева који укратко подразумевају: прво, да се испита да ли ново-развијени модел може поуздано да се користи за процену финансијског ризика у контексту Директиве солвентности II - валидности; друго, да се испита да ли ново-развијени модел генерише боље перформансе у односу на традиционалне моделе VaR; треће да се испитају карактеристике портфолија осигуравајућих друштава. Истраживање ће бити спроведено на примеру осигуравајућих друштва која послује у Републици Србији. Фокус ће бити на развоју модела ANN у коме ће се као улази користити процене VaR и ES добијених применом често коришћених параметарских, полу-параметарских и непараметарских VaR модела и то: стандардног модела историјске симулације, модела огледала и bootstrap модела историјске симулације, RiksMetrics моделу, моделу историјске симулације пондерисан волатилношћу, као VaR/ES моделу заснованом на теорији екстремне вредности.

Сагласно предмету и основном циљу истраживања, докторска дисертација полази од две основне хипотезе:

- 1) Могуће је развити модел за процену тржишног ризика осигуравајућих компанија који је заснован на техници дубоког учења и неуронских мрежа.
- 2) Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења и неуронских мрежа даје прецизније процене тржишног ризика у односу на традиционалне и широко коришћене моделе VaR и ES;

као и 5 изведених подхипотеза:

- 1.1 Серија приноса портфолија осигуравајућих друштава одступа од претпоставки о нормалној и независној дистрибуцији приноса;
- 1.2 Серија приноса портфолија осигуравајућих друштава која послују на финансијским тржиштима у настајању следе асиметричну и лептокуртичну расподелу;
- 1.3 Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења задовољава критеријуме теста безусловног покрића тржишног ризика коме су изложена оптимална портфолија осигуравајућих друштава на тржиштима у настајању;

- 1.4 Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења задовољава критеријуме теста условног покрића тржишног ризика коме су изложена оптимална портфолија осигуравајућих друштава на тржиштима у настајању;
- 1.5 Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења задовољава критеријуме валидности ES модела за процену тржишног ризика коме су изложена оптимална портфолија осигуравајућих друштава на тржиштима у настајању;

У складу са постављеним циљем и предметом истраживања, као и формулисаним основним научним хипотезама у раду, примењена је квалитативна и квантитативна методологија. Резултат примењених методологија истраживања јесте у разумевању предмета истраживања, кроз утврђивање структуре односа између варијабли и њихових исхода.

Истраживање могућности развоја новог модела за процесу тржишног ризика којем су изложена портфолија осигуравајућих компанија која послују на финансијским тржиштима у настајању, а у складу са захтевима Директиве солвентности II, заснива се на савременим теоријским достигнућима и емпиријским сазнањима из области менаџмента ризика и достигнућа из области вештачке интелигенције. Приликом дефинисања тржишног ризика и идентификовања релевантних фактора који опредељују његову висину, коришћен је аналитички научни метод, који подразумева детаљну анализу одређених појава, ефеката, кретања изабраних индикатора и њихово класификовање. Метод дескрипције употребљен је за представљање теоријских основа концепта VaR и ES, као и стандарда и процедура за управљање и процену тржишних ризика. Карактеристике серија приноса портфолија осигуравајућих компанија које послују на финансијском тржишту Републике Србије анализирани су применом различитих дескриптивних статистичких метода, модела за анализу аутокорељације и волатилност.

Подаци су прикупљени за период од 2019. до 2023. године. За тестирање формулисаних хипотеза коришћене су различите економетријске методе и модели за аутокорељације и парцијалне аутокорељације, ауторегресивне условне хетероскедастичности и покретних средина (GARCH модела). Оцене параметара GARCH модела добијене су применом методе максималне веродостојности за максимизирање *Gaus*-ове логаритамске функције, уз напомену да је избор одговарајуће

структуре ARCH модела и претпоставке дистрибуције иновација одређен применом информационог критеријума лог-вероватноће.

ANN модел се састоји од једног улазног слоја са бројем неурона еквивалентним броју корићених модела за процену VaR, односно ES, одређеног броја скривених слојева са различитим бројем неурона и једног излазног слоја који садржи један неурон. За активациону функцију коришћена је ректификована линеарна јединица (енгл. *Rectified Linear Unit - ReLU*). За учење коришћен је алгоритам повратног простирања грешке, а за оптимизацију *Adam*. Стопа учења подешена је на 0.1. Средња квадратна грешка коришћена је као функција губитка. За добијање оптималне неуронске структуре, односно за обуку и тестирање мреже, коришћено је 500 података о дневним логаритамским приносима портфолија изабраних осигуравајућих друштва, који су прикупљени за период од 01.01.2019. до 31.12.2021. године.

Након добијања оптималне структуре, мрежа је коришћена за генерисање VaR и ES за период од 01.01.2022. до 01.01.2023. године. Валидност модела тестирана је применом теста условног и безусловног покрића. Будући да су оба теста заснована на асимптотским претпоставкама, који могу створити потешкоће када се примењују на коначне узорке, резултати њихове валидности морају бити додатно потврђени. За ту сврху у дисертацији коришћена је *Dufour Monte Carlo* процедура. Валидност модела тестирана је симулирањем 10.000 симулација тестова условног и безусловног теста покрића, величине узорка који одговара величини стварног узорка коришћеног за израчунавање тестова условног и безусловног покрића.

За тестирање валидности ES процена, коришћен је *Berkowitz*-ев тест. Будући да као што је случај и са безусловним и условним VaR тестовима и овај тест је заснован на асимптотичким претпоставкама, те је стога неопходна валидација његових резултата. У ту сврху у дисертацији је коришћена *Bootstrap* процедура коју су представили Radivojevic et al. (2019), а која почива на Andrews и Buchinsky процедури.

Компаративној анализи подвргнути су резултати процене VaR и ES добијени применом различитих модела и модела који је развијен у дисертацији, како би се утврдило да ли модел развијен у раду обезбеђује супериорније процене ризика у односу на широко коришћене моделе VaR и ES.

У циљу генерализације и извођења одређених закључака у вези са апликативношћу различитих модела, као и ефектима и значају примене модела који је развијен у дисертацији, коришћен је метод синтезе. Емпиријски подаци ближе су

презентовани у форми табела и графика, с циљем да помогну у откривању карактеристичних тенденција и специфичности.

Значај овог истраживања огледа се и у чињеници да већина студија која се бави применом неуронских мрежа за процену тржишног ризика фокусира се на развијена финансијска тржишта (Han, et al., 2018; Avramov, et al. 2022; Chen et al., 2019; Chincio et al., 2019; Freyberger et al., 2020; Karolyi & Van Nieuwerburgh, 2020; Rapach & Zhou, 2020; Guet al., 2020, 2021; Feng & He, 2021; Feng, et al., 2022). Тако да нема радова коју ову проблематику третирају за тржишта у настајању. Отуда ће се допринос ове дисертације огледати у открићу релевантних закључака о могућностима и импликацијама примене модела ANN у развоју модела VaR и ES у управљању тржишним ризицима којима су изложени портфолији осигуравајућих компанија, а у складу са захтевима Директиве словесности II. Резултати теоријско методолошке анализе допринеће бољем разумевању валидности претпоставки и ограничења модела.

Практични значај дисертације огледаће се у чињеници да релативно мали број осигуравајућих друштава која послују на финансијским тржиштима земаља у настајању, какво је српско тржиште осигурања, има ефикасан систем за управљање тржишним ризицима заснован на интерним моделима у складу са Директивом солвентности II. Упркос предностима примене интерних модела за процену тржишних ризика којима су изложени портфолији осигуравајућих компанија домаћа осигуравајућа друштва се још увек доминантно ослањају на Стандардизовани приступ. Основни проблем јесте недовољна оспособљеност запослених у моделирању волатилности. На основу овога може се закључити да ће налазе из ове дисертације моћи да користе менаџери ризика у осигуравајућим компанијама у циљу унапређење система за управљање ризицима и моделирање волатилности.

Допринос дисертације огледаће се и у развоју новог модела за процену тржишног ризика, који ће бити тестиран и прилагођен специфичним карактеристикама оптималних портфолија са тржишта у настајању.

Први део

РЕГУЛАТИВА ЗА ПРОЦЕНУ ТРЖИШНИХ РИЗИКА У ОСИГУРАЊУ

1. Ризик - суштина осигурања као делатности

Осигурање представља посебан финансијски сектор у оквиру терцијалне делатности, који омогућава да се акумулирају финансијске могућности како би се обезбедио континуиран процес друштвене репродукције надокнађивањем губитака физичким и правним лицима, који настају услед настанка штетних догађаја (David, 2015). Као такво, осигурање се манифестује у спровођењу комерцијално-предузетничких активности, карактеристичних за тржишну привреду, у стварању могућности за безризичан улазак у тржишне односе и спречавању одговарајућих ризика.

С аспекта националне економије, осигурање представља важан сектор привреде, будући да омогућава решавање читавог низа социо-економских питања, почев од формирања система гаранција за физичка и правна лица до јачања инвестиционог потенцијала на националном и међународном нивоу. Наиме, значај осигурања огледа се у његовој способности да обезбеди континуитет друштвене репродукције, у случају негативних последица од елементарних непогода, акцидентата, природних и друштвених катастрофа и других непредвиђених догађаја који могу довести до великих губитака имовине. Истовремено, игра важну улогу у гарантовању социјалне заштите становништва и стабилизација процеса улагања у привреду (Kobilzhonova, 2023). Поједини аутори, попут Malikov и Shennaev (2003), наводе да осигурање представља једну од најстаријих људски делатности, која датира још од развоја првобитних људских заједница. У примитивном заједницама, људи су стварали резерве хране како би се

осигурали и обезбедили од последица нежељених догађаја, као што су поплаве и суше, а које су доживљавали као проклетство богова. Управо ове резерве створене за надокнаду губитака, као последице догађаја који нису у вези са вољом човека, а које се једном речју могу описати као неочекивани и непредвидиви, представљају основни принцип пословања модерног осигурања³. Сам термин осигурање води порекло од латинске речи *securus* односно *sine cura* што у преводу значи без бриге, односно безбрижан. И у другим језицима постоје изрази са сличним значењем. Тако у енглеском језику користи се израз *insurance* (*in* – у (*inside*) - унутар и *sure* (нада, поуздан) – *in safe hands* - у сигурним рукама), што се имплицира да је осигурани субјект поуздано заштићен и да нема разлога за бригу. Слично је и у другим језицима *Versicherung* на немачком, *assicurazione* на италијанском или *seguro* на шпанском. Дакле, на свим језицима сам израз осигурање упућује на опрез, сигурност и заштиту.

Са економског аспекта, суштина осигурања, као привредне делатности, огледа се у удруживању великог броја осигураника који су изложени истом или сличном ризику са циљем да заједно поднесу штету, а која ће објективно посматрано погодити само неке од њих. Поетскије речено, разлог постојања осигурања јесте да повезивање економских агената кроз мрежу солидарности у којима срећни осигураници компензују несрећнике, чиме се елиминишу идиосинкратски ризици (Bobtcheff et al., 2016). Другим речима, суштина осигурања лежи у преузимању ризика од осигураника и његовом преносу на осигуравача. Отуда, у бити пословања осигуравајућих друштва јесте преузимање ризика од других уз обавезу да се по основу уговора о осигурању осигуранику, односно имаоцу полисе осигурања надокнади штета, односно исплати сума осигурања у случају настанка нежељеног догађаја, а за шта осигуравач наплаћује од осигураника премију осигурања, као надокнаду за преузети ризик. Важно је истаћи да се закључивањем уговора о осигурању не умањују вероватноћа настанка нежељеног догађаја, тј. ризик, већ се само ублажава штета, односно финансијски губитак који ће осигураник претрпети у случају настанака нежељеног догађаја. Отуда је ризик *condition sine qua non* неизвесности осигурања (Станичић & Радивојевић, 2021), што значи да закључивање уговора о осигурању има смисла ако и само ако у тренутку његовог закључивања непознат одговор

³ Први материјални трагови о осигурању могу се наћи у законима Хамурабија, који је владао Вавилоном у периоду од 1792-1750. године пре нове ере. Према Хамурабијевом закону ако је имовина неког члана каравана била изгубљена, украдена или опљачкана од стране гусара, ту штету би надокнађивали чланови каравана (Ivanov, 2004).

на питање да ли ће и када ће се нежељени догађај десити, као и колики износ штете осигуравач мора да надокнади у случају настанка нежељеног догађаја.

Претходно речно имплицира да, у контексту осигурања, ризик⁴ се може третирати и у категорији вероватноће настанка нежељеног исхода, коју је на основу сета расположивих информација могуће прецизно утврдити, али и у категорији могућих одступања између стварних и очекиваних економских исхода (Brow & Gottlieb, 2001). У првом случају ризик се односи на несигурност појаве исхода неког догађаја, а која се математички може квантификовати. У другом случају може се поистоветити са волатилношћу штета у осигурању.

Међутим, независно од начина интерпретације ризика у осигурању, неодређеност исхода кључна је одредница у дефинисању ризика, јер када је исход неодређен постоји могућност да неки од њих могу бити штетни и стога их треба посебно нагласити. Отуда, у најопштијем смисли ризик представља стање у којем постоји могућност неповољног одступања од жељеног исхода који се очекује или коме се нада, при чему степен ризика се односи на вероватноћу настанка неког догађаја (Alam et al., 2022). То је мера тачности са којом се може предвидети исход случајног догађаја. Отуда, ризик представља објективну категорију. За разлику од неизвесности⁵ чији се исходе не може предвидети, већ се може само интуитивно наслутити, при чему се не зна да ли ће се, нити када ће се нежељени догађај појавити, ризик се односи на несигурност појаве нежељеног исхода догађаја која се математички може изразити. Отуда, за разлику од неизвесности као интуитивне категорије, ризик представља објективну категорију.

Кључна одредница у разумевању ризика огледа се у могућности да се квантификује вероватноћа настанка нежељеног догађаја. Наиме, с обзиром на то да је вероватноћа резултат појављивања неког догађаја, то она мора да утиче на исходе тог догађаја (Дончић. 2020). Даље, то имплицира, да се вероватноће појаве одређених исхода

⁴ Људи изражавају ризик на различите начине. За неке је то шанса или могућност губитка; за друге, то могу бити неизвесне ситуације или одступања или оно што статистичари називају дисперзијама од очекивања. Иако различити аутори различито дефинишу ризик, кључна одредница у његовом поимању укључује изложеност неповољним, нежељеним ситуацијама, при чему је неодређеност и несигурност исхода основни критеријум за дефинисање ризичне ситуације. Овако схваћен ризик представља саставни део финансијског пословања данас (Dimitrova et al., 2021).

⁵ Alam et al., (2022) неизвесност дефинишу као стање ума обележено сумњом и недостатком знања о будућим догађајима. Она постоји када доносиоци одлука не поседују информације о могућим исходима неког догађаја и њиховим потенцијалним последицама.

неког догађаја могу искористити за предвиђање појава будућих исхода тог догађаја. Другим речима, она се може искористи за утврђивање дистрибуције вероватноће појаве исхода неког догађаја. Са друге стране, на основу те дистрибуције могуће је утврдити шансу настанка нежељеног исхода одређеног догађаја. На тај начин смањује се неизвесност, а квантификује ризик.

Отуда, када постоји сет информација о вероватноћама појављивања исхода неког догађаја, онда се неизвесност поистовећује са ризиком. У том контексту ризик представља неизвесност коју је могуће исказати у категорији вероватноће настанка одређеног исхода неког догађаја. Другим речима, ризик представља неизвесност будућег догађаја, која је одређена скупом свих могућих исхода одређеног догађаја (Ω) и вероватноћом, односно шансом њиховог појављивања (P) (Младеновић & Петровић, 2003),⁶ при чему већа вероватноћа појављивања нежељеног исхода значи да је догађај ризичнији. Отуда, вероватноћа настанка неког догађаја представља меру тачности са којом се може предвидети исход случајног догађаја. Другим речима, она изражава степен ризичности.

Претходно речено, математички може се изразити на следећи начин:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (1)$$

при чему су:

$F_X(x)$ - функција вероватноће случајне варијабле

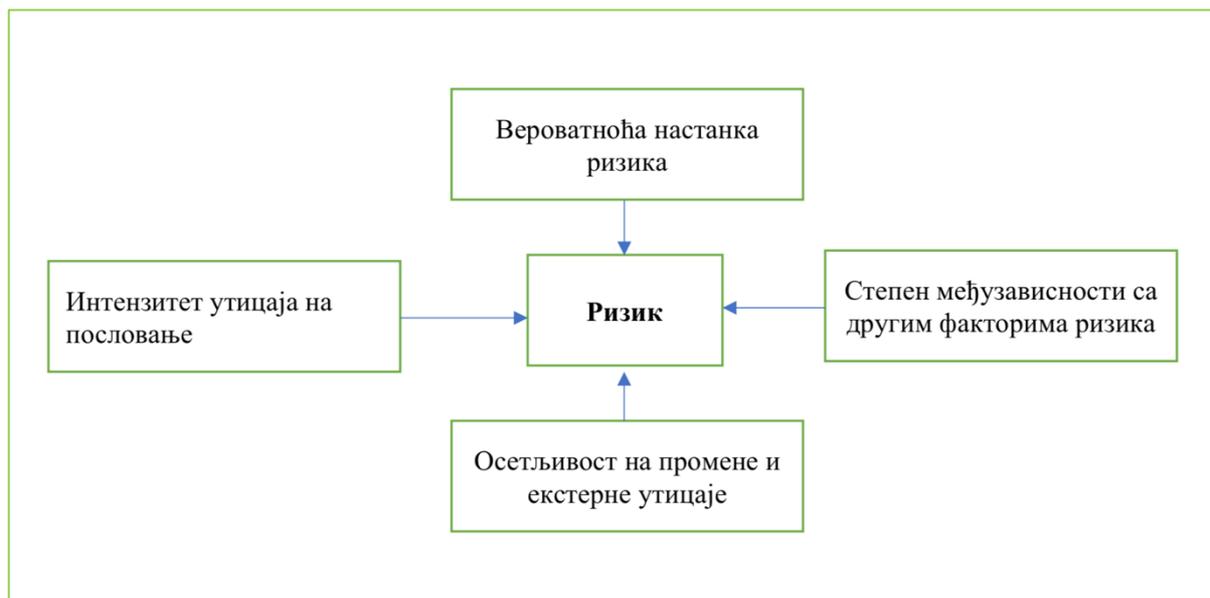
$(X \leq x)$ - вероватноћа да ће вредност случајне варијабле (X) бити мање или једнака датој вредности (x)

Израз (1) сугерише да се ризик настанка нежељеног догађаја у осигурању може извести из дистрибуције вероватноће настанака тог догађаја. Будући да у стручним и академским круговима доминира став да се ризик у осигурању поистовећује са вероватноћом настанка штете, израз (1) сугерише да се ризик у осигурању може извести из дистрибуције величина штете, при чему величину штете треба посматрати као случајну варијаблу. Третирање ризика на овај начин има низ значајних импликација, како у контексту развоја модела за процену ризика у осигурању, тако и у контексту дефинисања регулативе за процену и управљање финансијским ризицима у осигурању.

⁶ Младеновић, З, Петровић, П., (2003), Увод у економетрију, Економски факултет у Београду, Београд, стр. 1.

Будући да је уобичајено да се ризик у осигурању поистовећује са величином потенцијалне штете коју треба надокнадити осигуранику, то се ризик у осигурању мора посматрати и у контексту јачине утицаја штете на техничке резерве и уопште на успех пословања осигуравајућег друштва. Поред тога, како је волатилност величине штете детерминисана утицајем бројних фактора ризика, као и степена њихове условљености и међузависности, то се ризик у осигурању мора третирати и у контексту степена независности између фактора ризика. Из тог разлога последњих година у управљању ризицима у финансијским институцијама доминира концепт ризика који почива на четири димензије ризика: 1) вероватноћи појављивања нежељеног догађаја; 2) интензитет његовог утицаја; 3) условљеност и међузависност између фактора ризика; 4) степен сензитивности ризика на промене у окружењу што се графички може представити као на слици 1.

Слика 1. Концепт ризика финансијских институција



Адаптирано према: (Merna, T., Thani, F., (2005). *Corporate Risk Management*, John Wiley and Sons, Chichester, p. 10.)

Према овом концепту ризик коме су изложене финансијске институције детерминисан је вероватноћом настанка промена у факторима ризика, њиховом међусобном условљеношћу, као и сензитивношћу позиција финансијских институција на промене у факторима ризика. Истовремено одражава идеју да је редуковање неизвесности функција сета расположивих информација везаних за вероватноћу настанака нежељеног догађаја, односно промене у факторима ризика и њиховог

симултаног утицаја на негативне консеквенце које потенцијални губитак генерише на будуће новчане токове финансијске институције. Инсистирање концепта сензитивности позиција финансијске институције на промене у факторима ризика, као и познавању међусобне корелисаности представља директну екстензију *Markowitz-овг mean-variance* модела⁷, чије појављивање означава развој савремене портфолио теорије. Наиме, поред ризика (σ) и приноса (r) сваке индивидуалне позиције, модел у разматрање уводи и корелацију (σ_{ij}) - коваријансу између позиција. Увођење у разматрање ове варијабле, финансијске институције добиле су могућност да формирају портфолије који ће им донети максималне приносе за дате нивое ризика, односно обротно, да формирају портфолије који ће бити изложени минималном ризику за дефинисани ниво приноса. Важно је истаћи да се ризик представљен кроз овај модел у литератури означава као ризик у ужем смислу јер се односи на финансијски ризик, који је првенствено иманентан финансијским институцијама.

За разлику од приноса портфолија⁸, који представља збир пондерисаних просека приноса индивидуалних актива (позиција) портфолија осигуравајућих друштава, што се математички може представити следећим изразом:

$$r_p = \sum_{i=1}^n X_i r_i \quad (2)$$

при чему су:

r_p - принос портфолија осигуравајућег друштва

r_i - приноса i -те активе (позиције) из портфолија

X_i - учешће i -те активе (позиције) у портфолију

n - укупан број актива (позиција) у портфолију

⁷ Harry Markowitz је 1952. године у часопису *Journal of Finance* објавио рад под називом "*Portfolio Selection*". У раду је представио модел за израчунавање варијансе приноса портфолија. Утврдио је да варијанса очекиваног приноса под одређеним условима представља адекватну меру ризика приноса портфолија.

⁸ Будући да је принос портфолија неизвестан у неком тренутку (t_1) у будућности, то је уобичајено да се говори у терминима очекиваног приноса $E(r)$.

уз напомену да свакој активи одговара пондер који представља пропорцију учешћа одређене aktive у вредности портфолија,⁹ модел наглашава чињеницу да ризик портфолија осигуравајућих друштава није прост збир ризика његових позиција (актива из његовог састава), већ консеквенца корелисаности и сензитивности актива (позиција) на промене у различитим факторима ризика. Отуда, са математичког аспекта изражавање ризика портфолија знатно је сложеније у односу на принос портфолија, јер поред поднера захтева познавање сензитивности актива на промене фактора ризика и њихове међусобне повезаности и корелисаности. Исказан у категорији одступања од очекиваног приноса око очекиване средње вредности тј. кроз варијансу, ризик портфолија осигуравајућег друштва математички се може исказати на следећи начин:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (3)$$

при чему су:

σ_p^2 - варијанса портфолија

X_i/X_j - учешће *i*-те /*j*-те aktive у портфолију

n - укупан број актива (позиција) у портфолију

σ_{ij} - коваријанса приноса између *i*-те и *j*-те aktive у саставу портфолија (*Cov_{ij}*)

Третирање финансијског ризика коме су изложена осигуравајућа друштва на овај начин омогућава његово изражавање као случајне варијабле. Импликације овога су како је већ истакнуто на претходним странама, далекосежне, јер омогућавају да се принос позиција и портфолија која осигуравајућа друштва поседују, односно промене у магнитуди штета које је потребно исплатити осигуранику, третирају као случајна варијабла која следи Brown-ово кретање (енгл. *Brown motion*), односно *Winner*-ов процес. Третирање приноса портфолија, односно магнитуде штете, на овакав начин омогућава да се на једноставан начин опише дистрибуција вероватноће њиховог

⁹ Сума поднера износи 1 или 100%, при чему пондери могу да буду позитивни или негативни. У случају када осигуравајуће друштво поседује одређену активу, тј. има отворену позицију у њој, тада је пондер позитиван и у стручним круговима та ситуација назива се дуга позиција (*long position*). У супротном када не поседује одређену активу коју жели да прода, каже се са има кратку позицију (енгл. *short selling*). У тој ситуацији ради се о негативном пондеру.

појављивања. Другим речима, њихово третирање као случајне варијабле омогућава да се дистрибуцији промена њихових вредности припише одговарајућа дистрибуција вероватноће (Радивојевић, 2014), што омогућава директно утврђивање ризика на основу дистрибуције промена вредности портфолија, односно штета. Под претпоставком да те промене у вредностима следе мартингали процес, квантификовање ризика значајно се поједностављује. Наиме, прихватање ове претпоставке еквивалентно је прихватању чињенице да промене у вредности портфолија осигуравајућих друштава, односно штета, представљају независне једне од других исходе, као и чињенице да је читав процес временски-инваријабилан. У контексту осигурања ово значи прихватање чињенице да се промене у вредности портфолија, односно штета не могу предвидети на основу прошлих промена. Другим речима, ово значи да је очекивана вредност у неком тренутку у будућности (t), условљена расположивим информацијама у тренутку ($t-1$), једнака његовој вредности у тренутку ($t-1$) (Tavella, 2002).¹⁰ Још једноставније речено, најбоља процена будућих промена вредности портфолија, односно штета јесте очекивана вредност која је једнака нула. Иначе у финансијској теорији, претходно речено формулисано је кроз хипотезу о ефикасном тржишту, која гласи да је тржиште ефикасно уколико финансијску активу вреднује по цени која одражава све релевантне информације везане за ту активу. Другим речима, тржиште је ефикасно ако и само ако цене финансијске активе одражавају све расположиве информације везане за те активе. Дакле, на тржишту не постоје прецењена или потцењена актива, већ је њихова текућа вредност као рефлексија свих доступних информација на тржишту једнака њиховој очекиваној вредности. Ово истовремено значи да се будуће промене у вредности портфолија, односно штета (као негативне промене вредности портфолија) не могу предвидети на основу историјских података. Математички ово се може исказати на следећи начин:

$$E(P_{t+1}, | P_t, P_{t-1}, \dots, P_0) = P_t \quad (4)$$

при чему су:

$E(\cdot)$ - очекивање

P - вредност портфолија, односно вредност штете

¹⁰ Tavella, D., (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing: An Introduction to Computational Finance*, John Wiley and Sons, Chichester, p. 14.

Израз (4) сугерише да очекивана промена у вредности портфолија, односно штета, у тренутку (t) једнака је претходној промени, имајући у виду све историјске промене.

Импликација прихватања описане претпоставке у контексту процене ризика у осигурању јесте у једноставности квантификовања ризика, јер уколико су промене независне једна од друге у дугом року, према централној граничној теореме оне ће да следе нормалну дистрибуцију. Како је за описивање нормалне дистрибуције потребно познавати само два параметра, средину и варијансу дистрибуције, то квантификовање ризика коме су изложена осигуравајућа друштва своди се на потребу утврђивања ова два параметра.

Претходно речено, још 1900. године представљено је кроз модел формирања цена активе на основу модела случајног хода¹¹ (енгл. *random walk*), што се математички може представити применом следећег израза:

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \sigma \varepsilon_t \quad (5)$$

односно,

$$P_t - P_{t-1} = \mu + \sigma \varepsilon_t \quad (6)$$

при чему су:

P_t - текућа вредност активе

P_{t-1} - вредност активе из претходног периода

μ - константа

σ - варијанса промене вредности активе

ε_t - нормално дистрибуирана случајна варијабла (иновација)

Модел сугерише да вредност активе (P_t) у садашњем тренутку (t) зависи од њених прошлих вредности (P_{t-1}), фиксног параметра који описује средину дистрибуције (μ) и случајне варијабле (ε_t) за коју се претпоставља да следи идентичну и независну нормалну

¹¹ Модел случајног хода је математички концепт који описује процес у којем се позиција "честице" (или учесника) променљивим и насумичним корацима одређује у односу на претходну позицију. Овај модел се широко користи у различитим областима, попут статистике, финансија, физике и теорије игара. У области финансија, случајни ход се често користи за моделирање цена акција и других финансијских инструмената. Теорија случајног хода подразумева да се цене акција крећу насумично и да не постоји сигуран модел који би могао предвидети будуће цене на основу прошлости. Ово је основа за такозвани "Efficient Market Hypothesis" (ЕМН), који подразумева да све доступне информације о тржишту већ одражавају цене.

дистрибуцију, односно да важи $\varepsilon_t \sim IID N(0,1)^{12}$. Прихватањем претпоставке да (ε_t) следи $\varepsilon_t \sim IID N(0,1)$ значи прихватање претпоставке да промене вредности следе нормалну дистрибуцију, са средином нула и варијансом један (идентично дистрибуиране) и да нису међусобно аутокорелисане (независно дистрибуиране). Дакле, модел претпоставља да се варијанса не мења током времена, већ да је константна. Другим речима, ово значи да вредност варијансе не зависи од периода узорковања. У статистици ова особина дистрибуције позната је као хомоскедастичност.

Нажалост бројна емпиријска истраживања показују да промене вредности портфолија односно серије приноса финансијске активе не следе IID и нормалну расподелу (Al Janabi et al., 2017; BenSaïda et al., 2018; Eling & Jung, 2018; Arreola Hernandez, & Al Janabi, 2020; González-Sánchez, 2021; Chung & Sester, 2024; Mesquita, et al. 2024; Nordström, 2024; Qiu, 2024). Даље, емпиријска истраживања указују да флукуације у серији приноса финансијске активе не прате стохастичке процесе, који се једноставно могу представити моделом случајног хода, коришћењем ARCH/GARCH модела, као и линеарних ARMA или ARIMA модела (Rossignolo et al., 2012. 2013; Zikovic & Filer, 2103; Cui et al., 2013; Louzis et al., 2014; Del Brio et al., 2014; Radivojevic et al. 2016, 2017, 2019, 2020). Тачније, истраживања сугеришу да дистрибуције имају дебеле репове, што значи да се екстремне промене дешавају чешће него што се то предвиђа нормалном дистрибуцијом, односно да има виши врх и тањи струк (енгл. *thin waist*). Другим речима, емпиријска истраживања сугерише да промене вредности портфолија и активе следе лептокуртичну расподелу. Такође, истраживања показују присуство ефекта, леверица, појаве да негативне промене у вредности портфолија и активе имају већи утицај на магнитуду (волатилност) промена него позитивне. Ово доводи до асиметричне дистрибуције. Како варијанса као мера ризика претпоставља да су и позитивне и негативне промене у вредности активе подједнаке, присуство леверица утиче на то да ова мера ризика не може адекватно да кооптира асиметрију. Поред леверица, емпиријска истраживања показују да се промене групишу у кластере тј. велике промене следе велике промене, односно мале следе мале промене. Груписање промена на кластере волатилности последица је аутокорелације између промена, што сугерише да промене нису независне једна од друге, већ да су корелисане. Ово утиче на то да ни варијанса није константна током времена, већ да се мења током времена. У статистици ово је познато као хетероскедастичност. Појава аутокорелације и хетероскедастичности значи да

¹² Израз $\varepsilon_t \sim IID N(0,1)$ односи се на бели шум.

претпоставка о IID јесте нарушена. У наставку дисертације детаљно ће бити објашњене импликације нарушавања ове претпоставке с аспекта управљања и ефикасности модела за процену ризика.

1.1. Врсте ризика у осигурању као делатности

Сложеност и специфичност осигурања, као привредне делатности, утиче на то да листа ризика коме су изложена осигуравајућа друштва буде непрегледна, што отежава посао да се направи прецизна, јасна и свеобухватна подела ризика. Поред тога, повезаност осигурања са осталим делатностима, утиче и на немогућност прецизног идентификовања свих фактора ризика коме су изложена осигуравајућа друштва. Овоме треба додати и чињеницу да непрестано усавршавање механизма трансфера ризика (енгл. *risk shifting*), утиче на то да се листа фактора ризика коме су изложена осигуравајућа друштва из дана у дан повећава (Briys & De Varenne, 2001). Проналажење нових, софистициранијих начина којима учесници на реалном и финансијском тржишту настоје да заштите своја улагања од нежељених исхода, али и алтернативе за улагање у виду појаве нових класа активе, додатно доприносе повећању листе фактора ризика.

Последица овога, између осталог јесте да у стручним и академским круговима не постоји општа сагласност око критеријума према коме треба вршити поделу ризика коме су изложена осигуравајућа друштва. Тако поједини аутори, попут Rejda (2011) истичу да ризике којима су изложена осигуравајућа друштва треба поделити према начину њиховог настанка. Отуда, разликује *чисте ризике*, који настају из основне активност осигуравајућих друштава тј. осигурање од штета трећих лица и *шпекулативне ризике*, који су повезани са активностима које не спадају у основе активности осигуравајућих друштава. Приви ризици везани су за материјалну надокнаду штета као последице настанка осигураног случаја, док *шпекулативни ризици* произилазе из волатилности активе у коју осигуравајућа друштва врше улагања. Сличан критеријум за поделу ризика примењује и Међународно удружење супервизора осигурања (енгл. *International Association of Insurance Supervisors – IAIS*). Међутим, оно све ризике којима су изложена осигуравајућа друштва деле у *техничке ризике*, то су ризици који настају из актуарских обрачуна премија осигурања и техничких резерви, *инвестиционе ризике* који произилазе из инвестиционих активности друштва, а која су мотивисана остваривањем шпекулативне зараде, те су по природи ови ризици идентични оним ризицима које Rejda

(2011) назива *шпекулативним ризицима* и *нетехничке ризике* у које спадају сви остали ризици који се не могу сврстати у прве две категорије.

Аутори попут Alam et al., (2022), као Vaughan и Vaughan (1995) истичу да као критеријум за поделу ризика треба примењивати начин испољавања ризика. Оправдање за ово проналазе у чињеници да се последице неких догађаја могу прецизно измерити, док других не могу. Тако, они праве разлику између финансијских и нефинансијских ризика. Први се односе на финансијске губитке. То су ризици чије се последице могу мерити у монетарном смислу. Све остале ризике сврставају у нефинансијске ризике. То су сви ризици чије последице могу и не морају имати финансијске импликације, али које је тешко прецизно изразити у новцу. Важно је направити дистинкцију између финансијских ризика према Alam et al., (2022) у односу на ризике у ужем смислу (тзв. финансијским ризицима) према финансијској теорији. Како је истакнуто у претходном делу, према финансијској теорији финансијски ризик или ризик у ужем смислу односи се на волатилност приноса, која доводи до неочекиваних губитака у новчаним токовима (Радивојевић, 2014). Овако дефинисан финансијски ризик, пре је повезан са шпекулативним пословима осигуравајућих друштава, него са основном делатношћу. Другим речима, пре је везан за управљање инвестицијама и имовином друштава, него за преузимање ризика од треће стране. Други аутори, попут Кочовић и сарадници (2011) као критеријум наводе место и време настанка ризика. Тако праве разлику између објективних и субјективних ризика, односно константних и варијабилних ризика. Van Horne (2002) као критеријум наводи нивое на којима се манифестују последице изложености ризику. Отуда, он диференцира ризике у осигурању на посебне и системске ризике. У прву врсту спадају ризици који погађају само поједина осигуравајућа друштва, док ефекти системских ризика имају последице по цео сектор осигурања.

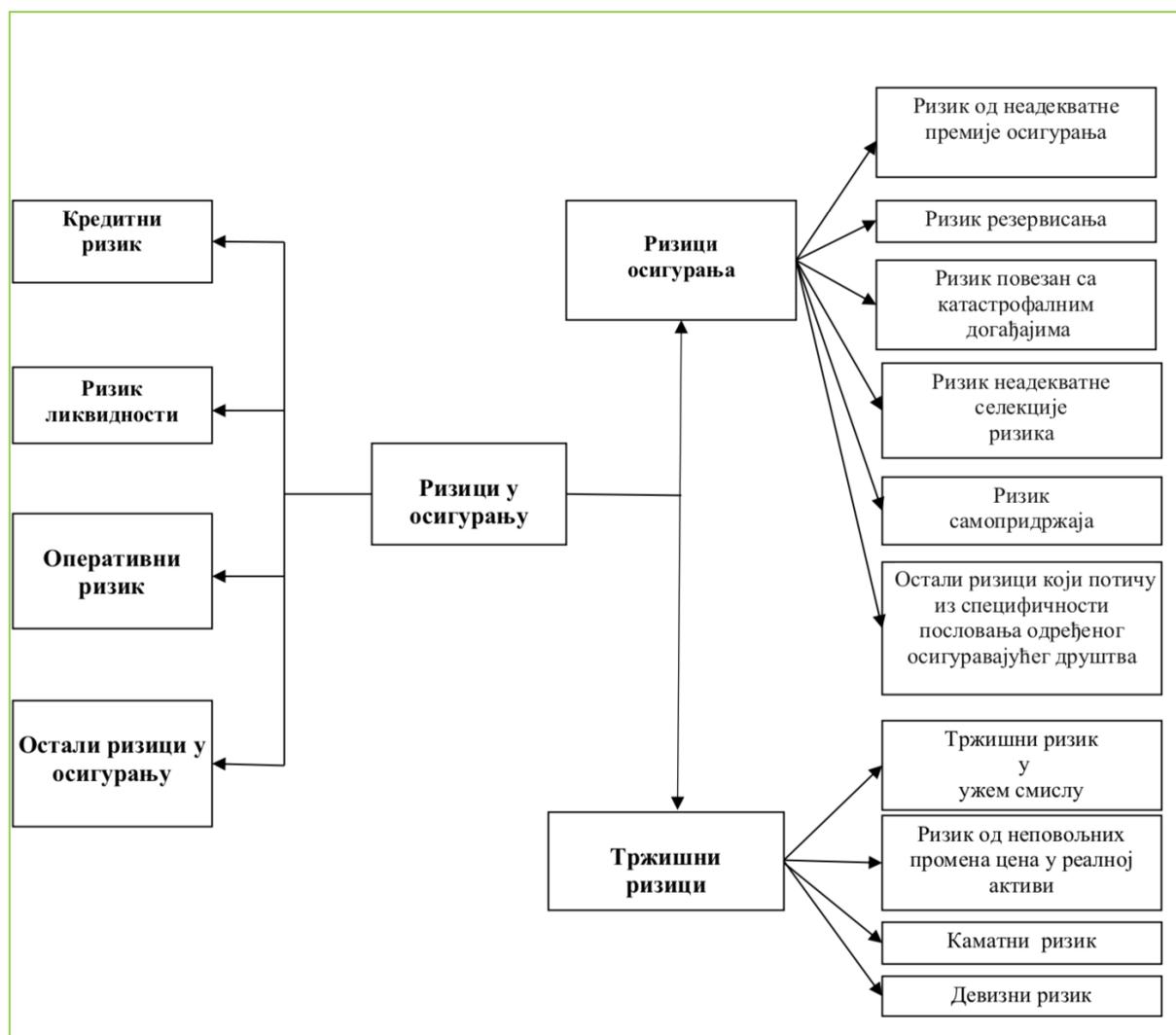
Сложеност осигурања и бројност ризика утичу на то да је даље могуће наводити још много критеријума за поделу ризика којима су изложена осигуравајућа друштва. Тако уколико се посматра само једно осигуравајуће друштво, односно ризици који су специфични само одређеном друштву, оно што Van Horne (2002) описује као посебне ризике, они се даље могу рашчланити са актуарског аспекта. Тако је могуће направити разлику између ризика које је могуће прецизно квантификовати и које није могуће прецизно мерити. Први би били ризици оцене премије осигурања, док би се други односили на ризике који произилазе из процеса одлучивања, пословних процеса и сл.

Дакле, непостојање јединствених критеријума за поделу ризика у осигурању јасна су последица сложености и бројности ризика. Међутим, сложеност ризика у осигурању која проистиче, како из њихове непредвидивости и варијабилности, тако и из стохастичке природе условљености и међузависности између фактора ризика, са једне стране осигуравајућим друштвима поставља изазове у управљању и процени ових ризика. Са друге стране, намеће потребу да се направи јасна подела која ће уважити различите критеријуме и истовремено обезбедити јасну дистинкцију између различитих врста ризика како би се обезбедила ефикасна класификација ризика у осигурању. Истовремено таква подела ризика мора да уважава холистички приступ управљања ризицима у осигурању, као и чињеницу да савремени приступ управљању ризицима у осигурању, фокус ставља на очување солвентности осигуравача. Уважавањем овакве логике, подела ризика која највише одговара овом захтеву јесте подела ризика на *ризике осигурања*, *кредитне ризике*, *тржишне ризике* и *оперативне ризике* (IAA, 2004). Оваква подела ризика компатибилна је са тзв. билансним приступом поделе ризика, према коме ризици којима су изложена осигуравајућа друштва деле се на: ризике обавеза, имовине и оперативне ризике (Dhaene et al., 2004). Ризици обавеза произилазе из активности преузимања ризика, тржишни из инвестиционих активности, док у оперативне ризике убрајају се сви остали ризици који се не могу сврстати у прве две врсте.

У наставку ове дисертације фокус је на подели ризика која уважава холистички приступ и фокус ставља на солвентност осигуравача, уз истовремено уважавање чињенице да је немогуће све остале ризике свести под оперативне ризике, јер оперативни ризици имају јасну одређеност, представљени од стране Станчића и Радивојевића (2021). Оваква подела представља резултат уважавања претходно поменутих подела, а пре свега поделе ризика представљене од остале Међународног удружења актуара (енгл. *International Actuarial Association - IAA*) представљене 2004. године. Истовремено, подела је компатибилна са Директивом солвентности II и у контексту ове дисертације јасно диференцира ризик који је у фокусу ове дисертације у односу на остале ризике коме су изложена осигуравајућа друштва.

Схема поделе ризика према овај подели приказана је на слици 2.

Слика 2. Подела ризика у осигурању



Извор: Аутор

Дакле, према овом приступу сви ризици којима су изложена осигуравајућа друштва деле се на *ризике осигурања* (енгл. *underwriting risk*), *тржишне ризике*, *кредитни ризик*, *ризик ликвидности*, *оперативни ризик* и *остале ризике*.

Ризик осигурања односи се на могућност да осигуравајуће друштво претрпи губитке због неправилне процене ризика који се преузимају. Ризик осигурања укључује све аспекте повезане са проценом поверљивости података о осигураницима, предвидом потенцијалних губитака и утврђивањем адекватне премије. Отуда се овај ризик даље може рашчланити на: 1) *ризик од неадекватне премије осигурања* – ризик који је повезан са непостизањем адекватне равнотеже између премије која се наплаћују и вероватноће да ће осигураник поднети захтев и вероватне величине тог потраживања. Другим речима, то је ризик који произилази из погрешно утврђене висине премије осигурања у односу

на вероватноћу да ће осигураник поднети одштетни захтев, при чему нижа вероватноћа и вредност тог потраживања значи и потребу за нижом премијом осигурања; 2) *ризик резервисања* – односи се на ризик да техничке резерве које се користи за покриће потенцијалног губитака осигураног ризика не буду довољне; 3) ризик повезан са катастрофалним догађајима – односи се на ризик да услед катастрофалног догађаја велики број осигураника истовремено поднесе одштетне захтеве што може да има велике финансијске последице по осигуравајуће друштво јер сума одштетних захтева превазилази висину планираних средстава за покриће те врсте ризика; 4) ризик неадекватне селекције ризика – односи се на ризик од погрешне процене ризика који се преузима од осигураника;¹³ 5) ризик самопридржаја – односи се на ризик преузимања ризика већих у односу на износ самопридржаја. Другим речима, то је ризик повезан са одлуком да се одређени вишкови ризика не пренесу на реосигурање, већ да се задрже; 6) остали ризици који потичу из специфичности пословања одређеног осигуравајућег друштва – односе се на све остале ризике који произилазе из природе послова, начина на који се они обављају и како се са њима управља у одређеном осигуравајућем друштву.

Тржишни ризици су финансијски ризици који произилазе из негативних одступања у вредности портфолија осигуравајућег друштва услед неповољних промена у вредности актива које улазе у састав портфолија, при чему неповољне промене могу бити последица утицаја егзогених (систематских) и ендогених (несистематских) фактора ризика (Kokoris et al., 2020). За овај ризик специфично је да постоји само у периоду док осигуравајуће друштво има отворене позиције у активама. То значи да су осигуравајућа друштва изложена овом ризику само у периоду који им је потребан да ликвидирају ту активу. Како осигуравајућа друштва могу своје техничке резерве да улажу у хартије од вредности и реалну имовину, чије промене вредности су под утицајем промена у њиховој цени, каматним стопама и девизном курсу, то се у осигурању диференцирају четири врсте тржишног ризика: 1) тржишни ризик у ужем смислу или ризик волатилности – односи се на негативне промене вредности портфолија осигуравајућег друштва услед промена у вредности хартија од вредности; 2) каматни ризик – односи се на ризик од негативне промене вредности портфолија осигуравајућег друштва услед неповољних

¹³ По правилу таква селекција у осигурању позната је као *неповољна селекција* и постоји када је осигураник боље информисан о ризику и вероватноћи настанака губитка у односу на осигуравача. У теорији осигурања оваква ситуација представљена је кроз концепт *неповољне селекције* (Rothschild & Stiglitz, 1976).

кретања у каматним стопама, будући да су вредност дужничких хартија од вредности и ниво каматних стопа у инверзном односу; 3) девизни ризик – односи се на ризик од негативне промене вредности портфолија осигуравајућег друштва услед неповољног кретања девизног курса и 4) ризик од неповољних промена цена у реалној активи – односи се на негативне промене вредности портфолија осигуравајућег друштва услед негативних промена у цени реалне активе.

Када се говори о тржишном ризику важно је истаћи његову специфичност да се може поделити на две компоненте: систематски ризик који произилази из карактеристика реалног окружења и који подједнако утиче на сва осигуравајућа друштва и на несистематски ризик, који је иманентан портфолију одређеног осигуравајућег друштва. Тржиште награђује само за преузети системски ризик, јер је ефикасном диверсификацијом портфолија могуће у потпуности елиминисати несистемски ризик. Успех у овоме одређен је способношћу менаџмента осигуравајућег друштва да изврши ефикасну диверсификацију пласмана својих улагања, иако поједини аутори истичу да се ефикасна диверсификација може спровести насумичним избором 15 до 20 хартија од вредности (Elton & Gruber, 1995). Тачно је да се насумичним избором хартија од вредности значајно може редуковати тржишни ризик портфолија, међутим са повећањем броја активе у саставу портфолија опада значај изложености тржишном ризику појединачних актива и расте значај њихове корелисаности. Из тог разлога *Markowitz-ев mean-variance* модел представља значајан инструмент у формирању оптималног портфолија јер уважава коваријансе између сваког пара активе из портфолија осигуравајућег друштва.

Такође, када се говори о тржишном ризику важно је истаћи да иако се најлакше може идентификовати и квантификовати јер се промене вредности актива свакодневно бележе и јавно су доступне, ипак његово предвиђање и моделирање није једноставно. То је из разлога што дистрибуције промена вредности ових актива показују одређене особине, о којима је већ било речи: хетероскедастичност и одступање од IID. Другим речима, промене вредности (волатилности) имају тенденцију да се групишу у кластере високе и ниске варијабилности. Ово значи да велике промене у вредностима актива следе велике, а да мале следе мале промене. Последица овога јесте постојање аутокорелације у серији приноса актива и портфолија осигуравајућих друштава. Поједини аутори ово објашњавају чињеницом да финансијска тржишта берзо реагују на сваку нову информацију која се појави на тржишту, на тај начин што купују или продају одређену

активу. Како ове одлуке утичу на друге учеснике да и они исте одлуке доносе, последица тога је да долази до даљих промена у вредности актива. Како након бурних реакција долази до периода смиривања, то се и волатилност смањује, све до појаве неке нове информације.

Кредитни ризик представља ризик од неизвршења обавеза и промене кредитног квалитета издаваоца активе, коју осигуравајуће друштво поседује у свом саставу (Borda Bossana, 2024). Другим речима, то је ризик да друга страна неће бити у могућности да изврши плаћања, односно да измири обавезе према осигуравајућем друштву услед неликвидности, делимично или у целости, а у року доспећа. Последица ове врсте ризика за осигуравајуће друштво огледа се у немогућности наплате својих потраживања у року доспећа. Ова потраживања не морају потицати само од наплате приноса на инвестициона средства или самих наплата инвестиционих средстава, већ могу потицати и из других облигационих односа као што су потраживања од закупа, од реосигуравања, саосигурања и ретроцесије. Ова врста ризика у осигурању позната је као ризик од неиспуњена обавеза друге стране.

Ризик ликвидности односи се на немогућност осигуравајућег друштва да повуче довољно ликвидних средстава, без значајних трансакционих трошкова, да измири своје обавезе када доспеју, што за последицу има негативне ефекте на финансијски резултат и капитал осигуравајућег друштва (Kiptoo et al., 2021). Другим речима, ризик ликвидности односи се на немогућност осигуравајућег друштва, да своју активу конвертује у готовину без већих губитака. Овако дефинисан ризик ликвидности у ствари представља ризик да се актива утржи на тржишту значајно испод њене тржишне вредности, што за последицу има ерозију структуре и износа капитала и очување кредитног бонитета.

Оперативни ризик односи се на све ризике повезане са неадекватним спровођењем пословних процеса у осигуравајућем друштву. Отуда, обухвата широку лепезу ризика који настају као последица неадекватног поступања запослених, неадекватних и погрешних процедура или неадекватно спроведених процедура и правила која се тичу пословања осигуравајућег друштва. Под оперативним ризиком у осигурању спадају и ризици услед неадекватне инфраструктуре, технолошки ризици који су повезани са неадекватном применом информатички решења, али и ризици екстремних догађаја, као што су изнуде, крађе, преваре, природне катастрофе и сл.

У остале ризике спадају сви ризици који се не могу класификовати у неку од горе наведених врста ризика. Најзначајнији такви ризици су ризик од губитка репутације

осигуравајућег друштва и ризик земље. Први је повезан са могућношћу да осигуравајуће друштво оствари губитке у приходима услед негативног мишљења јавног мњења о пословању друштва. Дакле, то је ризик који настаје као последица негативног публицитета. Дугорочна изложеност овом ризику за последицу има немогућност одржавања постојећих и успостављање нових пословних односа, што се у крајњој инстанци одражава на интелектуални капитал¹⁴ осигуравајућег друштва.

Ризик земље представља ризик од настанака економских и политичких криза у страниој земљи у којој осигуравајуће друштво послује, а чије се последице одражавају на капитал и финансијски резултат осигуравајућег друштва. Ризик земље обухвата широк спектар различитих подврста ризика, међу којима су најзначајнији ризик да земља не измирује своје обавезе, правни, политички и економски ризик.

1.2. Класификација ризика у осигурању као делатности

Анализирање и класификација ризика не само да помажу у оптимизацији финансијских ресурса, већ и у развоју адекватних стратегија за ублажавање и управљање потенцијалним губицима. Међутим, појам класификације ризика у осигурању има нешто другачију конотацију у односу на класификацију ризика у реалном сектору или код других финансијских институција. У случају осталих финансијских институција овај појам се поистовећује са поделом на врсте ризика. Међутим, у случају осигурања, класификација ризика се односи на поделу ризика према ризичности активе, односно према степену вероватноће настанка ризика.

Иначе, класификација ризика подразумева груписање ризика у различите класе које деле хомоген скуп карактеристика које омогућавају актуару да дискриминише разумну премију за ризик (Antonio & Valdez, 2012). Бројни аутори и теоретичари из области осигурања истичу да добра класификација ризика у осигурању представља срце сваког система осигурања (Abraham, 1985; Cummins et al., 2013; Crocke, & Snow, 2013;

¹⁴ Интелектуални капитал представља нематеријалне ресурсе и предности које осигуравајуће друштво може искористити за креирање вредности и конкурентске предности. Састоји се од људског, структурног и релационог капитала (Radivojevic et al., 2022).

Holzapfel, 2024; Eling, et al., 2024). Из тог разлога последњих година посебна пажња се поклања изградњи адекватне класификације ризика и процени њене валидности. Резултат тога јесте појава великог броја метода за класификацију ризика у осигурању. Међутим, различите методе класификације ризика могу да доведу до различитих подстицаја за редукцију ризика, различитих облика дистрибуције ризика и различитих облика заштите од тих ризика, што може да има моралних импликација, јер доводи до поделе осигураника према одређеним карактеристикама које утичу на степен њихове изложености ризику. Овакве поделе осигураника у одређеним случајевима доводе у питање етичност класификације. Ово је случај када се у разматрање узимају етичке и социјалне карактеристике осигураника и сл.

Међутим, независно од претходно реченог, адекватна класификација ризика у осигурању доводи до економски ефикаснијег понашања свих актера на тржишту осигурања. Ово се постиже на тај начин што подстиче све актере на тржишту да пореде трошкове осигурања са трошковима улагања у заштиту од губитака. Када су осигуравајућа друштва у могућности успешно да процењују различите врсте ризика, онда су она у стању да постављају одговарајуће премије осигурања, које одражавају стварне нивое ризика. Постизање циља, да премије буду у складу са реалним ризицима, омогућава осигуравајућим друштвима да остану профитабилна док истовремено пружају одговарајућу заштиту својим клијентима (Baker, 2002). На тај начин, са једне стране редукује се ризик од неуспеха пословања осигуравајућих друштава, што доводи до очувања њихове солвентности и у крајњој инстанци очувања финансијске стабилности на нивоу националне економије. Са друге стране, клијенти осигуравајућих друштава имају поуздане основе за доношење одлука у вези са закључивањем уговора о осигурању или да трагају за неким другим начинима обезбеђења од потенцијалних ризика. Када осигуравајућа друштва правилно класификују ризике, она постављају премије које су пропорционалне стварном нивоу ризика. То значи да осигураници за ниже степене изложености ризику неће плаћати више него што је потребно, док ће они са вишим ризиком плаћати више, што рефлектује њихове вероватније губитке. Уколико процене да су премије за ризик непропорционалне степену ризика или су изнад њиховог финансијског потенцијала, изабраће алтернативне начине заштите од потенцијалних губитака. Ово утиче на ефикасну алокацију капитала, на нивоу националне економије. Истовремено, када су свесни чињенице да степен изложености ризику, а тиме и висина премије зависи од њиховог понашања, потенцијални осигураници ће се рационално

понашати. Такође, биће мотивисани да инвестирају у заштиту и превенцију од потенцијалних губитака.

Дакле, када осигуравајућа друштва адекватно оцењују ризике, то олакшава инвеститорима да донесу боље одлуке о томе где да усмере свој капитал. Тако да адекватна класификација ризика доприноси бољој алокацији ресурса, чиме се утиче на ефикасност националне економије. Ефикасност националне економије додатно се подстиче кроз смањење трошкова свих учесника на тржишту осигурања. Наиме, када осигуравајућа друштва могу тачно да предвиде губитке, то омогућава свим учесницима да боље планирају своје резерве и трошкове, што може резултирати нижим премијама за осигуране. То суштински смањује укупне трошкове осигуравајућих аранжмана, чиме се побољшава куповна моћ свих актера у привредном животу друштва. Отуда, адекватан систем класификације ризика доприноси не само стабилности тржишта осигурања, већ повећава поверење у цео економски систем земље.

Међутим, промовисање ефикасности кроз адекватан систем класификације ризика, доводи до жртвовања одређених вредности. Како ефикасан систем представља оптималан *trade off* између прецизности и временске и трошковне захтевности примене једног таквог система, непрецизности могу бити несразмерно распоређене; класе ризика могу бити засноване на варијаблама које нису под контролом осигураника, а неке варијабле могу имати неприхватљиве социјалне или моралне конотације (Abraham, 1985).

Полазна тачка за развој адекватне класификације ризика, јесте чињеница да је осигурање само један од низа начина за задовољење потражње за заштитом од ризика. Постоје бројне алтернативе осигурању, са којима осигуравајућа друштва морају да се такмиче, чак и у одсуству конкуренције од стране других осигуравајућих друштава. Једини начин на који осигуравајућа друштва могу да остану конкурентна са овим алтернативама јесте да поседује адекватан систем класификације ризика. Међутим, треба истаћи да не постоји савршени систем класификације ризика. Степен његове несавршености детерминисан је пропорцијом губитака који су стохастички. Велико учешће случајних губитака указује на неадекватност класификација, што за последицу има повећање трошкова пословања и смањење профитабилности, јер класификација није у стању да предвиди губитке. У супротном, мање учешће случајних губитака, значи да су предикције класификације ризика биле прецизније, јер остали губици који се могу боље одредити кроз анализу ризика чине већину укупних губитака. Са растом учешћа

случајних губитака, неадекватност класификације расте, јер се тешко може тачно проценити колико ће губитака настати на основу познатих варијабли.

Први корак у развоју адекватне класификације јесте сепарација ризика на одређене класе. Што постоји већи број класа, то је мањи ризик од погрешне класификације. Да би се постигло одвајање, разлика између очекиваних губитака било које две класе треба да буде значајна, довољно да оправда наплаћивање различитих премија. Међутим, раздвајање се неће наставити изван тачке у којој трошкови прикупљања података потребних за даљу прецизност премашују конкурентске користи које се могу извући из тог усавршавања. Осим тога, класа мора бити довољно велика да би се на основу ње добило довољно информација за будуће процене ризика, али и довољно хомогена у смислу степена изложености ризику, а не врсти ризика. Приликом одређивања класа, мора се водити рачуна о критеријуму прихватљивости (енгл. *admissibility*) у смислу, које варијабле или информације могу бити коришћене приликом формирања класа. Прихватљивост обухвата правне, моралне и друштвене норме које одређују које информације се сматрају примереним или неприхватљивим за употребу у анализи ризика.

Значај класа огледа се и у томе што се члановима исте класе наплаћује иста премија, и из укупне премије покривају се губици те класе. Нема субвенција које се пребацују из једне класе ризика у другу. Ово је важна одлика која има значајних импликација по дефинисање правила прудеционе контроле, о којима ће у наставку дисертације бити више речи. Правила прудеционе контроле уважавају захтев да савремено управљање ризицима у осигурању захтева интегрисани приступ, а са друге стране, да нема субвенционисања губитака који потичу од одређене класе ризика од резерви за покриће губитака из других класа.

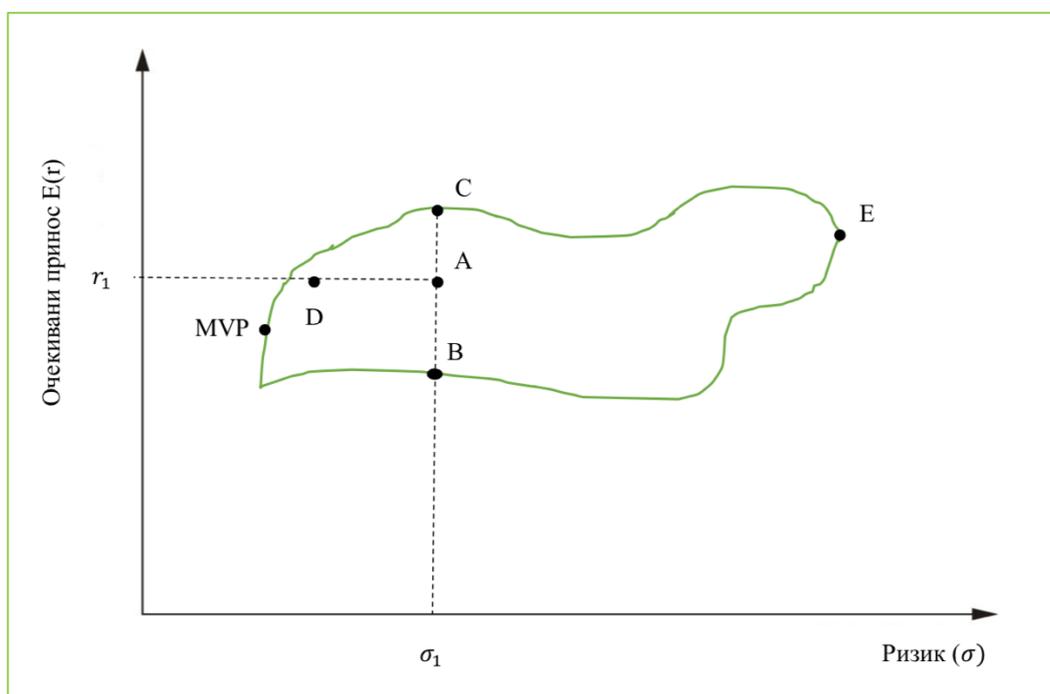
2. Скуп могућег, ефикасног и оптималног портфолија

Већ је истакнуто да су захваљујући *Markowitz-евом* открићу финансијске институције добиле могућност да формирају портфолија која ће им донети максимални принос, за њих прихватљив ниво ризика (σ), односно обратно, да формирају портфолијо који ће бити изложен минималном ризику за жељени принос, што је познато у теорији као ефикасни портфолијо (енгл. *efficient portfolio*), који је смештен на граници ефикасности (енгл. *efficiency frontier*). "Иначе, портфолио представља скуп различите

активе у власништву одређеног правног или физичког лица (Šoškić, 2006)”. Скуп свих могућих комбинација актива која су доступна на тржишту, представљају сет могућих портфолија (енгл. *feasible set*). Иако могућност комбиновања различитих актива јесте неограничена, скуп свих њихових могућих комбинација ипак има одређену границу изван које није могуће формирати такву комбинацију која ће генерисати одређени принос за дати ризик, односно бити изложена минималном ризику за жељени ниво приноса.

Графички, такав сет могућих портфолија приказан је на слици 3.

Слика 3. Сет могућих портфолија



Извор: Аутор

Са слике 3 јасно се уочава да сет свих могућих портфолија, односно свих могућих комбинација актива расположивих на тржишту, има јасну границу распрострањања. Другим речима, иако постоји неограничен број комбинација активне, осигуравајућа друштва ипак на располагању имају ограничен број портфолија. Такође, са слике 3 јасно се уочава да постоје комбинације активне (портфолија) која за исту изложеност ризику генеришу различите нивое приноса, односно за исти ниво очекиваног приноса изложена су мањем ризику. Тако на пример портфолио који је приказан у тачки А генерише виши принос у односу на портфолио који је означен тачком В, за исти ризик (σ_1). То значи да

портфолио А с аспекта *trade off* приноса и ризика има боље перформансе у односу на портфолио В јер нуди већи принос за исти ризик. Међутим, осигуравајућа друштва могу да направе још бољу комбинацију актива у односу на портфолио А, а то је портфолио С. Он је изложен мањем ризику (σ_1), а при томе не постоји портфолио за овај ниво ризика који генерише већи принос. Такав портфолио представља тзв. ефикасан портфолио. ”Дакле, ефикасан портфолио је сваки портфолио који задовољи услов да је за дати ниво очекиваног приноса изложен најмањем ризику (Радивојевић, 2014). Важи и обротно. Ефикасни портфолио је сваки портфолио који испуни овакав услов.

Са друге стране, портфолио D има мањи ризик него портфолио А, при чему оба нуде исти очекивани принос. То значи да с аспекта *trade off* приноса и ризика има боље перформансе у односу на портфолио А, јер је за исти принос изложен мањем ризику. Међутим, овај портфолио није ефикасан портфолио, он не задовољава други услов, јер је могуће формирати други портфолио који ће генерисати исти принос (r_1), али за мањи ризик (σ_1).

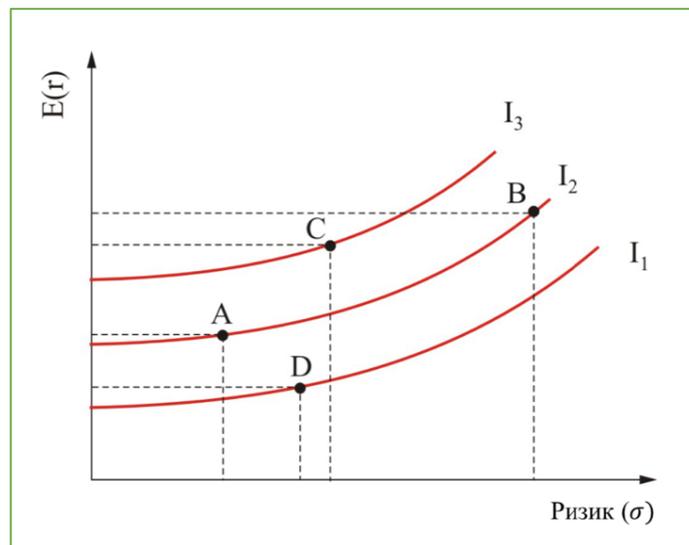
Дакле, само она портфолија која задовоље оба услова, су ефикасна портфолија и она се налазе на делу границе сета могућих портфолија која се назива граница ефикасности. На слици 3 то је део од MVP до тачке Е. Изнад границе ефикасности није могуће направити било какву комбинацију од расположивих актива на тржишту. Испод границе ефикасности налазе се тзв. неефикасна портфолија, тј. она портфолија која су или изложена већем ризику, или генеришу мањи принос за исти ризик као ефикасна. То су сва она портфолија која су оптерећена додатним ризиком. Међутим, тржиште не нуди награду за тај део ризика.

”Портфолио који је изложен најмањем ризику назива се портфолио са минималном варијансом и на слици 3, такав портфолио означен је тачком MVP (Радивојевић, 2014)”. MVP портфолио дели на два дела границу ефикасности и границу неефикасних портфолија. Портфолија испод границе од MVP до Е су неефикасна јер је увек могуће за дати ризик пронаћи бољи портфолио који нуди већи принос.

Циљ менаџмента сваке финансијске институције јесте да формира ефикасни портфолио. Међутим, где ће се тај портфолио тачно налазити на граници ефикасности зависи искључиво од политика инвестирања институције, односно од става менаџмента према ризику. Независно од тога где ће тај портфолио бити смештен на граници ефикасности, за одређену финансијску институцију изабрани ефикасни портфолио биће оптималан портфолио. Дакле, оптималан портфолио јесте ефикасан портфолио који

одговара преференцијама менаџмента финансијске институције. С обзиром на то да менаџмент финансијске институције бира портфолио који одговара његовим преференцијама, то је разлог зашто портфолио који је оптималан за једну институцију није подједнако привлачан и осталим финансијским институцијама. Дакле, избор је искључиво детерминисан ставом менаџмента према ризику и приносу. Према хипотези о рационалном инвеститору свака институција ће изабрати онај портфолио који ће максимизирати њену функцију корисности. Графички посматрано, то је портфолио који се налази у тачки тангенције КИ и границе ефикасности (слика 4).

Слика 4. Криве индиферентности менаџмента финансијске институције

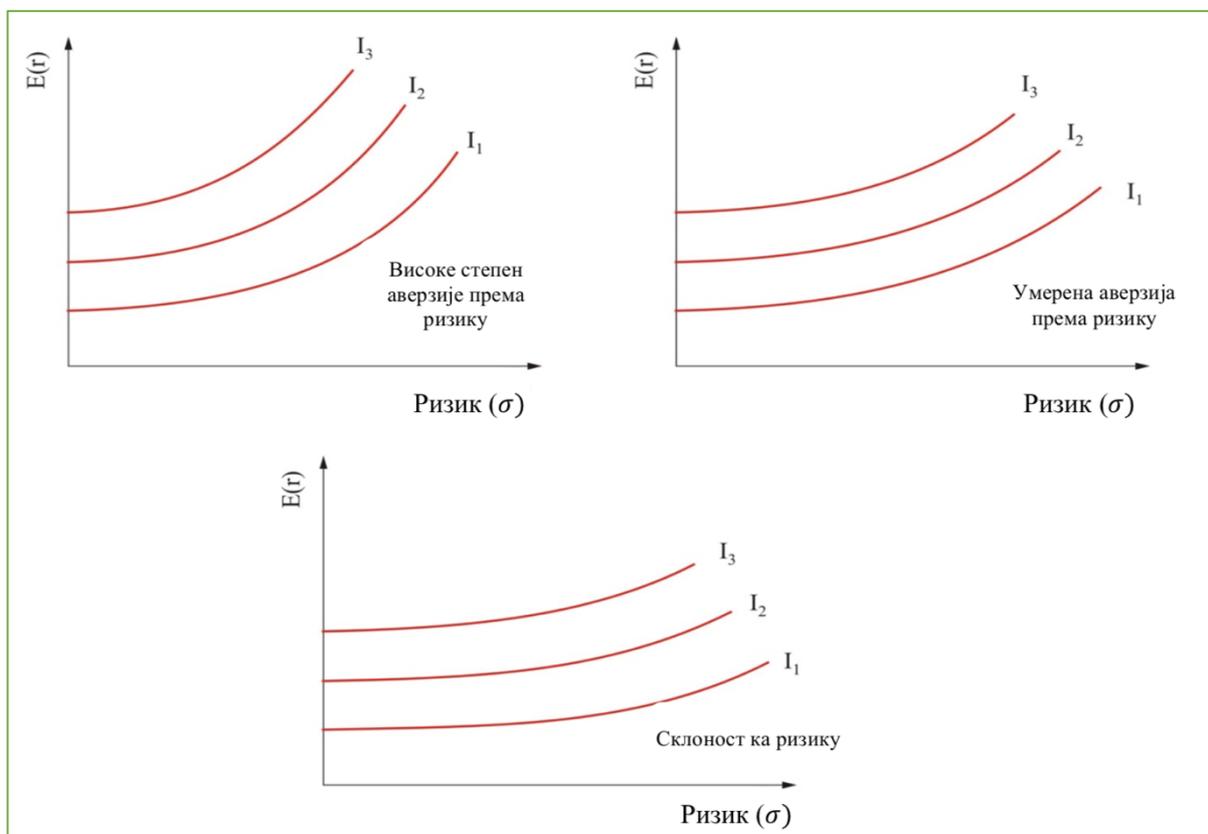


Извор: Аутор

Све комбинације ризика и приноса на истој кривој индиферентности подједнако су привлачне за менаџмент финансијске институције. То значи да је портфолио приказан у тачки А подједнако привлачан за менаџмент финансијске институције као и портфолио означен у тачки В. Међутим, нису подједнако привлачни портфолији који су смештени на различитим кривима индиферентности. За менаџмент је привлачнији портфолио који је смештен на вишој кривој индиферентности I_3 (портфолио приказан у тачки С), у односу на портфолије А и В који су смештени на кривој индиферентности I_2 , као и портфолио D смештен на кривој индиферентности I_1 , уз напомену да су за менаџмент пожељнији портфолији А и В који су смештени на кривој индиферентности I_2 у односу на портфолио D смештен на кривој индиферентности I_1 . Скуп свих кривих индиферентности менаџмента чини мапу кривих индиферентности, при чему је тај скуп неограничен. Важно је истаћи да према хипотези о рационалном инвеститору менаџмент финансијске

институције има аверзију према непотребном ризику. Међутим, они се међусобно разликују према склоношћу менаџмента финансијске институције према ризику. Гранични посматрано, нагиб криве индиферентности одражава склоност менаџмента финансијске институције према ризику. У основи разликују се три случаја, као што је приказано на слици 5.

Слика 5. Мапе криве индиферентности менаџмента финансијских институција у зависности од склоности ка ризику



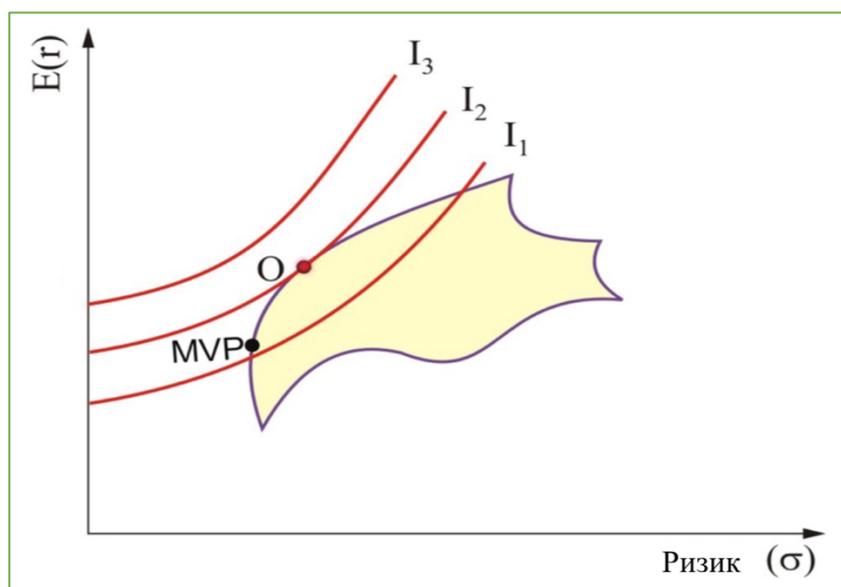
Извор: Аутор

На слици 5 у првом квадранту мапа кривих индиферентни одражава став менаџмента који није склон преузимању великог ризика. Дакле, одражава менаџмент који има висок степен аверзије према ризику. У другом квадранту приказана је мапа кривих индиферентности менаџмента финансијске институције који су склони преузимању великог ризика. У том случају криве индиферентности имају равнији нагиб, што одражава став менаџмента да је спреман да зарад малог повећања приноса преузме значајно повећање ризика. Дакле, са повећањем склоности ка ризику нагиб криве постаје

равнији и обрнуто. У трећем квадранту приказана је мапа кривих индиферентности која одговара менаџменту који има умерен став према ризику.

С обзиром на то да граница ефикасности у принципу има конкаван облик, док криве индиферентни имају конвексан облик, то имплицира да између њих може да постоји само једна тачка тангенције. У контексту савремене портфолио теорије то значи да постоји само један оптимални портфолио. На слици 6 приказан је оптимални портфолио.

Слика 6. Оптимални портфолио



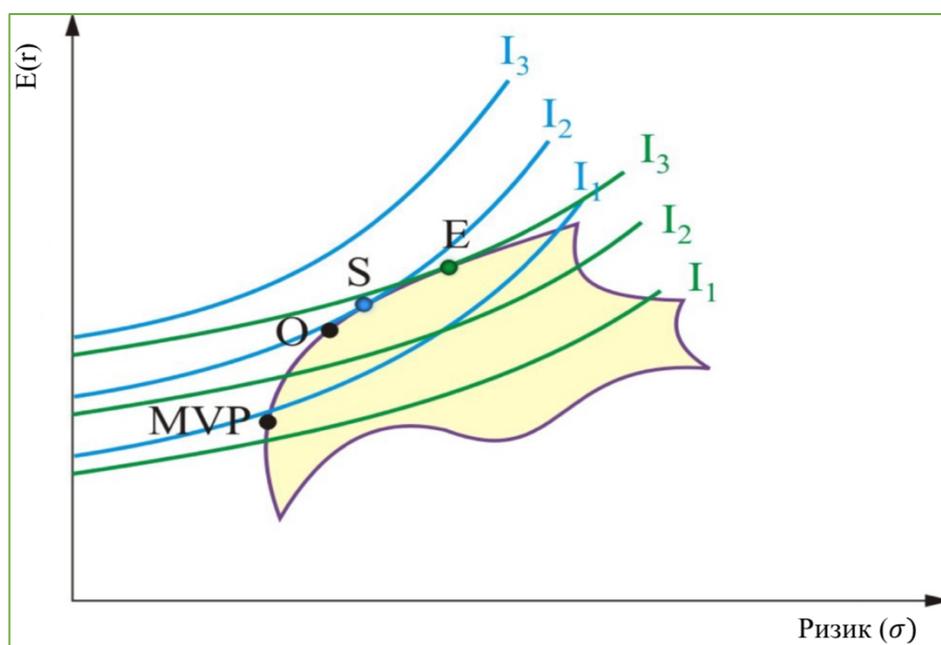
Извор: Аутор

Као што се може видети са слике оптималан портфолио смештен је у тачки O која представља тачку тангенције између криве индиферентности I_2 и границе ефикасности. Оптимални портфолио O се налази десно од MVP, што значи да менаџмент финансијске институције има одређену склоност ка ризику. Тачно је да за менаџмент финансијске институције постоји пожељнија крива индиферентности која је на вишем нивоу и то је крива I_3 . Међутим, она је недостижна јер је изнад границе ефикасности, што значи да у реалности менаџмент не може да формира портфолио какав максимално преферира од, на тржишту расположиве активе.

Са променом става менаџмента према ризику и приносу промениће се и нагиб криве индиферентности, а самим тим и оптимални портфолио, као што се види са слике 6. Наиме, иако није дошло до промене у могућностима за улагањем у неке нове комбинације актива на тржишту, са променом става према ризику мења се и оптимални

портфолио. Све док је менаџмент финансијске институције испољавао аверзију према ризику, оптимални портфолио био је у тачки О. Са повећањем склоности ка ризику и постојањем равнијег нагиба криве индиферентности, оптимални портфолио се удаљава од MVP и сада се налази у новој тачки тангенција криве индиферентности I_3 . Важи и обротно, са повећањем аверзије према ризику оптимални портфолио приближава се MVP.

Слика 7. Промена оптималног портфолија у зависности од промене склоности ка ризику



Извор: Аутор

Дакле, избор оптималног портфолија одређен је сетом могућих комбинација активне која је расположива на тржишту и степена аверзије менаџмента финансијске институције према ризику, односно односу између ризика и приноса.

Формирање оптималног портфолија код осигуравајућих друштва нешто је комплекснији у односу на друге финансијске институције, због ограничења која постављају регулаторне власти у вези са величином улагања у одређену категорију активне. Наиме, правилима прудеционе контроле јасно је прописано до којих граница тј. до ког износа техничке резерве могу бити уложене у одређену категорију активне. У табели 1 приказана су ограничења која важе за Републику Србију.

**Табела 1. Структура инвестиционог портфолија осигурања у Републици Србији
према правилима прудеционе контроле**

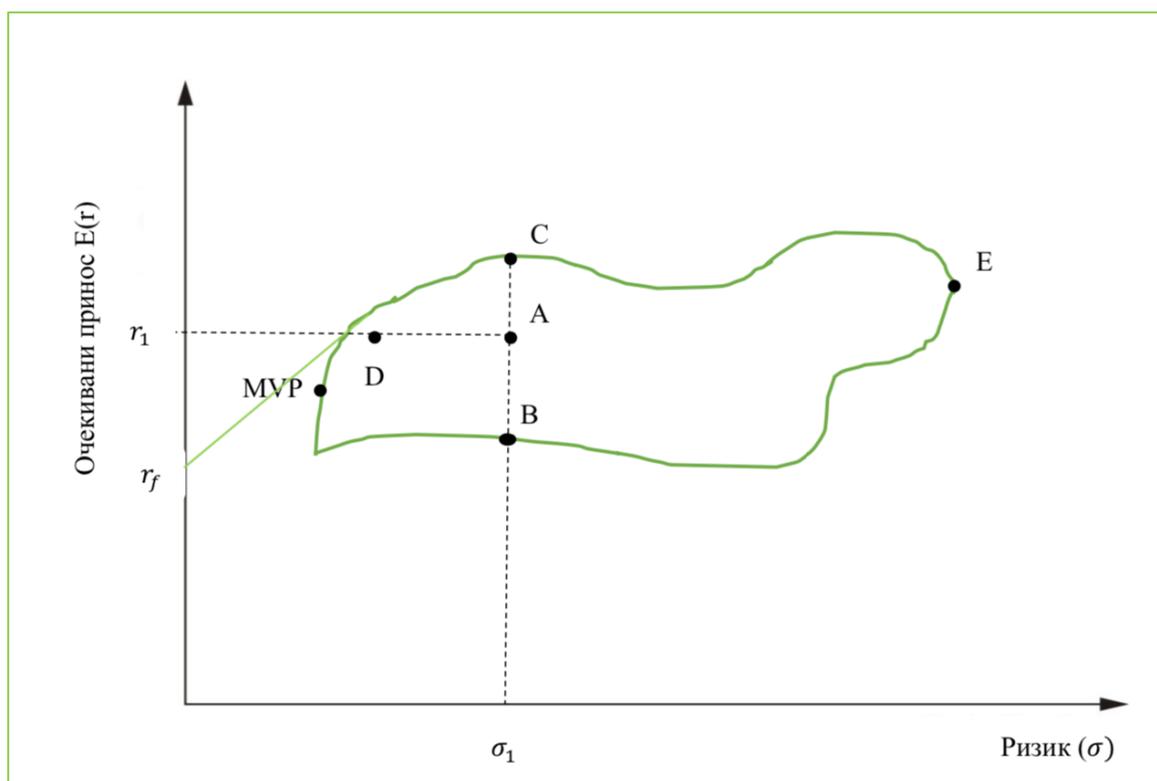
		1		2		3		4		5	
		У	П	У	П	У	П	У	П	У	П
Хартије од вредности којима се тргује без ограничења		неогр.		неогр.		неогр.		неогр.		неогр.	
Обвезнице и друге дужничке хартије од вредности - тргује се са ограничењем		35%	5%	30%	5%	30%	5%	30%	5%	неогр.	5%
Акције којима се не тргује	Акције које нису на листингу А	25%	5%	25%	5%	15%	5%	15%	5%	неогр.	5%
	Акције које су на листингу А			35%	15%	35%	15%	35%	15%		
Акције којима се не тргује		5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
Обвезнице и друге дужничке хартије од вредности којима се не тргује		5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	10%	1%
Депоневање код банака		20%	10%	30%	10%	35%	10%	35%	10%	35%	10%
Инвестиционе некретнине		30%	10%	30%	10%	30%	10%	30%	10%	30%	10%
Изградња некретнина намењених тржишту											
Готовина		неогр.		неогр.		неогр.		неогр.		неогр.	
Предујам						10%		10%		10%	

Извор: НБС (2020). Одлуке о инвестирању средстава у осигурању, *Службени гласник*, 149/2020.

Као што се може видети из табеле 1 осигуравајућа друштва техничке резерве могу неограничено да улажу у хартије од вредности којима се тргује без ограничења. Такође, неограничено могу да држе у виду готовине. Међутим, у остале категорије, постоји јасна ограничења до којег износа могу да уложе у поједину активу, односно збирно у одређену категорију активе.

Импликација имплементације правила прудеционе контроле на границу ефикасности огледа се у промени њеног облика. Наиме, могућност улагања осигуравајућих друштава у банкарске депозите и/или државне обвезнице за које се сматра да су безризична актива (r_f), утиче да граница ефикасности није више од тачке MVP па до тачке E приказане на слици 2, већ се сада модификује, тако да је нова граница ефикасности од тачке (r_f) на апсиси па до тачке E, као што је приказано на слици 8.

Слика 8. Граница ефикасности након увођења безризичне активе

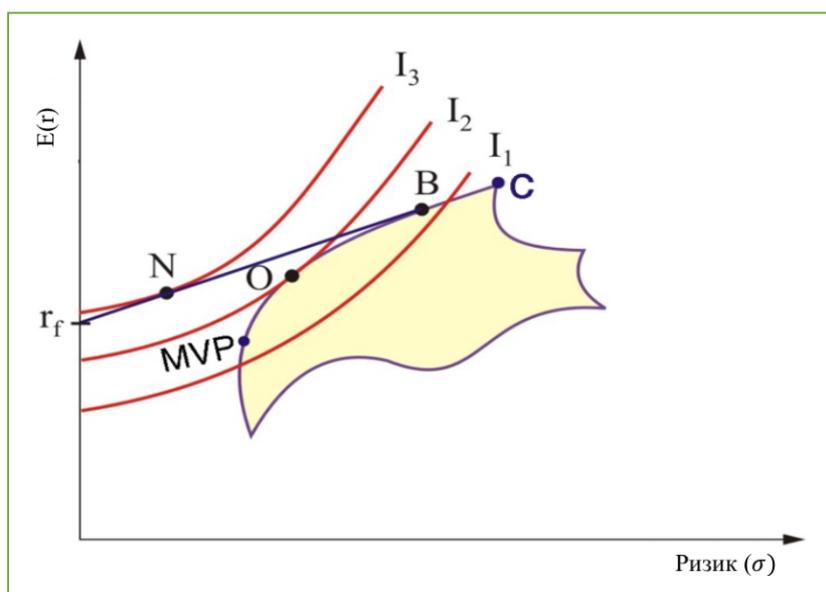


Извор: Аутор

Могућност комбиновања безризичне активе (r_f) са ризичним портфолијима има снажних импликација за менаџмент склоном ка ризику, јер сада су у могућности да направе нове комбинације активе која нуди боље перформансе у односу на оптимални

портфолио приказан у тачки О. Оптимални портфолио сада се налази у тачки N, која је на вишој кривој индиферентности I_3 (слика 9) у односу на оптимални портфолио означен у тачки О која је тангента криве индиферентности I_2 и границе ефикасности.

Слика 9. Оптимални портфолио у условима могућности инвестирања у безризичну активу



Извор: Аутор

С аспекта политике инвестирања, посебно је интересантан нагиб ове праве (r_f). Математички може се изразити следећим изразом:

$$\text{Нагиб границе ефикасности} = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} \quad (7)$$

при чему су:

$E(r_p)$ - очекивани принос од ефикасног портфолија

r_f - безризична стопа приноса

σ_p - ризик ефикасног портфолија

Нагиб представља додатни износ очекиваног приноса ефикасног портфолија који се генерише јединичним увећањем ризика (Leković, 2022). Отуда, циљ менаџмента осигуравајуће компаније јесте граница ефикасности која има највећи нагиб. Под претпоставком да се осигуравајуће друштво може задуживати неограничено по стопи

приноса на безризичну активу, граница ефикасности са највећим нагибом представља тзв. тржишну линију капитала (енгл. *Capital Market Line - CML*), односно математички:

$$E(r_p) = \left(\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \right) \sigma_p \quad (8)$$

при чему су:

$E(r_p)$ - очекивани принос ефикасног портфолија

$E(r_m)$ - очекивани принос тржишног портфолија

r_f - безризична стопа приноса

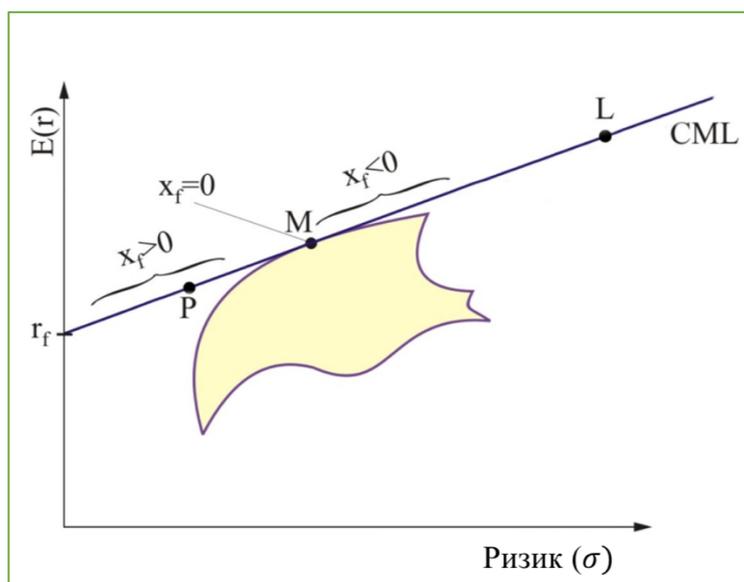
σ_p - ризик ефикасног портфолија

σ_m - ризик тржишног портфолија

Анализа елемената израза (8) указује да између $E(r)$ и σ_m постоји линеаран однос и он се не базира на укупном ризику, већ на оном који се не може диверсификацијом елиминисати. То је тзв. системски ризик. Део укупног ризика који се може елиминисати јесте тзв. несистемски ризик. Сабирак $\sigma_p[E(r_m) - r_f]/\sigma_m$ у изразу (8) указује да тржиште награђује осигуравајуће компаније само за изложеност системском, а не укупном ризику. У оквиру савремене портфолио теорије овај вид надокнаде дефинише се као премија за ризик. Сам израз у загради одређује нагиб CLM, познат као тржишна цена ризика (енгл. *market price of risk*). Нагиб показује очекивано повећање приноса, услед увећања једне јединице преузетог ризика.

Под претпоставком да осигуравајуће друштво може неограничено прибављати средстава по r_f , што се графички може представити као на слици 10, при чему су X_r и X_f удели улагања у ризичну и безризичну активу, коју год комбинацију улагања да изабере, осигуравајуће друштво ће улагати у портфолио приказан у тачки М.

Слика 10. Тржишни портфолио



Извор: Аутор

Портфолио М представља комбинацију свих расположивих улагања на тржишту и у литератури се означава као тржишни портфолио. Учешће појединачне активе у њему пропорционалан је њеном уделу у укупној тржишној вредности. Као такав, тржишни портфолио је потпуно диверсификован и изложен искључиво системском ризику. Позиција овог портфолија на тржишној линији капитала зависи од ризичне оријентације менаџмента осигуравајућег друштва. Уколико менаџмент показује већу склоност ка ризику, већи део техничких резерви биће усмерен ка ризичним активама. Тиме се формира портфолио који се у теорији назива портфолио са узимањем у зајам ((енгл. *leveraged portfolio*)), јер се средства прибављена по стопи приноса безризичне активе преусмеравају у ризичније инвестиције. Такав портфолио се на тржишној линији капитала налази десно од тачке М (на слици 9 означен као L). Супротна ситуација настаје када је менаџмент мање склон ризику. Тада се већи део резерви пласира у безризичну активу, што резултира портфолиом познатим као портфолио са давањем у зајам (*lending portfolio*). Ови портфолији се увек позиционирају лево од портфолија М. Тачна позиција зависи од односа улагања у ризичну и безризичну активу, који је условљен ставом менаџмента према ризику.

3. Директива солвентности I

Иако преузимање ризика, као објективне категорије иманентне свакој људској активности, представља неизоставни део свакодневнице, у контексту осигуравајуће делатности оно добија посебан значај, јер како је већ истакнуто суштина осигуравајуће делатности јесте преузимање ризика од других. Из тог разлога осигуравајућа друштва изложена су широком спектру ризика, чија се лепеза непрестано проширује. Непрестано појављивање нових фактора и врста финансијских ризика, који делују симултано и који су у високом степену корелације, пред осигуравачима поставља захтев за холистичким приступом управљања ризицима.

Претходно реченом, треба додати и чињеницу да захваљујући економском развоју, техничком и технолошком напретку, развоју медицине, глобализацији и повећању броја становништва, појединци и предузећа данас су изложени већем ризику него икада раније, са једне стране. Са друге стране, поред повећане вероватноће настанака нежељеног догађаја, повећава се и величина штете и интензитет последице нежељених догађаја. У том контексту расте и притисак да се пронађе начин да се појединци и предузећа осигурају од ризика и њихових последица. Како је трансфер ризика, по принципу солидарности и реципроцитета, за осигуранике још увек најефикаснији начин заштите своје имовине, то све више расте притисак на осигуравајућа друштва да преузимају различите облике ризика, како по интензитету последица, тако и по учесталости појављивања нежељених исхода.

Међутим, укупан расположиви капацитет осигурања и реосигурања је ограничен, што у условима повећане фреквенције појављивања нежељених догађаја са све интензивнијим последицама утиче на осигуравајућа друштва, са једне стране, да ограничавају своју изложеност ризицима, а са друге да трагају за новим механизмима управљања и трансфера ризика. Ово утиче на регулаторе, да уважавајући економске реалности пословних потреба осигуравајућих друштава раде на развоју регулаторних оквира и прописа који се тичу формирања техничких резерви и могућности њиховог инвестирања, а који би требали да обезбеде профитабилно пословање осигуравајућих друштва уз истовремено очување стабилности на финансијском тржишту, а тиме и читаве националне економије. Први кораци ка томе били су усвајање Директиве о неживотном осигурању (Директива 73/239/ЕЕЦ) 1973. године и шест година касније Директиве о животном осигурању (Директива 79/267/ЕЕЦ). Затим је уследило усвајање

низа директива, као што су Директива 88/357/ЕЕЦ, Директива 90/619/ЕЕЦ, Директива 92/49/ЕЕЦ и Директива 92/96/ЕЕЦ и сл. У периоду од 1973. до 2002. године усвојено је укупно 14 директива, које се односе на солвентност осигуравајућих друштава, а које су данас познате под заједничким називом Директива солвентности I. Директива солвентности I постала је обавезна за све земље чланице Европске Уније 2002. године, када је од стране Европског парламента усвојена Директива 2002/13/ЕЦ. Мада су осигуравајућа друштва добила период од две године за потпуну имплементацију Директиве у своје пословање, Директива је остала на снази све до 2014. године, када је замењена Директивом солвентности II. Међутим, током примене Директиве, уочене су њене бројне слабости. Пре свега, Директива солвентности I показала је своја ограничења током финансијских криза, које су указивале на потребу за јачањем регулаторних оквира у области осигурања. Пре свега, као одговор на ове изазове, усвојена је и Директива солвентности II, која је у значајној мери осавременила и побољшала претходне захтеве. Директива солвентности II уводи сложенији модел управљања ризицима, која од осигуравајућих друштава захтева бољу процену ризика и примену адаптивнијих стратегија у складу са променама у тржишним условима.

Усвајање Директиве од стране Европског парламента означава прихватање филозофије управљања ризицима заснованом на тзв. *приступу солвентности заснованом на факторима*. Суштина ове филозофије управљања ризицима јесте у постављању минималних капиталних захтева који су потребни за покриће потенцијалних губитака од изложености одређеној врсти ризика. Прецизно утврђивање минимално потребних капиталних захтева подразумева рашчлањивање ризика коме су изложена осигуравајућа друштва. Отуда, суштина ове филозофије јесте у рашчлањавању ризика и постављању адекватних маргина сигурности за сваку врсту или категорију ризика. Прецизно утврђивање маргина пред осигуравајућим друштвима намеће захтев да непрекидно процењују преузете ризике и обавезе. Другим речима, намеће проактиван приступ у управљању ризиком, што истовремено захтева и активну контролу над инвестицијама и активностима осигурања, што је основ за стабилно функционисање друштава у овом сектору. У складу са овим приступом Директива прави јасну дистинкцију између ризика осигурања, кредитног ризика, тржишног ризика, ризика ликвидности и оперативног ризика.

Применом Директиве солвентности I, истовремено постигнута је хармонизација надзора осигурања у Европи, јер је имплементација Директиве резултирала усклађеним

захтевима солвентности у свим државама чланицама Европске уније. Захтеви из Директиве транспоновани су у национална законодавства кроз различите националне законе. На тај начин осигуравајућа друштва, на основу овлашћења у било којој држави чланици Европске уније, добила су могућност да послују у другим државама чланицама Европске уније, без икакве контроле или претходног обавештења о условима од стране регулаторних органа земље домаћина. На овај начин Директива је осигурала да сва осигуравајућа друштва у Европској унији подлежу истим стандардима, што је допринело стварању равноправнијег и конкурентнијег тржишта. Другим речима, Директива је допринела усаглашавању правила и стандарда за израчунавање ових резерви и осигурала да сва осигуравајућа друштва имају сличан приступ овим питањима. Овим се постигло значајно побољшање у конкурентности јер су сада осигуравајућа друштва могла из различитих земљама да послују на целој територији Европске уније, али и одговорност осигуравајућих друштава, што је помогло да се обнови поверење у сектор осигурања.

С обзиром на то да је кључни мотив закључивања уговора о осигурању обезбеђивање финансијске сигурности, обезбеђивање солвентности осигуравајућег друштва представљало би најважнији задатак регулатора на тржишту осигурања. Из тог разлога фокус Директиве је био на очувању солвентности осигуравајућих друштава. Сама идеја о солвентности заснива се на потреби да осигуравајућа друштва имају довољно капитала и резерви да покрију потенцијалне захтеве осигураника и потенцијалне губитке. У суштини, солвентност се односи на способност осигуравајућег друштва да испуни своје дугорочне финансијске обавезе. Регулацијом солвентности спречава се настанак несолвентних осигуравајућих друштава, чиме се обезбеђује стабилност финансијског сектора. Отуда, захтев за утврђивањем адекватне маргине солвентности једно је од најважнијих заједничких пруденцијалних правила. У складу са прихваћеном поделом ризика Директива је прописала минималне стопе адекватности капитала, односно маргине солвентности за сваку категорију ризика. На тај начин обезбеђује се да свако осигуравајуће друштво обезбеди минималан износ капиталних резерви, како би се осигурала способност друштва да издржи негативне економске околности и потенцијалне губитке. У том контексту маргина солвентности може се интерпретирати као амортизер у капиталу друштва. Иначе, маргина сигурности представља разлику између минимално потребног капитала за покриће потенцијалних губитака од одређене врсте ризика и обавеза које друштво има по основу преузетих ризика (Eling et al., 2007). Дакле, то је минимални вишак капитала изнад преузетих

обавеза и потенцијалног губитка, при чему је директива прописала колико она треба да износи и како да се израчунава. Прописано је да маргина сигурности буде већи износ од следећа два начина израчунавања (Directives 2002/12/EC and 2002/13/EC): 1) на бази премије и 2) на бази одштетних захтева. У првом случају маргина сигурности износи 16 до 18% премија, односно у другом случају износи од 23% до 26% од трогодишњег просека одштетних захтева. Директива предвиђа додатне провизије за одређене класе ризика за које се сматра да су високо ризичне односно волатилне.

Овако постављена правила пруденционе контроле, а пре свега одређивања минималних капиталних захтева и маргине солвентности имају низ ограничења. Пре свега, утврђивање маргине солвентности на овај начин не репрезентује стварну изложеност ризику одређеног осигуравајућег друштва, јер поједине врсте ризика, као што су кредитни и тржишни ризик нису обухваћене Директивом. Неосетљивост на стварну изложеност ризику не мотивише осигуравајућа друштва да се рационално понашају и да врше оптималну алокацију капитала. Поред тога, прописивање униформних стандарда за сва осигуравајућа друштва, такође не одражава стварну њихову изложеност, што директно утиче на њихову конкурентност. Међутим, упркос овим слабостима и недостацима, значај Директиве солвентности I огледао се у томе што је поставила основне принципе за утврђивање капитала и контролу солвентности, чиме је делимично постигнут циљ обезбеђивања финансијске стабилности и заштите учесника на финансијском тржишту. Такође, значај Директиве огледао се и у унапређењу транспарентности у сектору осигурања, побољшању менаџмента ризика и унапређењу правног оквира, који је поставио темељ да се осигура да осигуравајућа друштва могу да испуне своје обавезе према осигураницима.

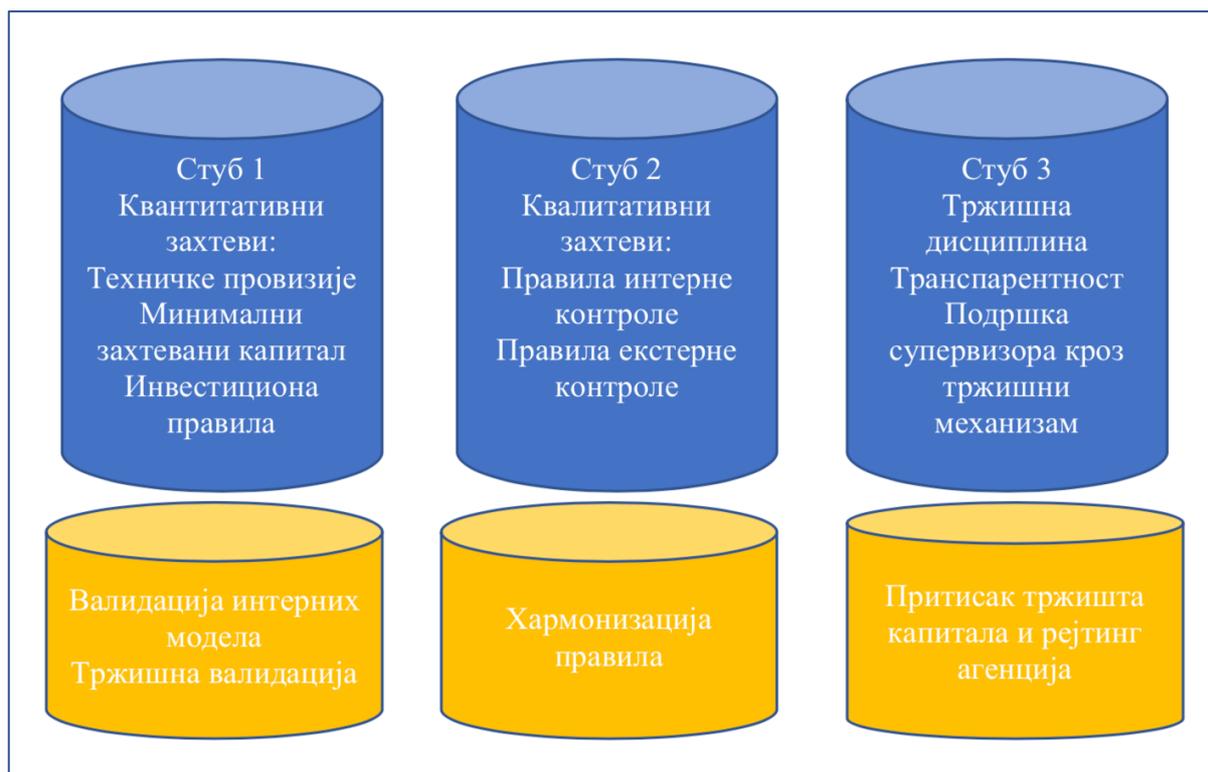
4. Захтев за солвентним капиталом за покриће тржишних ризика у осигурању - Директива солвентности II

Недовољна осетљивост адекватности капитала који се формира на основу пруденционих захтева Директиве солвентности I на стварни степен изложености ризику портфолија осигуравајућих друштава, утицала је на регулаторне органе да раде даље на усавршавању Директиве солвентности I. Нарочито је овај недостатак био евидентан током светске економске кризе 2008. године. Наиме, правила Директиве солвентности I утврђивање минималних капиталних захтева за покриће ризика базирало се само на

уважавању пасиве у билансу стања осигуравајућег друштва (Илић, 2014). Страна активе није била узимана у разматрање приликом утврђивања минималног потребног капитала. Последица тога јесте да адекватност капитала није одражавала стварну изложеност портфолија осигуравајућих друштава тржишним ризицима.

Резултат споменутих напора јесте развој скупа прописа и правила пруденционе контроле, који су у стручним круговима познати под називом Директива словесности II. Усвајање директиве од стране Европског парламента 2014. године означило је прихватање новог, модернијег система надзора у сектору осигурања заснованом на три стуба пруденционе контроле: 1) поштовању квантитативних захтева пруденционе контроле; 2) поштовању квалитативних захтева пруденционе контроле и 3) поштовању принципа транспарентности пословања, као што је приказано на слици 10. После низа одлагања имплементације Директиве, пуна њена примена отпочела је 1. јануара 2016. године.

Слика 11. Три стуба пруденционе контроле под Директивном солвентности II



Извор: Asadi, S., & Al Janabi, M. A. (2020). Measuring market and credit risk under Solvency II: Evaluation of the standard technique versus internal models for stock and bond markets. *European Actuarial Journal*, 10(2), p. 426.

Приви стуб пруденционе контроле подразумева сет квантитативних захтева. Квантитативни захтеви пруденционе контроле представљају скуп прописа и правила којих осигуравајућа друштва морају да се придржавају приликом утврђивања захтеваног капитала солвентности (енгл. *Solvency capital requirement - SCR*) и минимално потребног капитала (енгл. *Minimum capital requirement - MCR*) за покриће тржишних ризика (Directive 2009/138/EC). Захтев дозвољава могућност да се захтевани капитал солвентности утврди применом интерних модела за процену тржишног ризика или применом стандардизованог приступа и то у износу који омогућава осигуравајућем друштву да поднесе губитак у току једне године услед настанка нежељеног догађаја који се јавља једном у 200 година (Asadi & Al Janabi, 2020).

Овако дефинисан захтевани капитал солвентности може се интерпретирати као сума средстава која је потребна у неком тренутку (t) како би се покрили губици који могу настати у неком тренутку у будућности ($t + 1$), са одређеном вероватноћом. Са теоријске тачке гледишта, ово је потенцијални губитак који има веома малу вероватноћу да се догоди или да буде прекорачен (Chech, 2012). Као такав треба да одражава економску реалност осигуравајућег друштва. Према Директиви, осигуравајућа друштва морају да обезбеде сопствена средства једнака *SCR*, при чему сопствена средства нису исто што и сопствени капитал. Под сопственим средствима према Директиви подразумева се власнички капитал друштва увећан за дугорочне и неисплаћене капиталне обавезе. Капитални захтев се може додатно смањити узимањем у обзир способности техничких резервисања и одложених пореза да апсорбују губитке (Директиву, 2009/138/ЕЦ), при чему Директива на јасан начин прописује како се утврђују техничке резерве. Директива поставља услов да се техничке резерве утврђују као пондерисани вероватноћом просек будућих новчаних токова, уз обавезу уважавања концепта временске вредности новца (односно дисконтовање новчаних токова) и маргине ризика. Захтев је овако постављен из разлога што капитал који је потребан за покриће потенцијалних губитака, у ствари јесте расположиви капитал (енгл. *Available Capital*). Расположиви капитал, није ништа друго него, разлика између тржишне вредности имовина (активе) осигуравајућег друштва и тржишне вредности њених обавеза (Borger, 2010). Утврдити тржишну вредност aktive представља једноставан задатак, будући да су цене aktive са финансијских тржишта познате. Применом тзв. *market to market* модела једноставно се утврђује тржишна вредност појединачне и укупне aktive осигуравајућег друштва. Међутим, утврдити тржишну вредност обавеза није тако једноставно, јер не постоји

ликвидно тржиште за обавезе. Процену додатно компликује опције и гаранције које су уграђене у уговоре о осигурању, тако да је процена изузетно комплексна. Из тог разлога Директива прописује да расположива средства, као износ капитала који је на располагању за покриће потенцијалних губитака, апроксимира као износ техничких резерви увећан за маргину ризика. Маргина ризика представља додатан износ капитала који служи за покриће непокривених, незаштићених (тзв. нехецованих) ризика (Farhan et al., 2024). Дакле, то је принос изнад стопе приноса на безризична средства, што се математички може исказати на следећи начин (CEIOPS, 2009):

$$RM := \sum_{t \geq 0} \frac{C_0 C \cdot SCR_t}{(1 + i_{i+1})^{t+1}} \quad (9)$$

при чему су

RM - Маргина ризика

$C_0 C$ - Цена капитала

SCR_t - Захтевани капитал солвентности у тренутку (t)

i_{i+1} - Годишња стопа приноса на безризичну активу

SCR математички се може исказати на следећи начин:

$$SCR = P(AC_1 > 0 | AC_0 = x) \geq 99,5\% \quad (10)$$

односно у нумеричком облику:

$$SCR^{VaR} := \operatorname{argmin}_x \left\{ P \left(AC_0 - \frac{AC_1}{1+i_i} > x \right) \leq (1 - \alpha) \right\} \quad (11)$$

при чему је

AC - Распољиви капитал

SCR^{VaR} - Захтевани капитал солвентности израчунат применом VaR модела у складу са захтевима Директиве

x - Најмањи износ капитала потребног за покриће потенцијалних губитака

P - Вероватноћа да ће стварни губитак да премаши вредност SCR за период од једне године за који се врши процена $VaR = 1 - (\alpha)$, односно $1 - 99,5\% = 0,005\%$

α - ниво поверења за који се врши процена VaR .

Имајући у виду да *SCR* зависи од стварног износа капитала који се држи на $t = 0$ на почетку периода, односно да су сва актива (средства) садржана у калкулацији, ризик који произилази из средстава која подржавају позитиван вишак капитала (енгл. *Excess Capital*)¹⁵ такође одржавају *SCR*. Отуда, у случају да је овај капитал негативан имплицитно се претпоставља да је инвестирано у обвезнице без ризика од неиспуњавања обавеза са роком доспећа до једне године (енгл. *The one-year default-free bond*), што се математички може изразити на следећи начин:

$$P(AC_1 + (SCR - AC_0) \cdot (1 + i(0,1)) \geq 0) \geq \alpha \quad (12)$$

Засновано на овако исказаном додатном капиталу и захтеваном капиталу солвентности, лако се може извести закључак да према Директиви рацио солвентности представља однос између AC_0 и *SCR*.

Према стандардизованом приступу, о чему ће виши бити речи у наставку дисертације, *SCR* у једначини (11) апроксимира се помоћу такозване формуле квадратног корена засноване на модуларном приступу. Међутим, ова формула обично није у стању да тачно одрази стварну изложеност портфолија осигуравајућег друштва ризику, што може имати значајних негативних последица (Pfeifer & Strassburger, 2008). Иначе, то је један од кључних разлога зашто Директива дозвољава примену интерних VaR модела за процену ризика.

У складу са Директивом *SCR* се мора израчунати најмање једном годишње и пријавити регулаторима. Уколико износ сопствених средстава спадне испод *SCR*, осигуравајуће друштво дужно је да поднесе план опоравка у року од два месеца. Ако осигуравајућа компанија није у могућности да покрије *SCR*, односно ако прихватљива сопствена средства падну испод *SCR*, план опоравка мора бити поднесен надзорном органу у року од два месеца. У року од шест месеци (у изузетним случајевима девет месеци), *SCR* се мора поново покривати повећањем сопствених средстава или смањењем ризика, при чему се извештај о напретку подноси свака три месеца.

¹⁵ Износ капитала изнад захтеваног капитала солвентности. Математички, у контексту Директивне солвентности II може се представити следећим изразом: $P\left(\frac{AC_1}{1+i(0,1)} \geq AC_0 - SCR\right)$, при чему је $i(0,1)$ стопа приноса на безризичну активу са вероватноћом $P(0, 1)$.

Поред *SCR*, Директивом солвентности II прописан је и минимално потребан капитал (*MCR*), који је нижи у односу на *SCR*. То је минимални износ капитала којим у сваком тренутку осигуравајуће друштво мора да располаже. У супротном, представља окидач (енгл. *trigger*) за преузимање одређених мера од стране регулатора. *MCR* утврђује се применом линеарне формуле, уз уважавање следећих параметара ризика: 1) да се калибрација модела врши за ниво поверења од 85%. То значи да само 15% губитака могу да буду већи од *MCR*; 2) да се процена врши за временски хоризонт од једне године (Sandstrom, 2005; Roufinas & Tsitsika, 2018). Међутим, постоји доња граница од 25% *SCR* и горња граница од 45% *SCR*. Изражава се у апсолутном износу, при чему прецизан износ који је осигуравајуће друштво у обавези да има зависи од врсте осигурања.¹⁶

Третман сопствених средстава у контексту *MCR* нешто је другачији у односу на *SCR*. Уже је дефинисан него у односу на покриће *SCR*. То значи да се може узети у обзир мањи део капитала. Правилима Директиве за покриће *MCR* нису дозвољена додатна сопствена средства (Europäisches Parlament und Europäischer Rat 2009, Art. 87 und 88.). Штавише, најмање 80% *MCR* мора бити покривено сопственим средствима највишег квалитета (енгл. *Tier 1 capital*)¹⁷.

За разлику од *SCR*, *MCR* се мора израчунавати најмање квартално. Уколико осигуравајуће друштво није у могућности да покрије *MCR*, план опоравка се мора поднети регулатору у року од месец дана. Директива прописује да *MCR* мора бити поново покривен у року од највише три месеца. У супротном, осигуравајуће друштво губи дозволу за рад.

Вођени искуством Базелског комитета за супервизију банака, регулатори на тржишту осигурања увидели су да ефикасно управљање тржишним ризицима није могуће остварити само прописивањем сета квантитативних захтева пруденционе контроле. Из тог разлога у оквиру Директиве солвентности II дефинисали су и низ квалитативних захтева, који омогућавају интегрисани приступ управљању ризицима. Овај захтев подразумева промену фокуса са квантификације изложености ризику

¹⁶ Директива солвентности II прописује да минимални капитал у случају неживотног осигурања износи 2,2 милиона евра, док у случају осигурања аутомобила и пловила износи 3,2 милиона евра, као и у случају осигурања животне средине.

¹⁷ Капитал првог реда или основни капитал садржи нераспоређену добит, акцијски капитал и капитал по основу преференцијалних акција. Према правилима Базелског комитета за супервизију банака и Директиве солвентности II, ово је капитал који служи за обављање свакодневних активности банака и осигуравајућих друштава и не укључује депозите.

индивидуалних позиција портфолија осигуравајућег друштва на свеобухватну оцену квалитета и ефикасности управљања ризицима у осигуравајућим друштвима, што подразумева укључивање великог броја актера у управљање и контролу ризика, са јасним границама обавеза и одговорности. Како постизање овог захтева и континуирано преиспитивање процена тржишног ризика, солвентности, техничких резерви и уопштено речено исправности пословних одлука у вези за преузетим ризицима и обезбеђивањем средстава за њихово покриће, Директивном солвентности II се уводе четири нове функције система управљања осигуравајућим друштвима. Уводе се функције управљања ризицима, интерне контроле, интерне ревизије и актуарство (Directive, 2009/138/EC).¹⁸ Основна сврха ових функција јесте унапређење надзора пословања осигуравајућих друштава, кроз адекватнију расподелу задужења, овлашћења и одговорности у погледу доношења одлука и њиховој контроли. На овај начин уводи се управљање осигуравајућим друштвима по принципу *checks and balances*, који прави јасну дистинкцију органа који доноси одлуке и органа који врши валидацију исправности тих одлука. Имплементацијом ових функција постиже се заштита осигуравајућих друштава кроз три нивоа. Први се огледа кроз идентификацију и анализу ризика на дневном нивоу. Други ниво одбране одгледа се кроз управљање ризицима преко функције управљања ризицима, актуарске функције и интерне контроле, док се трећи ниво заштите остварује кроз интерну ревизију.

Према правилима Директивне солвентности II осигуравајућа друштва су дужна да формирају функцију управљања ризицима, која подразумева успостављање система за идентификовање, анализу и квантификовање ризика, извештавање о ризицима којима су осигуравајућа друштва изложена и њиховој међусобној условљености и корелативности (Kuhnhausen, 2016). Кључни задатак функције управљања ризицима јесте да применом одговарајућих модела ризика квантификује кључне врсте тржишних ризика којима су изложена осигуравајућа друштва, те утврђивање потребног капитала за њихово покриће. Дакле, задатак функције управљања ризицима јесте да квантификују и утврде минимални захтевани капитал за покриће, између осталог и тржишних ризика.

¹⁸ Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council on taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance – Solventnost II.

Према Директиви, систем интерних контрола подразумева скуп правила и прописа којима се уређују управљачки и рачуноводствени поступци, а којима се обезбеђује поштовање принципа усклађености пословања осигуравајућег друштва. У општем смислу, поштовање принципа усклађености пословања односи се на поштовање закона, интерних аката и уговорних обавеза. Контрола квалитета интерне контроле јесте под надлежношћу функције интерне ревизије. Другим речима, задатак функције интерне ревизије јесте процена квалитета и ефикасности система интерне контроле.

Четврта функција коју су осигуравајућа друштва у обавези да успоставе јесте актуарска функција. Директива солвентности II прописује да актуарска функција мора да обавља послове координације и праћење техничких резерви, извештавање менаџмента друштва о овим питањима и пружање подршке функцији управљања ризицима по питањима преузимања тржишног и уопште осталих ризика и закључивање послова реосигурања.

Трећи стуб Директиве солвентности II односи се на сет правила којима се уређује динамика и начин извештавања осигуравајућих друштава јавности и регулативним органима. Овај сет правила пруденционе контроле прописује учесталост, садржај и форму извештавања јавности о пословању осигуравајућег друштва. Путем редовних и ванредних извештаја, регулаторним органима достављају се одговарајуће квалитативне и квантитативне информације. На овај начин постиже се тржишна дисциплина (Njegovir, 2011).

Упркос чињеници да ни тренутни оквир не представља идеално решење, што и његови творци признају, јер од 2016. године до данас Директива је претрпела неколико измена и унапређења, заснованих првенствено на искуствима из претходног периода, она ипак представља важан корак у унапређењу регулаторног оквира за осигуравајућа друштва у Европској унији. Примарни значај Директиве огледа се у јачању финансијске стабилности осигуравајућих друштава, што је од кључне важности за целокупну економију. Захтеви о адекватном капиталу у односу на ризике, доприносе смањењу вероватноће банкрота осигуравајућих компанија, чиме се стварају услови за стабилнији финансијски систем. Поред финансијске стабилности, Директива Солвентности II игра пресудну улогу у заштити права осигураника. Уводећи принципе транспарентности и обавезу извештавања, осигуравајућа друштва су подстакнута да пружају јасније и потпуније информације о својим ризицима и финансијском стању. Ово побољшава свест потрошача и омогућава им да донесу квалитетније одлуке.

Промовисањем хомогенизације регулаторних захтева у целој Европској унији, Директива солвентности II знатно је олакшала пословање осигуравајућих друштава и допринела унапређењу конкурентности на тржишту осигурања у Европској унији. Истовремено, утицала је на остале земље које желе да постану чланице Европске уније да своје законодавство усагласе са стандардима Директиве. Република Србија усаглашавање свог регулаторног оквира са правилима Директиве солвентности II отпочела је још 2015. године. Кључна унапређења направљена су усвајањем Одлуке о систему управљања у друштву за осигурање/реосигурање којом су скоро у потпуности имплементирани квалитативни захтеви из Директиве у домаћи регулаторни оквир, као и усвајањем Одлуке о техничким резервама кроз коју је имплементиран велики број квантитативних захтева стуба I.

На крају треба истаћи да Директива подстиче иновације у осигурању, јер могућност утврђивања адекватности капитала применом интерних модела, подстичу осигуравајућа друштва да раде на усавршавању модела ризика, али и на проналажењу нових алата за управљање ризицима, што је у складу са новим трендовима као што су дигитализација пословања.

4.1. Стандардизовани приступ за утврђивање захтеваног капитала солвентности за покриће тржишних ризика у осигурању

Прихватање Директиве солвентности II истовремено означава раскид са до тада постојећом праксом, да се у процени ризичности портфолија осигуравајућа друштва више фокусирају на природу посла који обављају, него на идентификацију ризика коме су изложена и степену њихове изложености. Давање предности економској суштини над формом значи обезбеђивање капиталних олакшица за све облике преноса ризика, све док постоје опишљиви економски ефекти (Његомир, 2011). Импликација овога јесте да су осигуравајућа друштва добила могућност да применом правила пруденционе контроле процене стварну изложеност њихових портфолија ризику. На тај начин мотивише се менаџмент да ради на унапређењу процене ризика, јер издвајање средстава у виду минималних капиталних захтева сада је у директној функцији квалитета активе и прецизности процене степена изложености ризику.

Дакле, Директива подстиче осигуравајућа друштва да раде на развоју и имплементацији интерних модела за процену тржишних ризика, како би што прецизније

проценили своју изложеност овим ризицима (Börger, 2010). Будући да је развој и имплементација таквих модела прилично скупа и софистицирана, Европска комисија уз подршку Комитета супервизора осигурања и професионалних пензија, развила је стандардизовани модел заснован на сценарију за апроксимацију капиталних захтева, што се у литератури описује као стандардизовани приступ.¹⁹

Према овом приступу, укупан тржишни ризик подељен је на подврсте у складу са Директивном SCR.5.11. из 2010. године, за које се рачунају одвојени SCR. Тачније, подељен је у седам подмодула за израчунавање тржишног ризика: кредитни ризик, ризик кредитног распона (енгл. *spread*), ризик капитала (хартија од вредности), каматни ризик, ризик непокретности, ризик концентрације, девизни ризик и ризик премије неликвидности²⁰ (European Commission, SCR.5.11., 2010). За сваки подмодул израчунава се посебна SCR. Затим се они агрегирају под претпоставком мултиваријантне нормалне дистрибуције са унапред специфицираном матрицом корелације, како би се омогућили ефекти диверзификације. Логика примене матрице налази се у веровању да је мало вероватно да ће се сви кризни сценарији десити у исто време. Из тога следи да је укупни SCR мањи од збира SCR за сваку подврсту тржишног ризика, што се математички може представити на следећи начин:

¹⁹ Интересантно је истаћи да око 90% осигуравајућих друштава у Немачкој користи стандардизован приступ за одређивање SCR, док 30% осигуравајућих друштава користи интерне моделе VaR за утврђивање SCR као алтернативу. Међутим, ова осигуравајућа друштва имају око 50% тржишног учешћа (видети детаљније у Scherer, M., & Stahl, G. (2021). The standard formula of Solvency II: a critical discussion. *European Actuarial Journal*, 11, 3-20).

²⁰ Овај ризик не треба поистовећивати са ризиком ликвидности, о којем је било речи на претходним странама дисертације. Ризик премије неликвидности односи се на ризик да се изгуби премија за утрживост неутрживе имовине. Специфично за овај ризик јесте што се он у Директиви 2009/138/EC не спомиње, већ се први пут спомиње у QIS 5 техничкој спецификацији. Идеја за дефинисање овог ризика јесте да пошто се неликвидним средствима ређе тргује и тешко се продају на тржишту, то је за њих потребно платити већу цену. Дакле, неликвидна средства би стога требало да генеришу веће приносе од ликвидних. Ова премија на промтну стопу (распон ликвидности) представља премију неликвидности. Другим речима, премија на неликвидности је додатна компензација која се користи за подстицање улагања у средства која се не могу лако или брзо претворити у готовину по фер тржишној вредности. На пример, дугорочна обвезница ће имати вишу каматну стопу од краткорочне јер је релативно неликвидна. Већи принос је премија ликвидности која се нуди инвеститору као компензација за додатни ризик. (детаљније о концепту премије неликвидности видети у De Jong, F., & Driessen, J. (2012). Liquidity Risk Premia in Corporate Bond Markets. *Quarterly Journal of Finance*, 2(2), 1250006.

$$SCR_{market} = \sqrt{\sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 \rho_{ij} SCR_i SCR_j} \quad (13)$$

односно у матричном облику:

$$SCR_{market} = \sqrt{s \cdot P s} \quad (14)$$

при чему су:

$SCR_{i/j}$ - појединачни $SCR_{i/j}$

ρ_{ij} - коефицијент корелације између свака два пара ризика

P - матрица корелације

s - вектор реда са подврстама тржишног ризика

Директивом је јасно приписан начин како се израчунавају SCR за сваки појединачни подмодул ризика. За ризик кредитног распона, који се односи на ризик од губитка вредности активе и/или неповољних промена у обавезама друштва услед флукуација кредитног распона у оквиру неризичне каматне стопе, односно ризик који произилази из негативне промене кредитне способности издаваоца обвезница, SCR се израчунава као збир SCR за обвезнице (укључујући хибридни капитал), SCR за кредитне деривате, као што су свопови, и SCR за кредитне структуре које обухватају корелатизоване дужничке хартије од вредности и обвезнице које су покривене имовином издаваоца. Дакле, у случају ризика кредитног распона не примењује се агрегација применом матрице корелације, већ износ SCR представља прост збир вредности индивидуалних SCR . Износ SCR зависи од рејтинга обвезнице и рока доспећа. Нижи рејтинг обвезнице и дужи рок доспећа утичу да износ SCR буде већи и обратно важи. Важно је истаћи да обвезнице држава чланица ЕУ и њихових централних банака не подлежу Директиви. Такође, ни кредитни деривати не морају да буду подржани сопственим средствима ако се користе за ублажавање ризика. У супротном примењују се два сценарија: 1) повећање распона, између 1,3% за рејтинг ААА и 16,2% за Б или лошији рејтинг) и 2) смањење распона за 75% од тренутног нивоа. Ово правило важи за све кредитне деривате без обзора на рејтинг. Ако је осигуравајуће друштво више инвестирало у кредитне деривате (исказано на стани активе у билансу стања), пад спреда

ће довести до губитка вредности и обранто у случају повећања распона. Супротно је у случају осигуравајућих друштава која су више продавала кредитне деривате.

У случају кретине структуре исти принцип се примењује као код обвезница. Разлика је само у томе што трансхе без рејтинга морају бити 100% покривене сопственим капиталом, као и да трансхе са рејтингом ББ или лошијим морају бити покривене већим износом капитала него у случају обвезница и то чак до 90%.

У случају ризика капитала SCR се утврђује на тај начин што се одређене позиције капитала дисконтују од унапред утврђеног износа. То значи да се у случају акција котираних на берзама земаља ОЕЦД, вредност билансне позиције износи 39%, односно у случају свих осталих берзи за 49%. Такође, постоји и коригујући фактор који служи за ублажавање флукутација на берзи. Фактор је познат као *пригушивача капитала* и износи +/-10% поена. Примена овог приступа заснована је на ставу да ће флукутације на берзи бити веће након раста тржишта (енгл. *bull market*), него у случају пада вредности на берзи (енгл. *bear market*). Износ овог фактора утврђује се према следећој формули:

$$\min \left[\max \left[\frac{I_t - \bar{I}}{\bar{I}}, -10\% \right]; 10\% \right] \quad (15)$$

при чему су:

I_t - вредност тржишног индекса у тренутку (t)

\bar{I} - просечна вредност тржишног индекса у протекле три године

У случају да осигуравајуће друштво у свом портфолију има акције са обе врсте берзи, укупни SCR се утврђује применом израза (13) уз коефицијент корелације од 0,75. Како је већ истакнуто на претходним странама дисертације каматни ризик је ризик који произилази из пада или раста каматних стопа. Промене у каматним стопама утичу на вредност финансијских инструмената са фиксним приносом, као што су обвезнице, али и на вредност техничких резерви. Из тог разлога какав ће утицај имати промене у каматним стопама на вредност капитала и обавеза осигуравајућег друштва тешко је проценити. То пре свега зависи од структуре имовине (активе) и пасиве друштва јер раст каматних стопа утиче на смањење садашњих вредности будућих прилива готивне, али и на смањење садашњих вредности будућих плаћања. Тако да утицај на друштво зависи од структуре у активи и пасиви ових инструмената. Слично је и на страни пасиве код техничких резерви. Са једне стране, садашње вредности будућих премија падају, али са друге стране, садашње вредности будућих плаћања (као што су гаранције или подела

добити у сектору животног осигурања) такође падају. Отуда, генерално се може рећи да ако је промена на страни пасиве већа од промене на страни активе, то доводи до губитка а важи и обратно. Који од ова два сценарија се дешава у случају повећања или смањења каматних стопа, дакле зависи од билансне структуре осигуравајућег друштва. Из тог разлога Директива предвиђа да се израчунавају оба сценарија, с тим што се у случају повећања каматних стопа користе сценарији са променом каматне стопе у распону од 25% до 70% поена, док у случају негативних шокова користи се распон од -75% до -27% (QIS5 Technical Specifications, European Commission, SCR.5.22, 2010).

У случају ризика непокретности користи се дисконтни фактор од 20% за стамбене некретнине, односно од 28% за комерцијалне некретнине, при чему се исти износ коефицијента корелације користи као и у случају акције, 0,75.

Према Директиви, ризик концентрације је ризик који произилази из недостатка диверсификације или високе изложености према појединачним издаваоцима хартија од вредности (Directive 2009/138/EC). Приликом одређивања SCR за ризик концентрације користе се она средства која су већ узета у обзир у модулима ризика капитала, ризик кредитног распона и ризик непокретности (Cech, 2011). Отуда се износ SCR за покриће овог ризика израчунава на темељу свеукупних изложености према појединим емитерима хартија од вредности и њиховом учешћу у портфолију. Прво се сабирају све релевантне изложености које су већ обрађене у модулима ризика капитала, ризик кредитног распона и ризик непокретности, док се искључују изложености које припадају модулу ризика од неизвршења или оне код којих ризик носи осигураник. Ако изложеност према одређеном емитеру премаши дефинисани праг (праг концентрације), неопходно је обезбедити додатни капитал за покриће ризика концентрације и тај износ представља SCR. Праг концентрације приказан је у табели 2.

Слично као у случају ризика каматних стопа, одређивање SCR за покриће девизног ризика постоје два сценарија, сценарио раста и пада девизног курса, при чему сваки претпоставља промену од $\pm 25\%$. За SCR се узима сценарио у коме се јављају већи губици. За разлику од каматног ризика, девизни ризик процењује се посебно за сваку валуту.

Седми подмодел ризика за који се утврђује SCR за покриће тржишних ризика у осигурању, јесте ризик премије неликвидности. Наиме, ова премија додаје се на криву приноса и варира у зависности од врсте валуте. Износ ове премије креће се од нула за неконвертабилне валуте па до 0.53% за евро, односно чак до 0,82% за фунту, са роком

доспећа од 15 година. Дакле, премија зависи од рока доспећа. Њена вредност обрнуто је сразмерна дужини рока доспећа. Највећа је на краткорочна доспећа, док каматне стопе за доспећа од 20 година и више, не укључују премије неликвидности.

С обзиром на то да се ризик премије неликвидности састоји у томе што се ликвидност повећава, те опада премија неликвидности, а последица овога јесте повећање техничких резерви и смањење сопствених средстава. Отуда, сценарио за утврђивање SCR подразумева пад неликвидности за 65%. Тако да се каматне стопе могу израчунати на следећи начин:

$$\tilde{r}_{w,c,t} = r_{0\%,c,t} + w0,35(r_{100\%,c,t} - r_{0\%,c,t}) \quad (16)$$

при чему су:

$\tilde{r}_{w,c,t}$ - каматна стопа у кризном сценарију за валуту (C) и роком доспећа (t) са w процентом премије неликвидности, при чему важи ($w \in (0\%, 50\%, 75\%, 100\%)$)

$r_{0\%,c,t}$ - каматне стопе које су одредили надзорни органи за обрачун техничких резерви – спот каматна стопа

$r_{100\%,c,t} - r_{0\%,c,t}$ - каматна стопа са 100% премијом на неликвидности

Матрица корелације дата је у табели 3.

Табела 2. Матрица корелације

Тржини ризици према	Кредитн и ризик	Ризик капитала	Каматни ризик	Ризик непокре тности	Ризик концен трације	Девиз ни ризик	Ризк премије неликв иности
Кредитни ризик	1	0,75	0,5/0*	0,5	0	0,25	-0,5
Ризик капитала	0,75	1	0,5/0*	0,75	0	0,25	0
Каматни ризик	0,5/0*	0,5/0*	1	0,5/0*	0	0,25	0

Ризик непокретности	0,5	0,75	0,5/0*	1	0	0,25	0
Ризик концентрације	0	0	0	0	1	0	0
Девизни ризик	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1	0
Ризик премије неликвидности	-0,5	0	0	0	0	0	1

Извор: Chech, C. D. (2012). Eigenmittelanforderungen an Versicherungen im Standardansatz von Solvency II. *Wien September*.

Матрица корелације компликована је за коришћење, јер корелација између подмодула каматног ризика, са једне стране и модула капитала, некретнина и спреда (енгл. *spread*), са друге стране, може имати две различите вредности. Ако се каматни ризик процењује у сценарију смањења каматних стопа, онда се користи коефицијент корелације од 0,5. Када се процена каматног ризика врши у сценарију повећања каматних стопа, онда се користи коефицијент корелације једнак нули. SCR за покриће тржишних ризика представља већи износ од два SCR, онај који укључује SCR за каматни ризик у случају повећања каматних стопа и SCR који укључује SCR за каматни ризик у случају смањења каматних стопа.

Из табле 3 може се видети да је коефицијент корелације између ризика маргине и ризика ликвидности негативан. Бројна емпиријска истраживања подржавају ову претпоставку (Chech, 2012; Österreichische Finanzmarktaufsicht, 2011).

Дакле, стандардизовани приступ подразумева да се SCR израчуна за сваки подмодул тржишног ризика према одређеним правилима (формулама), а затим се врши њихова агрегација, применом одређене корелационе матрице која је унапред дефинисана. Међутим, метод агрегације заснива се на претпоставци о мултиваријантној нормалној расподели губитака. Ова претпоставка се може аргументовати коришћењем централне граничне теореме, која каже да се збир идентично и независно распоређених случајних променљивих асимптотски приближава нормалној расподели. У овом контексту, идентично и независно распоређени случајни бројеви могу се тумачити као дистрибуције губитака појединачних уговора о осигурању, а асимптотички значи да број уговора о осигурању мора бити „веома велики“. Међутим, сумњиво је да ли су

појединачне расподеле губитака по уговорима идентично распоређене. Чини се врло упитним да ће они наставити да буду независни.

Са економетријског аспекта, претходно речено имплицира да агрегација према Директиви, тј. примена квадратног корена заснованог на модуларном приступу одговара класи елиптичних дистрибуција. Међутим, класа елиптичних дистрибуција није компатибилна са искривљеном дистрибуцијом типичном за серије промена вредности активе са финансијских тржишта. Серије промена вредности активе са финансијског тржишта показују дистрибуције које имају облик лептокуртичне расподеле (видети Mandelbrot, 1963; Zikovic & Randall, 2013; Radivojevic et al., 2017; Doncic et al., 2022; Markovic et al., 2023). Даље ово имплицира да, иако се у техничким документима (CEIOPS, 2010, 2011; EIOPA 14 322, 2014) наводи да стандардизовани приступ одражава стохастички природу ризика, схема калибрације се пре може сматрати да је рефлексивна субјективних вероватноћа²¹, него објективних вероватноћа заснованих на простору вероватноће, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}_\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ ²², који се од интерних модела разликује по калибрацији параметра θ (Sandström, 2011). Последица овога јесте да износ SCR утврђен применом стандардизованог приступа неће да одговара стварној изложености портфолија осигуравајућих друштава тржишним ризицима. Поред тога, када су у питању тржишни ризици аутори попут, Mittnik (2014), Stahl, (2018) и Scherer и Stahl (2021) критикују калибрацију као недовољну са економетријске тачке гледишта. Експлицитно, наводе да временска серија на којој се калибрација заснива до 2009. године не укључује

²¹ У теорији субјективних вероватноћа користи се концепт кохерентности (Lindley, 2014). Он није исто што и кохерентна мера ризика (о чему ће више бити речи у наставку дисертације). Субјективне вероватноће се називају кохерентне, ако и само ако испуњавају правила за израчунавање вероватноће. Да би се задовољили пробабилистички захтеви за кохерентност, процена ризика добијена применом интерних модела и применом такозване формуле квадратног корена засноване на модуларном приступу морају бити исте. Међутим, само познавање корелација генерално неће у потпуности одредити копулу вероватноћа расподела под-категорија тржишног ризика, стога вероватноћа повезана са ризицима под-категорија ризика није кохерентна субјективна вероватноћа. Другим речима, само познавање матрице корелације није довољно да се добију прецизне процене ризика.

²² Ω - простор узорака, који представља све могуће исходе стохастичког процеса, \mathcal{A} - скуп догађаја који су значајни за анализу, \mathbb{F}_θ - функцију расподеле параметра θ , параметар θ припада скупу Θ , који је подскуп реалних бројева \mathbb{R} у димензији p . То значи да θ може бити вектор параметара и да производи расподеле са различитим својствима у зависности од вредности које узима (Sandström, 2011).

важне аспекте стилизованих чињеница као што су ниске каматне стопе, неуравнотежени јавни буџети и Брегзит и сл.

Тесно повезано са приступом агрегације, јесте и одређивање ефекта диверсификације. Наиме, како се претпоставља да под-категорије тржишног ризика (R_{ij}) следе униформну расподелу, $R_{ij} \sim U(0,1)$, што је еквивалентно претпоставци да су сви ризици подједнако могући, те примена формуле квадратног корена засноване на модулрном приступу, имплицира да су R_{ij} независно дистрибуирани. Ово даље имплицира да се ефекат диверсификације може одредити у случају комонтоничне зависности, што значи да се они крећу у истом правцу у свим случајевима. Међутим, истраживања Scherer и Stahl (2021) показују да само у 75% симулација ефекат диверсификације је близу диверсификације добијене применом интерних VaR модела ризика. Поред тога аутори истичу да кроз матрицу корелације не долази до увођења додатних конзервативних елемената, односно да чак и ако ризици имају неку корелацију, то не значи нужно да ће диверсификација бити боља или лошија. Ово значи да спајање ризика по корелацијама не додаје додатну сигурност или заштиту у овом контексту. Неуважавањем прецизне корелације између под-категорија тржишног ризика утиче се на то да процене SCR буду нереално високе, што негативно утиче на профитабилност осигуравајућих друштава.

Укратко, претходно речено може се сумирати:

- 1) да вероватноће добијене применом стандардизованог приступа нису објективне, већ их треба тумачити као субјективне. Оне нису кохерентне вероватноће, јер формула за агрегацију ризика не важи за дистрибуције које су у складу са ризицима којима је осигуравајуће друштво изложено;
- 2) Да само специфицирање корелација између парова под-категорија тржишног ризика не специфицира функцију копуле. Наравно изузетак је Гаусова копула, али емпиријска истраживања показују да серије расподела вредности и приноса активе са финансијских тржишта одступају од ове дистрибуције;
- 3) Пошто маргиналне дистрибуције нису специфициране, а дистрибуције ризика добијене применом VaR модела карактерише само квантиле, валидност стандардизованог приступа скоро је непроверљива, јер захтева много времена да се на основу дистрибуција квантила ризика прикупи довољно доказа против стандардизованог приступа. Поред тога, матрица корелације у стандардизованом приступу не може се проценити на основу квантила дистрибуције добијене

применом VaR модела. Ово је повезано са чињеницом да корелације зависе и од структуре зависности и од маргиналних дистрибуција.

Стандардизовани приступ не укључује све врсте ризика. Као што се може видети из под-модула за ризик кредитног распона да обвезнице појединих земаља не подлежу Директиви. То значи да стандардизовани приступ не уважава ризик од неизмирења обвеза по основу обвезница емитованих од стране влада појединих држава. Импликација овога јесте немогућност примене арбитраже.

На крају може се извести закључак да стандардизованом приступу недостаје здраво економско и математичко резонување, чак и минимални захтеви (као што су арбитраже и сл). Одсуство математичке структуре и научне строгости чини употребу овог приступа упитним. Даља последица ових запажања је да се не чини адекватним користити стандардизирани приступ као репер за интерне моделе, јер се несигурност овог приступа не може проценити.

4.2. Приступ интерних модела VaR за утврђивање захтеваног капитала солвентности за покриће тржишних ризика у осигурању

У складу са првим стубом пруденционе контроле Директиве солвентности II, осигуравајућа друштва добила су могућност да ниво захтеваног капитала солвентности за покриће изложености тржишним ризицима утврђују применом модела VaR, при чему износ SCR одговара процени VaR. Под интерним VaR моделима подразумева се скуп различитих модела за процену ризика који изложеност ризику исказују у облику потенцијалног максималног губитка вредности портфолија осигуравајућег друштва, који може настати за дати ниво поверења, током одређеног временског периода (Sollis, 2009; Ben Salem et al., 2021). Математички се може исказати као (Alexander, 2008):

$$VaR_{t+1} = \Delta P \quad (17)$$

$$\Delta P = E_t x P_s x \Delta_{si} \quad (18)$$

при чему су:

ΔP - негативна промена вредности портфолија осигуравајућег друштва, уз напомену да ΔP представља принос портфолија, те се у случају VaR ради о негативном приносу портфолија (r)

P_t - вредност портфолија осигуравајућег друштва у садашњем тренутку (t),

P_s - осетљивост вредности портфолија на тржишне ризике

Δ_{si} - промене у факторима тржишних ризика

Овако исказан VaR представља нумеричку апроксимацију потенцијалног губитка услед негативних промена у факторима тржишних ризика. Дакле, то је новчани износ који представља одговор на питање, колико осигуравајуће друштво може да изгуби у вредности свог портфолија током одређеног временског периода за одређен степен вероватноће услед изложености тржишним ризицима. Исказивање изложености ризику кроз нумеричку вредност олакшава разумевање степена изложености тржишним ризицима, као и последице њиховој изложености портфолија осигуравајућег друштва. Сублимирање степена изложености ризику и последица те изложености кроз један број чини VaR, као меру ризика, привлачним.

Из саме дефиниције VaR уочава се да његова вредност зависи од два параметра: 1) од временског периода током којег се врши процена ризика и 2) нивоа поверења, односно вероватноће за коју се врши процена ризика. То што зависи од нивоа поверења, односно од вероватноће за коју се врши процена ризика, имплицира да је VaR, статистичка мера која ризичност портфолија исказује кроз један број, који у себи сублимира квантификацију великог броја тржишних ризика који одређују ризик портфолија (Радивојевић, 2014, 2017). Другим речима, то је статистичка мера финансијског ризика која комбинује ризике из различитих инструмената и један показатељ (McCullagh, 2019). Отуда поједини аутори попут, Радивојевић (2014), Милојковић (2019), Филиповић (2019) и Дончић (2020) истичу да је кључна предност VaR, у његовој способности да сложен и вишедимензионалан концепт ризика сведе на један број – новчани износ који може бити изгубљен.

Претходно речно имплицира да се VaR може исказати и преко вероватноће, што се математички може представити помоћу следећег израза (Babiš, 2024):

$$\Pr(\Delta P < VaR) = \mathcal{F}_{\Delta P}(VaR) \quad (19)$$

односно у нотацији Директиве солвентности II

$$p = \mathbb{P}\Delta P_a \leq VaR = \mathcal{F}_a(VaR) \quad (20)$$

при чему су:

- Pr/p - Вероватноћа да промена вредности портфолија буде мања у односу на VaR
- ΔP - промена вредности портфолија осигуравајућег друштва
- $f(\Delta P)$ - функција густине вероватноће промене вредности портфолија осигуравајућег друштва
- $F_{\Delta P}$ - кумулативна функција вероватноће промене вредности портфолија осигуравајућег друштва
- cl - ниво поверења за који се врши процена ризика
- α - ниво значајности, односно вероватноћа прекорачења $\alpha = (1-cl)$

У литератури овакав начин исказивања VaR познат је као параметарска нотација VaR , јер се VaR може одредити само на основу параметара дистрибуције. У зависности од претпоставке дистрибуције промена вредности портфолија, зависи број параметара који је потребно познавати да би се утврдио VaR . Уобичајена претпоставка јесте да се ради о нормалној дистрибуцији, што је у складу са Директивом солвентности II. У том случају довољно је познавати само два параметра дистрибуције, средину и стандардну девијацију. Под овом претпоставком VaR се може израчунати као:

$$VaR_{\alpha} = -P \cdot z_{\alpha} \sigma \quad (21)$$

при чему су:

- P - вредност портфолија у тренутку (t)
- z_{α} - вредност из табеле стандардизоване нормалне расподеле, чија вредност је одређена нивоом поверења
- σ - стандардна девијација промена вредности портфолија осигуравајућег друштва

Исказивања VaR применом израза (21) директна је последица третирања промене вредности портфолија осигуравајућег друштва као случајне варијабле, о чему је већ било речи на претходним странама дисертације. Наиме, третирања промене вредности портфолија као случајне варијабле омогућава да се променама вредности припише одређена дистрибуција вероватноће, која представља репрезентацију шанси настанака потенцијалних промена вредности, при чему те промене могу бити позитивне и

негативне. За израчунавање VaR значајне су само негативне промене вредности. Иначе, у литератури ова дистрибуција често се означава као дистрибуција приноса и губитака портфолија.

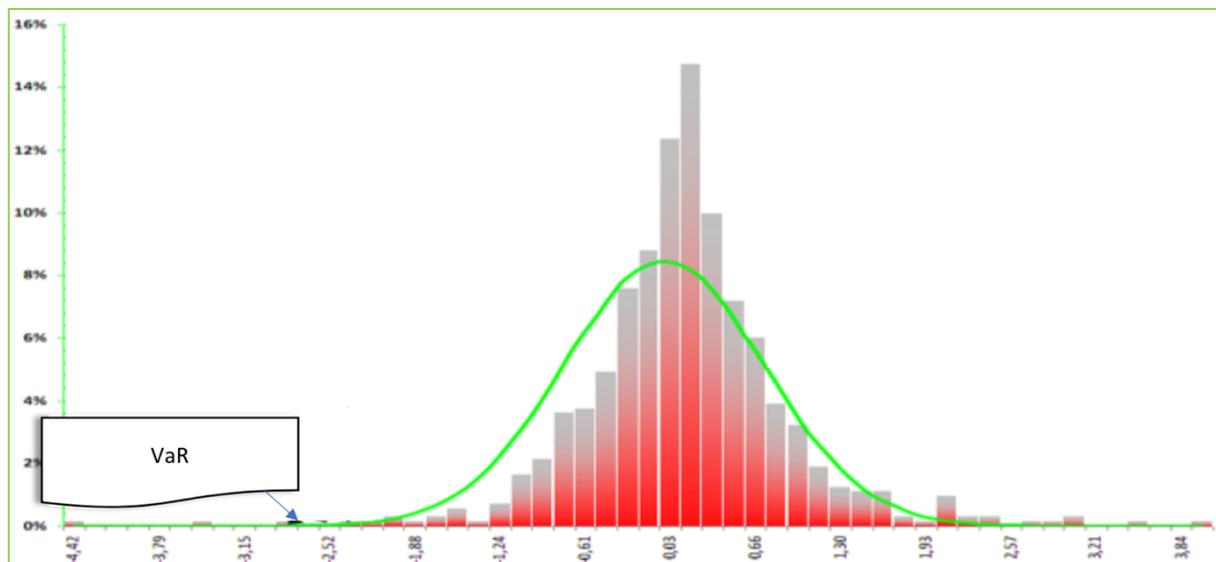
С обзиром да се свакој потенцијалној промени вредности портфолија може приписати одговарајућа вероватноћа наставка, то значи да је могуће утврдити кумулатив функције вероватноће. Импликација овога јесте да се VaR, за дати ниво поверења, може утврдити као квантил дистрибуције промена вредности портфолија, што је представљено изразом (19). Другим речима, израз (19) имплицира да је VaR у ствари одсечак (енгл. *cutoff*), при чему разлика између $(1-cl) = \alpha$, ниво значајности, представља вероватноћу да ће негативна промена у вредности портфолија бити већа од вредности VaR, односно да ће доћи до прекорачења, што се математички може исказати на следећи начин:

$$VaR = -\Delta P = \inf\{-\Delta P \mid F_{\alpha}(x) \geq p\} \quad (22)$$

при чему је *inf*: мали реалан број.

Графички, претходно речено, може се представити као на слици 12.

Слика 12. Графички приказ VaR процене



Извор: Аутор

Са слике 12 јасно се уочава да VaR представља одсечак на левој страни дистрибуције промене вредности портфолија. Из тог разлога у изразу (21) и (22) примене наглашава се негативна промена вредности портфолија $(-\Delta P)$. Са слике се уочава да површина лево од одсечка представља потенцијални губитак који није покривен.

Приказивањем потенцијално очекиваног и неочекиваног губитка на овај начин омогућава да се VaR изрази и у облику одређеног интеграла:

$$F_{\Delta P}(VaR) = \int_{-\infty}^{VaR} f(\Delta P)d(\Delta P) \quad (23)$$

Квантитативним правилима пруденционе контроле Директиве солвентности II јасно су дефинисани параметри под којима су осигуравајућа друштва дужна да врше процене VaR. Сходно овим захтевима осигуравајућа друштва су у обвези да процене VaR врше за ниво поверења од 99,5% и за временски период од једне године. Изабрани ниво поверења кореспондира са вероватноћом да ће се десети нежељени догађај једанпут у 200 година. За разлику од пруденционих правила Базелског комитета за супервизију банака, којима је јасно дефинисан период на основу којег се врши процена VaR, Директива солвентности II оставља слободу осигуравајућим друштвима да сама одреде тај период. Уобичајено да се користи период од једне до три године, будући да нико не жели своје процене ризика да заснива на много старим подацима, са једне стране, док са друге стране краћи период посматрања смањује број догађаја који спадају у сам реп дистрибуције.

Претходна дискусија јасно сугерише на предности примене интерних модела. Међутим, важно је истаћи да примена VaR са собом носи одређене недостатке који произилазе из економетријских карактеристика VaR, као мере губитка, са једне стране и начињених претпоставки дистрибуције промена вредности портфолија са друге стране (Gerunov, 2022). Наиме, VaR као мера ризика не испуњава све особине кохерентне мере ризика. Artzner (1999) је утврдио да кохерентна мера ризика мора да задовољава: 1) услов хомогености, што значи да од вредности портфолија зависи и износ VaR; 2) услов монотоности односи се на захтев да што је већи ризик и износ новца који се издваја за његово покриће мора да буде већи; 3) услов непроменљивости на транслацију, односи се на услов да укључивањем безризичне активе, укупан ризик портфолија се не мења; 4) услов субадитивност, односи се на захтев да је VaR портфолија мањи у односу на збир VaR-ова актива из његовог састава. Нажалост, VaR не испуњава последњу особину. Дешава се да збир VaR-ова појединачних актива буде мањи у односу на VaR портфолија (Radivojevic et al., 2017).

Други недостатак VaR односи се на неиспуњење претпоставке о нормалности дистрибуције промене вредности портфолија. Наиме, бројна емпиријска истраживања показују да серије приноса са финансијских тржиште имају дистрибуције које се

одликују дебљим реповима него што се предвиђа дистрибуцијом нормалности. То значи да се екстремни догађаји дешавају чешће него што се предвиђа под овом претпоставком. Поред тога, емпиријска истраживања показују да серије приноса нису идентично дистрибуиране и да између промена у активи постоје аутокорелације. Другим речима, то значи да серије приноса нису IID. То значи да процена ризика зависи од периода узорковања података. Другим речима, то што нису идентично дистрибуирани, значи да дистрибуција промене вредности активе није стационарна. Импликација овога јесте да прошле дистрибуције промене вредности активе не могу бити основа за предвиђање будућих (Damodaran, 2007). Отуда, избор периода узорковања детерминише валидност процене VaR.

Мера ризика која испуњава све особине кохерентне мере ризика јесте очекивани губитак (енгл. *Expected Shortfall - ES*). ES представља просечан губитак изнад вредности VaR (Zhou, 2024). Математички може се исказати на следећи начин (Lempinen, 2024):

$$ES_a = E[\Delta P | \Delta P \leq VaR_a] \quad (24)$$

односно у облику интеграла

$$ES_a = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P dF_{\Delta P}^a(\Delta P) \quad (25)$$

при чему је:

$$F_{\Delta P}^a(\Delta P) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ када је } \Delta P < VaR_a \\ \frac{F_{\Delta P}^a(\Delta P) - a}{1 - a}, \text{ када је } \Delta P \geq VaR_a \end{array} \right\} \quad (26)$$

Задовољавање особина кохерентности ES чини пожељну меру ризика (Del Brio et al., 2020). Недостатак код употребе ES односи се на комплексност тестирања валидности модела. За разлику од тестирања валидности VaR модела, тестирање валидности ES процена изузетно је комплексан посао. Међутим, упркос овоме, усвајање Базел III стандарда у банкарству је постао обавезан стандард, који све више добија на популарности и код осигуравајућих друштава.

Други део

VaR МОДЕЛИ ЗА ПРОЦЕНУ ТРЖИШНИХ РИЗИКА У ОСИГУРАЊУ

1. Параметарски VaR модели

Од појаве првог VaR модела, познатог под називом *RiskMetrics*, представљеног од стране JP Morgan банке 1996. године (Radivojevic & Stancic, 2015), па до данас, развијен је велики број VaR модела и последњих година ES на њиховим основама. Заједничка карактеристика свим тим моделима јесте да се заснивају на одређеним претпоставкама којима се у већој или мањој мери одражавају реалности са финансијских тржишта. Степен уважавања реалности начињених претпоставки детерминишу предности и недостатке VaR модела. Начињене претпоставке у основи представљају trade off између једноставности процене ризика и прецизности истих, уз напомену да се једно дешава на рачун другог. Отуда, најједноставнији модели уједно представљају у најнепрецизније VaR моделе.

Претходно изнетом надовезује се чињеница да иако, данас, постоји велики број VaR модела и на њима изграђених ES модела, сви они могу да се поделе у три категорије (Astuti & Gunarsih, 2021): параметарски VaR модели, непараметарски VaR модели и полу-параметарски VaR модели. У оквиру ове три групе модела у теорији су се издвојила по два модела из сваке категорије и то редом: Варијанса-коваријанса модел (енгл. *Variance-covariance* – VCV), *RiskMetrics* (RM), Стандардни модел историјске симулације (енгл. *Historical simulation* - HS), Модел огледала историјске симулације (енгл. *Mirror*

Historical simulation - MHS), Филтрирани модел историјске симулације (енгл. *Filtered Historical simulation* - FHS) и Модел Bootstrap историјске симулације (BHS), који ће детаљно бити описани у наставку дисертације. Треба истаћи да модели као што су VCV и HS модели у пракси данас нису више толико заступљени, из разлога што претпоставке на којима они почивају више не одсликавају реалне тржишне услове. Међутим, њихов значај огледа се у теоријском смислу, јер представљају основу за развој свих осталих VaR и ES модела. Стога су вредни помена и анализе.

Параметарски модели су се први појавили и према броју представљају најбројнију групу модела за процену тржишних ризика. Назив су добили по томе што је за процену VaR довољно познавати само параметре дистрибуције промене вредности портфолија. Из израза (21) види се да је за израчунавање VaR довољно познавати само стандардну девијацију и вредност портфолија. Како се израз (21) може модификовати и изразити у релативном облику кроз стопу промене вредности портфолија, која у ствари представља просечну вредност стопа промена вредности портфолија (μ) током посматраног периода, то је довољно познавати и други параметар дистрибуције (μ) да би се утврдио VaR.

Приликом прихватања претходно описаног, треба бити опрезан, будући да описан начин процене VaR сугерише да је довољно познавати само два параметра дистрибуције. Ово је тачно само када се ради о нормалној дистрибуцији, будући да је нормална дистрибуција описана у потпуности само са средином (μ) и стандардном девијацијом (σ) (Kar et al., 2024). У случају осталих врста дистрибуције, потребно је познавати и остале параметре дистрибуције, као што је на пример реп дистрибуције и сл. Отуда, може се генерализовати да у параметарске VaR моделе спадају сви модели који се заснивају на претпоставци да емпиријској дистрибуцији промене вредности портфолија одговара одређена теоријска дистрибуција. У зависности од избора теоријске дистрибуције зависи и број параметара који је потребно познавати како би се утврдио VaR. Другим речима, параметарски модели заснивају се на претпоставци да су промене вредности портфолија независне случајне варијабле које следе одређену теоријску дистрибуцију.

Најједноставнији модел из ове групе јесте VCV модел, будући да се заснива на претпоставци о нормалној дистрибуцији, док најпознатији модел јесте RM. На основама ових модела развијени су бројни други параметарски модели. Може се рећи да остали модели представљају модификације и унапређење ова два модела у делу процене волатилности. У наставку дисертације, поред VCV и RM, биће анализирани и неки од

најзначајнијих њихових модификација, уз указивања на принципе на којима почивају све те модификације.

1.1. Варијанса-коваријанса VaR модел

Као што је већ истакнуто варијанса-коваријанса VaR модел представља најједноставнији параметарски VaR модел²³. Као што му и сам назив каже, заснива се на матрици коваријанса између свака два пара актива из састава портфолија, при чему су на главној дијагонали матрице смештене варијансе индивидуалних актива. Математички, матрица варијанса-коваријанси (Σ) може се написати у следећем облику (Irsan et al., 2022):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} X_1 X_1 \sigma_{1,1} & \cdots & X_1 X_n \sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 \sigma_{1,1} & \cdots & X_n X_n \sigma_{n,n} \end{pmatrix} \quad (27)$$

при чему су:

Σ - матрица варијанси-коваријанси

X_i/X_j - учешће i/j -те активе из састава портфолија

$\sigma_{i,j}$ - коваријанса између свака два пара активе из састава портфолија

n - број активе у саставу портфолија

На основу израза (27) лако се уочава да се ради о симетричној ($\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$) квадратној матрици у односу на главну дијагоналу на којој се налазе варијансе, што се једноставно може увидети трансформисањем израза за израчунавање коваријансе између свака два пара активе из састава портфолија

$$\sigma_{ij} = \sum_{i=1, j=1}^n [(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)] \frac{1}{n-1} \text{ као } \sum_{i=1}^n (r_{c,i} - \bar{r}_c)(r_{c,i} - \bar{r}_c) = \sum_{i=1}^n (r_{c,i} - \bar{r}_c)^2 = \sigma_c^2 \quad (28)$$

при чему су:

²³ Поједини аутори, попут Sollis (2009) истичу да је ово најстарији познати модел за процену VaR, јер се појављује средином 80-тих година, прошлог века у извештајима Bankers Trust.

- σ_c^2 - варијанса с-те активе из састава портфолија
- $r_{c,i}$ - промена вредности /принос с-те активе из састава портфолија
- n - укупан број промена вредности/приноса с-те активе из саставе портфолија
- σ_{ij} - коваријанса приноса између i-те и j-те активе у саставу портфолија
- σ_{ij} - коваријанса приноса између i-те и j-те активе у саставу портфолија

Када се у израз за израчунавање варијансе портфолија осигуравајућег друштва инкорпорира израз (27) добија се следеће за варијансу:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \Sigma \quad (29)$$

односно за стандардну девијацију портфолија, будући да се волатилност портфолија исказује у термину стандардне девијације:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \Sigma} \quad (30)$$

Двоструки знак сума значи да се збрајају по редовима и колонама сви елементи квадратне матрице реда. Инкорпорирањем израза (30) у израз (21) за израчунавање VaR портфолија, добија се следећи израз за израчунавање VaR применом VCV VaR модела

$$VaR_a = -P \cdot z_a \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \Sigma} \quad (31)$$

С обзиром да матрица варијанси-коваријанси подразумева да између промена вредности актива из састава портфолија осигуравајућег друштва постоји линеарна зависност, што је еквивалентно претпоставци нормалности, то значи да VCV модел почива на претпоставци да су промене вредности портфолија нормално дистрибуиране. Наиме, уколико су промене вредности индивидуалних актива нормално дистрибуиране, промене вредности портфолија као линеарна комбинација тих нормално дистрибуираних промена вредности индивидуалних актива имплицира да су и промене вредности портфолија нормално дистрибуиране (Pratiwi, 2024). Дакле, VCV модел заснива се на претпоставци о нормалности дистрибуције промена вредности портфолија

осигуравајућих друштава, при чему се те промене третирају као независне случајне варијабле.

Прихватање ове претпоставке има две значајне импликације. Прва, огледа се у једноставности утврђивања VaR. За процену VaR довољно је познавати само стандардну девијацију промена вредности портфолија. Будући да је реч о нормалној дистрибуцији вредност z_a унапред је позната и зависи, како је већ истакнуто, од нивоа поверења. Друга импликација омогућава једноставну трансформацију VaR за различите нивое поверења и периоде израчунавања. Тако, применом правила *корена времена* могуће је VaR утврђен за дужи холдинг период трансформисати у VaR за краћи холдинг период и то применом израза $VaR_t = VaR_T \sqrt{t/T}$, односно применом израза $VaR_T = VaR_t \sqrt{T}$ VaR утврђен за краћи холдинг период трансформисати у VaR за дужи холдинг период, при чему је $T > t$ (Kulali, 2016):

На сличан начин може се вршити и трансформација VaR за различите нивое поверења:

$$VaR_{cl_1} = (cl_1/cl_2) VaR_{cl_2} \quad (32)$$

Међутим, прихватање ове претпоставке са собом носи и значајан недостатак, који се огледа у чињеници да серије приноса са финансијских тржишта не следе нормалну дистрибуцију. Отуда, VCV VaR модел није у стању прецизно да кооптира тржишне ризике портфолија осигуравајућих друштава јер серије промене вредности портфолија и активе са финансијских ризика показују дебље репове и издуженију расподелу него што се предвиђа под претпоставком нормалности дистрибуције. Из тог разлога бројни аутори раде на унапређењу овог модела, пре свега у оном делу који се тиче релаксирања претпоставке нормалности, али и израчунавања саме волатилности портфолија. Наиме, поред тога што матрица варијанси-коваријанси подразумева прихватање претпоставке нормалности, она истовремено значи прихватање и претпоставке да варијанса дистрибуције промена вредности портфолија јесте константа током времена. Другим речима, она се заснива на претпоставци о хомоскедастичности варијансе. Ова претпоставка не уважава чињеницу да волатилност портфолија зависи од волатилности из претходног периода, те да приликом утврђивање текуће волатилности морају се узети у обзир њене претходне реализације. С аспекта економетрије, то значи да се изразом (29) добија безусловна варијанса портфолија. Овако добијена варијанса портфолија не

уважава реалност са финансијских тржишта, да велике промене у вредностима активе следе велике, а да мале промене следе мале, што указује да је реч о појави кластера волатилности. Добро је познато да су кластери волатилности последица аутокорељације између промена вредности портфолија. Последица кластера волатилности, с аспекта економетрије, огледа се у томе да варијанса портфолија није константа током времена, већ да је подложна променама. Дакле, претпоставка о хомогености варијансе није валидна, што утиче на валидност процена VaR добијених применом VCV модела.

VCV модел претпоставља да су промене вредности индивидуалних актива линеарно зависне. Импликација овога јесте да овај VaR модел не може да кооптира портфолија код који постоје сложени обрасци зависности, као што су нелинеарне корелације. То је из разлога што линеарна зависност подразумева апроксимацију првог реда, која не може адекватно да се примени на финансијске деривате јер промене у њиховим вредностима зависе од промена вредности основне активе на основу којих су изведени. Поред тога последица овога јесте да нелинеарне изложености генеришу искошене, а несиметричне дистрибуције, каква је нормална дистрибуција (Jorino, 2011).

Иако са развојем савремених информационих технологија, проблем комплексности утврђивања ефикасног портфолија све више губи на значају, на крају значајно је указати да са повећањем броја активе у саставу портфолија расте сложеност процене VaR, применом VCV модела. Ово је из разлога што са повећањем броја актива у портфолију расте број података потребних за утврђивање ефикасног портфолија, по обрасцу $n(n + 3)/2$ (Jorino, 2023), јер за израчунавање матрице потребно је утврдити n варијанси и $(n^2 - n)/2$ коваријанси. У пракси, поједини аутори овај проблем описују као проблем процене грешке матрице у односу на њену димензију (Dave & Stahl, 1998). Могуће сингуларности у матрици варијанса-коваринса због дефеката ранга могу настати када је величина узорка мања од димензија матрице корелације. Ова ситуација се често јавља када се користи популарна пракса да се процене ризика заснивају на историјској серији података од једне године, односно од 250 дана. У овом случају проблем настаје због тога што се поуздане процене ризика не могу добити из неинвертибилне матрице. Последица овога јесте да се добијају процене ризика које су потцењене, што сугерише да је портфолио мање ризичан него што заправо јесте. Последица овога јесте да процена ризика сугерише погрешну алокацију капитала (Chebbi & Hedhli, 2022).

1.2. RiskMetrics VaR модел

Модел који уважава чињеницу да варијанса, односно волатилност финансијске активе није константа током времена, већ да се мења, јесте RiskMetrics модел. Другим речима, модел уважава чињеницу да текућа волатилност зависи од њених претходних реализација. Из тог разлога у изразу (21) за процену VaR уместо безусловне стандардне девијације (σ) израчунава се условна стандардна девијација (σ_t). Тако израз за процену VaR у RiskMetrics изведби добија следећу нотацију, при чему субскрипт (t) јасно означава да је реч о временској зависности стандардне девијације:

$$VaR_a = -P \cdot z_a \sigma_t \quad (33)$$

Дакле, RiskMetrics модел уважава чињеницу да волатилност из претходног периода утиче на текућу. Међутим, питање је колики је тај утицај, као и колико тај утицај опада са протоком временског периода у коме се историјска волатилност десила. Како би се кооптирала ти различити утицаји у RiskMetrics моделу направљена је претпоставка да се тај утицај експоненцијално смањује са протоком једне јединице времена. Из тог разлога у RiskMetrics модел инкорпориран је тзв. модел волатилности који се заснива на приступу експоненцијално пондерисаних покретних средина (енгл. *Exponentially Weighted Moving Average* - EWMA):

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^N} \sum_{n=1}^N \lambda^{n-1} r_{it-n}^2} \quad (34)$$

са коваријансом

$$\sigma_{ij} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^N} \sum_{n=1}^N \lambda^{n-1} r_{it-n}^2 r_{jt-n}^2 \quad (35)$$

при чему су:

σ_t - стандардна девијација портфолија осигуравајућег друштва

σ_{ij} - коваријанса i -те и j -те активе из састава портфолија осигуравајућег друштва

r_{ij} - стопа промене вредности i -те / j -те активе из састава портфолија

N - укупан број реализација

λ - фактор опадања који може да узима вредности од нуле до један, уз напомену да се у изразу (17) појављује $(1-\lambda)/(1-\lambda^N)$ из разлога што важи да је $\sum_{n=1}^N \lambda^{n-1} = (1-\lambda^N)/(1-\lambda)$ или приближно $1/(1-\lambda)$, када $N \rightarrow \infty$.

Израз (34) сугерише да се процена волатилности мења сваког дана, односно да се у процене уграђују нове информације и одбацују стара запажања. На тај начин одражава се стохастичка природа волатилности. За лакше разумевање овог механизма, израз (34) може се написати у рекурзивном облику, тако да се добије:

$$\sigma_t = \sqrt{\lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_p^2} \quad (36)$$

Из изрази (36) јасно се може видети да волатилност (стандардна девијација) у тренутку (t) представља пондерисани просек волатилности (стандардне девијације) у тренутку (t-1) и величине промене вредности портфолија у тренутку (t). Овакав приступ омогућава да се кооптирају високе флукуације у вредности портфолија, односно када варијанса показује особину хетероскедастичности.

Дакле, кључна разлика у односу на VCV модел, код којег се претпоставља да је варијанса непроменљива током времена, што би у контексту модела волатилности значило да се свим реализацијама варијансе приписује исти утицај на текућу, без обзира на њихову старост тј. тренутак када се десила у прошлости, јесте да се код *RiskMetrics* модела уважава да тај утицај зависи од периода реализације варијансе. Укључивањем фактора опадања (λ) осигурава се да се реализацијама варијансе из прошлости приписују опадајући пондери који према изразу (35) експоненцијално опадају. На овај начин постиже се да утицаји реализација из блиске прошлости имају већи значај од оне из даље. Тиме се решава и тзв. проблем ефекта духа, који је познат у квантитативним финансијама. Наиме, ради се о томе да реализације из далеке прошлости током целог периода узорковања имају исти утицај на процену VaR, и да тај утицај одједном нестане када та реализација испадне из узорка. С аспекта захтеваног капитала солвентности ово доводи до тога да осигуравајуће друштво мора да издваја током целог периода, тачније све док та реализација не испадне из узорка, већа средства техничких резерви за покриће потенцијалног губитка, иако у стварности ризик није толики. Применом приступа *EWMA* овај проблем се донекле решава, јер како реализација постаје све старија и старија у узорку, тако њен утицај на оцену текуће волатилности опада.

Питање које остаје неразјашњено јесте колико брзо утицај прошле реализације на оцену текуће волатилности треба да опада. Другим речима, како утврдити прецизну вредност фактора опадања (λ), при чему важи да што је нижа вредност фактора опадања то се већи значај (утицај) приписује реализацијама из ближе прошлости (Mina & Xiao, 2001). Ако је фактор опадања (λ) једнак један, модел се своди на једнако пондерисани просек промена вредности портфолија на квадрат, што је у основи VCV модела.

У *RiskMetrics* моделу за процену тржишних rizika фактор опадања (λ) подешен је на 0.94 за процене VaR на дневном нивоу, односно на 0.97 за процене VaR на месечном нивоу. Овако подешен фактор опадања (λ) значи да реализацијама старим месец дана приписује се пондер који је мањи од 0.01, односно два месеца пондер који је мањи од 0.001 (Pearson, 2002). Овакав систем пондерисања одговара високо волатилним тржиштима. Упркос критикама да је фактор опадања (λ) од 0,94 за дневне процене VaR висок (Alexander, 2001), водећи се идејом да величина будућих промена вредности портфолија треба да одговара нивоу волатилности, Fleming et al., (2001) утврдили су да оптималан фактор опадања има приближну вредност од 0,94 за дневне процене VaR. До овог закључка дошли су компарацијом волатилности добијене са одређеним вредностима фактора опадања (λ) са стварном волатилношћу.

На основу израза (33) лако се уочава да се *RiskMetrics* модел заснива на претпоставци да серија промена вредности портфолија осигуравајућег друштва следи нормалну дистрибуцију. Тако да се *RiskMetrics* модел може дефинисати као модел VaR који се заснива на претпоставци о нормалној условној дистрибуцији промена вредности портфолија (Liu et al., 2020).

Имајући у виду апострофирана, на претходним странама, истраживања (Radivojevic et al., 2020), која указују да серије приноса активе са финансијских тржишта не следе нормалну дистрибуцију, већ да имају дебље репове и искривљену дистрибуцију, доводи се у питање валидност примене *RiskMetrics* модела, пре свега на тржиштима у настајању, која се одликују појавом кластера волатилности и аутокорељацијом између промена вредности портфолија. Последица овога јесте погрешна алокација капитала (Chebbi, & Hedhli, 2022). Chebbi и Hedhli (2022) утврдили су да *RiskMetrics* доводи до потцењивања или прецењивања rizika у зависности од карактеристике дистрибуције серија промена вредности активе са финансијских тржишта у настајању. Међутим, без

обзира да ли модел генерише прецењене или потцењене процене ризика, последица с аспекта захтеваног капитала солвентности је иста, а огледа се у погрешној алокацији.

Немогућност *RiskMetrics* модела да адекватно кооптирају дебеле репове утицало је на бројне ауторе да раде на решавању овог проблема, односно унапређењу модела, фокусирајући се на унапређење модела волатилности. Поред овога, примена *EWMA* приступа не уважава чињеницу да волатилности на финансијским тржиштима теже да буду стабилне у дугом року. Из тог разлога процене ризика валидне су само када се процена врши за краће временске периоде, као што су дневне процене VaR. У супротном процене доводе по тога да процене VaR буду ниже у односу на стварну изложеност ризику.

GARCH модели уважавају чињеницу да волатилност тежи равнотежном стању у дугом периоду. Најједноставнији модел из ове фамилије модела јесте GARCH(1,1):

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2 \quad (37),$$

уз услов да је сума $\alpha + \beta$ јендако или мање од 1. *RiskMetrics* модел не може да кооптира дугорочну волатилност, што се може сагледати из варијанса *RiskMetrics* модела (σ^2) и искаже преко параметара GARCH модела:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (38)$$

”Израз (38) сугерише да када су $\alpha + \beta = 1$, као што је код *RiskMetrics* модела, модел волатилности не може на адекватан начин да дефинише дугорочну волатилност јер занемарује чињеницу да она тежи да буде стабилна у дугом року (Radivojević & Stancic, 2015)”.

На крају треба истаћи, да упркос критици приступа експоненцијално пондерисаних покретних средина и претпоставке о нормализованој условној дистрибуције промене вредности портфолија, једноставност и лакоћа примене *RiskMetrics* модела у његовој изворној форми и даље чине модел привлачним да се широко користи у пракси. Истовремено, ово утиче на бројне ауторе да и даље раде на његовом унапређењу.

1.3. VaR модели засновани на фамилији GARCH модела волатилности

Како би се ублажили, односно елиминисали недостаци *RiskMetrics* модела, данас се бројни аутори фокусирају на унапређење модела волатилности који је инкорпориран у *RiskMetrics* модел. Подједнако су ти напори усмерени како на унапређење кооптирања условне волатилности, односно нестационарности временске серије промена вредности портфолија, аутокорелацију и хетероскедастичност, тако и кооптирање дебелих репова. Резултат тих напора јесте развој великог броја модела који се заснивају на различитим моделима волатилности из фамилије GARCH модела, са различитим претпоставкама о дистрибуцији иновација (резидуала).²⁴

Најпознатији такав VaR модел јесте *RiskMetrics* модел заснован на GARCH моделу волатилности. У најпоштенијем облику GARCH модел волатилности може се исказати на следећи начин (Hentschel, 1995):

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2 \quad (39)$$

при чему су:

- α_i - параметар који детерминише интензитет утицаја промене вредности портфолија волатилност
- β_j - параметар који репрезентује промену волатилности
- ω - константа која репрезентује дугорочни просек волатилности
- p, q - параметри реда, при чему p одређује колико претходних промена вредности портфолија утиче на условну волатилност, док q одређује колико претходних варијанса промена вредности портфолија утиче на условну волатилност

GARCH(p, q) процењује условну варијансу као функцију њених историјских вредности, што значи уважавање чињенице да претходна волатилност има капацитета да утиче на будуће волатилности. Другим речима, заснован је на претпоставци да промене

²⁴ GARCH модели су дизајнирани да обухвате ситуације када варијанса грешака није константна, већ се мења у зависности од информација које су доступне у времену. То значи да су шокови (нпр. промене у вредностима актива) у стању да утичу на варијансу у будућности.

вредности портфолија следе стохастички процес са временски променљивом волатилношћу. Овако специфициран модел волатилности способан је да кооптира хетероскедастичност варијансе. Број параметара који је потребно оценити зависи од структуре p и q параметара. Управо ово, уз чињеницу да даје задовољавајуће процене волатилности, с аспекта *trade off-a* између прецизности процене и рачунарске захтевности, чини га најпопуларнијим моделом волатилности, данас. Нарочито ово важи за дневне процене волатилности (Alexander et al., 2021). У случају генерисања процена волатилности за дуже временске интервале модел показује нешто скромније резултате.

Међутим, основни недостатак GARCH модела, који се може наслутити из израза (39), јесте тај што није у стању да кооптира асиметрију у дистрибуцији промена вредности портфолија. Квадрати у изразу (39) утичу на то да предзнак промене вредности нема утицаја на процену волатилности (Xiao & Aydemir, 2007).²⁵ Наиме, опште је познато да негативне промене у вредности портфолија имају већи утицај на будуће промене вредности (волатилност), него позитивне промене исте магнитуде (Hentschel, 1995). У литератури ова појава позната је као ефекат леверица²⁶. Последица овога јесте да дистрибуција промене вредности портфолија није симетрична, него искошена на леву страну. Другим речима, дистрибуција има дебље репове на левој него на десној страни.

С аспекта моделирања условне волатилности, последица овога огледа се у томе да је важно имати у виду да ли се ради о позитивним или негативним променама у вредности портфолија. Модел волатилности који уважава ову чињеницу јесте тзв. EGARCH модел (енгл. *Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity – EGARCH*). У математичком облику модел се може написати на следећи начин²⁷:

²⁵ Xiao, L., Aydemir, A., (2007) "Volatility modelling and forecasting in finance", Forecasting Volatility in the Financial Markets, Butterworth-Heinemann publications, Oxford, p. 8.

²⁶ Ефекат леверица (енгл. *Leverage Effect*) је феномен који се уобичајено посматра у финансијским тржиштима, где негативни шокови (падови цена акција) имају већи утицај на условну волатилност (волатилност у будућности) од позитивних шокова (раст цена акција) исте величине. Ово је посебно важно у контексту моделовања ризика и волатилности (Onyeaka-Ubaka & Anene, 2020).

²⁷ Изражавање волатилности у логаритамском облику осигурава да варијанса увек остане позитивна.

$$\ln(\sigma^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\eta_{t-i}| + \sum_{i=1}^p \gamma_i \eta_{t-1} + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (40)$$

при чему су:

γ - параметар ефекта леверица на волатилност; $\gamma < 0$ репрезентује утицај позитивних промена вредности портфолија на волатилност, односно $\gamma > 0$ утицај негативних промена вредности портфолија на волатилност

η - параметар који репрезентује интензитет и смер утицаја ефекта

Овако структуриран модел волатилности треба да је у стању да генерише процене волатилности које зависе од тога да ли се ради о позитивној или негативној промени у вредности портфолија, што га чини пожељнијим од GARCH модела. Истовремено решава проблем GARCH модела који произилази из услова да су ω и β_j не негативни (Francq & Zakoian, 2019). Наиме, овај услов је уведен како би се осигурало да варијанса буде позитивна током читавог периода посматрања. Међутим, увођење овог ограничења искључује осцилаторно понашање волатилности јер повећање промене вредности портфолија (резидуала/грешке модела) у било ком периоду утиче на повећање варијансе (Karamanos & Kim, 2000). Изражавање промена вредности портфолија у логаритамском облику, обезбеђује да варијанса буде позитивна. Нажалост, у пракси овај модел не показује значајне предности у односу на GARCH модел. Разлог томе налази се у превеликом утицају подешавања почетних вредности параметара у процесу њихове оптимализације применом метода максималне веродостојности (Дончић, 2020).

Други модел из фамилије GARCH модела који је способан да кооптира асиметрију у дистрибуцији промена вредности портфолија јесте GJR-GARCH, коју су развили Glosten, Jagannathan и Runkle (1993). Волатилност у изводу овог модела изражава се у категорији варијансе (Glosten et al., 1993):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{i-t}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i I_{t-1} r_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (41)$$

$$I_{t-1} = \begin{cases} 1 & r_{t-1} < 0 \\ 0 & r_{t-1} \geq 0 \end{cases} \quad (42)$$

при чему је

- I_{t-1} - вештачка варијабла, која се активира само ако је претходна промена у вредности портфолија била негативна
- позитивност условних варијанса обезбеђена помоћу услова $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\alpha + \gamma \geq 0$, док је стационарност варијансе осигурана помоћу услова $\alpha + \beta + 0.5 \gamma < 1$

Када је $\gamma = 0$, модел се своди на стандардни GARCH модел који третира лоше вести, негативне промене вредности портфолија ($r_{t-1} < 0$) и добре вести, позитивне промене вредности портфолија ($r_{t-1} > 0$) симетрично. Другим речима и лоше вести и добре вести имају исти утицај на условну варијансу. Када је $\gamma \neq 0$, утицај је асиметричан. Негативне промене вредности портфолија имају утицај $\alpha + \gamma$ на условну варијансу, док позитивне промене вредности портфолија имају утицај α на условну варијансу. Дакле, ако је $\gamma > 0$, негативне промене вредности портфолија имају већи утицај на условну варијансу него позитивне.

У литератури, верзија GJR-GARCH модела у којој се волатилност промене вредности портфолија изражава у облику стандардне девијације је познат под називом TGARCH (енгл. *the threshold GARCH - TGARCH*) модел (Onyeaka-Ubaka & Anene, 2020):

$$\sigma_t = \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{i-t}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i I_{t-1} r_{i-t}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2} \quad (43)$$

Овако специфициран GARCH модел способан је да кооптира велике шокове у промени вредности портфолија (Onyeaka-Ubaka & Anene, 2020). Резултати истраживања Nugroho et al. (2019) указују да модел генерише боље процене ризика у односу са широку класу GARCH модела, као што су GARCH-Mean²⁸ и логаритамски GARCH модели²⁹.

²⁸ GARCH-Mean развили су Engle et al. (1987) успостављањем везе између приноса и условне варијансе директно где се текућа промена вредности портфолија изражава као линеарна функција текуће варијансе: $r_t = k\sigma_t^2 + \sigma_t \varepsilon_t$, док је моделирање волатилности исто као у случају GARCH(1,1) модела, при чему је k параметар модела, ε је грешка модела (резидуал).

²⁹ Мотивисан размишљањем о позитивности условне варијансе, Pantula (1986) представио је логаритамску верзију GARCH модела узимајући логаритам тренутне условне варијансе као линеарну функцију логаритма историјских промена вредности портфолија на квадрат и логаритам историјске условне

Аутори попут Ма et al., (2020) за процену екстремних rizika предност дају GJR-GARCH у односу на остале моделе волатилности из разлога што успешно кооптира кластере волатилности, дебеле репове, искривљеност дистрибуције и ефекат леверица. Сличне наводе износе и Mostafa et al. (2021), Noori и Mohammad (2021), Xu и Zhu, (2022), као и Niu и Liu, (2024).

Друга карактеристика серије промена вредности активе са финансијских тржишта, отуда и портфолија, јесте појава дебелих репова, што се описује као лептокуртична расподела. Овај феномен утврдио је још током 60-тих година прошлог века Mandelbrot (1963). Бројна емпиријска истраживања из прошлости (Bollerslev, 1986; Nelson & Foster, 1994; Hentschel, 1995) указивала су да моделирањем временски променљиве волатилности применом GARCH модела могуће да се промене вредности портфолија у извесној мери нормализују. Другим речима, могуће је донекле коопирати лептокуртичну расподелу (Adubisi et al., 2022). Тако да примена ових модела у извесној мери ублажава, али никако не елиминише овај проблем. Уочено је да и даље остаје велики број екстремних промена, који имају велики утицај на процену варијансе. Наиме, веома велике промене у вредности активе тзв. шокови доводи до драматичног повећања варијансе. Према тврдњама Friedman и Laibson (1989), они су последица екстраординарних догађаја. Из тог разлога њихов утицај мора се ограничити и не сме да утиче на вредност варијансе током времена. Како би решили овај проблем Ding et al., (1993) развили су асиметрични GARCH модел који узима у обзир снагу ефекта леверица. У литератури модел је познат под акронимом APGARCH модел. Математички се може представити на следећи начин:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|r_{t-i}| - \gamma_i r_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j (\sigma_{t-j}^2)^\delta \quad (44)$$

при чему је:

δ - параметра снаге ефекта

варијансе, што се математички може изразити на следећи начин: $\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \log r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \log \sigma_{t-j}^2$.

Параметар снаге ефекта (δ) омогућава флексибилност у моделу, јер различити степени снаге могу променити начин на који се варијанса прилагођава шоковима, чиме се омогућава боља адаптација на стварне податке који показују асиметричне шокове. Параметар (δ) игра улогу Вох-Сох-ове трансформације временски променљиве условне стандардне девијације (σ_t^δ), док γ_i одражава ефекат леверица, тј. утицај асиметрије информација. Вох-Сох-ова трансформација за позитивну случајну променљиву (γ_i):

$$\gamma_t^\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_t^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log \gamma_t & \lambda = 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

при чему је:

λ - параметар облика трансформације; $\lambda \geq 0$ указује на конвексну трансформацију стандардне девијације; $\lambda \leq 0$ указује на конкавну трансформацију стандардне девијације

Другим речима, модел може да кооптира и ефекте леверица и аутокорелацију. Емпиријска истраживања подржавају примену овог модела када се користи за процену VaR (Ane, 2005; Araghchi, 2018). Иначе, модел укључује, као посебне случајеве неке од претходних модела. Тако када је $\delta = 2$ и $\gamma_i = 0$ модел је репрезентација GARCH(p,q) модела, односно GJR-GARCH модела када је $\delta = 2$. Када су $\delta = 1$ и $\gamma_i = 0$ модел представља тзв. Taylor/Schwert's GARCH модел или како се још назива модел апсолутне вредности GARCH. Назив је добио по томе што условну стандардну девијацију моделира као линеарну комбинацију апсолутне вредности шока и условне стандардне девијације из претходних периода. У терминологији варијансе, модел условну варијансу третира као квадрат пондерисаног просека апсолутних шокова, а не пондерисани просек квадратних шокова. Због Jensen-ове неједнакости, велики шокови имају мањи ефекат на условну варијансу него у стандардном GARCH моделу. Ову интуицију подржавају истраживања Nelson и Foster (1994). Резултати њиховог истраживања показују да су процене овог модела конзистентне са проценама условне варијансе процеса блиске дифузије. Такође, аутори су показали да је у присуству лептокуртичне дистрибуције, модел апсолутне вредности ефикаснији филтер у односу на стандардни GARCH. Аргумент за примену апсолутних шокова (резидуала) у складу је са налазима Davidian и

Carroll (1987) који су показали да су процене варијансе засноване на апсолутним резидуалима робусније према екстремним променама.

Полазећи од модела случајног хода и хипотезе о ефикасном тржишту, према којима очекиване промене вредности портфолија зависе од сета расположивих информација у одређеном тренутку, што се математички може исказати као $\Delta P_t = E(\Delta P_t | I_{t-1}) + \varepsilon_t$, при чему I_{t-1} репрезентује сет расположивих информација у тренутку (t-1), са резидуалом ε_t који следи нормалну IID (0,1) дистрибуцију, математички Taylor/Schwert's GARCH модел може се исказати на следећи начин:

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^p a_i |\sigma_{t+1-t} \varepsilon_{t+1-t}| + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-t} \quad (46)$$

Израз (46) указује да модел апсолутне вредности GARCH описује условну стандардну девијацију као линеарну комбинацију апсолутне вредности резидуала и условне стандардне девијације из претходног периода. Асиметрија се уводи померањем и „ротацијом“ апсолутне вредности резидуала. Отуда, на основу овог модела није тешко извести читаву фамилију симетричних и асиметричних GARCH модела применом Box-Cox-ове трансформације условне стандардне девијације и укључивањем различитих степени трансформисаних шокова.

Сви описани модели волатилности засновани су на претпоставци да резидуали следе ε_t који следи нормалну IID (0,1). Ово је еквивалентно претпоставци да промене вредности портфолија следе нормалну дистрибуцију $\Delta P \sim N(\mu, \Sigma)$ са густином:

$$f(r) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left| \Sigma \right|^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2} (r - \mu) \quad (47)$$

при чему су:

- Σ - матрица варијанси-коваријанси
- μ -вектор средњих вредности промена појединачних актива из састава портфолија
- π - константа 3,14
- p - број активе у саставу портфолија

Израз (26) сугерише да је дистрибуција промена вредности портфолија у ствари заједничка нормална дистрибуција фактора ризика, односно дистрибуција промена

вредности појединачних актива из састава портфолија. Прихватање овакве претпоставке приликом процене ризика има бројних предности, о којима је већ било речи. Међутим, истраживања Rossignola i dr. (2013), Radivojevic et al. (2015, 2019) указују да је претпоставка о дистрибуцији промене вредности портфолија важнија од спецификација модела волатилности. Другим речима, ова и слична истраживања указују да је важније да ли резидуали модела следе одређену дистрибуцију, која представља рефлексију дистрибуције промене вредности портфолија, него каква је спецификација GARCH модела. Стога, за финансијска тржишта, која се одликују кластерима волатилности и тешким реповима, прикладније је коришћење модела волатилности који се заснивају на дистрибуцијама које кооптирају дебеле репове. Из тог разлога бројни аутори предлажу да се у споменуте GARCH моделе инкорпорирају претпоставке о следећим дистрибуцијама:

1) студентовој t дистрибуцији:

$$f(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{(\pi d)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \left(1 + \frac{r^2}{d}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \quad (48)$$

$$v = \sqrt{2} \text{ и } q = \frac{d}{2}$$

2) студентова t дистрибуција са асиметријом:

$$f(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + q\right)}{v\sigma(\pi q)^{\frac{1}{2}} \Gamma(q) \left[1 + \frac{|r - \mu + m|^2}{q(v\sigma)^p (1 + \lambda \operatorname{sgn}(r - \mu + m))^2}\right]^{\frac{1}{p+q}}} \quad (49)$$

3) генерална дистрибуција грешака (*Generalized error distributions*³⁰):

$$f(r) = \frac{\eta \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{\varepsilon_t}{\lambda \sigma_t}\right|^\eta\right)}{2^{(\eta+1)/2} \Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right) \lambda} \quad (50)$$

при чему су:

Γ - гама функција

λ - параметар асиметрије

P, q - параметри контроле издужености дистрибуције

³⁰ GED дистрибуција је у одређеним случајевима идентична *Laplace*-овој дистрибуцији.

- η - параметар за контролу облика дистрибуције у GED
 m, v - функције других параметара које се овде користе за скалирање или померање расподеле на одговарајући начин како би одговарале различитим параметризацијама те расподеле

Последица честих екстремних догађаја и економских криза, али и шпекулативних очекивања инвеститора узрокују да се екстремне промене данас чешће дешавају него што је то био раније случај (Li et al., 2023). Из тог разлога све већи је фокус не на моделирање целе дистрибуције промене вредности портфолија, односно резидуала, већ само на екстремне делове. Дистрибуција која то омогућава, заснована на теорији екстремне вредности јесте уопштена Парето дистрибуција (енгл. *The generalized Pareto distribution* - GPD). Ова дистрибуција омогућава да се кооптирају екстремне промене вредности портфолија изнад одређеног прага, уз услов да је праг довољно висок да би се обезбедио довољан број опсервација како би се моделирала дистрибуција екстремних вредности. Математички уопштена дистрибуциј уопштене Парето дистрибуције може се исказати на следећи начин (Pearson, 2002):

$$G_{\xi, \sigma, \mu}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ 1 - e^{-(x-\mu)/\sigma} \end{array} \right\} \quad (51)$$

Први израз се користи када је индекса репа различит од нуле, односно други када је једнак нули,

при чему је:

$1/\xi$ - индекс репа дистрибуције; параметар облика дистрибуције екстремних вредности

Будући да $\xi > 0$ одговара дистрибуцији са дебелим реповима, то је ова варијанта Парето дистрибуције која највише договара променама вредности портфолија.

Избор претпоставке резидуала у моделу волатилности примарно је детерминисана обликом емпиријске дистрибуције. Из тог разлога не може се тврдити да је једна дистрибуција најбоља или оптимална за сва тржишта и портфолија. Отуда, приликом процене ризика пракса је да се тестира већи број модела и претпоставки дистрибуције и да се применом одређених информационалних критеријума изабере она која највише одговара емпиријским подацима.

2. Непараметарски VaR модели

Наиме, на основу дефиниције VaR, израз (21), јасно је да VaR представља α квантил функције дистрибуције вероватноће промене вредности портфолија. Међутим, да би се утврдио тај квантил потребно је познавати функцију дистрибуције вероватноће. Параметарски модели решење овог проблема проналазе у приписивању емпиријској дистрибуцији промена вредности портфолија одређену теоријску дистрибуцију. Отуда, тачност процене VaR код ових модела детерминисана је степеном компатибилности између стварне дистрибуције промена вредности портфолија и приписане теоријске. Како серије података са финансијских тржишта показују особине које се тешко могу у потпуности уклопити у познате теоријске дистрибуције, то је и употреба параметарских VaR модела упитна.

У циљу ублажавања овог проблема једно од решења било је да се уместо теоријске дистрибуције у процени VaR користи емпиријска дистрибуција. На овим основама настали су тзв. непараметарски VaR модели, који су, за разлику од параметарских модела, који почивају на претпоставци да будуће промене вредности портфолија следе одређену теоријску дистрибуцију, ослобођени било какве претпоставке везане за облик дистрибуције будућих промена вредности портфолија. Једина претпоставка на којој ови модели почивају јесте уверење да се историја понавља, односно да ће се историјске промене вредности портфолија поновити у будућности. Другим речима, почивају на уверењу да је дистрибуција стабилна током периода посматрања, те да се на основу историјских промена могу предвидети будуће промене. Из тог разлога, да би непараметарски VaR модели могли да генеришу поуздане процене ризика, критични фактор јесте избор адекватног периода узорковања података. У том случају, процена VaR се своди на утврђивање вредности n -тог члана низа података о променама вредности портфолија (Radivojević, 2011), при чему је n -ти члан детерминисан нивоом поверења за који се врши процена VaR.

Уколико период узорковања не одговара текућим условима на тржишту процене ризика, а биће прецењене или потцењене у зависности од тога да ли је текући период волатилнији или стабилнији у односу на историјски. На ово се надовезује и дужина, односно број опсервација из узорка. Већи број опсервација значи и већи број екстерних промена вредности портфолија, које спадају у реп дистрибуције. Међутим, са друге

стране значи и заснивање процене ризика на старим подацима. Како нико не воли да прави процене на старим подацима, то валидност процена ризика зависи од trade off-а између броја опсервација и дужине периода посматрања. Краћи период значи да се процена заснива на подацима из блиске прошлости, тј. новијим подацима, али истовремено значи и мањи број опсервација, а тиме и мањи број промена вредности које спадају у реп дистрибуције. Са друге стране, дужи период узорковања значи кооптирање већег броја екстремних промена, али и већу вероватноћа од кршења претпоставке стационарности и IID (Radivojevic et al., 2021).

С економетријског аспекта, на основу изнетог лако се може увидети да се непараметарски VaR модели заснивају на претпоставци о стационарности дистрибуције промене вредности портфолија. Задовољење ове претпоставке значи да промене вредности портфолија следе IID. Међутим, емпиријска истраживања која су апострофирана у дисертацији указују да серије података са финансијских тржишта показују особину хетероскедастичности, односно да нису стационарне и да не следе IID. Отуда, велики број аутора настоји да на основама непараметарских модела, а пре свега модела HS, развије нове VaR моделе који ће задржати предности непараметарског начина процене ризика, уз редуковање ограничења везаних за стационарност дистрибуције и одсуство претпоставке IID. Резултат тих напора јесте развој тзв. полу-параметарских VaR модела.

2.1. Модел историјске симулације

Најједноставнији начин за утврђивање VaR јесте применом модела HS. Модел почива на претпоставци да су потенцијалне промене у основним факторима ризика идентичне уоченим променама тих фактора током дефинисаног историјског периода (Thanh et al., 2018). Другим речима, модел почива на претпостави да су будуће промене у вредности портфолија идентичне прошлим променама, те да се на основу њих могу предвидети будуће промене. То значи да HS модел користи историјске податке за изградњу дистрибуције будућих промена портфолија (Мостафа ет ал., 2017). Ово даље имплицира да се не поставља никаква претпоставка везана за облик дистрибуције промена вредности портфолија. На тај начин избегнут је проблем параметаризације.

Уместо да се претпостави да дистрибуција будућих промена вредности портфолија следи неку одређену дистрибуцију, прикупљају се подаци о историјским променама вредности портфолија и на основу тих података праве се предвиђања о будућим променама вредности портфолија. Отуда и назив модела, јер се на основу стварних промена вредности портфолија утврђују хипотетичке будуће вредности. На основу тако утврђених хипотетичких вредности портфолија утврђују се процентуалне промене вредности портфолија, како би се добила одређена дистрибуција промена вредности.

Претходно речено, математички се може исказати на следећи начин (Pritsker, 2001):

$$VaR_{N=1|N}^{cl} \equiv r_w(N + 1)cl \quad (52),$$

при чему је $r_w((N+1)cl)$ преузето из падајућег низа промена вредности портфолија $\{r_w(1), r_w(2).. r_w(N)\}$.

Основна предност оваквог начина утврђивања VaR огледа се у једноставности процене VaR. Довољно је само имати на располагању серију историјских података, коју је потребно поређати у опадајући низ и за дати ниво поверења утврдити вредност n -тог члана тог низа. Међутим, проблем код оваквог начина процене VaR јесте што за екстремно високе нивое поверења, мали је број опсервација у репу дистрибуције. Тако на пример у случају да су на располагању 100 података, за ниво поверења од 99%, то значи да је VaR једнак највећој негативној промени вредности портфолија. Другим речима, то је највећи губитак. За ниво поверења од 95%, то би у ствари био пети највећи губитак.

Поставља се питање да ли реално очекивати да ће сутрашњи губитак у вредности портфолија да буде једнак највећем губитку који се десио једанпут у претходних 100 дана. Уколико је магнитуда тог губитка значајно велика у односу на други највећи губитак, његов утицај на процену VaR ће се осећати све док тај губитак не испадне из узорка. Последица тога јесте да ће ниво захтеваног капитала солвентности да буде значајно већи него што је осигуравајућем друштву реално потребно. Ово све из разлога што се HS модел заснива на примени приступа покретних средина. То значи да се увек користи иста величина узорка, дужина серије података о историјским променама вредности портфолија, с тим што из узорка испада најстарији податак, а у узорак улази најновији податак. Све док се највећи губитак налази у узроку он ће утицати на процену

VaR, док само дан касније, када испадне из узорка он неће имати никакав утицај. У литератури овај проблем познат је као ефекат духа. Поставља се питање да ли је реално да током целог периода, такав губитак има исти утицај на процену VaR, а да само дан касније нема никакав утицај. Овакав начин процене VaR значи да све негативне промене вредности портфолија имају исти утицај на процену VaR без обзира на њихову старост. С економетријског аспекта, на овај начин обезбеђује се да претпоставка од IID буде задовољена. Питање које се надовезује на ово јесте да ли промене из ближе прошлости треба да имају већи утицај у односу на оне даље. Другим речима, логичнијим се чини да како промене постају све старије и старије, то би требало да се њихов утицај на процену ризика смањује. По тој логици, промене вредности од претходног дана, када се ради о дневним проценама ризика, треба да имају највећи утицај.

Други велики недостатак HS модела јесте да број података из узорка рапидно опада када се повећава период за који се врши процена VaR. Тако, када се врши дневна процена VaR на узорку од 100 података, на располагању је исто толико података. Међутим, ако се процена врши за период од десет дана, тада број података опада на 10. У том случају екстерно се смањује број података који спадају реп у дистрибуције. Будући да се серије промена вредности портфолија са финансијских тржишта одликују великим бројем промена које спадају у реп дистрибуције, примена HS модела довешће до тога да процена VaR буде нижа од реалног ризика.

Утврђивање VaR као вредности n -тог члана из уређеног низа временске серије о променама вредности портфолија значи да се не може предвидети да ће у будућности да уследи негативна промена у вредности портфолија, односно губитак већи од историјског. Другим речима, применом HS модела максимални губитак који се може предвидети једнак је највећој негативној промени вредности портфолија која се десила током периода узорковања. Већи губитак није могуће предвидети (Hendricks, 1996). Тако да је магнитуда процене највећег могућег губитка одређена величином узора (Abad et al., 2014). У условима честих економских криза и сломова берзи овакав сценарио мало је вероватан.

Једноставност примене овог модела учинила је да HS модел буде један од најпопуларнијих VaR. Резултат тога је да су модели историјске симулације били најчешће коришћени модели за процену ризика у свету финансија у почетним годинама

примене Базелских стандарда и Директиве солвентности (Perignon & Smith, 2010). Заступљеност ових модела је око 73%.

2.2. Модел огледала историјске симулације

Како би отклонио недостатак HS модела везан за недовољан број опсервација о променама вредности портфолија који спадају у леви реп дистрибуције, за екстремне нивое поверења, Holton-a (1998) је предложио модел огледала историјске симулације (енгл. *Mirror historical simulation – MHS*). Недостатак HS модела везан за недостатак опсервације најбоље се може сагледати уколико се има у виду да за нивое поверења веће од 98% се не може извршити десетодневна процена VaR ако се има на располагању 500 података о дневним променама вредности портфолија, што је еквивалентно две године берзанских података. Узорак је двоструко већи него што се захтева правилима Базелског комитета за супервизију банака. Наиме, 500 података о дневним променама вредности портфолија значи узорак од 50 података за десетодневну процену VaR. За ову величину узорка, процену VaR могуће је извршити тек за ниво поверења од 98%. У том случају највећи губитак је процена VaR.

Како би решио овај проблем, уз уважавање чињенице да са повећањем периода посматрања, величине узорка, расте опасност од кршења претпоставке стационарности, Holton (1998) је дошао на идеју да серију историјских података мултипликује са -1. На тај начин добија се додатан сет података који изгледају као одраз у огледалу стварних промена портфолија. Број податка се дуплира, чиме се дуплира и број опсервација у репу дистрибуције, а да се при томе не утиче на повећање вероватноће од кршења претпоставке стационарности. Овакав начин повећања броја података нарочито је значајан када се врше процене VaR за периоде дуже од једног дана. Истовремено, помаже да се идентификују неједнакости у дистрибуцији података, што пружа дубљи увид у динамику ризика коме је изложен портфолио осигуравајућег друштва.

Математички, претходно речено, може се представити на следећи начин:

$$VaR_{N=1|N}^{cl} \equiv r_w(\hat{T} + 1)cl \quad (53)$$

Израз (53) идентичан је изразу (52). Разлика је само у томе што се у изразу уместо реалних промена вредности портфолија, користе оригинални подаци и мултипликовани подаци.

Филиповић (2020) наводи да овакав начин мултипликовања података модел чини примамљивим за тржишта која имају кратку историју тржишта капитала. Међутим, резултати тестирања валидности овог модела су различити. Zikovic и Filer (2009), који су тестирали модел на узорку развијених земаља и земља у развоју указују да модел генерише поуздане процене тржишних ризика. Са друге стране, Radivojevic et al. (2016) указују да модел не представља значајније унапређење HS модела. Будући да задржава исти систем пондерисања, модел пати од проблема ефекта духа исто као и HS модел. Такође, као и HS модел доминантно зависи од избора периода узорковања. Наравно, валидност сваког VaR модела зависи од периода узорковања, али код непараметарских модела то је доминантно из два разлога: 1) претпоставке стационарности дистрибуције и 2) одсуства евалуације фактора ризика. Тиме што се не претпоставља да серија података следи неку теоријску дистрибуцију, избегава се проблем параметаризације, али се не врши ни процена фактора ризика (Radivojevic et al., 2016).

2.3. Bootstrap модел историјске симулације

На идеји да се повећа број података који спадају у реп дистрибуције, како би се обезбедило да се модели историјске симулације могу користити за процену VaR за екстремно високе нивое поверења, а да се при томе не угрози претпоставка стационарности, односно IID, одређени број аутора, попут Zenti и Pallotta, (2000), Brandolini, и Colucci, (2012), Rjiba et al. (2015), Radivojevic et al. (2016, 2017, 2021), предложио је да решење треба потражити у примени *Bootstrap* приступа. Тачније, идеја је да се HS модел комбинује са *Bootstrap* приступом. Резултат тих идеја јесте појава великог броја VaR модела који се могу назвати заједничким именом *Bootstrap* модели историјске симулације.

Идеју за развој *Bootstrap* модела историјске симулације аутори су пронашли у истраживањима Babu и Singh (1983), који су показали да се применом *Bootstrap* приступа може ефикасно апроксимирати популација реузорковањем великог броја узорка популација. Услов за ово јесте да се може претпоставити да је испуњена претпоставка о IID популације. Основна идеја *Bootstrap* приступа је да се закључак о популацији може извести на основу великог броја понављања узорковања. Пошто је популација непозната, права грешка у статистикама узорка у односу на њену вредност у популацији је

непозната. У *Bootstrap* приступу реузорковањима, популација се третира као узорак. Другим речима, оригинални узорак се третира као популација. Будући да су сви подаци у узорку познати, то омогућава да прецизно квантификују грешке и процене о узорку на основу ових поново узоркованих података. У контексту процене VaR, речено би значило да се на основу серије података о промени вредности портфолија током одређеног временског периода, може симулирати функција густине вероватноће популације промене вредности портфолија. Ово се постиже на тај начин што се стварне промене вредности портфолија користе за генерисање нових узорака. На тај начин добијају се нови узорци, који имају исте карактеристике дистрибуције као и оригинална серија података о историјским променама вредности портфолија. Предност оваквог генерисања података јесте што се не нарушава претпоставка о стационарности, а за разлику од приступа огледала број података који се могу генерисати јесте неограничен.

Приликом употребе овог приступа у процени тржишних rizika у осигурању, у основи, разликују се две варијанте. Прва представља примену тзв. параметарског *Boostrap* приступа, док друга представља употребу непараметарског *Boostrap*-а. Разлика потиче од тога да ли је познат облик функције дистрибуције промене вредности портфолија осигуравајућег друштва, са неким непознатим параметром $\theta = \theta(F)$ или није. Када је познат облик дистрибуције реч је о параметарском *Bootstrap*-у односно у супротном о непараметарског *Bootstrap*-у.

Независно о којој варијанти је реч, имплементација *Bootstrap*-а у модел историјске симулације иста је и подразумева да се у првом кораку на основу историјских података о серији промена вредности портфолија осигуравајућег друштва генерише велики број (M) узорака, чија величина је идентична оригиналној серији података. На тај начин добија се M узорака. На основу сваког од тих узорака врши се процена VaR применом израза (52). Резултат тога јесте M број процена VaR. Износ захтеваног капитала солвентности једнак је:

$$\overline{VaR}_{cl} = 1/M \sum_{i=1}^M VaR_i \quad (54)$$

Примена оваквог приступа у развоју модела историјске симулације, ублажава проблем HS модела, који се односи на недовољан број опсервација у репу дистрибуције. Међутим, и даље остаје проблем избора адекватног периода узорковања, али и проблем ефекта духа који произилази из система једнаких поднера који се додељују свим

историјским подацима. Поред тога, у њих су инкорпорирани сви проблеми везани за примену *Bootstrap* приступа.

У циљу ублажавања, пре свега, проблема везаног за избор адекватног узорка, тачније потребе да се задовољи претпоставка о IID, апострофирани аутори су се фокусирали да се реузоркују подаци који задовољавају ову претпоставку. Тако су Radivojević et al. (2017, 2019) предложили да се оригинални подаци применом GARCH модела, односно ARMA-GARCH модела трансформишу у IID, па да се такви подаци реузоркују. Примена ARMA модела омогућава да се кооптира аутокорелација у серији промена вредности портфолија, док GARCH модел омогућава да се кооптира хетероскедастичност. Rjiba et al. (2015) предложили су употребу GJR-GARCH модела. Резултати тестирања валидности ових модела показују да модели представљају унапређење HS модела.

3. Полу-параметарски VaR модели

Као што се може наслутити на основу назива, полу-параметарски модели, представљају комбинацију параметарских и непараметарских VaR модела. Идеја на којој су настали ови модели јесте да се искористе предности ове две групе модела за процену ризика и да се елиминишу њихови недостаци. Примарни разлог њиховог настанка јесте да се отклоне недостаци модела историјске симулације везани за немогућност копирања дебелих репова за екстремне нивое поверења и смањење зависности од избора периода узорковања како би се очувала претпоставка стационарности, а да се истовремено задрже предности које произилазе из тога што су ови модели ослобођени од било какве претпоставке везане за структуру приноса портфолија. Филипковић ову карактеристику наводи као примаран разлог за фаворизовање модела историјске симулације у односу на све остале VaR моделе за тржишта у настајању.

Будући да серије података о променама вредности портфолија са финансијских тржишта показују одсуство претпоставке о стационарности, то је било важно да се обезбеде, односно да се трансформишу оригинални подаци како би се обезбедило да буду IID и на тај начин задовоље претпоставку стационарности дистрибуције, која је примарна за валидност модела историјске симулације. Са друге стране, проблем оцене великог броја параметара у случају сложенијих облика дистрибуције, као и

некомпатибилности бројних теоријских дистрибуција са емпиријским расподелама промена вредности портфолија учинили су да фокус буде на проналажењу начина да се искористи емпиријска расподела. Као резултат ових настојања настали су полу-параметарски VaR модели. Најпознатији такав модел јесте FHS, који ће детаљно бити анализиран у наставку дисертације.

3.1. Филтрирани модел историјске симулације

Први и најпознатији VaR модел из групе полу-параметарских модела за процену тржишних ризика јесте FHS модел. FHS модел представља покушај да се отклони недостатак HS модела који проистиче из система пондерисања историјских промена вредности портфолија на процену волатилности. Наиме, како је већ истакнуто не постоје ваљани аргументи да промене различите старости имају исти утицај на процену будуће волатилности. Нарочито је ово приметно у условима великих осцилација и флукуација на финансијским тржиштима. Из тог разлога логичнијим се чини да променама различите старости треба доделити различите пондере и на тај начин им доделити различити утицај у зависности о њихове старости. Додељивањем различитих поднера истовремено ублажава се и ефекат духа, јер како време пролази и промена вредности портфолија постаје све старија, то се њен утицај на процену будуће волатилности портфолија смањује. На овај начин елиминише се нагло опадање утицаја великих промена на процену VaR, а тиме и на износ захтеваног капитала солвентности.

Како би решили овај проблем, а истовремено и обезбедили да буде задовољена претпоставка о IID, Hull и White (1998) дошли су на идеју да оригиналне податке треба пондерисати са оценама волатилности. Утврдили су да када се серије промене вредности портфолија пондеришу са оценама волатилности, да оне теже да буду стационарне. На тај начин добија се серија података која задовољава услове стационарности и IID. Овакве серије података кооптирају временски променљиву волатилност. Будући да GARCH модел волатилности представља с аспекта trade off-а између рачунарске захтевности и прецизности процена волатилности, најбољи избор, Hull и White (1998) предложили су да се оригинални подаци пондеришу оценама волатилности добијених применом овог модела волатилности.

Претходно речено имплицира да ће модели rizika који се заснивају на таквим подацима бити у стању да кооптирају кластере волатилности, хетероскедастичност и дебеле репове. Имплементирањем оваквог система пондерисања значајно се унапређује HS модел.

Претходно речно, математички, може се исказати на следећи начин (Gurrola-Perez & Murphy, 2015):

$$r_t^* = \sigma_T r_t / \sigma_t \quad (55)$$

при чему су:

- r_t^* - промена вредности портфолија пондерисан оценом волатилношћу
- r_t - оригинална промена вредности портфолија у настала у тренутку (t)
- σ_T - оцена волатилности у тренутку (T) у будућности
- σ_t - GARCH(p, q) оцена волатилност у тренутку (t)

На овај начин генерише се скуп стандардизованих податка, означених као FH серија података, која задовољава претпоставку IID. Овај сет података затим се користи за процену VaR применом следећег израза у случају када се процена врши за холдинг период дужине k -дана:

$$VaR_{i+1:t+k} = -\text{percentil}\{\{r_{i+1:t+k}^*\}_{i=1}, 100p\} \quad (57),$$

односно за период од једног дана тј. за дневне процене VaR:

$$VaR_{i+1:t+k} = -\sigma_{t+1} \text{percentil}\{\{r_{i+1}^*\}_{i=1}, 100p\} \quad (58).$$

Кључна предност оваквог начина генерисања података јесте што се не захтева претпоставка у вези стохастичког процеса, јер се на основу историјских података применом GARCH(p, q) модела добијају волатилношћу поднерисане промене вредности портфолија. Резултати бројних емпиријских истраживања показују супериорност овог модела у односу на остале VaR моделе (Barone-Adesi et al., 2000, 2002; Zikovic 2011; Gurrola-Perez & Murphy, 2015; Gurrola-Perez, 2018; Radivojevic et al., 2016, 2017, 2019, 2021; Doncic et al., 2023). Флексибилност модела огледа се у чињеници да је могуће GARCH модел поставити претпоставкама дистрибуције промене вредности портфолија која највише одговара емпиријској расподели. Једноставност примене модела огледа се у чињеници да је број параметара који је потребно оценити детерминисан само

структуром и спецификацијом GARCH модела. Модел одржава структуру корелације у подацима без ослањања на условну дистрибуцију промене вредности портфолија. Такође, може се модификовати тако да узме у обзир аутокорелацију или прошле унакрсне корелације у променама вредности актива из састава портфолија, односно факторима ризика.

У унапређењу FHS модела Christofferson је предложио да се применом Monte Carlo симулације генерише велики број серија FS података за будући период за који се врши процена VaR. На овај начин добија се неограничен број података, чиме се решава проблем недовољног броја опсервација у репу дистрибуције и проблем процене VaR за екстремно високе нивое поверења применом модела историјске симулације. На овај начин омогућава се да се направе процене ризика које премашују максималне историјске губитке у скупу података. Другим речима, FHS модел обезбеђује систематски приступ за генерисање оних екстремних сценарија који нису укључени у сценарио историје.

Резултати истраживања Altun et al. (2018) указују да је претпоставка о дистрибуцији резидуала кључна за валидност FHS модел. На овим премисама велики број аутора предложио је унапређење FHS модела (Barone-Adesi et al., 2000; Bohdalová & Greguš, 2016; Gurrola-Perez, 2018). Дакле, сва ова унапређења своде се на примену различитих модела волатилности који у већој или мањој мери одговарају оригиналним подацима. Унапређења која одлазе корак даље у односу на једноставна унапређења модела волатилности јесу решења која су предложили Zikovic & Filer (2009), као и Radivojevic et al., (2016). Модели су познати под називом хибридни модели историјске симулације. Сличан модел предложили су и Hossain и Ismail (2022).

3.2. Хибридни модел историјске симулације

Полазећи од опште познате чињенице да историјске финансијске временске серије нису линеарне, већ да показују структурне промене и особину хетероскедастичности, бројни аутори изнели су сумње у прецизност процене GARCH модела. Из тог разлога Zikovic и Filer (2009), као и Radivojevic et al., (2016), касније и Hossain и Ismail (2022) предложили су да се у моделе историјске симулације инкорпорирају модели који су способни да кооптирају нелинеране зависности и то како у једначини средине, тако и у једначинама варијансе.

Zikovic и Filer (2009) предложили су да се серија промене вредности портфолија генерише применом ARMA(p,q)-GARCH(p,q) модела. Овако добијена серија података задовољава услов о IID. Истовремено она је погодна за ажурирање волатилности у складу са принципима FHS модела. Математички, ово се може описати на следећи начин. У првом кораку генерише се серија података о променама вредности портфолија, како би се добила серија IID резидуала применом ARMA(p,q) модела:

$$r_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (58)$$

при чему су:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{\sigma_t^2} \quad (59) \quad \text{и} \quad \eta_t \sim IID N(0,1).$$

Други корак подразумева да се генерише серија процена волатилности применом GARCH(p,q) модела, који се у трећем кораку користе за пондерисање резидуала, по истом принципу као у случају FHS модела:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \quad (60)$$

На овај начин добија се серија стандардизованих података, који се у следећем кораку пондеришу добијеним проценама волатилности:

$$\hat{z}_{t+1} = z_t \hat{\sigma}_{t+1} \quad (61)$$

Овако добијена серија података се затим користи за генерисање *Bootstrap* симулацијом великог броја података, односно стандардизованих промена вредности портфолија које задовољавају услов IID на основу којих се врши процена VaR на исти начин као и у случају FHS модела:

$$\hat{r}_{t+1} = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i r_{t-i+1} + \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{z}_{t-i+1} + \hat{z}_{t+1} \quad (62)$$

У литератури модел је познат под ознаком HHS модел (енгл. Hybrid historical model).

Сличан овом моделу предложили су Radivojevic et al. (2016). Три су основне разлике у односу на хибридни модел који су предложили Zikovic и Filer (2009). Прва разлика огледа се у првом кораку. У варијанти коју су предложили Radivojevic et al. (2016) уместо ARMA(p,q) модела користи се AR(p) модел. Аутори истичу да се на овај начин значајно олакшава генерисање промена у вредности портфолија, без значајнијег губитка у прецизности. Друга разлика огледа се су генерисању серије промена вредности

портфолија. У Zikovic и Filer (2009) варијанти хибридног модела промене се генеришу такође применом ARMA модела, док код Radivojevic et al. (2016) применом AR модела. Последња разлика односи се у начину процене VaR и ES. У варијанти Radivojevic et al. (2016) процене VaR и ES заснивају се на теорији екстремне вредности, што се математички може исказати на следећи начин:

$$VaR_{cl} = q_{cl}(F) = \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left[\left(\frac{1-cl}{\frac{k}{N}} \right)^{-\xi} - 1 \right] \quad (63)$$

односно,

$$ES_{cl} = \frac{\mu + \frac{\sigma}{\xi} \left[\left(\frac{1-cl}{\frac{k}{N}} \right)^{-\xi} - 1 \right]}{1-\xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1-\xi} \quad (64)$$

при чему је $\hat{\alpha}^H = 1/\xi$ Hill-ова оцена параметара индекса репа дистрибуције промене вредности портфолија, док се у варијанти Zikovic и Filer (2009) утврђују на исти начин као и у случају FHS модела.

Овакав начин вршења процене тржишних rizika омогућава флексибилност у смислу да се истовремено врши и процена VaR и ES. Ово чини модел једноставним за употребу. Поред тога, флексибилност се огледа и у могућности примене различитих модела волатилности. У литератури модел је познат под ознаком VaR/ES-EVT-HHS модел.

Hossain и Ismail (2022) предложили су да се једначина средине моделира применом експоненцијалне ауторегресије (expAR(p))³¹, а да се за моделирање варијансе

³¹ Експоненцијални ауторегресивни (expAR(p)) модели нуде бројне предности које их чине атрактивним избором за анализу временских серија. Њихова једноставна структура омогућава лако разумевање и интерпретацију, што олакшава праћење зависности тренутних вредности од претходних. Поред тога, ови модели ефикасно идентификују и уклањају трендове из података користећи експоненцијално изравнавање, што је посебно корисно за податке са сталним променама. Њихова прилагодљивост омогућава да се брже реагује на нове информације, а примена експоненцијалног изравнавања смањује ефекат шума, доприносећи тачности прогнозе. expAR(p) модели добри су за краткорочне процене.

и даље користи GARCH модел. Разлог за примену експоненцијалне ауторегресије пронашли су у раду Naggan и Ozaki (1981) који су детаљно објаснили како је могуће применом овог модела кооптирати нелинеарне стохастичке појаве. Аутори предлажу expAR(p) модел (Hossain & Ismail, 2022):

$$r_t = c + \{\phi_1 + \pi_1 \exp(-\gamma r_{t-1}^2)\}t_{t-1} + \dots + \{\phi_p + \pi_p \exp(-\gamma r_{t-p}^2)\}t_{t-p} + \varepsilon_t \quad (65)$$

при чему су:

c - константа

ϕ_i, π_j - параметри модела

γ - фактор скалирања³²

ε_t - грешка модела $\varepsilon_t \sim N \text{ IID}(0,1)$

Ограничења овог модела пре свега произилазе из примене expAR(p) модел. ExpAR(p) модел има неколико недостатака који могу утицати на њихову ефикасност у анализи временских серија. Иако су једноставни за имплементацију, њихова основна структура може бити превише поједностављена за сложеније обрасце у променама вредности портфолија и факторима ризика, што доводи до нетачних VaR. Такође, ови модели су осетљиви на екстремне вредности. Осим тога, захтевају велики број историјских података, што може представљати проблем у случајевима ограничене доступности информација. Посебно је ово приметно на тржиштима у настајању која се одликују кратком историјом трговања на финансијском тржишту. Кључни недостатак јесте што валидност модела зависи од избора параметара. У литератури познат је под ознаком expAR(p)HNS модел.

Упркос овим и сличним ограничењима хибридних модела историјске симулације, резултати валидности предложених хибридних модела историјске симулације показују задовољавајуће резултате, посебно на тржиштима у настајању. Међутим, у поређењу са FHS моделом, ови модели не показују значајнија унапређења перформанси у процени VaR. Из тог разлога потребно је даље радити на развоју нових модела, који ће бити

Структура ових модела помаже у смањењу проблема мултиколинearности (Ozaki & Oda, 1977; Ozaki, 1980).

³² Вредност γ се може изабрати тако да се $\exp(-\gamma r_{t-1}^2)$ разликује и од нуле (0) и од јединице (1) за већину вредности r_{t-1} .

једноставнији за примену и који ће генерисати боље процене. Једна од алтернатива јесте у примени достигнућа из области вештачке интелигенције.

4. Модел процене тржишног ризика заснован на техници дубоког учења

Имајући у виду резултате емпиријских истраживања, која показују да серије промене вредности портфолија не следе IID и нормалну дистрибуцију (Eling & Jung, 2018; Arreola Hernandez & Al Janabi, 2020), као и да флукуације у тим серијама не прате стохастичке процесе који се могу моделирати помоћу модела случајног хода, користећи GARCH моделе, као и линеарне ARMA или ARIMA моделе (Radivojevic et al., 2019, 2020), решење треба тражити у могућности примене вештачке интелигенције. Тачније, решење за развој нових VaR и ES модела треба тражити у примени приступа рударења података, машинског учења и вештачких неуронских мрежа (енгл. *Artificial neural networks* - ANN), будући да су способни да кооптирају нелинеарне зависности међу факторима ризика. У прилог томе сведоче бројна истраживања Fischer и Krauss (2018), Rundo et al. (2019), Nti et al. (2019), Shah et al. (2019) и Sezer et al. (2020). Прецизније, резултати ових истраживања указују да, пре свега ANN модели, показују боље перформансе у моделирању временских серија у односу на традиционалне статистичке технике.

С обзиром на то да се портфолија осигуравајућих друштава одликују нелинеарним зависностима између активе из његовог састава, односно између фактора ризика, које су последица националних прописа који ограничавају структуре улагања у оквиру техничких резерви (Stancic & Radivojevic, 2021), примена ANN модела у развоју VaR чини се добрим решењем. Међутим, развој модела за процену тржишних ризика заснованог само на ANN моделу не представља оптимално решење из разлога што се процена VaR доминантно ослања на моделирање репа дистрибуције вероватноће. Отуда је валидност процене ризика примарно детерминисана прецизношћу моделирања репа дистрибуције. Како ANN модели нису у стању прецизно да моделирају екстремне приносе, јер по правилу дистрибуције репа укључују мали број опсервација, то примена класичних ANN модела заснованих на историјским подацима и вредностима портфолија осигуравајућих друштава у контексту Директиве солвентност II не представља

оптимално решење. Решење за овај недостатак треба тражити у допуни традиционалних ANN модела. Поред овога, ANN модели заснивају се на претпоставци независности између опсервација, што утиче на њихову способност да обухвате хетероскедастичност у променама вредности портфолија (Doncic et al., 2023). С обзиром на ово, примена ANN модела на тржиштима у развоју, као што је финансијско тржиште у Републици Србији, прилично је дискутабилна, јер она имају релативно кратку историју финансијског тржишта. Такође, одликују се и чињеницом да приноси активне нису IID, које прате мартингали процес, већ да су значајно корелисане варијабле. Последица тога јесте појава груписања волатилности, у литератури познато као кластери.

Међутим, могућност кооптирања нелинеарних зависности применом ANN модели оправдавају напор у развоју нових VaR и ES модела за процену ризика у контексту Директиве солвентности II, заснованим на ANN. Како би се искористила ова предност ANN модела и истовремено ублажили недостаци везани за немогућност адекватног кооптирања хетероскедастичности, односно кластера волатилности у серији промена вредности портфолија, у дисертацији развијен је нови VaR и ES модел за процену тржишног ризика у контексту Директиве Солвентности II. Модел почива на примени модела дубоког учења вишеслојног перцептрона (*DMLP*), те се може означити као *DMLP-ANN* модел. Модел се састоји из већег броја слојева. Отуда, способан је да обухвати нелинеарне зависности између фактора ризика портфолија. Такође, способан је да апроксимира велики број континуираних функција, односно може да кооптира понашање великог броја фактора ризика портфолија осигуравајућих друштава и њихов утицај на укупни ризик. Истраживања Sirignano и Cont (2019) и Choi et al., (2023) указују на исправност оваквог приступа.

Са друге стране, како би се кооптирала хетероскедастичност идеја је да се *DMLP-ANN* модел не заснива на сировим историјским подацима о променама вредности портфолија осигуравајућих друштава, већ на проценама VaR/ES које су добијене применом често коришћени параметарских, непараметарских и полу-параметарских модела VaR за процену тржишних ризика. На тај начин искоришћавају се предности параметарских и непараметарских модела за процену тржишног ризика, али и примене ANN модела. Имајући у виду теоријске карактеристике и предности различитих параметарских, непараметарских и полу-параметарских модела VaR, који су анализирани у дисертацији, са једне стране, али и њихове емпиријске перформансе када

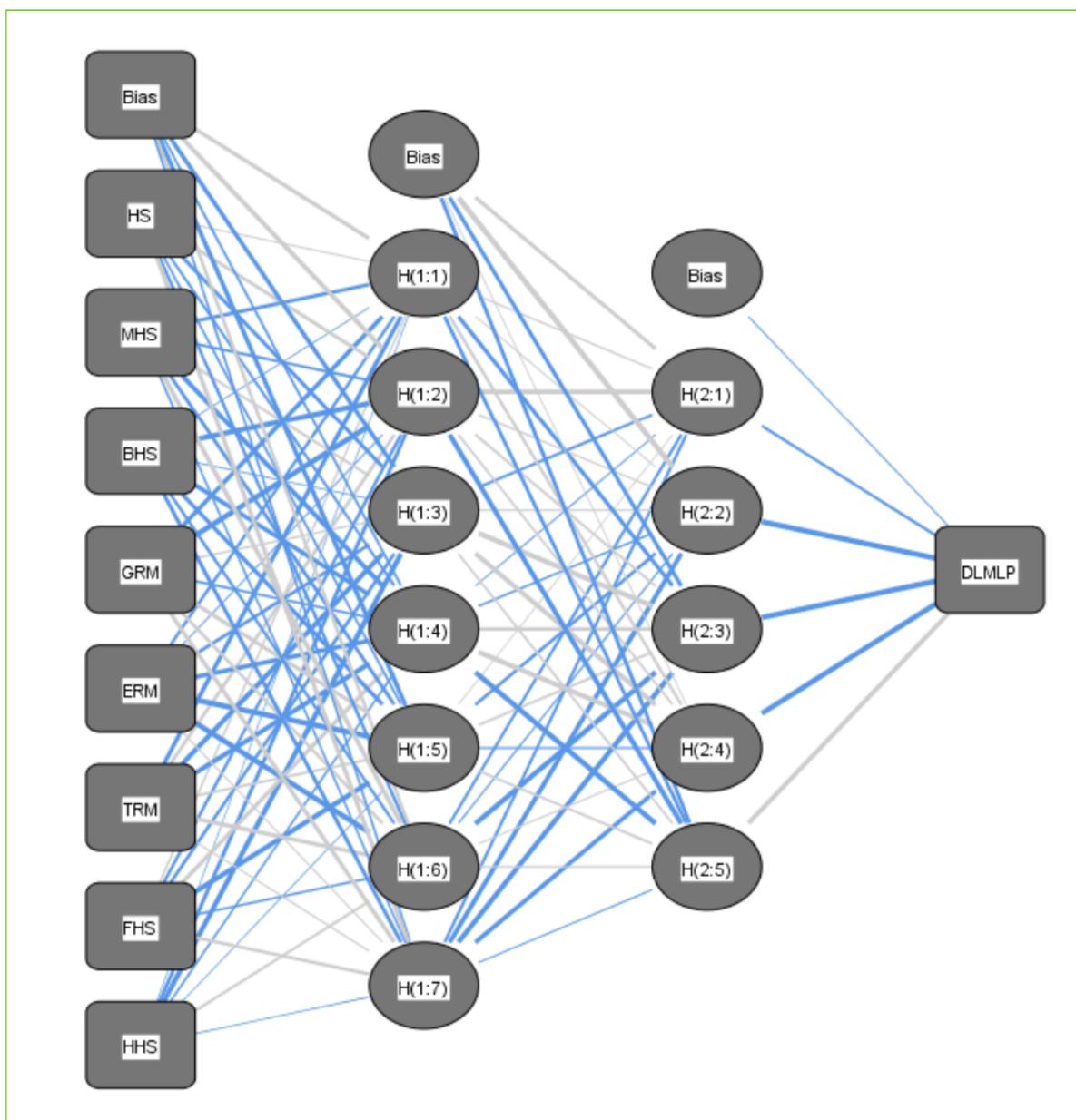
се користе на тржиштима у настајању, идеја се да се као улазни подаци у VaR/ES-MLP-ANN модел користе процене VaR и ES добијене применом следећих осам модела ризика: три RiskMetrics модела заснована на различитим спецификацијама GARCH модела и различитим претпоставкама дистрибуције резидуала, HS, MHS, BHS, FHS и VaR/ES-EVT-HHS модела.

С обзиром на теоријске предности параметарских модела у хватању специфичних карактеристика тржишта у настајању као што је хетероскедастичност и лептокутосис, идеја је да се код RiskMetrics модела утврде три варијанте засноване на различитим GARCH моделима, као што су Taylor/Schwert ARCH, EGARCH, GJR-GARCH и APARCH, који су способни да кооптирају асиметрију и хетероскедастичност.

Пошто полу-параметарски модели представљају компромис између предности и недостатака две групе модела, њихова употреба у развоју VaR/ES-MLP-ANN модела изгледа оправдано, посебно FHS модела, који је показао изузетне перформансе када се примењује на тржиштима у настајању (Zikovic & Randall, 2013). Из тог разлога предложен је овај модел. Полу-параметарски модел, који је такође показао одличне перформансе на тржиштима у развоју и који омогућава једноставно утврђивање ES, а који је способан да кооптира лептокуртосис, асиметрију, аутокорелацију и хетероскедастичност је VaR/ES-EVT-HHS. Из тог разлога је овај модел и предложен. Важно је напоменути да су у случају оба полу-параметарска модела, принцип за избор модела волатилности за процену условне волатилности исти је као у случају RiskMetrics модела. Овај критеријум је коришћен јер представља основу свим осталим информационим критеријумима, што омогућава лаку процену степена прилагођености модела емпиријским подацима. За сваки модел израчуната је вредност овог критеријума, а као најпогоднији је одабран модел са максималном вредношћу овог критеријума.

Општи приказа модела са три слоја, графички се може представити као на слици 13.

Слика 13. Графички приказ предложеног DMLP-ANN модела



Извор: Аутор

Независно од врсте и структуре ANN модела, код неуронских мрежа увек постоји проблем проналажења оптималне архитектуре модела. На слици 13 приказана је општа структура без оптимализације хиперпараметара. Са слике 13 јасно се уочавају 8 неурона у улазном слоју и један неурон у излазном слоју. Другим речима, серије података процена VaR и ES добијених применом осам модела VaR користе се као улазни подаци, док излазни податак јесте процена VaR односно ES. Како је речено на слици је приказан модел без оптимализације мреже. Иначе, оптимална структура модела детерминише

способност модела да препозна и генерализује научене обрасце (Mostafa, 2011). Отуда, недостатак предложеног модела, који се може означити као VaR/ES-MLP-ANN, произилази из проблема проналажења оптималне архитектуре ANN модела. Међутим, развој информационе-комуникационе технологије омогућава да се искористе предности обе групе модела, како би се успешно кооптирале све карактеристике портфолија осигуравајућих компанија које послују на финансијским тржиштима у настајању. Недостатак модела везан је и за примену вишеслојног перцептона јер је реч о тзв. feedforward (унапред) мреже, што значи да информације путују само у једном правцу – од улаза до излаза, без повратних петљи.

Процес учења обавља се кроз алгоритам повратног простирања грешке (енгл. *Backpropagation*). Овај метод предложен је из разлога што укључује израчунавање грешке између предвиђених и стварних излаза, а затим ширење те грешке уназад кроз мрежу да би се ажурирали параметри (тежине) неурона. За оптимизацију тежине и минимизацију грешака користи се Adam (енгл. *Adaptive Moment Estimation*), који се заснива на адаптивним проценама момената нижег реда. Математички може се представити на следећи начин (Zhang et al., 2022):

$$F_i(u; \theta) = w_l \cdot \sigma(w_{l-1} \dots \sigma(w_{1u} + b_1) \dots + b_{l-1}) + b_l \quad (66)$$

при чему су:

$$\theta := (w_1, w_2 \dots w_l, b_1, b_2, \dots b_l) \text{ параметри мреже}$$

$$w_l \in R^{n_1 \times n_{l-1}}, b_l \in R^{n_l \times 1} \text{ за сваки } l = 1, 2, \dots, L$$

Adam је изабран, јер динамички прилагођава стопу учења за сваку појединачну тежину мреже, односно брзину учења током обуке (Kingma & Ba, 2014; Brownlee, 2017). За активацију користи се Sigmoid функција у улазном слоју, док се у скривеном слоју користи хиперболична тангенција, које се математички могу представити (Zhang et al., 2022):

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \text{ односно } \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

На крају треба истаћи да иако су предложени одређени хиперпараметри, број скривених слојева, број јединица у сваком слоју, иницијализација тежине мреже, избор функције активације, брзина учења, стопа опадања, број епоха, величина серије, остају да сваки пут утврде када се користи модел, јер проналажење најбољих хиперпараметара

гарантује боље процене ризика. Важно је истаћи да су алгоритам за оптимизацију и активационе функције подложне променама.

Трећи део

ПОУЗДАНОСТ И ВАЛИДАЦИЈА VaR И ES МОДЕЛА ЗА ПРОЦЕНУ ТРЖИШНОГ РИЗИКА У ОСИГУРАЊУ

1. Модели вероватноће покрића губитка

Неопходност поседовања поузданих и валидних модела за процену тржишних ризика, како би износи захтеваног капитала солвентности били у складу са стварном изложеношћу тржишним ризицима портфолија осигуравајућих друштава, са једне и несавршеност VaR модела, у смислу несавршене компатибилности претпоставки на којима су развијени са реалним условима на тржишту, са друге стране, утичу на неопходност испитивања њихове валидности и поузданости. Валидност модела односи се на услов да је модел изграђен на реалним претпоставкама, док се поузданост модела односи на услов да генерише прецизне процене ризика током дужег периода посматрања на истом тржишту.

Међутим, последица бројних претпоставки начињених у циљу олакшавања употребе VaR модела за процену тржишних ризика, али и немогућности развоја прецизнијих модела за предвиђање ризика јесте да поузданост и валидност VaR модела зависи до степена компатибилности начињених претпоставки са тренутним условима на тржишту. Две су огромне импликације овога. Прва, у случају када је модел развијен на нереалним претпоставкама, перманентно ће генерисати нетачне процене ризика. То

значи да се ради о невалидном моделу. Друга импликација огледа се у томе да погрешан избор валидног модела, модела који је изграђен на реалним претпоставкама, али које не одговарају у потпуности са тренутним тржишним условима, генерисаће у већој или мањој мери непрецизне процене ризика. У овом случају прецизност и тачност процена ризика, током периода посматрања, зависиће од степена компатибилности начињених претпоставки и тренутних тржишних услова. Поред овога, чињеница да VaR као мера ризика, генерише процене које не испуњавају све услове кохерентне мере ризика, утицала је на бројне ауторе, попут (Abad et al., 2014) да искажу забринутост за употребу VaR модела. Опште је прихваћена констатација да су VaR модели корисни онолико колико су њихове процене поуздане и валидне, те да је неопходно перманентно испитивање њихове поузданости и валидности (Дончић, 2020).

Ово је мотивисало велики број аутора, попут Crnković и Drachman (1995), Righi и Ceretta (2013), Acerbi и Szekely (2014) и других, да раде на развоју модела за валидацију VaR и ES модела. Резултат њихових напора јесте развој две групе модела за валидацију VaR и ES модела. Прву групу чине модели засновани на статистичким тестовима. Прецизније, ови тестови свде се на тестирањама валидности хипотеза о тачности модела. Другу групу чине модели засновани на функцијама губитака. Ови модели се користе за поређење који је модел бољи.

С аспекта регулаторних институција, односно Директиве солвентности II, значајни су само модели заснивани на статистичким техникама тестирања валидности хипотеза о валидности VaR модела. Отуда су и они предмет даље анализе у дисертацији. Разлог зашто су само ови модели важни регулаторним институцијама налази се у чињеници да модели засновани на функцијама губитака не воде рачуна да ли су модели валидни или не. Они се фокусирају само на компарацију ефикасности између модела. Другим речима, они испитују који VaR модел, између већег броја алтернативних избора је генерисао боље процене ризика, у смислу мањег одступања процена VaR у односу на стварне ризике који су се десили. У уопштеном облику, математички, они се могу представити следећим изразом:

$$f(C) = \sum_{i=1}^n C_i \quad (67)$$
$$C_t = \begin{cases} f(L_t, VaR \text{ за } L_t > VaR_t) \\ q(L_t, VaR \text{ за } L_t \leq VaR_t) \end{cases}$$

при чему су:

$f(C)$ - функција губитка

C_t - индикатор губитка

L_t - промена вредности портфолија осигуравајућег друштва у тренутку (t)

VaR_t - процена VaR

Као такви ови модели не воде рачуна о броју прекорачења, односно броју дана када је стварни био губитак вредности портфолија, већ од процене VaR. Они воде рачуна само о величини тог прекорачења. Отуда је могуће да резултат теста покаже, да модел који је током целог периода посматрања генерисао процене VaR испод стварног губитка, буде бољи од модела који је само једном у истом периоду генерисао процену VaR испод стварног губитка, али чија магнитуда је већа у односу на кумулатив износа прекорачења првог модела. Дакле, ови модели воде рачуна само о економском аспекту вредности модела. За менаџмент осигуравајућег друштва то је значајно, јер бољи модел значи и мањи износ захтеваног капитала солвентности. То даље значи већи износ слободних средстава и већу потенцијалну стопу приноса на средства (енгл. *Return on Assets* – ROA). Међутим, с аспекта остваривања примарног циља регулаторних институција, очување стабилност финансијског система, то није толико важно, колико је важно да осигуравајућа друштва имају увек довољан износ капитала за покриће потенцијалних губитака. Из тог разлога за њих су важнији модели засновани на статистичким тестовима валидације VaR модела, у литератури познати под називом модели засновани на вероватноћи покрића губитка.

У основи то су модели који се заснивају на тестирању хипотезе да ли је број прекорачења једнак теоријској вероватноћи настанака прекорачења за ниво поверења за који се врши процена ризика (Kratz et al., 2018), односно утврђују број прекорачења (енгл. *failure rate*). За исправне моделе тај број мора да буде једнак нивоу поверења. Економетријски речником, ови модели испитују да ли предвиђена густина вероватноће промене вредности портфолија одговара стварним реализацијама. Дакле, за разлику од модела заснованих на функцијама губитака који воде рачуна о економским аспектима примене VaR модела, ови модели воде рачуна о статистичкој евалуацији модела. Иначе сама процедура третирања валидности VaR и ES модела назива се тестирање уназад

(енгл. *backtesting*). Будући да су модели засновани на вероватноћи покрића губитка, они доминирају у *backtesting* процедурама, јер су значајнији за ширу заједницу, читава процедура *backtesting* поистовећује се са применом статистичких тестова за вероватноћу покривености ($1 - \alpha = cl$), која према изразу (21) дефинише условни квантил VaR као мере ризика (Escanciano & Olmo, 2011).

Као и у случају избора VaR модела и у случају избора модела за њихову валидацију, Директивом солвентности II нису прописани модели које треба примењивати. То је разлика у односу на сектор банкарства, где је јасно прописан модел који се мора применити, као и под којим условима се врши подешавање тог модела. Занимљиво је истаћи да ни у банкарству не постоји прописан модел који треба примењивати за тестирање поузданости и валидности ES модела. Разлог томе налази се у великој комплексности. Прописани су услови према којима модели за тестирање валидности ES модела морају бити подешени, али не и врста модела. С обзиром на то да је могуће да тест валидности покаже да је ES модел валидан, а да при томе не задовољава услове валидности VaR модела, принцип је да се ES процене тестирају тек након што модел задовољи услове валидности VaR модела (Emmer et al., 2013).

Несавршеност приступа за тестирање валидности VaR модела која је прописана приступом семафор, која је посебно дошла до изражаја у време економске кризе (Terzic & Milojevic, 2016) утицала је на бројне ауторе да раде на развоју бољих модела за тестирање валидације VaR модела заснованих на вероватноћи покрића губитка. У основу свих модела налазе се два: модел беусловног покрића (Kupiec, 1995) и модел условног покрића (Chrisofferson, 1998), познати као *Kupiec*-ов тест и *Chrisofferson*-ов тест условног покрића. Мада није редак случај да се описују као модели засновани на *Markov*-љевом низу.

У контексту Директиве солвентности II, оба модела заснивају се на претпоставци да је тачно специфициран α условни квантил VaR серије промена вредности портфолија осигуравајућег друштва једнак је вероватноћи покрића, односно нивоу значајности за који се врши процена VaR. Математички, под претпоставком да серија промена вредности портфолија осигуравајућег друштва припада некој континуираној функцији (\mathcal{F}_t), као и да су у тренутку вршења процене VaR познате све релевантне информације за процену тржишних ризика, претходно речено може се исказати као:

$$\Pr(\Delta P_{t+1}) < VaR_{\alpha}(W_t, \theta_0 | \mathcal{F}_t) = 1 - \alpha \quad (68)$$

$$W_t = \{\Delta P_s, Z'_s\}_s^t, h < \infty \quad (69)$$

при чему су

- W_t - d -димензионални вектор који садржи све информације о прошлим променама вредности портфолија осигуравајућег друштва и сва остале релевантне финансијске и економске информације за процену ризика које су доступне у тренутку (t);
- θ_0 - непознати параметар који припада (Θ) као компактном скупу у еуклидискком \mathbb{R}^p ;
- (\mathcal{F}_t) - σ -алгебра генерисана $\{\Delta P_s, Z'_s\}_{s=-\infty}^t$ уз услов да $\alpha \in (0, 1)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$,

Израз (69) имплицира да серија података када је стварни губитак вредност портфолија био већи ли мањи од VaR процене може се посматрати случајна варијабла која следи IID Bernoulli-ијев процес. Отуда, једноставније речено, у основи оба модела налази се тестирање броја прекорачења. Тачније, оба модела заснивају се на трансформацији процена VaR у низ погодака и прекорачења, који следи Bernoulli-ијев процес, што се математички може представити следећим изразом (Jin, 2010):

$$I_{\alpha,t+1} = \begin{cases} 1 & \text{за } \Delta P_{t+1} > VaR_{t+1} \\ 0 & \text{за } \Delta P_{t+1} < VaR_{t+1} \end{cases}$$

$I_{\alpha,t+1}$ је низ погодака и прекорачења, односно индикатор догађаја када је негативна промена вредности портфолија била већа у односу на VaR процену (прекорачење), односно обратно, када је негативна промена вредности портфолија била мања у односу на VaR процену (погодак). У првом случају индикатор узима вредност један, док у другом случају узима вредност нула. На тај начин серија VaR процена трансформише се у серију нула и јединица.

Под претпоставком да су прекорачења независна и да следе Bernoulli-ијев процес, вероватноћа њиховог појављивања у овом низу треба да је једнака вероватноћи прекорачења ($\alpha = 1 - c_l$), тј. математички исказано: $E[I_{\alpha,t-1}(\theta_0)] = \alpha$. Другим речима, валидан VaR модел мора да генерише поготке чија је вероватноћа појављивања у овом низу једнака нивоу поверења за који се врши процена, односно да генерише прекорачења чија је вероватноћа појављивања једнака (α). То даље значи да се оба модела заснивају на тестирању хипотезе да ли је стварна стопа прекорачења једнака и теоријској. Фундаментална разлика између ова два модела огледа се у томе што се код модела

безусловног покрића испитује се да ли је стварна стопа прекорачења једнака и теоријској у просеку, за цео период посматрања, док се код модела условног покрића испитује да ли је стварна стопа прекорачења једнака и теоријској за одређени дан. Стога први модел не води рачуна о временима настанака прекорачења, док други узима у обзор када се прекорачења дешавају.

1.1. Модел безусловног покрића

Под претпоставком да број прекорачења ($T = \sum I_{a,t-1}$), тј. догађаја када су негативне промене вредности портфолија биле веће у односу на VaR процену, јесте константа, Кирисе (1995) истиче да валидан VaR модел за $\alpha = (1 - cl)$ треба да генерише процене ризика које ће да обезбеде безусловно покриће ($\hat{cl} = \sum I_{t+1} / N$) једнако $1 - \alpha$. Предлог је засновао на ставу да број прекорачења (T) у укупном броју VaR процена (N) следи биномну дистрибуцију са вероватноћом која је једнака $\alpha = (1 - cl)$, што се математички може изразити изразом (70):

$$\Pr(T|N, a) = \binom{N}{T} a^T (1 - a)^{N-T} \quad (70)$$

Дакле, према изразу (70) вероватноћа да ће број прекорачења од (N) броја укупних VaR процена бити тачно одређен број (T) једнака $(1 - \pi)^{N-T} \pi^T$, при чему π представља безусловну вероватноћу прекорачења. То даље имплицира да је могуће поставити нулту наспрам алтернативне хипотезе, тако да гласе:

H_0 : стопа стварног прекорачења (T/N) једнака је безусловној вероватноћи прекорачења (π);

H_1 : стопа стварног прекорачења (T/N) није једнака је безусловној вероватноћи прекорачења (π).

Претходно речено, математички се може представити помоћи следећих хипотеза:

$$H_0: \frac{T}{N} = \pi \quad (71)$$

$$H_1: \frac{T}{N} \neq \pi \quad (72)$$

које се тестирају применом теста безусловног покрића (LR_{uc}):

$$LR_{uc} = 2 \left[\log \left(\left(\frac{T}{N} \right)^T \left(1 - \frac{T}{N} \right)^{N-T} \right) - \log(\pi^T (1 - \pi)^{N-T}) \right] \quad (73)$$

који следи χ_1^2 . Ако је вредност LR_{uc} мања од критичне вредности χ_1^2 теста модел се може поуздано користити. У супротном модел није исправан.

Основна предност предложеног модела огледа се у једноставности његове примене. Овако конструисан тест омогућава да се као невалидни VaR модели одбаце и они који производе мали број прекорачења, тзв. сувише конзервативни модели, као и они који производе већи број прекорачења у односу на $\frac{T}{N}$. Ово је корисно из разлога што је за осигуравајуће друштво подједнако значајно да не издваја превише захтеваног капитала солвентности, као и да има проблем са недовољним резервама капитала. Из тог разлога употреба овог модела јесте оправдана.

Међутим, са друге стране овако једноставан модел има и низ недостатака који ограничавају његову самосталну примену, тј. утичу на потребу да се налази овог модела допуне са другим моделима за тестирање валидности VaR модела. Прво, модел не води рачуна о величини губитка, већ само о броју. Друго, не води рачуна о времену настанка прекорачења. Наиме, овако конструисан модел на индиректан начин прихвата претпоставку да VaR модели генеришу ефикасне процене ризика. То значи да VaR процене у тренутку њиховог генерисања представљају рефлексију свих расположивих информација (Frenkel et al., 2005). Другим речима, модел на индиректан начин прихвата претпоставку да су VaR процене независне.

Импликација овога јесте да историја прекорачења и погодака нема утицаја на текућу процену ризика за тренутак (t+1) у будућности. Даља импликација овога јесте да се прихвата претпоставка да је вероватноћа јављања новог прекорачења ($\pi_{11,t+1}$) у тренутку (t+1) у будућности након што је у тренутку (t) десило прекорачење једнака вероватноћи јављања новог прекорачења ($\pi_{01,t+1}$) када у тренутку (t) није десило прекорачење. Другим речима, ово имплицира да су прекорачења независна, при чему $\pi_{10} = 1 - \pi_{11}$ тако да се цео процес може представити помоћу *Markov*-љевог низа (Dumitrescu et al., 2012):

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}$$

при чему π_{10} и π_{00} представљају вероватноће јављања поготка после прекорачења, односно поготка после поготка, уз напомену да се цела матрица користи у случају условног покрића, јер модел води рачуна и о времену настанка прекорачења. Међутим, независно од тога, ово омогућава да се модели покрића једноставно тестирају кроз ограничења параметара на транзитној матрици вероватноће која је повезана са *Markov*-љевом репрезентацијом (Dumitrescu et al., 2012).

Аутори попут Hurlin et al. (2008), Ziggel et al. (2013), Radivojevic et al. (2016) истичу да је кључни недостатак модела безусловног покрића тај што се испитивање веродостојности засниван на асимптотској претпоставци да LR_{uc} рачо следи χ^2 са једним степеном слободе. Последица овога јесте да модел има малу моћ разликовања валидних од невалидних модела када се примењује на ограниченим узорцима. У случају недовољног броја прекорачења тест се не може применити. Могући сценарио јесте да се одређени модел одбаци као сувише конзервативан из разлога што је генерисао недовољан број прекорачења и ако су она у кумулативу имала мањи утицај на додатни, непотребни износ повећања захтеваног капитала солвентности у односу на модел који је генерисао довољан број прекорачења. Поред тога, моћ разликовања валидних од невалидних модела опада са повећањем узорка јер се интервал $\frac{T}{N}$ смањује, што значи лакше одбацивање валидних модела. Дакле, са једне стране да би се задовољила асимптотска претпоставка да LR_{uc} рачо следи χ^2 са једним степеном слободе потребно је тежити бесконачном узорку, а са друге стране повећање узорка (N) доводи до смањења снаге модела.

Колики је утицај величине узорка на валидност процене тржишних ризика најбоље сведочи истраживање Zikovica (2010) који је показао да постоје значајне разлике у критичној вредности када се тест заснива на бесконачном и коначном узорку и то за различите нивое поверења. Са друге стране, резултати Monte Carlo симулација коју је спровео Jin (2010) показују да модел испољава добру моћ разликовања валидних од невалидних модела када је узорак преко хиљаду опсервација. Исти аутор наводи да како моћ модела расте тако се повећава број прекорачења, то предлаже одређену модификацију теста:

$$MT = \sqrt{N} \frac{\pi - \alpha^*}{\sqrt{Var(I_t)}} \sim N(0,1) \quad (74)$$

при чему су:

MT - вредност Jin -овог теста

Var - варијанса индикатора погодака и прекорачења

α^* - стварна вероватноћа прекорачења

Израз (72) сугерише да статистика теста следи стандардизовану нормалну дистрибуцију. Овако значајно олакшава проналажење критичних вредности за дате нивое поверења, јер се заснива на употреби нормалне апроксимације за тестирање хипотезе да ли је стварна вероватноћа једнака очекиваној. Ако је (MT) близу нуле, то указује да је модел валидан, док веће одступање указује на евентуалну систематску грешку у процени ризика, што сугерише да модел није валидан.

1.2. Модел условног покрића

Полазећи од претпоставке модела безусловног покрића да су прекорачења $I_{a,t+1}$ независна и да следе *Bernoulli*-јев процес, што се може математички написати $E[I_{a,t-1}(\theta_0)] = \alpha$, Christofferson је исткао да је потребно тестирати да ли су та прекорачења заиста независна током времена, $\{I_{a,t-1}(\theta_0)\} \sim IID$. Тачније предложио је да се тестира хипотеза да је вероватноћа јављања прекорачења након што се претходно десило прекорачење (π_{11}) једнака вероватноћи да се јави прекорачење када се претходно није десило (π_{01}), наспрам алтернативне која гласи да ове вероватноће нису исте, односно $\pi_{11} \neq \pi_{01}$. Уколико појављивање прекорачења не зависи од тога да ли се пре тога десило прекорачење или погодак, то значи да су прекорачења независна односно да су све три вероватноће једнаке, $\pi_{11} = \pi_{01} = \pi$ при чему су:

$$\pi_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}} \quad (75),$$

$$\pi_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}} \quad (76),$$

$$\pi = \frac{T_{01} + T_{11}}{T_{00} + T_{01} + T_{10} + T_{11}} \quad (77)$$

За тестирање ових хипотеза предложио је следећи тест веродостојности (Christofferson, 1998):

$$LR_{ind} = -2\ln[(1 - \pi)^{T_{00}+T_{11}} \pi^{T_{01}+T_{11}}] + 2\ln[(1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}}] \quad (78)$$

при чему су:

LR_{ind} - рацио теста независности прекорачења

T - укупан број прекорачења

T_{00} - број догађаја када се након поготка десило погодак

T_{01} - број догађаја када се након поготка се десило прекорачење

T_{10} - број догађаја када се након прекорачења десило погодак

T_{00} - број догађаја када се након прекорачења десило прекорачење

LR_{ind} следи χ^2 дистрибуцију са једним степеном слободе. Прихватање и одбацивање нулте хипотезе врши се по истом принципу као и у случају безусловног покрића.

На први поглед чини се да су изрази $\{I_{a,t-1}(\theta_0)\} \sim IID$ и $E[I_{a,t-1}(\theta_0)] = \alpha$, еквивалентни. Међутим, услов $\{I_{a,t-1}(\theta_0)\} \sim IID$ је неопходан, али не и довољан да би се модел прогласио валидним у контексту безусловног покрића. Јаз између ова два услова обухвата велику класу погрешно специфицираних модела који доводе до тога да је прекршена претпоставка од IID прекорачења, а да при томе задовољава критеријум безусловног покрића. Такви модели доводе до кластера прекорачења. Последице тога су веома опасне по осигуравајуће друштво из разлога што финансијске институције лакше могу да поднесу губитке који су равномерно распоређени током године, него када се дешавају у низу.

Спајањем ова два теста добија се тзв. модел условног покрића, за тестирање нулте хипотезе да је модел валидан уколико испуњава критеријум условног покрића:

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \quad (79)$$

при чему је LR_{cc} вредност теста условног покрића. LR_{cc} следи χ^2_2 дистрибуцију. Нулта хипотеза прихвата и одбија се по истом принципу као и у случају теста независности прекорачења и безусловног покрића.

Будући да је могуће да VaR модел задовољи критеријум условног покрића, тј. да вредност LR_{cc} рачуна буде мања од критичне вредности χ^2_2 теста, а да при томе не задовољи оба претходна теста, препоручује се да се ова два теста спроводе одвојено, па тек онда да се тестира хипотеза о условном покрићу. Разлог за ово налази се у чињеници да вредност једно од ова два теста утиче на укупну вредност LR_{cc} , тако да се ниска вредност оног другог теста надокнађује високом вредношћу првог теста.

Дакле, модел условног покрића предствља унапређење модела безусловног покрића јер уважава и времена настанка прекорачења. Међутим, модел тестира само узастопне догађаје. Из тог разлога не може да кооптира корелацију између прекорачења који се дешавају у различитим периодима. У случају нарушавања претпоставке о независности дистрибуције прекорачења не суседних догађаја, модел условног покрића ће VaR модел означити као валидан.

Као и модел безусловног прекорачења и овај модел има малу моћ разликовања валидних од неисправних VaR модела када се користи на ограниченим узорцима. Исти је разлог као и у случају модела условног покрића. Тест је заснован на асимптотској претпоставци да рацио следи χ^2 теста са два степена слободе, зато има малу моћ када се користи на ограниченим узорцима. Симулација коју је спровео Zikovic (2010) показује колика су одступања у износима критичних вредности када се модел користи на ограниченом узорку дневних VaR процена начињених за годину дана за нивое поверења од 90, 95 и 99%, у односу на критичне вредности када се проводи на узорку који тежи бесконачности.

Због овог недостатка у оба модела бројни аутори (Doncic et al., 2022; Matkovic et al., 2024) инсистирају на валидацији резултата ових модела. Најчешће коришћени модели за ту сврху јесу модели засновани на *Monte Carlo* симулацији и модели засновани на *Bootstrap* симулацији. Најчешће примењивани такви модели предмет су анализе у наставку дисертације.

2. Модели засновани на техникама симулације за валидацију VaR модела

Као што је већ истакнуто оба модела вероватноће покрића губитака заснована су на асимптотским претпоставкама да вредност рација веродостојности следи χ^2 дистрибуцију са једним, односно два степена слободе. Једноставније речено, то значи да како се узорак приближава бесконачном, то ће дистрибуција вредности рација веродостојности тежити теоријској χ^2 дистрибуцији. Последица овога јесте, када се модели примене на ограниченим узорцима вредности рација веродостојности ће само приближно тежити теоријској χ^2 дистрибуцији. Колико ће емпиријска дистрибуција

одступати у односу на теоријску χ^2 дистрибуцију зависи од величине узорка и нивоа поверења за који се врши VaR процена.

Степен одступања емпиријске у односу на теоријску χ^2 дистрибуцију одредиће разлику између теоријске критичне вредности и стварне контекстуалне вредности. С аспекта Директиве солвентности II, разлика између теоријске критичне вредности и стварне контекстуалне вредности утицаће на износ VaR, као квантила дистрибуције. То даље значи да ће се разликовати стварно потребан износ капитала за поткриће тржишних ризика у односу на процењен.

Емпиријска истраживања Berkowitz et al., (2008), Hurlin et al. (2008), Zikovic (2010), Radivojevic et al. (2016) указују да са смањењем нивоа поверења разлика се значајно повећава, док је разлика тог одступања мања како се број степени слободе повећава. Налази су приказани за величину узорка од годину дана дневних VaR процена на узорку од десет хиљада симулација применом *Monte Carlo* симулације. Међутим, проблем се додатно повећава када се смањује број прекорачења.

У циљу ублажавања овог проблема и повећања моћи разликовања валидних од неисправних VaR модела, аутори попут Christofferson (2011), Ziggel et al. (2013) и Candelon et al. (2011) решење су пронашли у примени *Monte Carlo* симулације, док аутори попут Giannopoulos & Tunaru (2005) истичу да решење треба тражити у примени *Bootstrap* симулације.

2.1. Модел засновани на Monte Carlo симулацији за валидацију VaR модела

Christofferson (2011) је био први аутор који је проблем мале моћи модела безусловног и условног покрића нашао у раду Dufour (2006), који је представио процедуру за утврђивање p – вредности применом *Monte Carlo* симулације. Ова техника која обезбеђује тачне тестове засноване на било којој статистици чија се дистрибуција коначног узорка може симулирати (Malecka, 2014).

Наиме, Dufour (2006) је показао да се p -вредност било које континуиране функције преживљавања $S(\cdot)$ може ефикасно апроксимирати њеном емпиријском верзијом, што се у контексту тестирања валидности VaR модела, уз услов да је $Prob[LR_i = LR_j] = 0$, може представити на следећи начин:

$$\hat{S}_M(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I(LR_i \geq x) \quad (80)$$

при чему су:

LR_i - рацио теста за нулту хипотезу за симулирани узорак

$I(\cdot)$ - индикатор функције

M - број симулација

Под условом да је довољно велики број симулација, теоријски сет вредности рација за које се одбацује нулта хипотеза за ниво значајности (α), $S(LR_0) < \alpha$, једнака је сету вредности $\hat{p}_M(LR_0) \leq \alpha_1$ са $\hat{p}_M(LR_0) = \frac{M\hat{S}_M(LR_0)+1}{M+1}$ за $\forall \alpha_1$. У контексту тестирања валидности VaR модела ово подразумева да ако се у свим условима (нпр. при различитим величинама узорка или различитим параметрима) задовоље одређени асимптотски предуслови, критичне области, теоријска $(LR_0) < \alpha$ и критична област $\hat{p}_M(LR_0) \leq \alpha_1$, ће бити усклађене, што омогућава конзистентне закључке о тестирању хипотеза независно од спроведеног теста или специфичних података.

У ситуацији када постоји вероватноћа различита од нуле да два рација теста LR_i и LR_j имају исту вредност, $Prob[LR_i = LR_j] \neq 0$ или када је могуће применом симулација сваки пут утврђивати вредности рација теста, Dufour (2006) је показао да емпиријска функција преживљавања гласи:

$$\tilde{S}_M(LR_0) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I(LR_i \leq LR_0) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I(LR_i = LR_0) \times I(U_i \geq U_0) \quad (81)$$

при чему су U_i реализације од $i = 0, 1, \dots, M$ које следе униформну дистрибуцију у интервалу од 0 до 1.

Прихватајући претходно речено, пре свега полазећи од израза $\hat{p}_M(LR_0) = \frac{M\hat{S}_M(LR_0)+1}{M+1}$, односно могућности да се довољним бројем понављања симулација узорака величине стварног узорка утврди p -вредност, Christofferson (2011) је предложио да се валидација LR_{uc} тестира применом израза (82):

$$p = \frac{1}{10000} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{9999} I(\tilde{LR}(i) > LR) \right\} \quad (82)$$

Christoffersen (2011) предлаже да се генерише узорак од 9999 симулација, при чему се узорак састоји од нула и јединица, односно серије вредности индикаторске функције $I(\cdot)$. Ова функција узима вредност један када је услов испуњен, а нулу у супротном. Другим речима, предложено је да се генерише 9.999 узорака величине једнаке стварном узорку, где серија нула и јединица следи *IID Bernoulli* (p) низ са вероватноћом p . На тај начин генерише се 9999 вредности LR рација безусловног покрића $\{L\tilde{R}(i)\}_{i=1}^{9,999}$. На основу овог узрока врши се израчунавање p -вредности применом израза (82).

За тестирање LR_{cc} Christofferson (2011) предлаже исту процедуру. Разлика је само у статистици теста, односно у рацију веродостојности који се користи. У случају тестирања условног покрића користи се LR_{cc} рацио. Тако да тест гласи:

$$p = \frac{1}{10000} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{9999} I(\overline{LR}_{cc}(i) > LR)_{cc} \right\} \quad (83)$$

Моделу су валидни уколико симулирана p -вредност има мању вредности од критичне p -вредности. У супротном, модели нису валидни.

Предложену процедуру подржавају бројни аутори и то не само валидацију модела на вероватноће покрића губитака, већ и за остале VaR моделе. Malecka (2014) посебно истиче ефикасност процедуре у случају тестирања валидности дурационих модела, класе модела које уважавају време настанка прекорачења.

Група аутора које предводе Ziggel et. al. (2014) истичу да је предложена процедура комплексна, те да могућности *Monte Carlo* симулације треба ефикасније искористити у смислу да се у тест безусловног и условног покрића инкорпорира и дурација, односно време између појаве два прекорачења. Из тог разлога, предложили су следећи модел безусловног покрића:

$$LR_{MCuc} = \sum_{t=1}^T I_t(p) + \epsilon \quad (85)$$

при чему су:

LR_{MCuc} - рацио теста безусловног покрића заснованог на *Monte Carlo* симулацији

ϵ - грешка модела

Критичне вредности теста израчунавају се коришћењем Monte Carlo симулација, што подразумева генерисање случајних узорака из познате дистрибуције статистике (LR) теста и р-вредности. Када су дистрибуција теста и р-вредности познате, то искључује потребу за утврђивањем асимптотске дистрибуције, док ε омогућава да тест задржи своју вероватноћу одбацивања нулте хипотезе. Уколико би статистика теста имала дискретну дистрибуцију, не би било могуће реализовати тест на свим потенцијалним нивоима значајности. Иако избор величине случајне грешке није критичан за тестирање хипотезе о безусловном покрићу, постоји ризик да би статистика теста могла бити виша у случају $(T - 1)$ прекорачење у односу на (T) прекорачења, што захтева пажљиву проверу да би се избегле потенцијалне грешке у интерпретацији резултата.

За тестирање независности прекорачења, исти аутори су предложили следећи модел независности прекорачења заснован на *Monte Carlo* симулацији:

$$LR_{Mciid} = T_1^2 + (N - T_m)^2 + \sum_{i=1}^m (T_i - T_{i-1})^2 + \varepsilon \quad (86)$$

при чему су:

R_{Mciid} - *рацио теста независности прекорачења заснованог на Monte Carlo симулацији*

Процедура је заснована на *Run*-тесту који су предложили *Wald* и *Wolfowitz* (1940).

Полазећи од чињенице да је у истом моделу за валидацију VaR модела могуће инкорпорирати тест безусловног покрића и тест независности *Ziggel et. al.* (2014) развили су следећи модел условног покрића:

$$R_{Mccc} = a \cdot \left| \frac{(\varepsilon + \sum_{T=1}^N I_T)}{N - p} \right| + (1 - a) \left(\frac{LR_{Mciid} - \hat{r}}{\hat{r}} 1_{\{LR_{Mciid} \geq \hat{r}\}} \right) + \varepsilon \quad (87)$$

При чему a представља учешће теста безусловног покрића у моделу условног покрића, док \hat{r} представља оцену очекиване вредности теста независности прекорачења. Јединствена карактеристика овог модела огледа се у томе што се помоћу њега може испитати да ли VaR модел прецењује и потцењује стварни ризик коме је изложен портфолио. У зависности да ли се испитује да ли VaR модел потцењује или

прецењује стварни ризик портфолија осигуравајућег друштва вредност теста пондерише

$$\text{са } I \left\{ \sum_{T=1}^N I_t / N \geq p \right\}, \text{ односно са } I \left\{ \sum_{T=1}^N I_t / N \leq p \right\}.$$

2.2. Модели засновани на Bootstrap симулацијама за валидацију VaR модела

Beutner et al. (2024) истичу да *Bootstrap* апроксимације често дају бољи увид у стварну дистрибуцију од асимптотске апроксимације. Из тог разлога често се користе за конструисање интервала поверења за VaR процене. Међутим, оне захтевају пажљива подешавања. Истраживања Hall и Yao (2003) показала су да конвенционалне *Bootstrap* симулације често генеришу неконзистентне процене када резидуали одступају од нормалне дистрибуције. То значи ако су основне претпоставке о дистрибуцији резидуала погрешно специфициране, имају дебље репове или друге особине које нису у складу са нормалном дистрибуцијом, конвенционалне методе *Bootstrap* симулације неће тачно одражавати варијабилност у подацима. Последица тога огледа се у томе да поузданост статистичких закључивања изведених из таквих *Bootstrap* симулација може бити доведена у питање. Из тог разлога Spierdijk (2016) је предложио да се применом принципа *m-out-of-n*³³ без враћања податка (енгл. *m-out-of-n without-replacement Bootstrap*), конструишу интервали поверења за параметарске VaR моделе из фамилије ARMA-GARCH VaR модела, при чему (*m*) је број података који се узима из оригиналног узорка од (*n*) броја података.

На овим основама, истраживања Christoffersen и Goncalves (2005), који су конструисали *Bootstrap* интервале поверења за *uslovni* VaR и ES са једне стране, и истраживањима Shimizu (2009) са друге стране, Beutner et al. (2024) предложили су интервал поверења за ширу класу VaR модела. За разлику од решења Christoffersen и Goncalves (2005) који интервал поверења заснивају на рекурзивном дизајну у којем се

³³ Метода *m-out-of-n without-replacement Bootstrap* је техника поновног узорковања, која се користи у изградњи поверљивих интервала када се ради о узорцима података. Користи се када су подаци ограничени и када је важно одржати структуралне карактеристике оригиналног скупа података. Изабрана посматрања се не враћају у оригинални узорак пре него што се изабере следеће. На тај начин, свако од *m* изабраних посматрања је јединствено и не може се поново изабрати у истом узорку.

Bootstrap посматрања генеришу итеративно коришћењем процењене динамике волатилности, Beutner et al. (2024) интервал поверења конструишу на основама фиксног дизајна *Bootstrap* заснованом на резидуалима, у којем се динамика почетних узорака држи фиксним на вредностима оригиналне серије. *Bootstrap* симулације засноване на овом дизајну базирају се на појединачној Newton-Raphson итерацији која поједностављује доказе о асимптотичкој валидности првог реда. Ова шема разликује се у односу на *Bootstrap* заснован на резидуалној основи код којег се *Bootstrap* узорци конструишу из процењених IID резидуала. Главна предност ове схеме огледа се у стопи конвергенције³⁴ која је упоредива са оном код IID *Bootstrap* симулација, док серије имају спорије стопе конвергенције. Међутим шема применљива је само на линеарне процесе.

Имајући у виду претходно речено, Beutner et al. (2024) предлажу следећу схему за конструисање приближно $100(1 - \gamma)\%$ интервала поверења за ширу класу VaR модела:

- 1) Први корак подразумева да се генерише скуп од B bootstrap узорака процена \widehat{VaR} за $b = 1, \dots, B$. Генерисање ових узорака врши се применом *Bootstrap* симулације засноване на резидуалима, у којем се динамика почетних узорака држи фиксним на вредностима оригиналне серије;
- 2) Други корак подразумева да утврђивање перцентила интервала са једнаким реповима (енгл. *equal-tailed percentile interval - EP*) где су вероватноће да се вредности нађу изван интервала једнаке са обе стране, што се математички може представити на следећи начин:

$$\left[\widehat{VaR}_{n,a} - \frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{G}_{n,B}^{*-1} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right), \widehat{VaR}_{n,a} + \frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{G}_{n,B}^{*-1} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (88)$$

са $\widehat{G}_{n,B}^{*-1}(\cdot)$ као функцијом квантила (генерализована инверзна) од $\widehat{G}_{n,B}^*(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbb{1}_{\{\sqrt{n}(\widehat{VaR}_{n,a}^{*(b)} - \widehat{VaR}_{n,a}) \leq x\}}$ (89).

³⁴ *Bootstrap* процена сматра се конзистентном ако статистика *Bootstrap* теста успешно опонаша асимптотски тест првог реда у великом узорку. С друге стране, ако изобличење величине у *Bootstrap* тесту нестане брже од оне првог реда, онда се постиже асимптотичко пречишћавање вишег реда. Ово побољшање вишег реда игра важну улогу када се објашњавају супериорне перформансе *Bootstrap* методе у коначним узорцима. У случају IID bootstrap методе, стопа конвергенције т-статистике једнаким реповима једнака је $O(n^{-1})$, што је брже од парњака првог реда $O(n^{-1/2})$. Међутим, за разлику од IID *Bootstrap* методе, *Bootstrap* методе за моделе временских серија имају различите стопе конвергенције у зависности од модела и примењеног метода.

3) Трећи корак подразумева утврђивање интервала обрнутих репова (RT):

$$\left[\widehat{VaR}_{n,a} + \frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{G}_{n,B}^{*-1} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right), \widehat{VaR}_{n,a} + \frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{G}_{n,B}^{*-1} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (90).$$

4) Четврти корак подразумева утврђивање симетричног интервала (SY):

$$\left[\widehat{VaR}_{n,a} - \frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{H}_{n,B}^{*-1}(1 - \gamma), \widehat{VaR}_{n,a} - \frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{H}_{n,B}^{*-1}(1 - \gamma) \right] \text{ са } \widehat{H}_{n,B}^{*-1}(\cdot) \text{ као функцијом}$$

квантила (генерализована инверзна) од $\widehat{H}_{n,B}^*(x) =$

$$\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbb{1}_{\{\sqrt{n}(\widehat{VaR}_{n,a}^{*(b)} - \widehat{VaR}_{n,a}) \leq x\}} \quad (91).$$

Важно је истаћи да интервал поверења добијен у другом кораку заснован је на конструкцији тзв. неизводљивог интервала поверења са једнаким реповима:

$$\left[\widehat{VaR}_{n,a} - \frac{1}{\sqrt{n}} G_{n,B}^{-1} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right), \widehat{VaR}_{n,a} - \frac{1}{\sqrt{n}} G_{n,B}^{-1} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (92)$$

при чему је $G_{n,B}^{-1}(\cdot)$ непозанти квантил функције $\sqrt{n}(\widehat{VaR}_{n,a} - VaR_{n,a})$, где је $G_{n,B}^{-1}(\cdot)$ замењено са њеном аналогном *Bootstrap* верзијом $\widehat{G}_{n,B}^{*-1}(\cdot)$. Исто резонување доводи до симетричних интервала, али са статистиком теста $\sqrt{n}|\widehat{VaR}_{n,a} - VaR_{n,a}|$, уместо $\sqrt{n}(\widehat{VaR}_{n,a} - VaR_{n,a})$. Окретање репова ET интервала доводи до RT интервала, што имплицира да су они једнаких дужина.

Претходно речено сугерише да иако су конструкције сва три интервала различите они ће дати сличне информације о ризику и да ће резултати бити доследни када се анализирају до одређеног тренутка (n). Другим речима, без обзира на то да ли користимо EP, RT или SY интервал, значење је увек исто. С обзиром на прошлост до тренутка n , вероватноћа да је условни VaR за период $n+1$ садржан у интервалима приближно је једнака $100(1 - \gamma)\%$.

Представљена процедура може се користити за процену валидности VaR модела само као основа за поређење добијених процена ризика са проценама других модела. Међутим, још увек није развијен тест који би показао колика су одступања у проценама између добијених процена ризика на овај начин и применом других модела прихватљива да би се неки модел сврстао као валидан. Друго, не постоје сигурне гаранције да су овако добијене процене ризика тачне, јер иако су *Bootstrap* симулације засноване на резидуалима применљиве на ширу класу модела временских серија, њихова процедура покретања је веома зависна од модела волатилности. Они активно користе специфичну

структуру зависности модела (Jeong, 2018). С тим у вези, граничне теореме почетне основе засноване на резидуалној основи нису лако доступне из општих теорија *Bootstrap*-а.

Из тог разлога, најшире коришћена процедура за испитивање валидности VaR модела заснована на *Bootstrap* симулација јесте она која почива на раду Efron (1987). Реч је о примени непараметарске *Bootstrap* симулација која се своди на оцену стандардне грешке генерисањем великог броја нових узорака из постојећег скупа податка, при чему се за сваку симулацију израчунава вредност оцењивача $\hat{\theta}$, односно θ^* . Тако се добија $\text{Var}_F(\hat{\theta}) \approx \text{Var}_F(\theta^*)$, са (F) непознатом дистрибуцијом оцењивача $\hat{\theta}$.

За потребе тестирања валидности VaR модела, описана процедура подразумева да се на основу великог броја симулираних узорака изврше VaR процене. На основу тако добијених VaR процене врши се оцена непознате густине (F) симулираних VaR процена, при чему се варијанса израчунава на основу емпиријске густине. Основни недостатак код овакве процедуре јесте утврђивање оптималног броја понављања, нарочито када се ради са малим узорцима јер са повећањем броја понављања расте прецизност оцене.

3. Модели за валидацију ES модела

Захваљујући чињеници да ES, као мера ризика, испуњава све услове кохерентне мере ризика, последњих година ES модели преузимају примат над VaR моделима (Spring, 2021). Један од разлога који је допринео убрзању тога јесте да је Базелски комитет за супервизију банака у последња два своја стандарда прописао употребу ове мере ризика. Међутим, ови модели још увек не доживљавају свој пуни потенцијал у пракси из разлога што је њихова валидација прилично комплексна. Кључни разлог томе налази се у чињеници да је број прекорачења ES, по правилу, веома мали, што отежава и значајно компликује примену једноставних статистичких техника. Другим речима, узорак је по правилу веома мали, тако да је на основу њега тешко извести поуздане закључке. Отуда, још увек данас не постоји консензус међу истраживачима о томе како тестирати валидност ES модела. Штавише, још увек је у току и контроверзна дебата о томе да ли је уопште могуће тестирати валидност ES модела. Дебата је подстакнута истраживањем Gneiting (2011) који је доказао да ES нема статистичко својство познато као

елицитабилти: мера ризика се назива елицитабилна, ако се може дефинисати као решење проблема минимизације грешке предвиђања. Gneiting (2011) тврди да недостатак овог својства чини комплексним или можда чак немогућим тестирање ES. Насупрот овог мишљења, аутори попут Acerbi и Szekely (2014) наводе да ово својство не утиче на *backtesting*, јер је то корисно својство за поређење модела, али не и за *backtesting*. Како је ES само функција α -репа дистрибуције негативне промене вредности портфолија, то било која методологија за процену прикладности процењене дистрибуције репа може бити разуман алат за *backtesting*, иако можда није концептуално идеалан *backtesting* за ES. Другим речима, то што би могло бити тешко директно тестирати валидност ES модела не значи аргумент против тестирања ES модела. Добар пример јесте приступ Kratz et al. (2018) који апроксимирају ES Римановом сумом³⁵ користећи VaR процене на различитим нивоима поверења између α и један. Стога, Kratz et al. (2018) могу да се ослоне на постојеће технике за тестирање вишеструких VaR вредности како би имплицитно проценили ES процене. Ово показује индиректан приступ тестирању ES модела, што имплицира да се може прикладно проценити ES процена без обзира на недостатак елицитабилности.

Паралелно са овом дебатом бројни аутори раде на развоју модела за валидацију ES модела. Резултат тога јесте да данас постоји велики број модела. Сви се они могу поделити у различите групе према различитим критеријумима. Међутим, најчешћа подела је на: непараметарске и параметарске моделе за валидацију ES модела. Даље у оквиру ових модела прави се разлика да ли су засновани на симулацији или нису. Тако мултиномни ES *backtesting* модел који су предложили Kratz et al., (2018) спада у непараметарске моделе који не захтевају симулацију. Параметарски модел који се заснива на симулацији, јесте модел Righi и Ceretta модел, док најпознатији непараметарски модел који се заснива на симулацији јесте Acerbi и Szekely модел.

За разлику од модела за валидацију VaR модела који у принципу не захтевају додатне, помоћне варијабле, модели за валидацију ES модела у основи захтевају додатне варијабле, као што су процене волатилности, VaR процене и сл. Из тог разлога честа је подела на оне који захтевају додатне улазне параметре и оне који на захтевају. Модел

³⁵ Риманова сума је математички концепт који се користи на интегралном рачуну за апроксимацију вредности одређеног интеграла. То је метода за израчунавање површине испод кривуље функције на одређеном интервалу.

који су предложили Bayer и Dimitriadis (2019) не захтева додатне улазне параметре. Модели који захтевају додатне улазне параметре могу се поделити у зависности од врсте улазних варијабли које захтевају. Тако на пример Acerbi и Szekely (2014) и Kratzet al. (2018) модел заснивају се на вишеструким проценама VaR, McNeil и Frey (2000) моделу заснованом на резидуалима и Nolde и Ziegel (2017) заснивају се на волатилности, Costanzino и Curran (2015), Du и Escanciano (2017) заснивани на кумулативу прекорачења или целој дистрибуцији промене вредности портфолија као што су Gaussian приступу за валидацију ES модела предложеном од стране Berkowitz-a (2001) или скраћено Berkowitz-ев (2001) модел, Kerkhof и Melenberg (2004) модел, Wong (2008) модел седла. У зависности од типа помоћних улазних параметра ови модели у већој или мањој мери имају одређених проблема. Иако, већина споменутих модела развијена је са циљем да ублаже проблем процене валидности модела који настаје из недовољног узорка прекорачења која су изнад ES.

Заједничка одлика већини претходно споменутих модела јесте да се заснивају на процени: 1) тачних вредности случајне варијабле или дистрибуцији вероватноће, које се изражавају условним очекивањем: $E(\Delta P_t | \Omega_{t-1})$, при чему Ω_{t-1} репрезентује скуп свих релевантних информација расположивих у тренутку (t-1) или 2) интервала предвиђања у коме се очекује да ће се налазити процене ризика за одређени ниво поверења, односно р-вредност. За разлику од ових модела Berkowitz-ев (2001) модел, као и модел Kerkhof и Melenberg (2004) модел заснивају се на тестирању целокупне процењене дистрибуције негативне промене вредности портфолија. Већина модела из ове групе заснива се на реализованим р-вредностима, које процењују вероватноћу *ex-post* уоченим променама вредности портфолија на основу предвиђене дистрибуције промена вредности. Diebold et al., (1998) први су представили идеју евалуације процена густине на основу реализованих р-вредности. Након тога, и Berkowitz-ев (2001) модел, као и модел Kerkhof и Melenberg (2004) су развили модел *backtesting* ES засноване на концепту реализованих р-вредности. Оба приступа избегавају било какве потешкоће директног тестирања ES, али зато захтевају експлицитну процену целокупне дистрибуције негативних промена вредности портфолија, тако да су тешко изводљиви за мале узорке.

Још један критеријум за поделу модела за валидацију ES модела јесте да ли спадају у тестове безусловног и условног покрића. Другим речима, критеријум за поделу јесте тај да ли узимају у обзир два или три аспекта *backtesting*: број прекорачења који

премашује одређени праг, величину, односно магнитуду тог прекорачења и независност прекорачења. Условни модели уважавају сва три аспекта, док безусловни не воде рачуна о независности прекорачења. Иако се у литератури модел који су предложили Acerbi и Szekely (2014) често означава као непараметарски условни модел за валидацију ES модела, једини модел који представља прави условни модел у смислу да уважава сва три критеријума јесте Du и Escanciano (2017) модел (Spring, 2021).

Због великог броја модела за валидацију ES модела у наставку дисертације фокус је на представљању и анализи најпознатијих модела из сваке од наведених критеријума, уз напомену да анализирани модели могу се према различитим критеријума сврстати у различиту групу. Оваква селекција модела извршена је из разлога што се на тај начин најбоље могу увидети специфичности различитих група модела, уз напомену да изабрани модели имају одређених специфичности које их издвајају од други модела. Редослед представљања модела одређен је хронологијом њиховог појављивања.

3.1. Модел заснован на Bootstrap резидуалима

Први аутори који су предложили модел за валидацију ES модела били су McNeil и Freya (2000). Предложили су модел који почива на *Bootstrap* симулацији резидуала. Као такав може се сврстати у параметарске моделе засноване на симулацији. Иако је реч о првом моделу, још увек се често примењује у пракси и представља основу за развој великог броја модела валидације ES модела (Bayer & Dimitriadis, 2019).

Модел се заснива на резидуалима прекорачења. За VaR и ES процене потребно је на располагању имати и сет процена условне волатилности промене вредности портфолија, што се може означити као: $\{\hat{\sigma}_t : t = 1, \dots, T\}$. Поред VaR и ES прогноза, претпоставимо да менаџер ризика такође има при руци скуп процена за условну волатилност губитака приноса, означених са $\{\sigma_{\mathcal{K}T} : t = 1, \dots, T\}$, односно сет података о стварним негативних промена вредности портфолија.

У контексту Директиве солвентности II резидуали прекорачења, за одређени временски период посматрања (T), израчунавају се применом следећег израза:

$$r_t := \frac{\Delta P_t - \widehat{ES}_{t,a}}{\hat{\sigma}_t} I_t(a) \quad (93)$$

Под претпоставком да је модел ризика исправно специфициран, односно да тачно одражава основне промене у факторима ризика портфолија осигуравајућег друштва, онда важи да је (McNeila & Freya, 2000):

$$\mathbb{E}[r_t] = \mathbb{E}\left[\frac{\Delta P_t - ES_{t,a}}{\sigma_t} \mid \Delta P_t \geq VaR_{t,a}\right] = 0 \quad (94).$$

Ово је из разлога што се претпоставља да је серија промене вредности портфолија континуирана и строго растућа. Импликација овога је $ES_{t,a} = \mathbb{E}[\Delta P_t \mid \Delta P_t \geq VaR_{t,a}]$. У супротном, ако модел потцењује стварни ризик коме је изложен портфолио осигуравајућег друштва ($ES_{t,a} > \widehat{ES}_{t,a}$), онда ће очекивање да буде веће о нуле, тако да важи:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Delta P_t - ES_{t,a}}{\sigma_t} \mid \Delta P_t \geq VaR_{t,a}\right] > 0 \quad (95).$$

За тестирање валидности ES модел McNeila и Freya (2000) предложили су да се тестира следеће хипотеза:

$$H_0: \bar{r} \leq 0 \quad (96)$$

$$H_1: \bar{r} > 0 \quad (97)$$

при чему је $\bar{r} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T I_t(a)} \sum_{t=1}^T r_t$.

За спровођење теста валидности ES модела McNeila и Freya (2000) предложили су следећу процедуру:

- 1) Први корак подразумева да се израчуна $\bar{r}(\overline{\Delta P})$, на основу вектора промена вредности портфолија осигуравајућег друштва.
- 2) Други корак подразумева да се изврши симулација \bar{r} под нултом хипотезом, при чему се за свако прекорачење $VaR_{t,a}$ израчунава кориговани резидуал прекорачења (r_t^{ajd}) применом следећег израза:

$$r_t^{ajd} = r_t - \bar{r}(\overline{\Delta P}) \quad (98)$$

- 3) Трећи корак подразумева да се узорак коригованих резидуала прекорачења (r_t^{ajd}) постави као ($S := \{r_t^{ajd} : r_t \neq 0\}$). Ако постоји (x) посматрања (ΔP) која су већа од $VaR_{t,a}$, тада је ($|S| = x$), где ($|S|$) означава кардиналност скупа (S).

За сваку од (M) *Bootstrap* симулација изведена ($|S|$) посматрања замењују се са (S) и израчунава се \bar{r}_t^i за сваку симулацију ($i \in \{1, \dots, M\}$).

4) Последњи корак подразумева процену p -вредности:

$$p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{\bar{r}_t^i > r^i(\Delta P)\}} \quad (99).$$

Нулта хипотеза одбацује се када је p -вредност већа од унапред задатог нивоа поверења теста валидности ES модела. Предлаже се да је довољно извршити 10000 симулација да би се добила валидна p -вредност.

Два су основна ограничења овог модела. Прво, тест није увек изводљив, јер захтева се процена волатилности прошлих негативних променама вредности портфолија. Bayer и Dimitriadis (2019) истичу да је могуће изоставити волатилност негативних промена у вредности портфолија. Импликација овога јесте да се резидуали могу користити као мере ризика без додатног стандаризовања према волатилности. Други недостатак модела огледа се у томе да узима у обзир само величину прекорачења изнад VaR, али не и укупну вредност прекорачења.

3.2. Gaussian приступ за валидацију ES модела предложеном од стране Berkowitz-a (2001) - Berkowitz модел

Кључна специфичност *Berkowitz* (2001) модела јесте што се примењује за валидацију и VaR и ES модела, као и чињеница да упркос својој слабости да не може поуздано да се примени у случају малог броја прекорачења, јесте тај што се применом *Bootstrap* симулацијом може унапредити његова моћ.

Модел је развијен на идеји да се промене вредности портфолија, као случајне варијабле применом *Levy Rosenblatt* трансформације могу трансформисати применом инверзне стандардизоване нормалне функције:

$$z_t = \Phi^{-1}(\Delta P) \quad (100)$$

при чему је Φ^{-1} инверзна стандардизована нормална функција, у серију стандардизованих случајних варијабли које следе IID нормалну дистрибуцију.

За тестирање валидности модела Berkowitz (2001) је предложио следећи тест веродостојности (LR_B) који следи χ^2 дистрибуција са два степена слободe:

$$LR_B = 2 \ln L(\mu = \hat{\mu}_{ML}, \sigma^2 = \hat{\sigma}_{ML}^2) - \ln L(\mu = 0, \sigma^2 = 1) \quad (101)$$

при чему су:

- LR_B - *рацио веродостојности Berkowitz-евог теста*
- σ^2 - *варијанса резидуала*
- μ - *средина*
- $L(\cdot)$ - *Gauss- ова логаритамска функција веродостојности*

Тест се примењује само за промене вредности портфолија које су изнад одређеног прага у репу дистрибуције. То значи, да тест у ствари пореди облик предвиђене са стварном густином репа дистрибуције, што се математички може представити:

$$TH_{i,t} = \max\{ES_1, ES_2 \dots ES_t\}$$

при чему су:

- $TH_{i,t}$ - *вредност прага*
- ES_t - *ES већа од вредности прага дистрибуције*

$TH_{i,t} = \max\{ES_1, ES_2 \dots ES_t\}$ сугерише да се узимају само одређене промене вредности које су изнад утврђеног прага. Ово доводи до тога да се у пракси модел тешко спроводи због малог броја података. Други проблем везан за овај модел јесте што се поставља претпоставка у вези дистрибуције. Тачније, узима у обзир дистрибуцију која је начињена приликом вршења процена ризика. Али у случају примене непараметрских модела, таква претпоставка не постоји (Дончић, 2020). Проблем који се надовезује на избор претпоставке јесте тај што је тешко проценити да ли је модел неисправан зато што производи нетачне процене ризика или зато што је заснован на нереалној претпоставци. Међутим, независно од овога како је већ истакнуто, применом *Bootstrap* симулација могуће је генерисати велики број прекорачења на основу реалних, тако да се повећа успешност модела.

3.3. Мултиномни ES *backtesting* модел

Kratz et al. (2018) модел представља проширење биномног теста за валидацију VaR модела. Свој модел Kratz et al. (2018) засновали су на идеји да се ES успешно може апроксимирати помоћу Риманове суме на следећи начин, при чему Kratz et al. (2018) инсистирају да се апроксимација врши за четири VaR ($N = 4$):

$$ES_{t,a} \approx \frac{1}{4} [VaR_{t,cl} + VaR_{t,0.75a+0.25} + VaR_{t,0.5a+0.5} + VaR_{t,0.25a+0.75}] \quad (102)$$

Повећањем N на 8, 16 итд. повећава се прецизност апроксимације. За $N \in \mathbb{N}$ VaR нивоа поверења, који се користе за апроксимацију у изразу (j), одговарајући VaR ниво поверења дефинише се $cl_j := cl + \frac{j-1}{N}(1 - cl)$ за $j = 1, \dots, N$. За било који временски хоризонт $t \in \mathbb{N}$, ако серија VaR процена за нивое поверења cl_j за $j = 1, \dots, N$ има задовољавајуће безусловне покриће тада важи $\sum_{t=1}^T I_t(cl_j) \sim \text{Binomnu distribuciju}$. То значи да се симултано може тестирати процена VaR на свим нивоима поверења коришћењем мултиномне дистрибуције ($MN(n(p_0, \dots, p_n))$ где сваки од (n) покушаја резултира ($N + 1$) исхода дистрибуираних према вектору вероватноћа успеха p_0, \dots, p_n)³⁶. Према томе, Kratz et al. (2018) дефинишу серију $X_t := \sum_{i=1}^N I_t(cl_j)$ који обухвата број прекорачења током одређеног временског периода. Kratz et al. (2018) користе благо прилагођавање у циљу кооптирања свих запажања током одређеног временског периода (t), дефинишући одређени индикатор $O_j := \sum_{t=1}^T \mathbb{1}_{\{x_t=j\}}$ за $j = 0, \dots, N$, који служи да утврђивање броја прекорачења VaR_{t,cl_j} , уз напомену да свако прекорачење VaR_{t,cl_j} аутоматски значи и прекорачење $VaR_{t,cl_{j-1}}$ јер је $VaR_{t,cl_j} \geq VaR_{t,cl_{j-1}}$. То значи да индикатор прекорачења O_j узима у обзир сва прекорачења која прелазе првих (j) VaR процена до нивоа поверења α_j , али и која прелазе праг за ниво поверења cl_{j+1} . Под условом да модел задовољава критеријум безусловног покрића, вектор индикатора прекорачења $(O_0 \dots O_N)$ следиће мултиномну дистрибуцију: $(O_0 \dots O_N) \sim MN(T(cl_1 - cl_0, \dots, cl_{N+1} - cl_N))$.

³⁶ Вектор вероватноћа успеха је математички концепт који се користи у статистици и теорији вероватноће, а односи се на скуп вероватноћа повезаних са различитим исходима у једном експерименту или процесу.

У општем случају, ако $(O_0 \dots O_N)$ следи мултиномну дистрибуцију $(O_0 \dots O_N) \sim MN(T(\theta_1 - \theta_0, \dots, \theta_{N+1} - \theta_N))$, за неке арбитрарне параметре $\theta_N = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N+1} = 1$, онда се могу поставити нулта и алтернативна хипотеза, тако да гласе Kratz et al. (2018):

$$H_0: \theta_j = cl_j \text{ за } \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

$$H_1: \theta_j \neq cl \text{ за најмање једно } j \in \{1, \dots, N\}$$

За тестирање нулте хипотезе Kratz et al. (2018) предложу χ^2 тест који је предложио Nass (1995), за $N = 8$. Nass-ов тест представља модификацију стандардног Pearson χ^2 тест. Математички, може се представити на следећи начин Kratz et al. (2018):

$$Z_N := \sum_{j=0}^N \frac{(O_j - T(cl_{j+1} - cl))^2}{T(cl_{j+1} - cl_j)} \underset{H_0}{\overset{d}{\sim}} \chi_N^2 \quad (103).$$

при чему Nass-ов тест узастопно користи фактор прилагођавања (c) на следећи

$$\text{начин: } c \cdot Z_N \underset{H_0}{\overset{d}{\sim}} \chi_N^2 \text{ са } c := \frac{2E[Z_N]}{VaR(Z_N)} \text{ и } v := cE[Z_N] \text{ и } E[Z_N] = N \text{ и } VaR(Z_N) = 2N - \frac{N^2 + 4N + 1}{T} + \frac{1}{T} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} \quad (104).$$

За дати ниво значајности *backtesting* (k) нулта хипотеза одбацује се $c \cdot Z_N > \chi_v^2(1 - k)$. У питању је двострани тест, што значи да тест не одбацује само ES моделе у који потцењују ризик, већ и превише конзервативне моделе.

Резултати тестирања овог модела Kratz et al. (2018) показали су да за хоризонт тестирања од једне године дневних података, модел одбацује ES моделе само када је стварно ризик веома прецењен.

3.4. Модел безусловног покрића Acerbi и Szekely

Модел безусловног покрића Acerbi и Szekely (2014) представља непараметарски модел за валидацију ES модела, који се заснива на симулацији. Тачније, Acerbi и Szekely (2019) предложили су четири различита модела за валидацију ES модела: модел условног покрића, безусловног покрића, квантил и минимално пристрастан модел за валидацију ES модела. Међутим, у пракси, пуну афирмацију доживео је други по реду модел који су предложили. Често, у литератури овај модел се означава као "тест 2".

Будући да се ради о непараметарском моделу, основна предност овог модела огледа се у томе што је ослобођен од било које претпоставке о дистрибуцији о промени вредности портфолија. Модел се заснива на условном очекивању, што се математички може представити (Acerbi & Szekely, 2014):

$$ES_{t,a}(\Delta P_t) = \mathbb{E} \left[\frac{\Delta P_t I_t}{a} \right] \quad (105)$$

уз напомену да се ΔP_t односи на негативне промене вредности портфолија и да је реч о континуираној дистрибуцији. У зависности од вектора негативних промена вредности портфолија $\vec{\Delta p}$, Acerbi и Szekely (2014) предложили су следећи тест за тестирање нулте хипотезе о валидности модела:

$$Z := \left(\sum_{t=1}^T \frac{\Delta p_t I_t}{T a \widehat{ES}_{t,a}} \right) \quad (106).$$

Дакле, реч је о једностраном тесту који тестира да ли процењени ризик ($\widehat{ES}_{t,a}$), потцењује стварни ризик $ES_{t,a}$, током *backtesting* периода. Уколико је ES модел валидан, тада важи да је $\mathbb{E}[Z] = 0$, јер је $\widehat{ES}_{t,a} = \mathbb{E} \left[\frac{\Delta P_t I_t}{a} \right]$ одакле следи да је $\mathbb{E} \left[\frac{\Delta P_t I_t}{a} \frac{1}{\widehat{ES}_{t,a}} \right] = 1$. Сређивањем овог израза јасно се добија да је $\mathbb{E} \left[\frac{\Delta P_t I_t}{a} \frac{1}{\widehat{ES}_{t,a}} \right] - 1 = 0$. У супротном, ако модел потцењује стварни ризик очекивано је да $\mathbb{E}[Z] > 0$, јер је $ES_{t,a} > \widehat{ES}_{t,a}$, односно:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \left[\left(\sum_{t=1}^T \frac{\Delta p_t I_t}{T a \widehat{ES}_{t,a}} \right) - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E} \left[\frac{\Delta P_t I_t}{a} \right] \frac{1}{\widehat{ES}_{t,a}} - 1 = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{ES_{t,a}}{\widehat{ES}_{t,a}} - 1 \quad (107). \end{aligned}$$

Како је $\frac{ES_{t,a}}{\widehat{ES}_{t,a}}$ веће или једнако од 1, то важи да је $[Z] > 0$.

Имајући у виду претходно, лако се може извести закључак да се тест користи за тестирање нулте, наспрам алтернативне хипотезе које гласе:

$$H_0: Z \leq 0 \quad (108)$$

$$H_1: Z > 0 \quad (109).$$

Већ је истакнуто да се модел заснива на симулацији, јер права дистрибуција статистике теста под нултом хипотезом је непозната, те се не може искористити њена вредност приликом доношења одлуке о томе да ли су стварне реализације теста значајно веће од нуле (Spring, 2021). Из тог разлога потребно је спровести симулације за утврђивање p -вредности, на основу вектора стварних негативних промена вредности портфолија. За ту сврху аутори су предложили следећу процедуру:

- 1) Први корак подразумева да се израчуна вредност теста на основу стварних негативних промена вредности портфолија, $Z(\overline{\Delta P})$;
- 2) Други корак подразумева да се применом *Bootstrap* симулације генерише (M) дистрибуција негативних вредности промене портфолија ($\widehat{\Delta P}_t$);
- 3) Трећи корак подразумева да се за сваку симулацију израчуна тест статистика (Z^i);
- 4) Последњи корак подразумева да се на основу сета тест статистика утврди p -вредност, по истом принципу као у случају McNeila и Freya (2000), односно:

$$p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{Z^i > Z(\overline{\Delta P})\}} \quad (110).$$

За дати ниво значајности *backtesting* (k) нулта хипотеза се одбацује када је $p < k$. На основу свега реченог у вези овог модела може се закључити да модел има два ограничења. Прво потиче из примене *Bootstrap* симулације, јер *Bootstrap* симулација подразумева значајно ангажовање ресурса у смислу временске и рачунарске захтевности. Други недостатак произилази из чињенице да је потребно складиштити све оцењене негативне промене вредности портфолија током периода тестирања валидности ES модела, што такође изазива значајне ресурсе. Међутим, упркос овим недостацима модел је често коришћен, из разлога што генерише стабилне процене за различите ES моделе. Acerbi и Szekely (2014) поредили су критичне вредности нормалне дистрибуције и студентове T дистрибуције и показали су да су критичне вредности стабилне.

3.5. Bayer-Dimitriadis модел за валидацију ES модела

Занимљив и вредан пажње модел за валидацију ES модела јесте модел који су предложили Bayer и Dimitriadis (2019). Модел је занимљив из разлога што одступа од дотадашње праксе у развоју модела. Модел је заснован на концепту регресије, што

представља нов приступ у тестирању валидности ES модела. Тачније, модел је изграђен на резултатима истраживања које су спровели Fisslera и Ziegela (2016), а који се тичу условне елицитабилности ES. Користећи ове резултате као полазну основу Bayer и Dimitriadis (2019) су предложили оквир за процену регресије за ES на основу дистрибуције негативних промена вредности портфолија, користећи оцене \widehat{ES} , као независне варијабле у моделу. Математички, може се представити следећим изразом (Bayer & Dimitriadis, 2019):

$$-ES_{t,a} = -ES_a(L_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \gamma_0 - \gamma_1 \widehat{ES}_{t,a} \quad (111).$$

Аутори предлажу два теста: двострани тест који је у литератури познат као модел заснован на регресији (енгл. *Expected Shortfall Regression backtest - ESR*) и једнострани тест, који је у литератури познат као тест одсечка (енгл. *Intercept Expected Shortfall Regression backtest - IESR*). У овој верзији теста, аутори параметар нагиба изједначавају са јединицом, тако да добијају следећи модел:

$$-ES_{t,a} = -ES_{t,a}(L_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \gamma_0 - \widehat{ES}_{t,a} \quad (112).$$

Израз (112) имплицира да је ES модел валидан, ако и само ако је $ES_{t,a} = \widehat{ES}_{t,a}$. То даље значи да параметар одсечка треба да буде једнак нули, односно $\gamma_0 = 0$. У случају да се ради о сувише конзервативном моделу, параметар одсечка ће бити већи од нуле, $\gamma_0 > 0$. Супротно, ако ES модел потцењује стварни ризик. У том случају оцена ES, ће да буде мања у односу на стварни $\widehat{ES}_{t,a} < ES_{t,a}$. То значи да је реално очекивати да одсечак нагиба буде мањи од нуле $\gamma_0 < 0$.

На основу претходно реченог лако се може извести закључак о хипотезама. Нулта хипотеза гласи да је параметар одсечка једнак или већи од нуле, наспрам алтернативне која гласи да је параметар одсечка мањи од нуле, односно:

$$H_0: \gamma_0 \geq 0 \quad (113)$$

$$H_1: \gamma_0 < 0 \quad (114).$$

Основни недостатак овог модела потиче из чињенице да ES, као мера ризика сама по себи није елицитабилна функционална форма. Из тог разлога не постоји строго доследна функција скова. Последица тога јесте да не постоји објективна функција да би се применио оцењивач максималне веродостојности, за процену параметра одсечка (γ_0) у регресији. За решење овог проблема аутори су предложили да се искористи условна елицитабилност вектора $\{VaR_{t,a}, ES_{t,a}\}$, како би се симултано процениле две регресионе

једначине, за квантил и за ES негативних промена вредности портфолија, $\Delta p \sim \Delta P$, што се формалније може представити у следећем облику:

$$-\Delta p = \beta_0 - \widehat{VaR}_{t,a} + \varepsilon_t^q \quad (115)$$

$$-\Delta p = \gamma_0 - \widehat{ES}_{t,a} + \varepsilon_t^e \quad (116)$$

при чему су ε_t^q и ε_t^e грешке модела и $q_a(\varepsilon_t^q | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ и $q_a(\varepsilon_t^e | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ скоро сасвим сигурно.

Како се условне VaR процене и процене ES разматрају у било којем тренутку (t) на σ -алгебри \mathcal{F}_{t-1} , услови предложени за грешке су еквивалентни следећем:

$$-VaR_{t,a}(L_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \beta_0 - \widehat{VaR}_{t,a} \quad (117)$$

$$-ES_{t,a}(L_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma_0 - \widehat{ES}_{t,a} \quad (118).$$

Услови омогућавају да се користе реализоване негативне промене вредности портфолија, као и $VaR_{t,a}$ и $ES_{t,a}$, током целог периода тестирања валидности модела, како би се уклопио систем једначина користећи одговарајућу строго доследну функцију скова.

Аутори даље инсистирају на замени процена VaR у систему једначина са ES проценама ($\widehat{ES}_{t,a}$). Резултат тога јесте да су за тестирање валидности модела потребне само ES процене и стварне негативне промене вредности портфолија, као улазни подаци. Ово значајно поједностављује процедуру, али са друге стране за последицу има неспецификацију модела. Другим речима, изостављањем процена VaR, постоји опасност да модел неће моћи адекватно да обухвати све релевантне факторе који утичу на ризик и негативне промене вредности портфолија.

4. Унапређење модела за валидацију ES модела применом Bootstrap симулације

Будући да поједини модели за валидацију ES модела пате од недовољне моћи разликовања валидних од неисправних ES модела када се примењују на ограниченим узорцима, једно од решења за елиминисање овог проблема налази се у примени *Bootstrap* метода, који су предложили Efron (1987) и Efron и Tibshirani (1993). Процедура је иста као и у случају унапређења валидности модела за тестирање VaR модела. Критични фактор у овом процесу јесте одређивање оптималног броја понављања када се ради о

ограниченим величинама узорка, каква су прописана од стране регулаторних институција.

У циљу решавања овог проблема једно од решење налази се у имплементацији Andrews и Buchinsky приступа. Andrews и Buchinsky (1997) за утврђивање оптималног броја симулација предложили тро-степену процедуру за израчунавање оптималног броја симулација. Према овом приступу, најпре је потребно одредити минимални број симулација:

$$B_0 = \text{int} \left(5000 \frac{\chi_{1-t}^2(2 + \gamma)}{pdb^2} \right) \quad (119)$$

при чему је:

B_0 - минимални број симулација

pdb - Прихватљива грешка (граница) \widehat{ES}_B и ES_∞ популације

γ - куртосис узорка симулација модела ризика

Израз $(1 - t)$ односи се на ниво вероватноће прихватања у случају χ^2 теста. Израз $(2 + \gamma)$ детерминише број степени слободе. Број понављања (B) представља *trade-off* између нивоа поузданости теста и прихватљивости границе pdb . Тачност границе pdb је у функцији повећања броја симулација, при чему она експоненцијално расте са повећањем броја симулација.

Други корак подразумева да се процене ризика симулирају B_0 пута, како би се утврдио B_0 пута ES. Последњи корак подразумева да се утврди оптималан број симулације:

$$B_1 = \text{int} \left(2500 \frac{\chi_{1-t}^2(2 + \hat{\gamma})}{pdb^2} \right) \quad (120)$$

при чему је:

B_1 - оптималан број симулација

$\hat{\gamma}$ - куртосис узорка B_0 симулација

Оптималан број симулација одређује се применом следећег израза:

$$B^* = \max[B_0, B_1] \quad (121).$$

Кључни недостатак оваквог приступа везан је за прецизност ES оцењивача. Резултати истраживања Giannopoulos и Tunaru (2005) указују да се овај проблем може

ублажити на тај начин што се направи компромис између броја симулација и нивоа тачности. Поједини домаћи аутори, попут (Radivojevic et al., 2019, 2020) процедуру примењују код тестирања валидности ES модела отклањајући на тај начин недостатке Berkowitzе-вог модела.

Још један пример примене Bootstrap симулације у циљу унапређења валидности модела за валидацију ES модела представио је Spring (2021). Наиме, Bayer и Dimitriadis (2019) за тестирање својих хипотеза предложили су примену Wald теста заснованом на неком доследном проценитељу коваријансе ($\hat{\Omega}$). Иако се ова методологија може применити као валидна, теоријска основа на којој почива проценитељ, као и сама процедура имплементације теста веома је сложена. Из тог разлога, ограничена је примена Bayer и Dimitriadis (2019) модела када се користи за потребе утврђивања нивоа захтеваног капитала солвентности. Решење за овај проблем Spring (2021) пронашао је у употреби Bootstrap симулације. Упркос чињеници да Bootstrap симулација повећава рачунарску захтевност теста, са друге стране значајно поједностављује методологију коју су предложили Bayer и Dimitriadis (2019). Отуда, Spring (2021) предлаже да се параметар одсечка оцени применом Bootstrap симулације применом скупа података (T) VaR и ES процена и скупа стварних негативних промена вредности портфолија ($\overrightarrow{\Delta p}$). Под претпоставком да је ES модел валидан, Spring (2021) предлаже следећи сет корака:

- 1) Први корак подразумева оцену параметра одсечка у систему једначина (ал) и (лл) (γ_0) и (β_0) на основу сета података о стварним негативним променама вредности портфолија и проценама ризика, односно ($\gamma_0(\overrightarrow{\Delta p})$) и ($\beta_0(\overrightarrow{\Delta p})$).
- 2) Други корак подразумева да се процене VaR и ES прилагоде, тако да буде задовољен услов: $\widehat{VaR}_{t,a}^{adj} = \widehat{VaR}_{t,a} - \beta_0(\overrightarrow{\Delta p})$, као и $\widehat{ES}_{t,a}^{adj} = \widehat{ES}_{t,a} - \gamma_0(\overrightarrow{\Delta p})$:
- 3) Трећи корак подразумева да се из сваке Bootstrap симулације, при чему $i \in \{1, \dots, M\}$ извуче (T) сет података $\widehat{VaR}_{t,a}^{adj}$, $\widehat{ES}_{t,a}^{adj}$ и Δp_t . Затим на основу сета Bootstrap узорака врши процена параметра одсечка (γ_0).
- 4) У последњем кораку врши се процена р-вредности, по обрасцу:

$$p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{\gamma_0^i > \gamma_0(\overrightarrow{\Delta p})\}} \quad (122).$$

Параметар одсечка је статистички значајан ако је р-вредност мања од критиче вредности теста.

Овако предложена процедура, разликује се по две основе у односу на оригинални модел. Прво, као улазне варијабле користе се VaR и ES процене. На тај начин избегава се неспефицијација модела. Значи нема губитка битних информација. Друго, одлука о прихватању или одбацивању ES модела врши се на *Bootstrap* симулацији, што доводи до тога да се не захтева сложена деривација, као ни додатне претпоставке да би се обезбедио доследан асимптотски оцењивач коваријансе.

Четврти део

ТЕСТИРАЊЕ ВАЛИДНОСТИ МОДЕЛА ПРОЦЕНЕ ТРЖИШНОГ РИЗИКА ЗАСНОВАНОГ НА ТЕХНИЦИ ДУБОКОГ УЧЕЊА

1. Преглед досадањих емпиријских истраживања примене вештачке интелигенције у процени тржишних ризика

Последњих пар година све присутнија је експанзија радова која су посвећени истраживањима могућности примене достигнућа из области ИТ у управљању финансијским ризицима. Између осталог, резултат тога јесте појава великог броја нових модела за процену тржишних ризика који се заснивају на data mining-у, deep learning-у, односно на примени ANN. Главни разлог за експанзију развоја модела заснованих на ANN јесте тај што неуронске мреже омогућавају да се поново креирају сложени, нелинеарни односи између варијабли на основу историјских података без претпоставке да историјски подаци потичу из једног и дефинитивног стохастичког процеса (Atsalakis & Valavanis, 2009).

Међу првим ауторима који су покушали да искористе предности ANN у процени ризика били су Donaldson и Kamstra (1996). Основни недостатак њиховог модела процене ризика огледао се у томе што се пондери (тежине) у скривеном слоју насумично подешавају. Овакав начин подешавања пондера доводи до нестабилних процена ризика. Из тог разлога њихово решење није имало велику практичну примену. Остали аутори

попут Xiao et al. (2008), Lahmiri (2017) и Вејлић и Оуијјане (2019), покушали су да комбинују ANN са моделима волатилности. Xiao et al. (2008) комбиновали су ANN са три модела волатилности из фамилије ARCH модела: GARCH, EGARCH и TGARCH, док су Kristjanpoller et al. (2014) у ANN укључили само GARCH модел. Lahmiri (2017) је комбиновао ANN са GARCH и EGARCH са различитим претпоставкама дистрибуције иновација (резидуала) модела волатилности, док су Hajizadeh et al. (2012) комбиновали само са EGARCH моделом, како би кооптирале нелинеарне зависности. Bildirici et al. (2010) комбиновали су ANN са APGARCH моделом. Резултати примене ових решења показују да комбиновање ANN са моделима волатилности јесте успешније у кооптирању асиметрије у односу на традиционалне моделе волатилности. Chen et al. (2009) су показали да ANN модели могу да генеришу боље процене ризика и од ARMA-GARCH модела.

Међутим, иако сва ова истраживања показују унапређење у односу на традиционалне моделе процене волатилности приликом процене тржишних ризика, треба истаћи да примена само модела из фамилије GARCH, није нужно најбољи приступ за предвиђање историјске нестабилности. То је из разлога што се заснивају на одређеним претпоставкама у вези дистрибуције варијабли и грешака (резидуала/иновација) модела. Mostafa et al. (2017), такође, упозоравају на ограничења ових модела у кооптирању и других стилизованих карактеристика финансијских тржишта. Посебно апострофирају проблем кооптирања, аутокорелације, хетероскедастичности и асиметрије. Из тог разлога препоручују употребу мреже комбиноване густине (енгл. *Mixture Density Networks* - MDN), јер су ефикасне у процени условних густина са променљивом варијансом. Представили су задовољавајуће резултате у кооптирању динамике серије приноса портфолија и репа дистрибуције. Међутим, главни недостатак модела огледа се у његовој сложености и немогућности да се користи за ES процене. Сличног става су и Miazhynskaia et al. (2003) који су користили линеарне и нелинеарне MDN за процену ризика.

Међу првим ауторима који су користили ANN за процену VaR били су Locarek et al. (1998). Развили су модел заснован на MDN и представили налазе који указују на боље перформансе овог модела у односу на *RiskMetrics* модел. Основни недостатак овог модела јесте његова некомпатибилност са карактеристикама временске серије. За

процену тржишних ризика применом VaR модела Bartlmae и Rauscher (2000) користили су неуронску мрежу комбиноване волатилности (енгл. *Neural Network Volatility Mixture – NNVM*), док су Dunis и Chen (2005) користили регресионе моделе неуронских мрежа за процену VaR за тржишне ризике. Сличан модел користили су и Wu et al. (2005). Тачније они су користили неуронске мреже квантилне регресије (енгл. *Quantile regression neural networks*) и регресију вектора подршке (енгл. *Support vector regression - SVR*). Резултати примене свих ових модела указују на одређена побољшања у односу на моделе стохастичке волатилности.

Приступ заснован на асемблу дубоког веровања (енгл. *The Deep Belief Network Ensemble-based Approach*) за VaR процену коришћен је од стране He et al. (2018). Представили су резултате да примена ове врсте мрежа доводи до унапређења процена VaR у односу на потпуно повезане неуронске мреже (енгл. *Fully Connected Neural Network*). Имајући у виду захтевности примене рекурентних неуронских мрежа (енгл. *Recurrent Neural Networks - RNN*), са једне стране и њихове предности у раду са временским серијама, Вејлић и Оуијјане (2019) комбиновали су RNN са стандардним GARCH моделом за VaR/ES процене. Аутори су представили веома задовољавајуће резултате.

Наводећи да се кључна предност коришћења неуронске мреже у моделирању тржишних ризика огледа у томе што се таква структура може научити обрадом података из узорка, Fraszka-Sobczyk и Zakrzewska (2024) развили су модел заснован на вишеслојном перцептону (енгл. *Multi-layer perceptron – MLP*) и комбинацији са традиционалним моделима волатилности. Тачније процене волатилности су користили као улазне податке у мрежу заједно са променама вредности берзанског индекса. Као алгоритам учења користили су учење под надзором. Иновација овог приступа огледа се у томе да су аутори користили три различите активационе функције.

Оно што је заједничко свим овим истраживањима јесте да су процењивали или волатилност, па на основу ње израчунавали VaR или су процењивали дистрибуцију промене вредности портфолија, па на основу ње вршили процене тржишних ризика.

За разлику од претходно апострофираних радова, Doncic et al. (2023) су као улазе у мрежу узимали процене VaR/ES добијене хибридном моделом VaR који је заснован на теорији екстремне вредности. Модел је показао значајна унапређења. Сличан модел

користили су и Musah et al., (2018). Међутим, ови модели су засновани на стандардном MLP моделу, који је мање ефикасан у односу на GRU модел у раду са временским серијама. Поред тога, као излазне варијабле узимају процене само једног VaR/ES модела. Из тог разлога Meza et al., (2025) представили су модел за процену тржишних ризика заснованом на RNN. Модел је изграђен на темељима тзв. GRU-ANN модела (енгл. *Gated recurrent units* – GRU), у који се као улази користе процене VaR и ES добијених применом различитих VaR модела. GRU-ANN је изабран из разлога што спада у групу тзв. модела дубоког учења (енгл. *Deep Learnig* – *DL*), који омогућавају апстракцију високог нивоа за моделирање података и чије се кључне предности огледају у аутоматском издвајању добрих карактеристика улазних података коришћењем процедуре учења опште намене (Sezer et al., 2020). Као такви, ови модели показују добре перформансе у раду са серијама података са финансијских тржишта у односу на моделе механичког учења (енгл. *Machine Learning* - *ML*), о чему сведоче резултати истраживања Sezer et al., (2020) и Ozbayoglu et al., (2020). Поред тога, GRU-ANN је изабран из разлога што спада у групу рекурентних неуронских мрежа, за које је доказано да су добре у раду са временским серијама. Међутим, за разлику од класичних RNN модела, GRU-ANN предствља унапређење ових модела у многим аспектима, а посебно у суочавању са изазовима дуготрајних зависности и проблема с градијентима. За разлику од класичних, RNN модел решава проблем са градијентима будући да GRU користи гајдат и ресет вратила која помажу у контроли протока информација кроз секвенцијалне податке. Ово помаже у смањењу проблема с нестајућим и експлодирајућим градијентима који су чести код класичних RNN. Унутрашња архитектура GRU омогућава боље руковање дуготрајним зависностима у односу на класичне RNN, што их чине адекватнијима у раду са временским серијама. Поред тога, по правилу, захтевају мањи број параметара, што имплицира да је брже тренирање, а и мања склоност ка пренаучености модела (енгл. *overfitting*). Резултати тестирања модела указују да модел показује добре перформансе.

Међутим, комплексност примене овог модела представља његово ограничење. Иако боље оперише са нестабилним подацима, какви су подаци са финансијског тржишта, ако се имају у виду законска ограничења која регулатори намећу у вези са инвестирањем слободног дела техничких резерви, чини се бољом солуцијом примена модела заснованих на MPL моделу. Законска ограничења утичу да у портфолију

осигуравајућих друштва доминира актива која показује мање флуктације у односу на дужничке хартије од вредности и сличну активу. Када се овом дода податак да се на тржиштима у настајању, какво је српско тржиште капитала, остварује мали обим трговања, те да су берзе плитке, као боље решење у смислу мање рачунарске захтевности намеће се примена MLP модела.

2. Варијабле и методологија истраживања

Како би се одговорило на питање да ли модел који је развијен у дисертацији представља унапређење традиционалних и често коришћених VaR/ES модела за процену тржишних ризика у осигурању, односно тестирале постављене хипотезе, процена тржишног ризика оптималног портфолија за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији, поред DMLP-ANN250 модела, извршена је применом осам модела VaR/ES модела и то: HS500, MHS250, BHS500, три варијанте RM500, FHS500 и VaR/ES-EVT-NHS500. Будући да се процене тржишног ризика оптималног портфолија заснивају на проценама од 500 опсервација, модели су тако и означени, што је иначе стандард у обележавању модела. Изузетак је у случају DMLP-ANN, јер се он заснива на 250 VaR/ES процена добијених применом ових модела.

Оптимални портфолио формиран је применом *Markowitz-евог mean-variance* модела, представљен изразом (2) и (3), уз уважавање законских ограничења представљених у табели 1. За утврђивање оптималних пондера (учешћа) различитих облика активе у које осигуравајућа друштва имају право да инвестирају техничке резерве, уз услов да је сума пондера једнака један, коришћен је тзв. GRC алгоритам (енгл. *Generalized Resource Constraints nonlinear engine – GRC*). Уз овај услов, приликом минимизације циљне функције, тј. минимизирања ризика оптималног портфолија, постављен је услов да принос мора да буде једнак или већи од приноса на безризичну активу у коју осигуравајућа друштва имају право да улажу и то неограничено. Уобичајено је да се краткорочне хартије од вредности које емитује држава, као што су трезорски или благајнички записи, узимају као репери за безризичну активу. У тренутку формирања оптималног портфолија, 04.01.2022. године, нису биле доступне краткорочне хартије од вредности емитоване од Републике Србије. Међутим, пруденционим

прописима осигуравајућим друштвима која послују у Републици Србији дозвољено је неограничено да улажу у хартије од вредности које емитују земље Европске уније. Како се трезорски записи, које емитује Влада Републике Немачке тзв. Vubill, сматрају хартијама од вредности које су изложене екстремно малом ризику од неизвршења, јер спадају у тзв. *gilt-edged* хартије од вредности, то је стопа приноса на ове трезорске дисконтване хартије од вредности (енгл. *Treasury Discount Paper*) узета као репер за безризичну стопу приноса. Ове хартије од вредности имају опцију реотобрања на девет, шест и три месеца. Из тог разлога узета је просечна стопа приноса на ове хартије од вредности од датума емитовања до датума доспећа, као репер за безризичну активу. Просечна годишња стопа ових хартија од вредности од дана формирања оптималног портфолија до доспећа износила је око 2,21% на годишњем нивоу. За потребе овог истраживања годишња каматна стопа трансформисана је на дневну стопу приноса (0.0061%).³⁷

У складу са пруденционим прописима, Одлуком о инвестирању средстава у осигурању Народне банке Србије (2020), приликом формирања оптималног портфолија разматране су четири инвестиционе алтернативе и то: хартије од вредности (обвезнице емитоване од стране државних институција Републике Србије), акције котиране на Prime и Open маркету Београдске берзе, улагање у депозите код пословних банака и некретнине. Од државних хартија од вредности у анализу су биле укључене обвезнице емитоване од стране Министарства финансија Републике Србије и то према класама доспећа. Тачније, разматране су обвезнице које су у тренутку формирања портфолија биле доступне за улагање према року доспећа од 5, 7, 10, 12 и 20 година и то: RSMFRSD55940, RSMFRSD86176, RSMFRSD51436, RSMFRSD56773, RSMFRSD89592. Будући да су обвезнице исказане у номиналном облику на датум доспећа, применом израза $\frac{NV}{1+d \cdot \frac{ks}{365}}$, при чему су NV номинална вредност обвезнице, (d) број дана до доспећа, (ks) номинална стопа приноса, за сваки дан током периода који је коришћен за формирање оптималног портфолија, процену тржишног ризика и валидацију модела, утврђена је вредност обвезница. На основу тако утврђених вредности израчунати су дневни логаритамски приноси:

³⁷ <https://www.deutsche-finanzagentur.de/en/federal-securities/types-of-federal-securities/treasury-discount-paper> датум приступа 2022.

$$r_{i,j} = \ln \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \quad (123)$$

при чему су:

$r_{i,t}$ - логаритамски принос активе на дан (t)

$P_{i,t}$ - вредност активе на дан (t)

$P_{i,t-1}$ - вредност активе на дан ($t-1$)

Од акција разматране су најликвидније акције које су котиране на Prime и Open маркету Београдске берзе. На Prime маркету Београдске берзе котиране су најликвидније акције, са којима се највише тргује. Међутим, будући да се на овом тржишту котирају само акције четири емитента (AERO, MTLC, JSV и FINT), то су у анализу укључене и акције са Open маркета. Са овог тржишта уврштене су акције оних емитената које су у посматраном периоду биле најликвидније. Прецизније, у анализу су уврштене акције по четири емитента са оба ова тржишта и то: AERO, MTLC, JSV, FINT, ENHL, ZTPK, DNOS, NIS. Разлог избора ових акција налази се у њиховој утрживости. Остале акције имају ниску ликвидност и утрживост. С аспекта анализе оптималног портфолија и процене тржишног ризика ниска утрживост акција доводи до тзв. проблема несинхорног трговања³⁸, што ствара проблем утврђивања недостајућих података за дане када се акцијом није трговало. Како би се умањио овај проблем изабране су горе наведене акције. Поред наведених акција у анализу су уврштена и два индекса Београдске берзе, Belex15 и Belexline. Разлог укључивања ова два индекса у анализу налази се у чињеници да према савременој портфолио теорији берзански индекси представљају најбоља портфолија која је могуће формирати на тржишту од расположивих акција. Поред тога, улагање у берзанске индексе представља популарну и често примењивану пасивну стратегију улагања за инвеститоре који показују висок степен аверзије према ризику.

Серија података о дневним приносима на трећу категорију алтернативе за улагање техничких резерви, депозите по виђењу код пословних банака, формирана је применом израза: $1 + d \frac{ks}{365}$ уз претпоставку да износ депозита у тренутку полагања улагања износи један. Будући да у Републици Србији постоји велики број пословних банака, те да се

³⁸ Појава да се одређеном акцијом не тргује више узастопних дана, што доводи до проблема утврђивања њене вредности и приноса за дан када се са њом није трговало.

каматне стопе на депозите по виђењу међу њима значајно разликују у зависности од квалитета улагача, за потребе ове дисертације узета је просечна пасивна каматна стопа коју је објавила у својим извештајима Народна банка Србије.

Серија приноса о дневним приносима на четврту категорију алтернативе за улагање техничких резерви, некретнине, формирана је на основу података Републичког завода за статистику Републике Србије³⁹. Разматрано је улагање у некретнине из четири региона: Београд, Нови Београд, Нови Сад и Крагујевац. Два су основна разлога зашто су изабрани ови региони. Први, због доступности података. Други, из разлога што је реч о утрживим тржиштима некретнина. Будући да Републички завод за статистику објављује кварталне податке, применом програмског језика Python (Maric, 2024) серија кварталних податка трансформисана је на дневне. Тиме је добијена серија података од 360 опсервација по години посматрања.

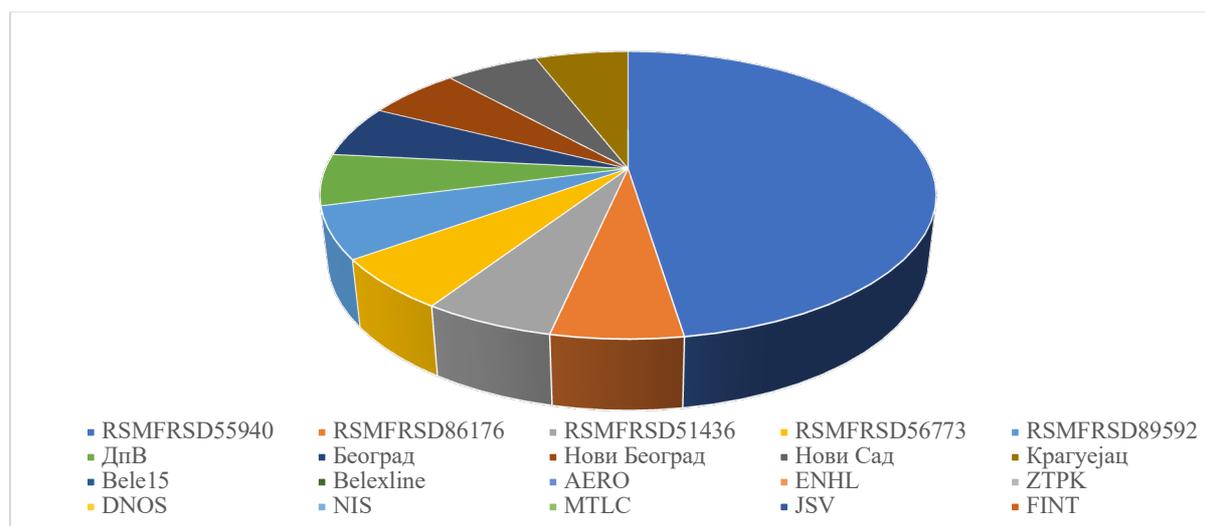
Како би се обезбедило да серије података о дневним логаритамским приносима за сваку разматрану активну буду једнаке, 360 података по години о приносима на некретнине, обвезнице и депозите, применом методе агрегације, трансформисане су у серију података од 250 података. Разлог за ово налази се у чињеници да серија података са Београдске берзе обухвата 250 података о дневним серијама приноса акција.

Истакнуто је да је оптимални портфолио формиран на дан 04.01.2022. године, на основу серије података о дневним логаритамским приносима разматраних инвестиционих алтернатива. Другим речима, за формирање портфолија коришћене су две године података о дневним приносима разматраних актива, од 03.01.2020. до 31.12.2021. године. Овај период обухвата релативно миран период на тржишту капитала Републике Србије. Један од разлога за то може се наћи у чињеници да период обухвата време трајања пандемије изазване Covid19 вирусом, када су инвестиционе активности биле на веома ниском нивоу. Ово је важно напоменути из разлога што се тржишта у настајању, какво је тржиште капитала Републике Србије, не одликују се ниском, већ напротив високом волатилношћу и појавом кластера волатилности. Значајне разлике између периода узорковања, односно формирања и прикупљања података о променама вредности портфолија и процене ризика могу да утичу на валидност VaR/ES модела.

³⁹ <https://data.stat.gov.rs/Home/Result/0501020302?languageCode=sr-Latn> датум ажурирања 20.02.2023.

Структура оптималног портфолија на дан 04.01.2022. године приказана је на слици 14. Важно је истаћи да је иста структура задржана током целог периода истраживања.

Слика 14. Структура оптималног портфолија на дан 01.01.2022. године



Извор: Аутор

Као што се може видети са слике 14 у структури портфолија доминирају обвезнице. Удео ове активе у структури оптималног портфолија за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији износи око 70,87%. Затим следи удео у некретнине, па депозити по виђењу. Удео акција мањи је од 1%. Разлог овом може се наћи у ниској ликвидности на тржишту капитала Републике Србије и slabим перформансама дужничких хартија од вредности на тржишту капитала, у смислу односа између приноса и ризика.

Као и у случају приноса актива и принос портфолија израчунат је применом израза (X) за цео период истраживања, од 03.01.2020. до 31.12.2023. године. На тај начин генерисана је серија од 996 дневних логаритамских приноса оптималног портфолија. Овако добијени приноси портфолија, даље су коришћени за процене VaR/ES за период од 09.01. до 31.12.2023. године, применом осам изабраних VaR/ES модела. Прецизније, сви подаци су коришћени за анализу карактеристика дистрибуције приноса портфолија, док су VaR/ES процене добијене применом 500 последњих података, применом приступа покретних прозора. То значи да су за први дан за који је вршена процена ризика узети

подаци од 04.01.2021. до 29.12.2022. године. Процене VaR/ES начињене су за ниво поверења од 99,5%, што је у складу са правилима Директиве солвентности II. За потребе ове дисертације процене су извршене на дневном нивоу. Разлог томе налази се у чињеници да би се добило довољно података за тестирање валидности VaR/ES модела. На тај начин добијено је осам серија од по 245 VaR/ES процена, уз напомену да је за калибрање модела волатилности коришћена цела серија података јер је реч о *in-side sample* истраживању.

VaR процене, код модела историјске симулације, генерисане су као квантил емпиријске дистрибуције приноса оптималног портфолија како је описано изразом (31) на основу серије података за период од 04.01.2021. до 31.12.2022. године, уз напомену да је на основу ових података генерисана VaR/ES процена за први дан за који се врши процена тржишног ризика (09.01.2023) и да се као и код осталих модела користи приступ покретних прозора дужине 500 података. То значи да за сваки наредни дан за који се врши процена из узорка испада најстарији податак, а у узорак улази јучерашњи принос портфолија. Изузетак је у случају DMLP-ANN250 је се модел заснива на узорку од 250 процена тржишног ризика. Како је већ истакнуто у дисертацији HS је изабран из разлога што представља веома популаран модел који има најбољи *trade off* између рачунарске захтевности и прецизности процена ризика. Међутим, као с обзиром на то да се HS модел суочава са проблемом генерисања валидних VaR процена за изузетно високе нивое поузданости због ограниченог броја екстремних вредности које падају у реп дистрибуције, за величину узрока која је прописана у складу са Директивом солвентности II, процене су начињене и моделима MHS250 и BHS250. Ова два модела историјске симулације ублажавају ово ограничење HS модела. VaR процене применом MHS250 добијене су као квантил мултипликоване серије приноса оптималног портфолија у складу са изразом (32), док су VaR процене применом BHS250 модела добијене као просечне дневне процене VaR изведене из 10000 симулираних серија VaR процена добијених према процедури коју је представио Efron (1987), а која је описана у дисертацији.

Имајући у виду резултате бројних истраживања (Zikovic 2011, 2013, Radivojevic et al., 2019, 2020) која се односе на валидност примене непараметарских модела на тржиштима у развоју с једне стране, и теоријске предности параметарских модела у

хватању специфичних карактеристика ових тржишта као што су хетероскедастичност и лептокуртосис, VaR/ES процене генерисане су са три варијанте RM засноване на моделима условне волатилности из фамилије (G)ARCH модела. Разлог због којег су изабрани модели волатилности из ове групе јесу резултати истраживања која показују да укључивање GARCH модела значајно доприноси унапређењу валидности RM модела на тржишту капитала Републике Србије (Radivojevic & Stancic, 2015). Прецизније речено, за процену волатилности за RM модел коришћен је GARCH модел заснован на претпоставци нормалности дистрибуције иновација, (G)ARCH модел заснован на претпоставци студентове T дистрибуције иновација. Будући да код већине тржишта у настајању негативне иновације имају већи утицај на волатилности у односу на позитивне вести утицали су да се користи TARЧH модел.

Пошто полу-параметарски VaR модели представљају компромис између недостатака параметарских и непараметарских модела, њихова употреба у развоју DMLP-ANN модела се чини оправданом, посебно FHS модела, који је показао изузетне перформансе када се примењује на тржиштима у развоју (Zikovic & Randall, 2013). Из тог разлога процене VaR начињене су и применом FHS250 модела. Полу-параметарски VaR модел који такође показује одличне перформансе када се користи на тржиштима која се одликују појавом кластера волатилности, аутокорелацијом и лептокутичном дистрибуцијом серије промене вредности активе јесте VaR/ES-EVT. Из тог разлога процене VaR начињене су и применом модела VaR/ES-EVT250, како је описано у претходном делу дисертације. За разлику од осталих VaR модела, VaR/ES-EVT250 омогућава директну процену ES, применом израза (64). У случају свих осталих модела процене ES добијене су применом израза (24).

За потребе процене условне волатилности за FHS250 и VaR/ES-EVT250 разматрано је шест модела волатилности из фамилије (G)ARCH и то: GARCH, TARЧH, EGARCH, GJRGARCH и APARCH, Taylor/Schwert GARCH. Сходно резултатима истраживања Rossignolo et al. (2013), да је претпоставка о дистрибуцији приноса важнија од спецификације самог модела волатилности, приликом избора најадекватнијег модела разматране су четири врсте претпоставки о дистрибуцији иновација: нормална, студентова T дистрибуција, GED и искошена GED дистрибуција.. Избор најадекватнијег модела условне волатилности, чије ће се процене користити код FHS250 и VaR/ES-

EVT250 извршена је на основу информационог критеријума логаритамске веродостојности, док су оцене модела волатилности добијене BFGS алгоритмом. Оцене параметара уопштене Парето дистрибуције су генерисане следећом функцијом:

$$LR(\xi, \beta|X) = -k \ln \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{j=1}^k \left[1 + \frac{\xi}{\beta} (x_j - \mu)\right] \quad (124)$$

уз ограничења:

- 1) $\beta > 0$ и
- 2) $1 + \xi(X_j - \mu) / \beta > 0$

VaR/ES-EVT250 је изграђен на претпоставци да је индекс репа дистрибуције већи од нуле, отуда је коришћен Hull-ов оцењивач:

$$\hat{a}^H = \frac{1}{k \sum_{i=1}^k \ln x_{n-i+1} - \ln x_{n-k}} \quad (125),$$

а VaR процене су добијене:

$$VaR_{cl} = x_{n-k} \left(\frac{n}{k} (1-cl)\right)^{-\frac{1}{\hat{a}^H}} \quad (126)$$

уз примену Christofferson-овог правила за утврђивање прага прекорачења у репу (Christofferson, 2011).

VaR/ES процене за период од 09.01. до 31.12.2023. године, применом DMLP-ANN250 модела добијене су на тај начин што су као улазни подаци коришћене VaR/ES процене добијене применом осам горе описаних модела, које су начињене за период од 03.01. до 31.12.2022. године. Ове VaR/ES процене добијене су на основу серије података о приносима портфолија на основу приступа покретних прозора од 250 опсервација (04.01. до 29.01.2021). Недостатак података у вези приноса портфолија пре 04.01.2021. године разлог је овоме.

Будући да су се као улазни подаци у улазном слоју DMLP-ANN250 модела користиле одвојено VaR и ES процене, то су тестирана два модела, по истом принципу. Како би се утврдила оптимална структура модела улазни сет података подељен је по принципу 70:20:10. Наиме, 70% прикупљених података коришћено је за обуку, 20% за валидацију, а 10% за тестирање модела. Сет за валидацију коришћен је да би се избегло преоптерећење мреже. Редослед података је очуван због присуства временских

зависности између посматрања, а они су се хронолошки уносили у модел како би се даље избегла било каква пристрасност током процеса обуке. Подаци су укључени у процес валидације тек након завршене обуке. Вијелић и Оуијјане (2019) истичу да овакав приступ подели и третирању података треба да спречи било какво цурење информација у мрежу и да процес валидације остане непристрасан. Како би се минимизирао проблем осетљивости мреже на опадајуће градијенте, подаци су нормализовани.

У табели су приказани хипер-параметри за оба модела са њиховим перформансама, уз напомену да су тестиране различите комбинације хипер-параметара, током обуке и тестирања мреже. Према критеријуму средње квадрате грешке, која је коришћена као функција губитка, која се може представити изразом (127), изабрана је комбинација хипер-параметара представљена у табели 4:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (127)$$

при чему су :

- MSE - средња квадратна грешка
- y_i - стварни принос портфолија
- \hat{y}_i - процена
- N - број података

изабрана је комбинација представљена у табели 4:

Табела 3. Хипер-параметри и перформансе мреже

Алгоритам учења	Алгоритам повратног простирања грешке
Алгоритам за оптимализацију	Adam ⁴⁰
Стопа учења	0.1
Епохе	500

⁴⁰ Адам је изабран јер комбинује предности AdaGrad, који је добар за ретке параметре и RMSProp који је добар за нестационарне проблеме. Пред тога, брже конвергира у односу на класични SGD и у литератури се често препоручује за дубоке мреже.

Перформансе модела		
	Обука	Тестирање
MSE _{VaR}	0.00041	0.00045
MSE _{ES}	0.00019	0.00021

Извор: Аутор

Оба модела имају два скривена слоја, по 50 неурона у сваком. Као активациона функција у улазном слују коришћена је *Sigmoid* функција, док је у скривеном слоју коришћена функција хиперболична тангенција. Стопа учења 0.1 је изабрана након тестирања више вредности, показујући најбољи баланс између брзине и стабилности учења. Batch size од 32 је дао најстабилније резултате у односу на друге тестиране величине. Током обуке коришћена је серија од 32 тачке података (енгл. *Batch Size*). Модел је разматрао историјске податке до 90 дана користећи функцију ретроспективног прегледа. Процес обуке је укључивао 500 епоха да би се итеративно побољшале перформансе модела. Овај број утврђен је експерименталним путем, при чему је примећено да мрежа даје стабилне процене након 400 епоха. Анализом функције губитак запажено је да је 500 епоха довољно за конвергенцију. С обзиром да су оба модела показала задовољавајуће перформансе, даље је ова структура коришћена за VaR/ES процене за период од 09.01. до 31.12.2023. године.

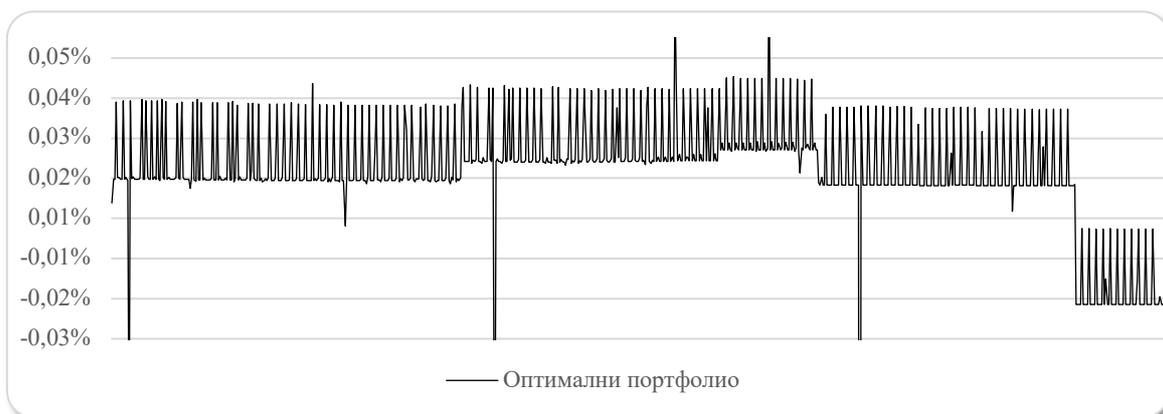
3. Процена тржишног ризика оптималног портфолија за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији

Дневне VaR/ES процене генерисане применом описаних модела, за ниво поверења од 99,5%, за период од 09.01. до 31.12. 2023. године, заједно са кретањем приноса оптималног портфолија представљене су на сликама од 17 до 25. Међутим, у циљу испитивања степена компатибилности карактеристика оптималног портфолија и претпоставки на којима су изграђени изабрани модели, пре него што је извршена процена ризика, извршена је анализа основних карактеристика дистрибуције дневних

логаритамских приноса оптималног портфолија. Анализа основних карактеристика дистрибуције дневних логаритамских приноса оптималног портфолија обухвата цео период узорковања. Два су основна разлога зашто је у анализу узет цео период, а не само у коме се вршила процена тржишног ризика. Први разлог јесте што су VaR/ES процене генерисане на основи историјских податка. Други разлог, да би се стекао дубљи увид у промене вредности портфолија, односно да би се обухватио дужи временски период на тржишту капитала Републике Србије.

Први корак у овој анализи подразумевао је визуелну анализу кретања дневних логаритамски приноса оптималног портфолија за цео период узорковања. Кретања дневних логаритамски приноса оптималног портфолија за цео период узорковања представљени су на слици 15.

Слика 15. Кретање дневних логаритамских приноса оптималног портфолија



Извор: Аутор

Визуелна анализа кретања дневних логаритамски приноса оптималног портфолија указује да није било значајних кластера волатилности, што није специфично за тржишта у настајању. Уочава се идентично кретање промене вредности портфолија, са одређеним екстремним вредностима. Разлог за овако уједначено кретања, може се наћи у структури портфолија у којој доминирају обвезнице. Изненадне позитивне и негативне екстремне промене вредности могу се приписати значајним варијацијама на тржиштима капитала, односно у променама вредности акција. На основу визуелне анализе може се претпоставити да приноси не задовољавају претпоставку независне дистрибуције, што се може једино утврдити кроз дескриптивну анализу.

Отуда, други корак у анализи карактеристика кретања дневних логаритамских приноса оптималног портфолија подразумевао је анализу дескриптивне статистике. Резултати анализе приказани су у табели

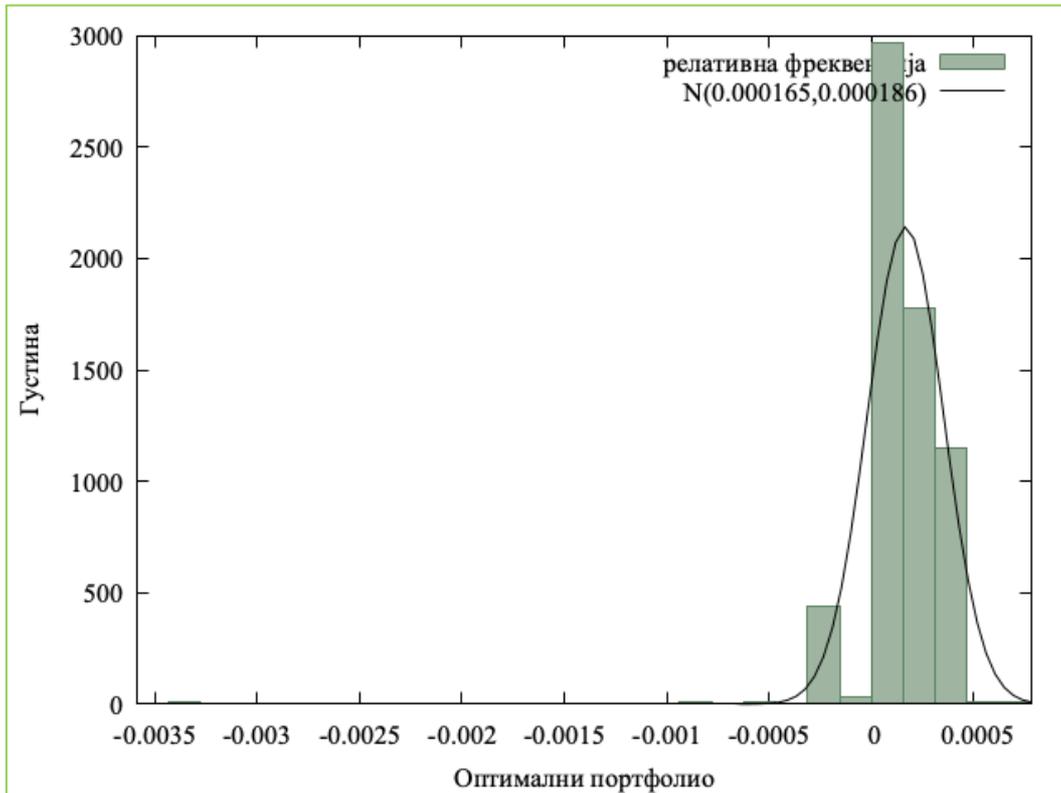
Табела 4. Дескриптивна статистика оптималног портфолија

Просечан принос	0.00017
Стандардна девијација	0.00019
Коефицијет издужености	197.50
Коефицијет асиметрије	-9.80
Минимални принос	-0.0034
Максимални принос	0.0007
Број опсервација	744

Извор: Аутор

Као што се може видети из табеле 5, портфолио је током посматраног периода остварио позитиван просечан дневни принос. Са друге стране, изложен је веома малом ризику, што је пожељно с аспекта регулаторних органа. Међутим, коефицијенти издужености и асиметрије, указују да дистрибуција одступа од претпоставке нормалности. Ова два коефицијента указују да постоји већа вероватноћа остваривања екстремних промена вредности портфолија, него што се претпоставља под претпоставком нормалности јер коефицијент издужености има значајно већу вредност од 3, и то негативних промена, јер коефицијент асиметрије има негативну вредност. У прилог наведеног сведочи и графички приказ дистрибуције дневних логаритамских приноса оптималног портфолија, приказан на слици 15, као и вредност Jarque-Bera теста (JB - 1.63e+06, p-вредности – 0,000).

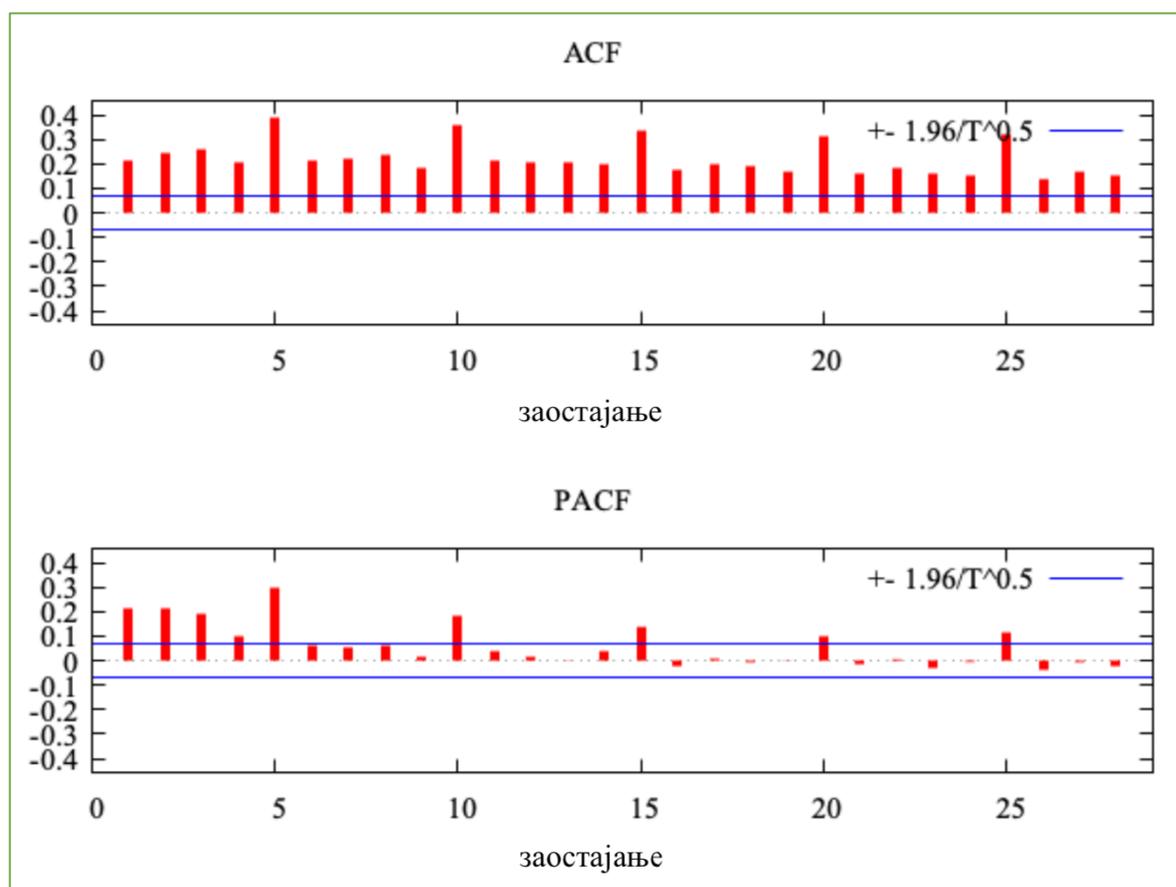
Слика 16. Емпиријска дистрибуција дневних приноса оптималног портфолија



Извор: Аутор

Трећи корак у анализи карактеристика кретања дневних логаритамских приноса оптималног портфолија подразумева испитивање присуства аутокорелације. За тестирање присуства аутокорелације коришћени су ACF (анализа аутокорелационе функције), PACF (анализа парцијалне аутокорелационе функције) и Ljung-Box Q тест. Резултати ACF и PACF теста приказани су на слици 17, док су резултати Ljung-Box Q теста приказани у табели 6.

Слика 17. Резултати ACF и PACF теста



Извор: Аутор

Табела 5. Резултати Ljung-Box Q теста

Број дана заостајања	Вредност теста	р-вредност	Број дана заостајања	Вредност теста	р- вредност
1	34.6583	0.000	15	731.4737	0.000
2	80.3342	0.000	16	754.3824	0.000
3	131.2275	0.000	17	784.4311	0.000
4	164.1626	0.000	18	812.7005	0.000
5	276.3839	0.000	19	834.793	0.000
6	311.5876	0.000	20	910.6048	0.000
7	349.5435	0.000	21	931.213	0.000
8	393.138	0.000	22	957.9214	0.000

9	418.9611	0.000	23	978.0617	0.000
10	514.4247	0.000	24	996.1133	0.000
11	549.9952	0.000	25	75.2805	0.000
12	581.2543	0.000	26	90.0967	0.000
13	613.7207	0.000	27	111.5657	0.000
14	643.7818	0.000	28	130.5144	0.000

Извор: Аутор

Резултати сва три теста указују на присуство значајне аутокорељације. Посматрано из визуре економетријске анализе, присуство аутокорељације индикација је присуства кластера волатилности, који визуелном анализом нису јасно уочени. Присуство кластера волатилности, даље, за последицу има појаву условне хетероскедастичности. Из тог разлога у наставку дисертације, применом *Lagrange*-ов мултипликатора за ARCH ефект, тестирано је присуство условне хетероскедастичности. Резултати тестирања присуства ARCH ефекта приказани су табели 7, уз напомену да је присуство ARCH ефекта тестирано за 7 дана заостајања.

Табела 6. Резултати теста присуства ARCH ефекта

	Коефицијент	Станд. Грешка	t-тест	p-вредност
alpha(0)	3.51E-08	1.73E-08	2.029	0.043
alpha(1)	0.001	0.037	0.014	0.988
alpha(2)	-0.002	0.037	-0.055	0.956
alpha(3)	-0.002	0.037	-0.053	0.957
alpha(4)	0.000	0.037	0.008	0.993
alpha(5)	-0.001	0.037	-0.019	0.984
alpha(6)	-1.29E-05	0.037	-0.0003	0.999
alpha(7)	-0.002	0.037	-0.051	0.958
LM = 0.0094 ($\chi^2(7)$); p - вредност (1)				

Извор: Аутор

На основу резултата приказаних у табели 5 може се закључити да оптимални портфолио није оптерећен појавом ARCH ефекта. С аспекта управљања тржишним

ризиком, оваква ситуација је пожељнија у односу на ситуацију када је портфолио оптерећен ARCH ефектом, јер карактеристике портфолија биће компатибилније са већим бројних модела за процену ризика, а и саме VaR/ES процене су мање рачунарски захтевне. Другим речима, осигуравајућим кућама на располагању ће бити већи избор модела који би требало да пруже валидне процене.

Дакле, анализа основних карактеристика дистрибуције дневних логаритамски приноса оптималног портфолија указује да није компатибилна са претпоставком о нормалности дистрибуције, као и да се серија одликује аутокорељацијом и хомоскедстичношћу варијансе.

У табели 8 приказани су резултати оцене параметара модела условне волатилности који су коришћени за процену ризика применом RM500 модела, као и FHS500 и VaR/ES-EVT500. Имајући у виду карактеристике дистрибуције приноса оптималног портфолија, примена осталих модела условне волатилности математички није била изводљива. Прецизније, није било могуће задовољити критеријум конвергенције оцене параметара модела. Сходно постављеном критеријуму у вези избора оптималног (G)ARCH модела, за потребе VaR/ES процене применом FHS500 и VaR/ES-EVT500 у даљу анализу коришћене су процене условне волатилности добијене применом (G)ARCH(1,2) модел који се заснива на претпоставци да иновације на следе студентову T дистрибуцију.

Табела 7. Оцене параметара GARCH модела коришћени за процену ризика RM500 моделом

Тип (G)ARCH модела					
Параметри модела	GARCH (1,1)	GARCH(2,2) студ. T*	TARCH (1,1)	GJR GARCH (1,1)	Taylor/Schwert's GARCH(1,1)
α_1	0.065	0.0001	0.641	2.78E-07	0.039
β_1	0.705	1.577	0.374	-4.08E-06	0.898
ω	6.50E-09		8.40E-09		2.09E-09
γ			1.476	15.821	
α_2		0.066			

β_2		-0.632			
δ				2.33E-09	
η		2.648			
Лог-веродостојности	7276.477	7771.20	7463.25	7398.39	7290.71
Параметри модела	EGARCH (1,1)	EGARCH (1,1) GED*		EGARCH (1,1) Искошена. T	
α_1	-0.261	0.131		4.251	
β_1	0.528	0.993		-4.591	
ω	-8.188	-0.169		-0.571	
γ	-0.508	0.020		-4.591	
δ					
λ				1.216	
η		0.404		2.001	
Лог-веродостојности	7340.02	7884.67		8184.99	

*Нису значајне све оцене параметара модела. EGARCH(1,1) модел заснована на претпоставци да иновације следе искошену студентову T дистрибуцију коришћен је за код RM500.

Извор: Аутор

У табели 7 представљени су оцене GPD дистрибуције, које су коришћене за процену тржишног ризика оптималног портфолија применом VaR/ES-EVT500 модела.

Табела 8. Оцене GPD дистрибуције

Параметри GPD дистрибуције	
u	-1.757
ξ	0.168

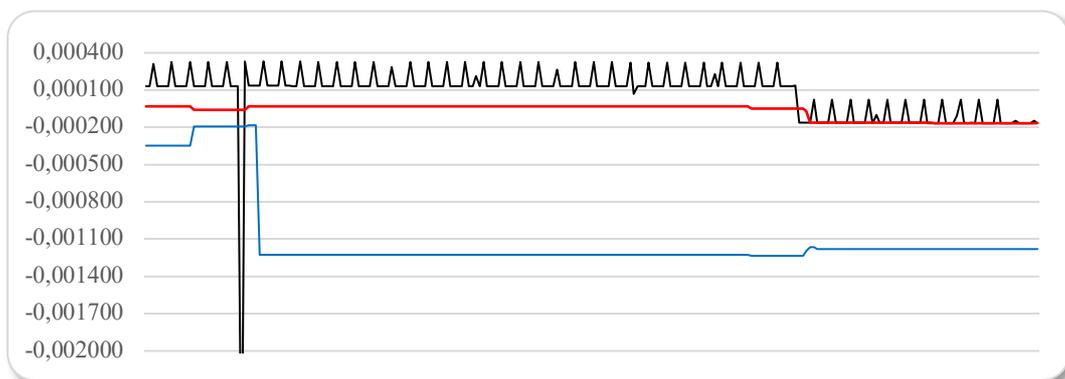
sigma	4.795
-------	-------

Извор: Аутор

Имајући у виду карактеристике оптималног портфолија, као и теоријске основе изабраних VaR/ES модела реално је очекивати да ће најбоље перформансе показати DMLP-ANN модел, јер је развијен да искористи предности свих остали модела. Наиме, то што није забележено присуство ARCH ефекта, модел засновап на историјским симулираним приносима не ставља у неравноправнији положај у односу на моделе који се ослањају на процене условне волатилности, што је по правилу случај када су у питању тржишта у настајању. Са друге стране, одсуство од дистрибуције нормалности и кршење претпоставке о независној дистрибуцији, ограничавају оптималну примену HS500, MHS500 и BHS500 модела. Отуда, је очекивано да модел развијен у дисертацији искористи предности све три групе модела.

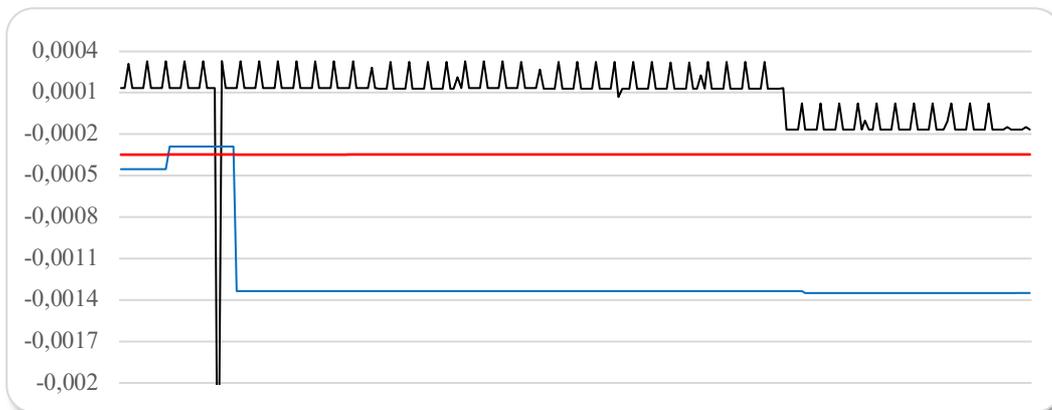
VaR/ES процене добијене применом изабраних модела приказане су на сликама од 18 до 26, уз напомену да су црном линијом приказани дневни логаритамски приноси оптималног портфолија, црвеном VaR, а плавом ES процене.

Слика 18. VaR/ES процена HS500



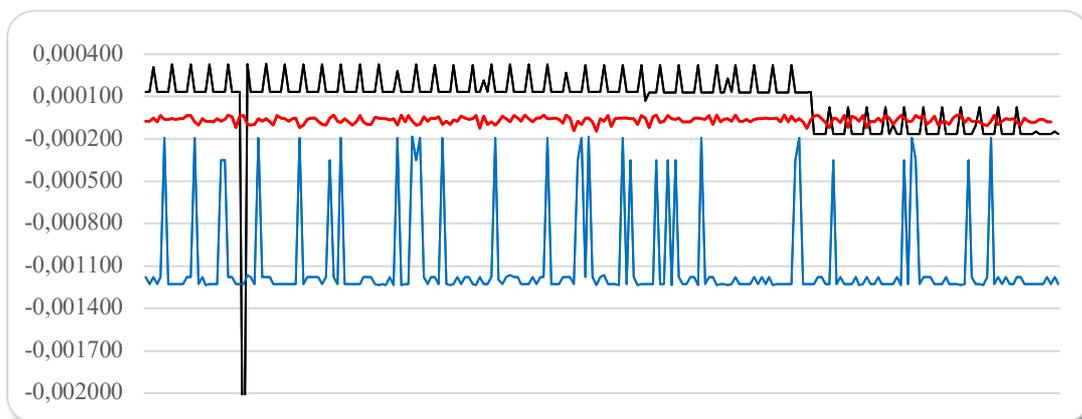
Извор: Аутор

Слика 19. VaR/ES процена MHS500



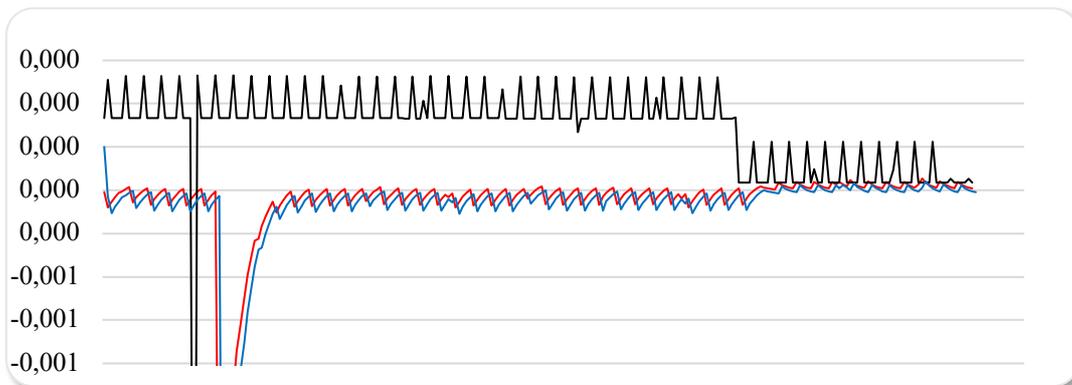
Извор: Аутор

Слика 20. VaR/ES процена BHS500



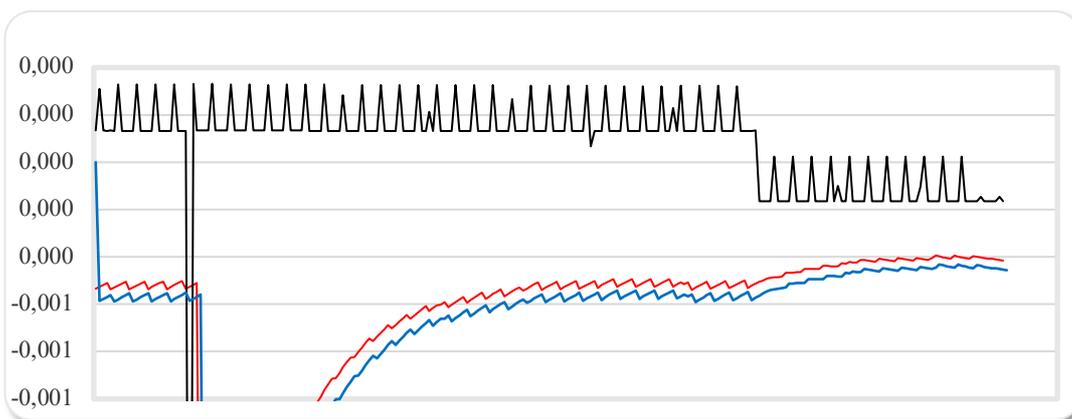
Извор: Аутор

Слика 21. VaR/ES процена GARCH-RM500



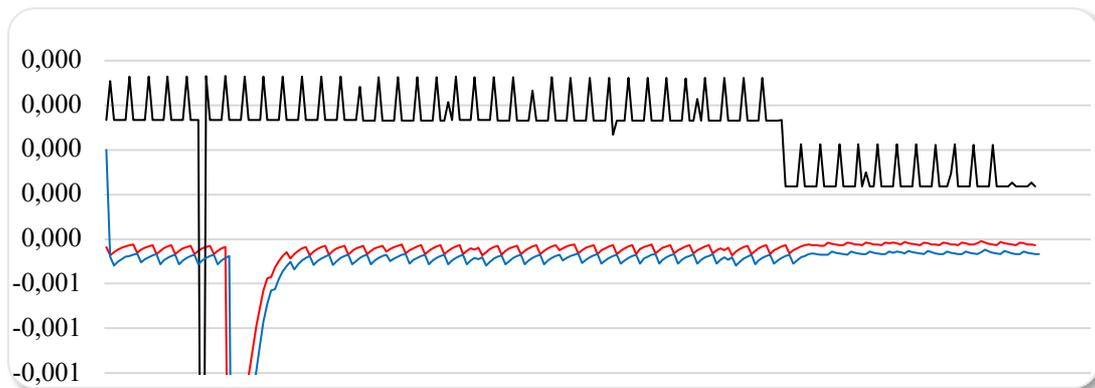
Извор: Аутор

Слика 22. VaR/ES процена EGARCH-RM500



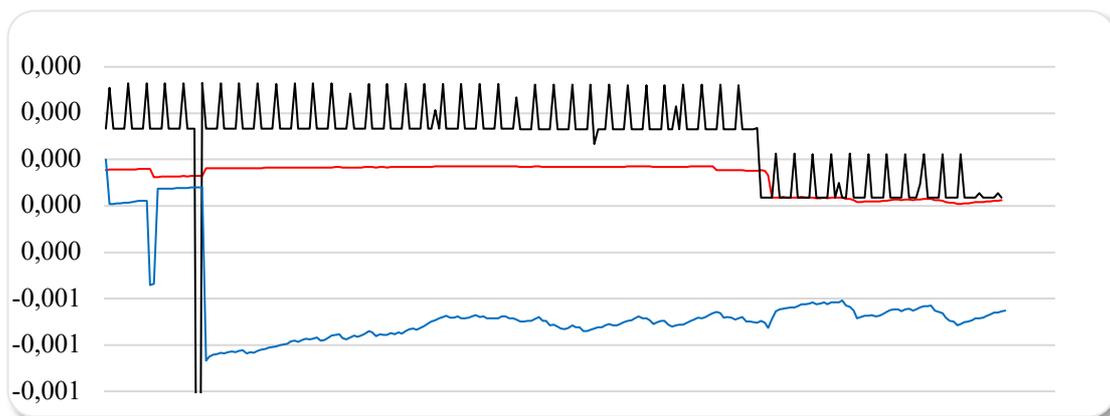
Извор: Аутор

Слика 23. VaR/ES процена TGARCH-RM500



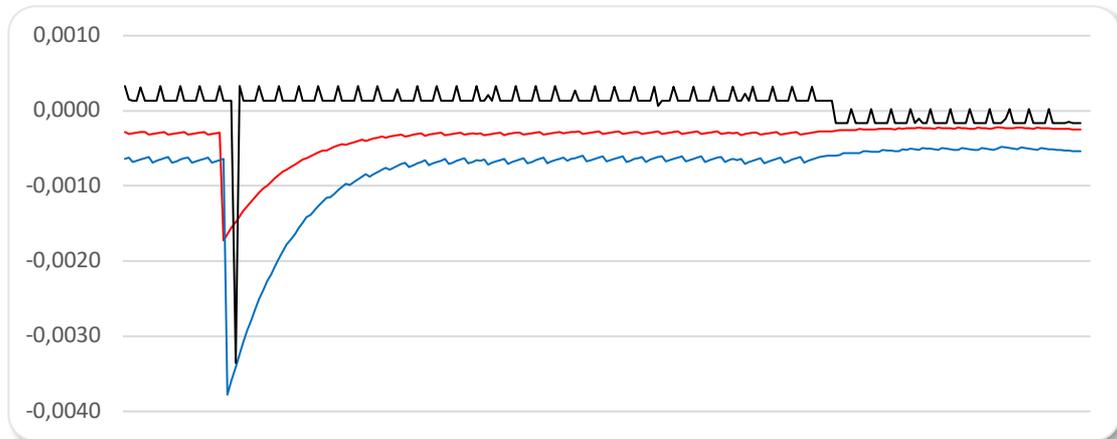
Извор: Аутор

Слика 24. VaR/ES процена FHS500



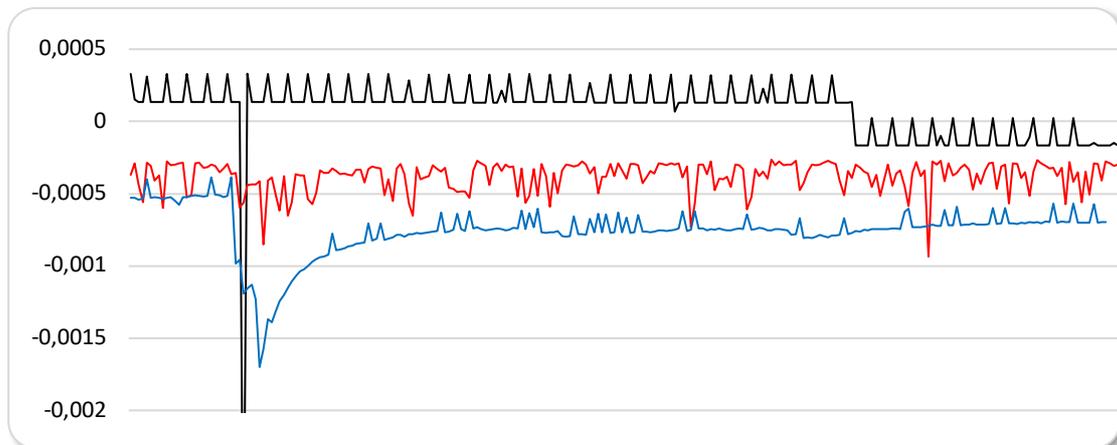
Извор: Аутор

Слика 25. VaR/ES процена EVT-VaR/ES500



Извор: Аутор

Слика 26. VaR/ES процена DLMLP250



Извор: Аутор

Визуелна анализа указује да је већина модела генерисала довољно мали број прекорачења да се може сматрати валидним. Сходно теоријским претпоставкама MHS представља унапређење стандардног модела историјске симулације. Међутим, супротно је у случају BHS модела. Визуелна анализа указује да је BHS модел остварио слабије перформансе у односу на стандардни модел историјске симулације, што је супротно теоријским претпоставкама. Присуство екстремно великог губитка, али и мали број екстремних негативних промена вредности портфолија, које се могу груписати у ред

дистрибуције приноса портфолија највероватнији су разлог лоших перформанси овог модела. Овакав налаз сугерише да се стандардни модел историјске симулације може унапредити комбиновањем MHS и bootstrap приступа. Примена MHS модела би довела до повећања броја екстремних промена вредности портфолија, што би створило добру основу за примену bootstrap приступа. Анализа такође сугерише да FHS модел није показао перформансе које се од њега очекују, односно да EVT-VaR/ES модел, као и DMLP имају добро прилагођавање променама вредности портфолија. RM модели, изузев RM заснованог на GARCH моделу волатилности који се заснива на претпоставци да иновације следе нормалну дистрибуцију, генерисали су сувише конзервативне процене. Што се тиче RM заснованог на GARCH моделу волатилности који се заснива на претпоставци да иновације следе нормалну дистрибуцију, визуелном анализом не може се утврдити прецизно колико је прекорачења генерисао. Међутим, независно од овога, само на основу тестирања валидности модела применом одговарајућих модела може се говорити о томе да ли су модели валидни или нису. Из тог разлога, у наставку дисертације извршено је тестирање VaR модела применом теста безусловног и условног покрића, док су ES модели тестирани применом Berkowitz-евог модела.

4. Тестирање валидности модела за процену ризика

У табели 10 приказани су резултати теста валидности изабраних модела. Утврђивање броја прекорачења, као и кластера прекорачења, представља први корак у тестирању валидности VaR/ES модела. Као што је и визуелна анализа показала, већина модела је генерисала довољно мали број прекорачења да се могу сматрати валидним. Према броју генерисаних прекорачења најслабије перформансе показао је BHS500 модел. Затим следе GARCH(1,1)RM500 и HS500 модел. Интересантно је да су само два модела, BHS500 и FHS500 генерисали кластере прекорачења. Остали модели генерисали су од једног до два прекорачења. Дакле, нема модела који није забележио ниједно прекорачење VaR и ES.

Табела 9. Резултати процене валидности модела

		HS500	MHS500	BHS500
<i>Број VaR прекорачења</i>		6	1	14
<i>Кластери VaR прекорачења</i>		0	0	13
LR _u	Критична вре.	9.61	0.044	43.343
	р-вредност	0.002	0.833	0
LR _{cc}	Критична вре.	9.61	0.046	130.583
	р-вредност	0.008	0.977	0
MC-LR _{uc}		0.054	0.1893	0.004
MC-LR _{cc}		0.069	0.421	0.001
<i>Број ES прекорачења</i>		1	1	2
<i>Кластери ES прекорачења</i>		0	0	0
LR _{BT}		0.097	0.284	0.02
Bootstrap-LR _{BT}		0.142	0.526	0.008
		GARCH(1,1)RM500	EGARCH (1,1) искошена T-RM500	TARCH(1,1)RM500
<i>Број VaR прекорачења</i>		10	1	1
<i>Кластери VaR прекорачења</i>		0	0	0
LR _u	Критична вре.	24.763	0.044	0.044
	р-вредност	0	0.833	0.833
LR _{cc}	Критична вре.	24.763	0.046	0.046
	р-вредност	0	0.977	0.977
MC-LR _{uc}		0.006	0.372	0.452
MC-LR _{cc}		0.002	0.398	0.285
<i>Број ES прекорачења</i>		2	1	1
<i>Кластери ES прекорачења</i>		0	0	0
LR _{BT}		0.003	n/a	n/a
Bootstrap-LR _{BT}		0.007	0.573	0.338
		FHS500	EVT-VaR/ESS500	DLMLPL250
<i>Број VaR прекорачења</i>		3	1	1

Кластери VaR прекорачења		1	0	0
LR _u	Критична вре.	1.831	0.044	0.044
	р-вредност	0.175	0.833	0.833
LR _{cc}	Критична вре.	7.23	0.046	0.046
	р-вредност	0.027	0.977	0.977
MC-LR _{uc}		0.196	0.336	0.455
MC-LR _{cc}		0.099	0.253	0.389
Број ES прекорачења		1	1	1
Кластери ES прекорачења		0	0	0
LR _{BT}		0.078	n/a	n/a
Bootstrap-LR _{BT}		0.482	0.125	0.334

Напомена: Валидност модела је тестирана за ниво поверења од 95%.

Извор: Аутор

Сходно броју прекорачења су и резултати теста безусловног и условног покрића. Критеријуми валидности безусловног покрића нису задовољили HS500, BS500 и GARCH(1,1)RM500. Будући да ови модели нису задовољили критеријум безусловног покрића јасно је да не могу да задовоље критеријум условног покрића. FHS500 модел није задовољио критеријум условног покриће, јер је током периода процене ризика забележио кластер волатилности. Остали модели задовољили су оба *backtesting* критеријума.

Имајући у виду чињеницу да су оба теста (Kupiec-ов и Christofferson-ов модел) заснована на асимптотским претпоставкама, њихова примена на узорке ограничене величине захтева валидацију њихових резултата. Из тог разлога у дисертацији је коришћена Dofour Monte Carlo тест процедура. Валидација резултата теста безусловног и условног покрића спроведена према процедури која је описана на претходним странама дисертације. Процедура је спроведена на симулацији од 10000 понављања величине узорка од 245, што је једнако броју дневних VaR/ES процена. Стопа изводљивости теста је 0.879 за тест безусловног, односно 0.835 за тест условног покрића. Резултати оба теста приказани су такође у табели 8.

Резултати валидности теста безусловног и условног покрића потврђују налазе Kupiec-овог и Christofferson-овог модела. Изузетак је у случају FHS500 модела који није задовољио критеријум условног покрића код примене Christofferson-овог модела. Након,

валидације резултата Christofferson-овог модела, може се закључити да се FHS500 модел може поуздано користити за процену тржишног ризика оптималног портфолија за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији.

ES процене изабраних модела тестиране су применом Berkowitz-евог модела, који је представљен у дисертацији. Резултати овог теста такође представљени су у табели 8. Сходно карактеристикама Berkowitz-евог модела, очекивано је да се тест не може спровести у одређеном броју случаја. У случају процене тржишног ризика оптималног портфолија тест није било могуће спровести чак у случају четири модела: EGARCH(1,1)-искошена T-RM500, TARCH(1,1)RM500, EVT-VaR/ESS500 и DLMLPL250. Из тог разлога, али и чињенице да је и Berkowitz-ев модел изграђен на асимптотским претпоставкама које нису валидне када се примењују на ограниченим узорцима у којима постоји велики број прекорачења, у дисертацији је извршено тестирање валидности резултата Berkowitz-евог модела. За ту сврху у дисертацији је коришћена *bootstrap* процедура, која је описана у дисертацији. Резултати су, такође приказани у табели 10, уз напомену да је оптималан број понављања утврђен применом тро-ступене процедуре, која је описана у делу дисертације. Број оптималних понављања износи +/- 2.22% од 5000 симулација. Резултати валидације Berkowitz-евог модела указују да се сви модели, осим BHS500 и GARCH(1,1)RM500 модела, могу поуздано користити за ES процену тржишног ризика оптималног портфолија за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији.

Имајући у виду представљене резултате валидације изабраних VaR/ES модела, не може се извести поуздан закључак о томе који је модел показао најбоље перформансе. Свакако, кандидати су модели који су генерисали минималан број прекорачења и који нису забележили кластере прекорачења. Руководећи се овим кандидатима који испуњавају ове услове су MHS500, EGARCH(1,1) искошена T-RM500, TARCH(1,1)RM500, EVT-VaR/ESS500 и DLMLPL250 модел. Како би се одговорило на питање који модел је генерисао најбоље перформансе у дисертацији је извршена компарација корена средње квадратне грешке (енгл. *Root Mean Squared Errors - RMSE*) ових модела. Резултати су приказани у табели 11.

Табела 10. Резултати компарације перформанси модела

Назив модела	MHS500	EGARCH(1,1) искошена T- RM500	TARCH(1,1) RM500	EVT- VaR/ES500	DLMLP 250
вредност RMSR за ES	0.0005	0.0009	0.0009	0.0006	0.0005
вредност RMSR за VaR	0.0014	0.0009	0.0007	0.0011	0.0006

Извор: Аутор

Као што се може видети из табеле 11, сви модели који су ишли у избор за модел који је генерисао најбоље процене тржишног ризика за оптимални портфолио за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији, имали су релативно сличне вредности RMSE у случају VaR процена. Изненађујуће добре перформансе показао је MHS500 модел. Модел је показао исте перформансе у VaR проценама као DLMLP250 модел. Будући да су ова два модела забележила најмање вредности RMSE, она се могу означити као најбољи модели за VaR процене тржишног ризика оптималног портфолија. Затим следи EVT-VaR/ES500, па RM модели који су, према RMSE, остварили исте перформансе.

Када се у анализу укључе и резултати RMSE за ES процене, онда се може закључити да модел који је развијен у дисертацији представља унапређење традиционалних и често коришћених модела VaR/ES, јер је генерисао најмању RMSE вредност. Затим следе RM модели, при чему је овог пута TARCH(1,1)RM500 генерисао боље перформансе у односу на EGARCH(1,1) искошена T-RM500 модел, те се стога може закључити да је овај модел адекватнији за оптимални портфолио у односу на EGARCH(1,1) искошена T-RM500 модел. EVT-VaR/ES500 је показао боље перформансе у односу на MHS500 модел.

Узимајући у обзир RMSE и за VaR и за ES процене, тешко се са сигурношћу може рећи који би модел, после DLMLP250 био адекватнији за процену тржишног ризика оптималног портфолија за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији, мада се издваја TARCH(1,1)RM500. У случају VaR процена MHS500 модел је био прво рангирани, али у случају ES процена последње рангирани модел. Може се рећи да овај модел има велику дискрепанцу у перформансама када се користи за процену тржишног ризика применом VaR мере у односу на ES меру ризика. Нешто мање осцилације у

перформансама показала су остала три модела, при чему је TARCH(1,1)RM500 исказао можда најмању дискрепанцу. Стога би се овај модел могао предложити, после DLMLP250 као адекватан избор за осигуравајућа друштва. Приликом прихватања овог закључка треба бити опрезан из разлога што је оптимални портфолио, због значајног учешћа обвезница, показао нешто другачије карактеристике дистрибуције приноса него што је то карактеристично за портфолио инвестиције на тржиштима у настајању.

5. Дискусија добијених резултата

На основу анализе основних карактеристика дистрибуције дневних логаритамских приноса оптималног портфолија, представљених на сликама 14, 15 и 16, као и у табелама 3 и 4, може се закључити да дистрибуција приноса портфолија одступа од претпоставке нормалности дистрибуције тј. претпоставке на којој почива највећи број параметарских VaR/ES модела. Резултати јасно показују да дистрибуција дневних логаритамских приноса оптималног портфолија има дебље репове и издужену дистрибуцију, што имплицира на тзв. летпокуртичну дистрибуцију. Даље, исти резултати указују на присуство аутокорељације, што имплицира да дистрибуција серије дневних логаритамских приноса оптималног портфолија одступа од претпоставке о независности дистрибуције, тј. претпоставке на којој су изграђени непараметарски VaR/ES модели.

Добијени резултати анализе дистрибуције дневних логаритамских приноса оптималног портфолија у складу су са очекивањима, када су у питању портфолио улагања на тржиштима у развоју, какво је тржиште капитала Републике Србије. Овако добијени резултати анализе указују да потхипотеза која гласи: **Серија приноса портфолија осигуравајућих друштава одступа од претпоставки о нормалној и независној дистрибуцији приноса**, јесте доказана као валидна.

Иако су резултати о одступању претпоставке о нормалности дистрибуције и независности дистрибуције у складу са очекивањима, резултати анализе присуства ARCH ефекта, представљени у табели 6, нису у складу са очекивањем. Наиме, како је већ истакнуто у дисертацији, присуство ARCH ефекта, уобичајена је појава на тржиштима капитала, какво је тржиште капитала Републике Србије. Значајан удео обвезница и

некретнина у структури оптималног портфолија утицали су да варијанса портфолија током периода посматрања буде константа, односно да нема присуства ARCH ефекта.

На основу истих резултата анализе, прецизније речено на основу резултата дескриптивне анализе кретања серије дневних логаритамских приноса оптималног портфолија представљених у табели 4, може се извести закључак да је и друга потхипотеза, која гласи: **Серија приноса портфолија осигуравајућих друштава која послују на финансијским тржиштима у настајању следе асиметричну и лептокуртичну расподелу**, доказана као валидна, те се може прихватити као валидна.

Прихватање ове две потхипотезе као валидне има значајних импликација с аспекта управљања тржишним ризицима у осигурању. Наиме, прихватање као валидних ове две потхипотезе јасан су сигнал да оптимални портфолио за осигуравајућа друштава која послују у Републици Србији одступа од две претпоставке на којима је изграђен највећи број параметарских и непараметарских VaR/ES модела. То значи да приликом употребе ових модела мора се бити опрезан јер могу довести до потцењених процена ризика у односу на стварну изложеност портфолија тржишним ризицима. Другим речима, примена ових модела мора бити праћена додатним анализама и моделима који су способни да кооптирају ове карактеристике серије приноса портфолија.

Резултати приказани на слици 25 и представљени у табели 8 имају низ значајних импликација по питању валидности модела за процену тржишних ризика осигуравајућих компанија заснованих на техници дубоког учења која је развијена у дисертације и прихватања постављених потхипотеза и хипотезе X1. То што је модел забележио само по једно прекорачење VaR и ES процене, током периода посматрања, те што је задовољио критеријуме безусловног и условног покрића, тј. Kupiec-овог и Christofferson-овог *backtesting* модела, који су применом Dufour Monte Carlo тест процедуре, као и *Bootstrap* процедуре верификовани, указују да се хипотеза X1 која гласи: **Моргуће је развити модел за процену тржишног ризика осигуравајућих компанија који је заснован на техници дубоког учења и неуронских мрежа**, може прихватити као валидна. Другим речима, ови резултати указују на валидност у дисертацији развијеног модела. Даље, резултати имплицирају да потхипотеза која гласи: **Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења задовољава критеријуме теста безусловног покрића тржишног ризика коме су**

изложена оптимална портфолија осигуравајућих друштава на тржиштима у настајању, односно потхипотезе која гласи: **Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења задовољава критеријуме теста условног покрића тржишног ризика коме су изложена оптимална портфолија осигуравајућих друштава на тржиштима у настајању, као и потхипотезе која гласи: Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења задовољава критеријуме валидности ES модела за процену тржишног ризика коме су изложена оптимална портфолија осигуравајућих друштава на тржиштима у настајању, се могу прихватити као валидне.**

Импликација прихватање хипотезе X1 и ових потхипотеза огледају се у чињеници да је могуће искористи достигнућа из области вештачке интелигенције и data mining-а за развој модела за управљање тржишним ризицима портфолио улагања у осигурању. Прецизније говорећи, могуће је ефикасно искористити ова достигнућа, јер резултати приказани у табели 8 показују да је од четири широко коришћена и веома популарна VaR/ES модела (BHS500, GARCH(1,1)RM500 и FHS500) генерисао боље процене тржишног ризика коме је изложен оптимални портфолио.

Укључивањем у анализу и резултате анализе компарације перформанси остала четири модела (MHS500, EGARCH(1,1) искошена T-RM500, TARCH(1,1)RM500, EVT-VaR/ESS500), која су генерисала исти број прекорачења VaR и ES процена као и модел развијен у дисертацији, јасно указују на супериорност овог. Ови резултати јасан су доказ у прилог прихватања и хипотезе X2, која гласи: **Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења и неуронских мрежа даје прецизније процене тржишног ризика у односу на традиционалне и широко коришћене моделе VaR и ES, као валидне.**

Импликација прихватање хипотезе X2 огледа се пре свега у чињеници да је за портфолио улагања на тржиштима у развоју могуће развити оптимални модел који ће бити способан да кооптира основне карактеристике серије приноса портфолија са тржишта капитала у настајању. То даље имплицира да осигуравајућа друштва могу побољшати своје стратегије управљања ризиком, што би довело до већег поверења регулатора и инвеститора, као и до побољшаних финансијских резултата. Резултат овога

огледао би се и у креирању стабилнијег финансијског окружења, чиме би се смањила волатилност и створили услови за ефикасније управљање ризицима. Ово даље може подстакнути веће улагање и развој тржишта, али и у иновације у производе осигурања. На овај начин би осигуравајућа друштва могла да оптимизују своје портфолије и стратегије покривања, што би довело до веће конкурентности на тржишту. С друге стране, увођење сложенијих модела захтева и веће техничке ресурсе и обуку, што може представљати изазов за мања осигуравајућа друштва.

6. Ограничења истраживања

Као и свако истраживање ове врсте и ово истраживање има низ ограничења, која се морају имати у виду када се прихватају резултати и закључци истраживања. Прво ограничење овог истраживања односи се на избор података. Наиме, истраживање спада у групу тзв. *in-side sample* истраживање, што значи да се за развој и тестирање модела користио исти узорак података. Ово је иначе уобичајен приступ када се ради о развоју VaR/ES модела. Ограничени временски оквир истраживања главни је разлог примене оваквог приступа.

Друго ограничење односи се на сам квалитет података коришћених за валидацију модела. Наиме, структура самог портфолија узроковала је да одређене карактеристике које су уобичајене за финансијска тржишта у настајању, а пре свега тржишта капитала у овим земљама, не буду присутне у дистрибуцији оптималног портфолија. Поред тога, период који је изабран за прикупљање података за формирање оптималног портфолија обухватио је период смањење инвестиционе активности у Републици Србији, који је изазван пандемијом Covid19. Сувише миран период узроковања за формирање оптималног портфолија у односу на волатилнији период који се користио за тестирање валидности модела могао је бити узрок за слабе перформансе модела који се заснивају на претпоставци о независној и идентичној дистрибуцији, тј. моделима HS500 и BHS500. Такође, ово може бити разлог и немогућности генерисања оцена параметара различитих модела условне волатилности, чија примена је била разматрана.

Недостатак ресурса у смислу рачунарске захтевности, такође се може сматрати ограничењем овог истраживања, које се мора узети у обзир приликом прихватања

резултата и налаза овог истраживања. Наиме, чињеница да модели за тестирање валидности VaR/ES модела засновани на асимптотским претпоставкама које имају малу вредност када се примењују на узорцима ограничене величине, утицали су на потребу да се њихови налази подвргну додатној валидацији. За ту сврху у дисертацији коришћена је Dufour Monte Carlo тест процедура, као и Bootstrap тест процедура. Опште је познато да валидност ових процедура захтева што већи број симулација, односно да је њихова прецизност функција повећања броја симулације. Једноставније речено, што се број симулација приближава бесконачности то је њихова поузданост већа. Међутим, ограничени ресурси утицали су да се ове процедуре спроведе на значајно мањем броју симулација од идеалног. Тачније, спроведене су на основу прорачуна оптималног броја симулација, у случају *Bootstrap* теста процедуре, односно навода других аутора, попут Christoffereson (2011) и Malecka, (2014) у вези довољног броја симулација за спровођење поузданих тестова безусловног и условног покрића.

Независно од горе поменутог, будућим истраживачима препоручује се да даље раде на истраживању могућности развоја адекватних модела за процену тржишних ризика којима су изложена портфолија осигуравајућих компанија, заснованих на техникама дубоког учења. Разлог томе налази се у чињеници да ове технике имају огроман потенцијал у учењу неуронских мрежа да коопирају обрасце понашања серија приноса са финансијских тржишта, искоришћавајући предности различитих традиционалних економетријских техника за анализу и предвиђање временских серија података. Будући да су способни да идентификују скривене обрасце понашања, које не могу да кооптирају и предвиде традиционалним економетријским техникама за анализу и предвиђање временских серија података, то је потребно даље радити на проналажењу начина да се искористе предности неуронских мрежа заснованих на техници дубоког учења.

ЗАКЉУЧАК

Иако је осигурање још од најранијих дана развоја друштва представљало значајну активности, јер су људи још у првобитној људској заједници желели да обезбеде залихе хране и да се заштите од елементарних непогода, у условима савременог битисовања друштва, осигурање добија круцијалну улогу. Улога осигурања, данас, превазилази њене првобитне функције јер постаје један од кључних чинилаца унапређења стабилности финансијског система, економског раста и привредног развоја.

Оваква улога и значај осигурања утицала је на регулаторне институције из области финансија да посебну пажњу поклоне прудеционим правилима која регулишу рад осигуравајућих друштава као носилаца активности осигурања, јер се само кроз ефикасно пословање свих осигуравајућих друштава у једној националној економији обезбеђује да осигурање, као привредна делатност, може да испуни своје функције у развоју савременог друштва. Како би се остварио овај циљ, регулаторне институције посебан акценат ставиле су на управљање ризицима. Наиме, са једне стране ефикасно пословање осигуравајућих друштава подразумева да се прикупљена средства од полиса осигурања даље инвестирају, како би се остварили приноси на средстава и обезбедило даље ефикасно пословање. Само такво пословање доводи до појаве иновација у осигурању и јачању конкурентности осигуравајућих друштава, чиме се стварају услови за развој националне економије и напредак друштва. Међутим, са друге стране присуство ризика утиче на регулаторне институције да строго морају да контролишу и ограничавају такве активности осигуравајућих друштава. Другим речима, иманентност ризика сваком улагању доводи то тога да свака инвестициона активност осигуравајућих друштава мора да буде под надзором регулаторних институција. У супротном, експоненцијалном брзином расте ризик од слома финансијског система, а тиме и читаве привреде и друштва у целини.

Како би се постигао баланс између ова два на изглед непомирљива захтева, још почетком седамдесетих година прошлог века, Европски парламент је почео са усвајањем низа пруденционих правила и прописа, које су коначну форму добиле 2004. године у облику Директиве солвентности I. Бројни недостаци Директиве солвентности I утицали

су на регулаторне институције из Европске уније да даље раде на њеном усавршавању и доношењу нових пруденционих правила. Резултат ових активности било је усвајање Директивне солвентности II, 2014. године. Усвајањем Директиве солвентности II осигуравајућа друштва су добила могућност да изложеност ризику својих инвестиционих портфолија процењују применом VaR концепта. VaR концепт представља један од највећих достигнућа у управљању финансијским ризицима јер омогућава да се ризик изрази крој један број, цифру, која у себи сублимира и рефлектује мултидимензионалну природу ризика. Ово не само да олакшава процену ризика, магнитуду и фреквенцију потенцијалног губитка и сходно томе износ средстава који треба издвојити за покриће губитка, већ олакшава и разумевање ризика од стране оних стејкхолдера који немају довољно стручног знања из области менаџмента ризика, али који имају интерес за ефикасним и стабилним пословањем осигуравајућих друштава.

Упркос бројним предностима концепта VaR, ефикасна примена VaR модела захтева испуњење одређених врло стриктних услова. Будући да ови захтеви, који су последица претпоставки на којима су VaR модели развијени, често нису у довољној мери компатибилни са карактеристикама реалног окружења, постоји потреба сталног усавршавања постојећих VaR модела. У жељи да се искористе предности достигнућа из области информacionих технологија, а пре свега вештачке интелигенције и *data mining*-а, а у контексту претходно реченог, у дисертацији развијен је нови VaR модел за процену тржишног ризика коме су изложена оптимална портфолија осигуравајућих друштава. Модел је заснован на техници дубоког учења, а носи ознаку DLMLP. Ознака модела указује јасно да је реч о VaR моделу заснованом на MLP моделу неуронске мреже.

Мотив за развој оваквог модела налази се у чињеници да модели за процену ризика засновани на неуронским мрежама показују боље перформансе у предвиђању реализоване волатилности у односу на традиционалне технике анализе временских серија, односно да MLP показује изузетне перформансе у кооптирању нелинеарних зависности између фактора ризика портфолија. Поред тога, не заснива се на одређеним теоријским претпоставкама о дистрибуцији серије приноса портфолија и фактора ризика и способан је да кооптира велики број различитих фактора ризика који утичу на промену вредности портфолија.

Међутим, са друге стране, релативно мали број података у репу дистрибуције вероватноће утичу да модели неуронске мреже нису у стању да ухвате екстремне

приносе. То је од пресудне важности за поузданост процене ризика, будући да је VaR мера ризика која зависи од репа дистрибуције вероватноће. Ово је нарочито евидентан проблем у случају примене VaR модела у контексту поштовања правила Директиве солвентности II. Наиме, изузетно висок ниво поверења који се поставља од стране Директиве приликом израчунавања SCR, имплицира мали број екстремних случајева у репу дистрибуције, што лимитира употребу класичних модела заснованих на неуронским мрежама. Из тог разлога у улазном слоју DLMLP модела налази се осам чворова. Сваки чвор представља улаз за серију VaR процена добијених применом осам популарних и често коришћених VaR/ES модела. Употребом VaR процена ових модела, као улазних инпута у DLMLP модел настојало се да се искористе предности ових модела са предностима примене модела заснованих на неуронским мрежама. Резултати теста валидности процена VaR и ES показују да се успело у овој намери.

Наиме, резултати теста безусловног и условног покрића показали су да модел генерише задовољавајуће процене тржишног ризика и то како у категорији VaR, тако и у категорији ES. Валидност модела тестирана је и за процену ES из разлога што VaR као мера ризика показује недостатак одређених особина конхерентне мере ризика, те се последњих пар година све већи примат даје ES. Резултати тестова безусловног и условног покрића верификавани су применом *Dofour Monte Carlo* тест процедуре, односно применом Bootstrap тест процедуре за процене ES, чија је валидност тестирана применом Berkowitz-евог теста. Резултати верификације тестова валидности VaR/ES модела указују на то да се модел може поуздано користити за управљање тржишним ризиком коме су изложена оптимална портфолија осигуравајућих друштава.

Валидност модела тестирана је на примеру оптималног портфолија који је формиран применом Markowitz-евог *mean-variance* модела, за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији. Портфолио је формиран на основу две године историјских података о приносима инвестиционих алтернатива у која осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији имају право да улажу вишак техничких резерви. Тачније, портфолио је формиран на основу две године података о дневним логаритамским приносима инвестиционих алтернатива, који су прикупљени за период од 03.01.2020. до 31.12.2021. године. На основу ових података на дан 04.01.2022. године формиран је оптимални портфолио. VaR и ES процене генерисане су за период истраживања од 04.01.2022. године до 31.12.2023. године, при чему је период од 09.01.

до 31.12.2023. године коришћен за тестирање валидности модела. VaR и ES процене генерисане применом приступа ”покретних прозора”, величине 500 података. Изузета је у случају DLMLP модела код кога су процене засноване на приступ ”покретних прозора”, величине 250 VaR и ES процена.

Резултати компарације перформанси изабраних модела и DLMLP модела сугеришу да се може извести закључак да је DLMLP модел генерисао боље процене тржишног ризика оптималног портфолија за осигуравајућа друштва која послују у Републици Србији у односу на традиционалне и широко коришћене VaR/ES моделе. Наравно, приликом прихватања налаза и закључака овог истраживања треба бити опрезан и имати у виду одређена ограничења и недостатке истраживања, а пре свега да период узорковања обухвата исувише миран инвестициони период на тржишту капитала Републике Србије, услед пандемије изазване Covid19 вирусом, у односу на период тестирања валидности модела.

Литература

1. Abad, P., Benito, S., & López, C. (2014). A comprehensive review of Value at Risk methodologies. *The Spanish Review of Financial Economics*, 12(1), 15-32.
2. Abraham, K. S. (1985). Efficiency and fairness in insurance risk classification. *Virginia Law Review*, 403-451.
3. Acerbi, C., & Szekely, B. (2014). Backtesting Expected Shortfall. *Risk Magazine*, December, 1-33.
4. Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of banking & finance*, 26(7), 1487-1503.
5. Acerbi, C., & Szekely, B. (2019). The minimally biased backtest for ES. *Risk. net*, 29.
6. Acerbi, C., & Szekely, B. (2014). Backtesting expected shortfall. *Risk*, 27(11), 76-81.
7. Al Janabi, M. A., Hernandez, J. A., Berger, T., & Nguyen, D. K. (2017). Multivariate dependence and portfolio optimization algorithms under illiquid market scenarios. *European Journal of Operational Research*, 259(3), 1121-1131.
8. Alam, M. F., Ilahi, M., & Siddiqui, M. T. (2022). Insurance & risk management. *IOSR Journal of Business and Management (IOSR-JBM)*, 24(3), 39-46.
9. Alexander, C., Lazar, E., & Stanescu, S. (2021). Analytic moments for GJR-GARCH (1, 1) processes. *International Journal of Forecasting*, 37(1), 105-124.
10. Altun, E., Tatlidil, H., Ozel, G., & Nadarajah, S. (2018). Does the assumption on innovation process play an important role for filtered historical simulation model?. *Journal of Risk and Financial Management*, 11(1), 1-13.
11. Ampadu, S., Mensah, E. T., Aidoo, E. N., Boateng, A., & Maposa, D. (2024). A comparative study of error distributions in the GARCH model through a Monte Carlo simulation approach. *Scientific African*, 23, e01988.
12. Andrews, D., & Buchinsky, M. (1997). On the number of bootstrap repetitions for bootstrap standard errors, confidence intervals and tests. *Cowles Foundation paper 1141R*.
13. Ane, T. (2005). Do Power GARCH models really improve value-at-risk forecasts? *Journal of Economics and Finance*, 29(3), 337-358.

14. Araghchi, K. (2018). Comparison of symmetric and asymmetric GARCH models: Application of exchange rate volatility. *American Journal of Mathematics and Statistics*, 8(5), 151–159.
15. Arreola Hernandez, J., & Al Janabi, M. A. (2020). Forecasting of dependence, market, and investment risks of a global index portfolio. *Journal of Forecasting*, 39(3), 512-532.
16. Antonio, K., & Valdez, E. A. (2012). Statistical concepts of a priori and a posteriori risk classification in insurance. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 96, 187-224.
17. Artzner, P., Delbaen, F., Elber, J., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
18. Asadi, S., & Al Janabi, M. A. (2020). Measuring market and credit risk under Solvency II: Evaluation of the standard technique versus internal models for stock and bond markets. *European Actuarial Journal*, 10(2), 425-456.
19. Astuti, P. E., & Gunarsih, T. (2021). Value-At-Risk Analysis in Risk Measurement and Formation of Optimal Portfolio in Banking Share. *JBTI: Jurnal Bisnis: Teori dan Implementasi*, 12(2), 103-114.
20. Atsalakis, G. S., & Valavanis, K. P. (2009). Surveying stock market forecasting techniques—Part II: Soft computing methods. *Expert Systems with applications*, 36(3), 5932-5941.
21. Authority. (2017). *Insurance industry annual report*. IRA
22. Babiš, A. (2024). Performance Evaluation of a Family of GARCH Processes Based on Value at Risk Forecasts: Data Envelopment Analysis Approach. *Computational Economics*, 1-33.
23. Baker, T. (2002). *Containing the promise of insurance: Adverse selection and risk classification*. SSRN.
24. Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., & Vosper, L. (2000). Filtering historical simulation. Backtest analysis. *Manuscript, March*.
25. Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., & Vosper, L. (2002). Backtesting derivative portfolios with filtered historical simulation (FHS). *European Financial Management*, 8(1), 31-58.

-
26. Bartlmae, K., & Rauscher, F. A. (2000, May). Measuring DAX market risk: a neural network volatility mixture approach. In *Presentation at the FFM2000 Conference, London* (Vol. 31).
 27. Bauer, D., Reuss, A., & Singer, D. (2012). On the calculation of the solvency capital requirement based on nested simulations. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 42(2), 453-499.
 28. Bayer, S., & Dimitriadis, T. (2019). *Regression based expected shortfall backtesting*. Working paper.
 29. BenSaïda, A., Boubaker, S., & Nguyen, D. K. (2018). The shifting dependence dynamics between the G7 stock markets. *Quantitative Finance*, 18(5), 801-812.
 30. Ben Salem, A., Safer, I., & Khefacha, I. (2022). Value-at-Risk (VAR) Estimation Methods: Empirical Analysis based on BRICS Markets.
 31. Berkowitz, J. (2001). Testing density forecasts, with applications to risk management. *Journal of business & economic statistics*, 19(4), 465-474.
 32. Beutner, E., Heinemann, A., & Smeekes, S. (2024). A residual bootstrap for conditional Value-at-Risk. *Journal of Econometrics*, 238(2), 105554.
 33. Bohdalová, M., & Greguš, M. (2016). Value at risk with filtered historical simulation. In *Time Series Analysis and Forecasting: Selected Contributions from the ITISE Conference* (pp. 123-133). Springer International Publishing.
 34. Borda Bossana, D. (2024). *The role of Value at Risk and Expected Shortfall in Credit Risk Management. A comparative analysis of Basel guidelines and through a Beta Mixture Model application*. Doctoral dissertation, Torino: Politecnico di Torino.
 35. Brandolini, D., & Colucci, S. (2012). Backtesting value-at-risk: a comparison between filtered bootstrap and historical simulation. *The Journal of Risk Model Validation*, 6(4), 3-16.
 36. Brownlee, J. (2017). Deep learning for natural language processing. *Machine Learning Mystery, Vermont, Australia*, 322.
 37. Bildirici, M., & Ersin, Ö. Ö. (2009). Improving forecasts of GARCH family models with the artificial neural networks: An application to the daily returns in Istanbul Stock Exchange. *Expert Systems with Applications*, 36(4), 7355-7362.

-
38. Bildirici, M., Alp, E. A., & Ersin, Ö. Ö. (2010). TAR-cointegration neural network model: An empirical analysis of exchange rates and stock returns. *Expert Systems with Applications*, 37(1), 2-11.
39. Bijelic, A., & Ouijjane, T. (2019). Predicting Exchange Rate Value-at-Risk and Expected Shortfall: A Neural Network Approach.
40. Bobtcheff, C., Chaney, T., & Gollier, C. (2016). Analysis of systemic risk in the insurance industry. *The Geneva Risk and Insurance Review*, 41, 73-106.
41. Börger, M. (2010). Deterministic shock vs. stochastic value-at-risk—an analysis of the Solvency II standard model approach to longevity risk. *Blätter der DGVMF*, 31, 225-259.
42. Briys, E., & de Varenne, F. (2001). *Insurance: From Underwriting to Derivatives. Financial Innovations and the Welfare of Nations*, 301–314.
43. Chebbi, A., & Hedhli, A. (2022). Revisiting the accuracy of standard VaR methods for risk assessment: using the copula–EVT multidimensional approach for stock markets in the MENA region. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 84, 430-445.
44. Chech, C. (2012). *Die Eigenmittelanforderungen an Versicherungen im Standardansatz von Solvency II. FH des bfi Wien. Working Paper Series.*
45. Chen, X., Lai, K.K., & Yen, J. (2009). A Statistical Neural Network Approach for Value-at-Risk Analysis, *International Joint Conference Computational Science and Optimization*.
46. Choi, D., Jiang, W., & Zhang, C. (2023). Alpha go everywhere: Machine learning and international stock returns. *Available at SSRN 3489679*.
47. Christoffersen, P.F. (2011). *Elements of Financial Risk Management*. San Diego: Academic Press.
48. CEIOPS (2010) Solvency II Calibration Paper.
доступно на
<http://www.ceiops.eu/media/files/publications/submissionstotheec/CEIOPS-Calibration-paper-Solvency-II.pdf>. (датум ажурирања 15.1.2025. године)
49. CEIOPS (2010) Catastrophe task force report on the standardized scenarios for the catastrophe risk module in the standard formula. Technical report, CEIOPS
50. CEIOPS (2011) Calibration of the premium and reserve risk factors in the standard formula of Solvency II. Technical report, CEIOPS.

-
51. Crocker, K. J., & Snow, A. (2013). The theory of risk classification. *Handbook of insurance*, 281-313.
 52. Cummins, J. D., Smith, B. D., Vance, R. N., & Vanderhel, J. L. (Eds.). (2013). *Risk classification in life insurance* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
 53. Dave, R. D., & Stahl, G. (1998). On the accuracy of VaR estimates based on the variance-covariance approach. In *Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks: Selected Articles of the 6th Econometric-Workshop in Karlsruhe, Germany*(pp. 189-232). Heidelberg: Physica-Verlag HD.
 54. David, M. (2015). A review of theoretical concepts and empirical literature of non-life insurance pricing. *Procedia Economics and Finance*, 20, 157-162.
 55. Del Brio, E. B., Mora-Valencia, A., & Perote, J. (2020). Risk quantification for commodity ETFs: Backtesting value-at-risk and expected shortfall. *International Review of Financial Analysis*, 70, 101163.
 56. Dimitrova, M., Treapăt, L. M., & Tulyakova, I. (2021). Value at Risk as a tool for economic-managerial decision-making in the process of trading in the financial market. *Ekonomicko-manazerske spektrum*, 15(2), 13-26.
 57. Doff, R. (2008). A critical analysis of the Solvency II proposals. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 33, 193-206.
 58. Donaldson, R.G., & Kamstra, M. (1996). Forecast combining with neural networks. *Journal of Forecasting*, 15(1), 49-61.
 59. Doncic, S., Pantic, N., Lakicevic, M., & Radivojevic, N. (2022). Expected shortfall model based on a neural network. *Journal of Risk Model Validation*, 16(2).
 60. Dufour, J.M. (2006). “Monte Carlo Tests with Nuisance Parameters: A General Approach to Finite-Sample Inference and Nonstandard Asymptotics in Econometrics”, *Journal of Econometrics* 133; 443-477.
 61. Dumitrescu, E. I., Hurlin, C., & Pham, V. (2012). Backtesting value-at-risk: from dynamic quantile to dynamic binary tests. *Finance*, 33(1), 79-112.
 62. Dunis, C. L., & Chen, Y. X. (2005). Alternative volatility models for risk management and trading: Application to the EUR/USD and USD/JPY rates. *Derivatives use, trading & regulation*, 11, 126-156.
 63. EIOPA 14 322 (2014) The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation. EIOPA

64. Eling, M., & Jung, K. (2018). Copula approaches for modeling cross-sectional dependence of data breach losses. *Insurance: Mathematics and Economics*, 82, 167-180.
65. Eling, M., Klein, R., & Schmit, J. T. (2010). Insurance Regulation in the United States and the European Union: a comparison.
66. Eling, M., Schmeiser, H., & Schmit, J. T. (2007). The Solvency II process: Overview and critical analysis. *Risk management and insurance review*, 10(1), 69-85.
67. Eling, M., Gemmo, I., Guxha, D., & Schmeiser, H. (2024). Big data, risk classification, and privacy in insurance markets. *The Geneva Risk and Insurance Review*, 1-52.
68. Engle, R. F., Lilien, D. M., & Robins, R. P. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 391-407.
69. Escanciano, J. C., & Olmo, J. (2011). Robust backtesting tests for value-at-risk models. *Journal of Financial Econometrics*, 9(1), 132-161.
70. Farhan, A. M., Alkhasawneh, R. A., Gadour, W. H. Y., Qamar, K. A., Radwan, M. A., Dafaalla, S. M. A., ... & Elshinawy, F. Y. (2024). Estimating Risk Margin For General Insurance Sector In The Saudi Insurance Market. *Migration Letters*, 21(S11), 714-728.
71. Frenkel, M., Hommel, U., & Rudolf, M. (Eds.). (2005). *Risk management: challenge and opportunity*. Berlin: Springer Science & Business Media.
72. Francq, C., & Zakoian, J. M. (2019). *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. London: John Wiley & Sons.
73. Fischer T., & Krauss, C., (2018). Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions. *European Journal of Operational Research*, 270(2), 654-669.
74. Fraszka-Sobczyk, E., & Zakrzewska, A. (2024). The impact of foreign stock market indices on predictions volatility of the WIG20 index rates of return using neural networks. *Computational Economics*, 1-14.
75. Gerunov, A. (2022). Standard Risk Metrics. In *Risk Analysis for the Digital Age* (pp. 41-79). Cham: Springer International Publishing.
76. Glosten, L., Jagannathan, R. & Runkle, D. (1993). Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance* 48, 1779- 1801.

-
77. Gneiting, T. (2011). Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494), 746-762.
78. Gurrola-Perez, P. (2018). The validation of filtered historical value-at-risk models. *Journal of Risk Model Validation*.
79. Gurrola-Perez, P., & Murphy, D. (2015). Filtered historical simulation Value-at-Risk models and their competitors. Working paper.
80. Haggan, V. & Ozaki, T. (1981). Modelling nonlinear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model. *Biometrika* 68(1): 189-196.
81. Hajizadeh, E., Seifi, A., Zarandi, M. F., & Turksen, I. B. (2012). A hybrid modeling approach for forecasting the volatility of S&P 500 index return. *Expert Systems with Applications*, 39(1), 431-436.
82. Hauser, P., (2014). Rastući značaj funkcije zakonitosti poslovanja na primeru austrijske ekonomije osiguranja. *Evropska revija za pravo osiguranja*, 2(13), 7-16.
83. He, K., Ji, L., Tso, G., Zhu, B., Zou, Y., (2018). Forecasting Exchange Rate Value at Risk using Deep Belief Network Ensemble-based Approach, *Elsevier B.V.* **139**, 25-32. DOI: 10.1016/j.procs.2018.10.213
84. Hentschel, L. (1995). All in the family nesting symmetric and asymmetric garch models. *Journal of financial economics*, 39(1), 71-104.
85. Hiransha, M., Gopalakrishnan, E.A., Menon, V.K., & Soman. K.P. (2018). NSE stock market prediction using deep-learning models. *Procedia Computer Science*, 132, 1351-1362.
86. Holzapfel, J. (2024). Classification risk in health insurance: The interaction of genetics, prevention, and insurance. *Available at SSRN 5004530*.
87. Hossain, M. J., & Ismail, M. T. (2022). Performance of a Novel Hybrid Model Through Simulation and Historical Financial Data. *Sains Malaysiana*, 51(7), 2249-2264.
88. Ilić, M. M. (2015). Uticaj primene direktive Evropske Unije" Solventnost II" na sektor osiguranja u Srbiji. *Универзитет у Хуууу*.
89. Irsan, M. Y. T., Priscilla, E., & Siswanto, S. (2022). Comparison of Variance Covariance and Historical Simulation Methods to Calculate Value At Risk on Banking Stock Portfolio. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 19(1), 241-250.
90. Ivanov M. (2004). Theoretical aspects of insurance. *Insurance review*, 7(123), 1-20.

91. Jeong, M. (2018). Residual-Based Garch Bootstrap And Second Order Asymptotic Refinement - Addendum. *Econometric Theory*, 34(3), 704-704.
92. Jin, X. (2010). Large portfolio risk management with dynamic copulas. *Unpublished paper, McGill University*.
93. Jorion, P. (2023). Financial risk manager handbook plus test bank: FRM Part I/Part II.
94. Kar, A. S., Challa, K. K., Bharati, A. K., Singhal, A., & Ajjarapu, V. (2024). Robust VAR Capability Curve of DER with Uncertain Renewable Generation. *arXiv preprint arXiv:2405.12184*.
95. Karamasos, M., & Kim, J. (2000). Alternative Garch in mean models: Application to Korean stock markets. York: Working peper 2000/5.
96. Kingma, D. P., & Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*.
97. Kiptoo, I. K., Kariuki, S. N., & Ocharo, K. N. (2021). Risk management and financial performance of insurance firms in Kenya. *Cogent Business & Management*, 8(1), 1997246.
98. Kobilzhonova, S. F. (2023). The essence of insurance and the mechanism of implementation of property insurance at the present stage. *European Journal of Emerging Technology and Discoveries*, 1(8), 26-34.
99. Koijen, R. S., & Yogo, M. (2022). The fragility of market risk insurance. *The Journal of Finance*, 77(2), 815-862.
100. Kokoris, A., Archontakis, F., & Grose, C. (2020). Market risk assessment: evidence from packaged retail and insurance-based investment products. *The Journal of Risk Finance*, 21(2), 111-126.
101. Kratz, M., Lok, Y. H., & McNeil, A. J. (2018). Multinomial VaR backtests: A simple implicit approach to backtesting expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 88, 393-407.
102. Kristjanpoller, W., Fadic, A., & Minutolo, M. C. (2014). Volatility forecast using hybrid neural network models. *Expert Systems with Applications*, 41(5), 2437-2442.
103. Kuhnhausen, F. (2016). Direktiva o solventnosti II–status quo i koraci napred. *Evropska revija za pravo osiguranja*, 3, 34-58.

104. Kulali, D. I. (2016). Variance–Covariance (Delta Normal) Approach of VaR Models: An Example From Istanbul Stock Exchange. *Research Journal of Finance and Accounting*, 7(3), 65-69.
105. Lahmiri, S. (2017). Modeling and predicting historical volatility in exchange rate markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 471, 387-395.
106. Leković, M. (2022). Evidence for and against the validity of the capital asset Pricing model. *Tehnika*, 77(3), 363-372.
107. Lempinen, J. (2024). Evaluating market risk models in financial risk management: a comparative analysis of value-at-risk and conditional value-at-risk using parallel computation. Working paper.
108. Li, D., Zhang, L., & Li, L. (2023). Forecasting stock volatility with economic policy uncertainty: A smooth transition GARCH-MIDAS model. *International Review of Financial Analysis*, 88, 102708.
109. Lindley, D.V. (2014). Understanding uncertainty. New York: Wiley
110. Liu, W., Semeyutin, A., Lau, C. K. M., & Gozgor, G. (2020). Forecasting Value-at-Risk of Cryptocurrencies with RiskMetrics type models. *Research in International Business and Finance*, 54, 101259.
111. Locarek-Junge, H., & Prinzler, R. (1998). Estimating value-at-risk using neural networks. In *Informationssysteme in der finanzwirtschaft* (pp. 385-397). Springer Berlin Heidelberg.
112. Louzis, D. P., Xanthopoulos-Sisinis, S., & Refenes, A. P. (2014). Realized volatility models and alternative Value-at-Risk prediction strategies. *Economic Modelling*, 40, 101-116.
113. Ma, X., Yang, R., Zou, D., & Liu, R. (2020). Measuring extreme risk of sustainable financial system using GJR-GARCH model trading data-based. *International Journal of Information Management*, 50, 526-537.
114. Malecka, M. (2014). “Duration-Based Approach to VaR Independence Backtesting”, *Statistics in Transition*, 15 (4); 627–636.
115. Malikov, T., & Shennaev, H. (2003). Sugurta wa uning afzalligi nimada? Zhamiyat va boshkaruv, 3, 37-38.
116. Mandelbrot, B., (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 36(4), 394-419.

117. Markovic, V., Radivojevic, N., Ivanovic T., Radisic, S., & Novakovic, N., (2023). The quantum harmonic oscillator expected shortfall model. *Estudios de Economia*, 50(2), 233-261.
118. McCullagh, O. (2019). *Evaluating VaR: a qualitative and quantitative impact study*, Doctoral dissertation. Limerick: University of Limerick.
119. Miazhyńska, T., Dorffner, G., & Dockner, E. J. (2003, June). Risk management application of the recurrent mixture density network models. In *International Conference on Artificial Neural Networks* (pp. 589-596). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
120. Mina, J., & Xiao, J. Y. (2001). Return to RiskMetrics: the evolution of a standard. *RiskMetrics Group*, 1, 1-11.
121. Mitnik, S. (2014). VaR-implied tail-correlation matrices. *Economics Letters*, 122(1), 69-73.
122. Mostafa, F., Dillon, T., & Chang, E. (2017). *Computational intelligence applications to option pricing, volatility forecasting and value at risk* (Vol. 697). Berlin: Springer.
123. Mostafa, F., Saha, P., Islam, M. R., & Nguyen, N. (2021). GJR-GARCH volatility modeling under NIG and ANN for predicting top cryptocurrencies. *Journal of Risk and Financial Management*, 14(9), 421.
124. Musah, A. A., Du, J., Ud din Khan, H. S., & Abdul-Rasheed Akeji, A. A. (2018). The Asymptotic Decision Scenarios of an Emerging Stock Exchange Market: Extreme Value Theory and Artificial Neural Network. *Risks*, 6(4), 132.
125. Németh, L., & Zempléni, A. (2020). Regression Estimator for the Tail Index. *Journal of Statistic Theory Practice*, 14, 48.
126. Niu, H., & Liu, T. (2024). Forecasting the volatility of European Union allowance futures with macroeconomic variables using the GJR-GARCH-MIDAS model. *Empirical Economics*, 1-22.
127. Njegomir, V. (2011). Alternative risk transfer mechanisms application under Solvency II. *Supervision and control of insurance companies' operations*, 107-130.
128. Noori, N. A., & Mohammad, A. A. (2021). Dynamical approach in studying GJR-GARCH (Q, P) models with application. *Tikrit Journal of Pure Science*, 26(2), 145-156.
129. Nti, I.K., Adekoya, A.F., and Weyori, B.A. (2019). A systematic review of fundamental

- and technical analysis of stock market predictions. *Artificial Intelligence Review*, 1-51. DOI: 10.1007/s10462-019-09754-z
130. Nugroho, D. B., Kurniawati, D., Panjaitan, L. P., Kholil, Z., Susanto, B., & Sasongko, L. R. (2019, August). Empirical performance of GARCH, GARCH-M, GJR-GARCH and log-GARCH models for returns volatility. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1307, No. 1, p. 012003). IOP Publishing.
131. Onyeka-Ubaka, J. N., & Anene, U. J. (2020). Some Forecast Asymmetric GARCH Models for Distributions with Heavy Tails. *International Journal of Mathematical Sciences and Optimization: Theory and Applications*, 2020(1), 689-706.
132. Onyeka-Ubaka, J. N., & Anene, U. J. (2020). Some Forecast Asymmetric GARCH Models for Distributions with Heavy Tails. *International Journal of Mathematical Sciences and Optimization: Theory and Applications*, 2020(1), 689-706.
133. Ozaki, T. (1980). Non-linear time series models for non-linear random vibrations. *Journal of Applied Probability*, 17(1), 84-93.
134. Ozaki, T., & Oda, H. (1977). Non-linear time series model identification by Akaike's information criterion. *IFAC Proceedings Volumes*, 10(12), 83-91.
135. Ozbayoglu, A. M., Gudelek, M. U., & Sezer, O. B. (2020). Deep learning for financial applications: A survey. *Applied Soft Computing*, 93, 106384.
136. Pantula, S. G. (1986). Modeling the persistence of conditional variances: a comment. *Econometric Reviews*, 5, 79-97.
137. Poufinas, T., & Tsitsika, P. (2018). An Assessment of the Market Risk Solvency Capital Requirement Simplifications for Insurance Undertakings. *Theoretical Economics Letters*, 8(11), 2363-2387.
138. Pratiwi, R. G. (2024). Analysis of Value at Risk Measurement Using The Variance-Covariance Method in The Securities Portfolio. *Jurnal Indonesia Sosial Teknologi*, 5(01), 198-206.
139. Pritsker, M., (2001). The Hidden Dangers of Historical Simulation, *Board of Governors of the Federal Reserve System*, 60-61.
140. Radivojevic, N., Cvjetkovic, M., & Stepanov, S. (2016). The new hybrid value at risk approach based on the extreme value theory. *Estudios de economía*, 43(1), 29-52.
141. Radivojevic, N., Sabot-Matic, Z., & Mirjanic, B. (2017). New historical bootstrap value-at-risk model. *Journal of Risk Model Validation*, 11(4), 57-75. DOI:

10.21314/JRMV.2017.173

142. Radivojević, N., Bojić, B., & Lakićević, M. (2019). Measuring expected shortfall under semi-parametric expected shortfall approaches: a case study of selected Southern European/Mediterranean countries. *Journal of Operational Risk*, 14(4), 43-76.
143. Radivojevic, N., Filipovic, L., & Brzakovic, T. (2020). A new Semiparametric Mirrored Historical Simulation Value at Risk model. *Romanian Journal of Economic Forecasting*, 23(1), 5-21.
144. Radivojević, N., Dukić, A., & Dončić, S. M. (2022). Uticaj intelektualnog kapitala na finansijske performanse-studija slučaja finansijskog sektora Srbije. *Bankarstvo*, 51, 100-125.
145. Radivojević, N., Dević, Ž., & Muhović, A. (2016). Bootstrap historical simulation. *Bankarstvo*, 45(3), 36-49.
146. Rae, R. A., Barrett, A., Brooks, D., Chotai, M. A., Pelkiewicz, A. J., & Wang, C. (2018). A review of solvency II: has it met its objectives?. *British Actuarial Journal*, 23(e4), 1-72.
147. Rjiba, M., Tsagris, M., & Mhalla, H. (2015). Bootstrap for Value at Risk Prediction. *International Journal of Empirical Finance*, 4(6), 362-371
148. Rossignolo, F.A., Fethib, M.D., & Shaban, M. (2013). Market crises and Basel capital requirements: Could Basel III have been different? Evidence from Portugal, Ireland, Greece and Spain (PIGS). *Journal of Banking & Finance*, 37,1323-1339.
149. Rossignolo, F.A., Fethib, M.D., & Shaban, M. (2012). Value-at-Risk models and Basel capital charges Evidence from Emerging and Frontier stock markets. *Journal of Financial Stability*, 8, 303-319.
150. Rothschild, M., & J. Stiglitz, (1976). Equilibrium in Competitive Insurance Markets, *Quarterly Journal of Economics*, 90(4), 629-649.
151. Rundo, F., Trenta, F., di Stallo, A. L., & Battiato, S. (2019). Machine learning for quantitative finance applications: A survey. *Applied Sciences*, 9, 5574. 1-20.
152. Sandström, A. (2005). *Solvency: models, assessment and regulation*. Chapman and Hall/CRC.
153. Sandström, A. (2011). *Handbook of solvency for actuaries and risk managers.*, London: Chapman and Hall.

-
154. Sezer, O. B., Gudelek, M. U., & Ozbayoglu, A. M. (2020). Financial time series forecasting with deep learning: A systematic literature review: 2005–2019. *Applied soft computing*, *90*, 106181.
155. Sirignano, J., & R. Cont (2019). Universal features of price formation in financial markets: perspectives from deep learning. *Quantitative Finance*, *19*(9), 1449–1459.
156. Stancic, V., Radivojevic, N., (2021). Investment activity in insurance. Kragujevac: Faculty of Economics, University of Kragujevac.
157. Shah, D., Isah, H., and Zulkernine, F. (2019). Stock market analysis: A review and taxonomy of prediction techniques. *International Journal of Financial Studies* *7*(2), 1-26. DOI:10.3390/ijfs7020026
158. Sezer, O.B., Gudelek, M.U., and Ozbayoglu, A.M. (2020a). Financial time series forecasting with deep learning: A systematic literature review: 2005-2019. *Intelligent Automation and Soft Computing*, *26*(2), 323–334. DOI:10.48550/arXiv.1911.13288
159. Sezer, O. B., Gudelek, M. U., & Ozbayoglu, A. M. (2020b). Financial time series forecasting with deep learning: A systematic literature review: 2005–2019. *Applied soft computing*, *90*, 106181.
160. Sollis, R. (2009). Value at risk: a critical overview. *Journal of Financial Regulation and Compliance*, *17*(4), 398-414.
161. Spring, K. (2021). Backtesting the Expected Shortfall. *Junior Management Science (JUMS)*, *6*(3), 590-636.
162. Stahl, G. (2018). Kommentar zu den 96-121. *Versicherungsaufsichtsgesetz*. Beck.
163. Stojković, L. (2013). Pravni aspekti upravljanja rizikom i sistem internih kontrola kao integralni deo korporativnog upravljanja u društvu za osiguranje. *Evropska revija za pravo osiguranja*, *3*, 46-53.
164. Su, Y. C., Huang, H. C., & Lin, Y. J. (2011). GJR-GARCH model in value-at-risk of financial holdings. *Applied Financial Economics*, *21*(24), 1819-1829.
165. Šoškić, D. B. (2006). *Hartije od vrednosti: upravljanje portfoliom i investicioni fondovi*. Beograd: Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta.
166. Terzic, I., & Milojevic, M. (2016). Risk model backtesting. *Ekonomika, Journal for Economic Theory and Practice and Social Issues*, *62*(1), 151-162.
167. Thanh, L. T., Ngan, N. T., & Nghia, H. T. (2018). Forecasting Value at Risk: Evidence from Emerging Economies in Asia. *Science & Technology Development Journal*:

-
- Economic- Law and Management* journal: *Economic-Law and Management*, 2(1), 77–90.
168. Wald, A., Wolfowitz, J., (1940), "On a Test Whether Two Samples are from the Same Population", *The Annals of Mathematical Statistics*, 11(2), 147–162.
169. Wu, X., Sun, Y., & Liang, Y. (2005). A Quantile-Data Mapping Model for Value-at-Risk Based on BP and Support Vector Regression. *Internet and Network Economics*, 1094-1102. DOI: 10.1007/11600930_110
170. Xu, Y., & Zhu, F. (2022). A new GJR-GARCH model for Z -valued time series. *Journal of Time Series Analysis*, 43(3), 490-500.
171. Zhang, C., Zhang, Y., Cucuringu, M., & Qian, Z. (2022). Volatility forecasting with machine learning and intraday commonality. *arXiv preprint arXiv:2202.08962*.
172. Zhou, Q. (2024). Portfolio Optimization with Robust Covariance and Conditional Value-at-Risk Constraints. *arXiv preprint arXiv:2406.00610*.
173. Zikovic, S., & Randall K. F. (2013). Ranking of VaR and ES models: performance in developed and emerging markets. *Czech Journal of Economics and Finance*, 63(3), 327-359.
174. Zikovic, S. (2010). *Market Risk in Transitions Countries: Value at Risk Approach*. Rijeka: University of Rijeka.
175. Zikovic, S., & Filer, R. K. (2009). Hybrid historical simulation VaR and ES: performance in developed and emerging markets.
176. Zenti, R., & Pallotta, M. (2000). Risk analysis for asset managers: Historical simulation, the bootstrap approach and value at risk calculation. *Available at SSRN 251669*

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Модел процене тржишног ризика осигуравајућих компанија заснован на техници дубоког учења
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
Истраживање се спроводи у оквиру докторске дисертације
1. Опис података
<p>1.1 Врста студије</p> <p>1.2 Врсте података</p> <p>а) квантитативни</p> <p>б) квалитативни</p> <p>1.3. Начин прикупљања података</p> <p>а) анкете, упитници, тестови</p> <p>б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи</p> <p>в) генотипови: навести врсту _____</p> <p>г) административни подаци: статистички подаци</p> <p>д) узорци ткива: навести врсту _____</p> <p>ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____</p> <p>е) текст, литературни извори</p> <p>ж) мапа, навести врсту _____</p> <p>з) остало: описати _____</p> <p>1.3 Формат података, употребљене скале, количина података</p> <p>1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:</p> <p>а) Excel фајл, датотека xlsx.</p> <p>б) SPSS фајл, датотека sav.</p> <p>с) PDF фајл, датотека _____</p> <p>д) Текст фајл, датотека _____</p> <p>е) JPG фајл, датотека _____</p> <p>ф) Остало, датотека JASP. Jasp.tmp</p> <p>1.3.2. Број записа (код квантитативних података)</p>

а) број варијабли: 18

б) број мерења (испитаника, процена, снимка и сл.): 5000 података

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) **не**

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је _____

б) варијабле које се више пута мере односе се на _____

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) **Да**

б) **Не**

Ако је одговор не, образложити

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип _____

б) **корелационо истраживање,**

ц) анализа текста, навести тип _____

д) остало, **генерисани су подаци помоћу развијених модела у дисертацији**

2.1.2 *Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).*

У оквиру истраживања нису коришћени специфични мерни инструменти или стандарди података који су карактеристични за поједине научне дисциплине (нпр. техничке мере у инжењерству или биомедицински стандарди). Уместо тога, за процену тржишног ризика примењен је модел заснован на Value at Risk (VaR) и Expected Shortfall (ES) показатељима, који представљају признате и широко коришћене стандарде у области финансијског ризика. Подаци су били историјски тржишни подаци, а модел је развијен и прилагођен за процену ризика осигуравајућих компанија. На тај начин, VaR и ES су у нашем истраживању имали улогу 'стандардних мера' специфичних за дисциплину финансијског менаџмента

2.2 Квалитет података и стандарди

У истраживању су коришћени историјски тржишни подаци који су прошли проверу квалитета кроз стандардне процедуре чишћења и валидације (уклањање недостајућих вредности, проверу конзистентности и елиминацију екстремних одступања). За процену ризика примењене су признате мере у финансијској дисциплини – Value at Risk (VaR) и Expected Shortfall (ES) – које представљају де факто стандарде у управљању тржишним

ризиком. На тај начин, квалитет података је обезбеђен кроз контролу интегритета и примену међународно прихваћених показатеља ризика.

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да **Не**

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? _____

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да **Не**

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

Подаци су прошли кроз иницијалну проверу конзистентности (да ли недостају вредности, да ли постоје дупликати, да ли су све серије временски усклађене). Уклоњене су недостајуће вредности или замењене методом интерполације, а екстремне вредности су проверене и третиране у складу са финансијском логиком.

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

Упоредени су добијени подаци са референтним изворима (званичним тржишним котацијама) да би се потврдила тачност.

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у репозиторијум докторских дисертација на Универзитету у Новом Саду.

3.1.2. URL адреса <https://www.cris.uns.ac.rs/searchDissertations.jsf>

3.1.3. DOI

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) **Да**

б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____

в) **Не**

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.2. Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен?

Стандард који примењује Репозиторијум Универзитета у Новом Саду.

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

3.3. Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? **Неограничено**

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да **Не**

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да **Не**
3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да **Не**

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности

(https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије?

Да **Не**

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању?

Да **Не**

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- а) Подаци нису у отвореном приступу
- б) Подаци су анонимизирани
- ц) Остало, навести шта

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

а) **јавно доступни**

б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области

ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

Саша Меза, dusicameza@gmail.com

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

Саша Меза, dusicameza@gmail.com

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима

Саша Меза, dusicameza@gmail.com