Зборник радова Факултета техничких наука, Нови Сад

UDK: 621.3.049
DOI: https://doi.org/10.24867/07BE01Zoranovic

СОФТВЕРСКА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА МЕМФРАКТОРА – ГЕНЕРАЛИЗОВАНОГ ЕЛЕКТРИЧНОГ ЕЛЕМЕНТА СА МЕМОРИЈОМ

SOFTWARE IMPLEMENTATION OF MEMFRACTOR – GENERALIZED ELECTRICAL ELEMENT WITH MEMORY

Јована Зорановић, *Факултет техничких наука, Нови Сад*

Област – ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И РАЧУНАРСТВО

Кратак садржај – *У овом раду је описана софтверска имплементација математичког модела мемфракционог елемената. Дат је модел генерализованог елемента електричног кола, који је базиран на уопштеном Омовом закону и описан коришћењем фракционог рачуна. Фрактори, или општије мемфрактори, имплементирани су у MATLAB-у и Simulink-у. Интерполиране карактеристике мемелемената који су између мемкондензатора, мемристора, мемкалема и мемристора другог реда, приказане су као посебни случајеви карактеристика мемфрактора.*

Кључне речи: *мемфрактор, фрактор, фракциони рачун, мемристор, мемкондензатор, мемкалем*

Abstract – *In this paper software implementation of the mathematical model of memfractional element has been developed. The model of generalized electrical circuit element based on generalized Ohm's law is described using fractional calculus. Fractors, or more general memfractors, are implemented in MATLAB and Simulink. The interpolated characteristics of memelements between a memcapacitor, memristor, meminductor and 2nd-order memristor, are shown as particular cases of memfractor's characteristics.*

Keywords: *memfractor, fractor, fractional calculus, memristor, memcapacitor, meminductor*

1. УВОД

Постојање четвртог основног елемента кола – мемристора – је први пут описано 1971. у раду Леона Чуе [1]. Осим мемристора, меморијске особине се могу уочити и код других двокрајних елемената кола. Ти елементи су мемкондензатори, мемкалемови и мемристори другог реда, као и елементи вишег реда, обухваћени термином мемфрактор [2]. За мемфрактор се може рећи да је то сваки елемент кола који испољава следеће две особине: а) поседовање меморије и б) присуство нецелобројних извода или интеграла у својим конститутивним релацијама. Остатак текста овог рада организован је на следећи начин: У другом поглављу дата је математичка основа фракционог рачуна, док су у трећем поглављу дефинисани мемристор, мемкалем и мемкондензатор, као и уопштен Омов закон и мемфрактор. У четвртом поглављу описана је софтверска имплементација фракционог рачуна, која је приказана на примерима различитих мемфрактора. Примена *toolbox*-а и библиотеке која ради са фракционим рачуном у *MATLAB*-у и *Simulink*-у, као и формирање модела мемфрактора описана је у петом поглављу. У претпоследњем и последњем поглављу дат је закључак и списак коришћене литературе.

НАПОМЕНА:
Овај рад је проистекао из мастер рада чији ментор је био др Станиша Даутовић, доцент.

2. ФРАКЦИОНИ РАЧУН – ИСТОРИЈА И ДЕФИНИЦИЈА

Интегрални и диференцијални рачун представљају основне градивне елементе данашње математике и технологије и њихово познавање је неопходно да би се моделовали природни и вештачки системи. Фракциони (нецелобројни) рачун [3] је уопштење традиционалне дефиниције интегралног и диференцијалног рачуна, уз додатно проширење нецелобројним интеграљењем и диференцирањем. Фракциони интеграл дефинисан је уопштењем Кошијевог интеграла за реалне позитивне вредности параметра α, и дат је изразом [4]:

$$D^{-\alpha}f(t) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \text{ за } \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

Најчешће коришћена дефиниција фракционог диференцијала јесте Риман-Лиувил-ова (*Riemann-Liouville*) и дата је изразом [4]

$$D^{\alpha}f(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}\right], & m-1<\alpha<m, \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t), & \alpha = m\,. \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$, са ограничењем $m-1<\alpha\leq m$ [4].

У изразима (1) и (2), $\Gamma(z)$ представља гама функцију (eng. *Gamma function*) односно уопштење факторијела за реалне вредности. Гама функција је дефинисана изразом [4]

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du \text{ за } z \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

док су њене често коришћене особине

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (4)$$

$$\text{када је } z \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(z) = (z-1)!\,. \quad (5)$$

У овом раду коришћена је нумеричка метода за рачунање фракционог интеграла и диференцијала, која се назива Грунвалд-Летникова (*Grunwald-Letnikov*) метода. За $\alpha \in \mathbb{R}^+$, Грунвалд-Летников фракциони интеграл дефинисан је изразом [2]:

$$D^{-\alpha}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} f(t-mh), \tag{6}$$

док је фракциони извод дефинисан са

$$D^{\alpha}f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)} f(t-mh). \tag{7}$$

Када је α=0,

$$D^0 f(t) = f(t). \tag{8}$$

3. МЕМРИСТОР, МЕМКОНДЕНЗАТОР, МЕМКАЛЕМ И МЕМФРАКТОР

У теорији електричних кола, фундаменталне променљиве су струја i и напон u. Овим величинама се придружују и количина наелектрисања q и флукс φ, где се под количином наелектрисања q уобичајено подразумева интеграл струје, $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$, а под флуксом φ интеграл напона, $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$.

Отпорник је дефинисан у $u-i$ равни конститутивном релацијом (кратко КР) облика $f(u,i) = 0$. Аналогно, калем је дефинисан својом КР у $\varphi - i$ равни, $f(\varphi, i) = 0$, и коначно кондензатор је дефинисан својом КР у $q-u$ равни, $f(q,u) = 0$. Поред наведених дефиниционих израза, једина веза која недостаје је зависност количине наелектрисања и флукса. Конститутивна релација облика $f(\varphi, q) = 0$ дефинише тзв. идеални мемристор, где је f нелинеарна функција (за f која је линеарна функција, мемристор дегенерише у отпорник). Алтернативна дефиниција мемристора је да је то било који двокрајни уређај који манифестује уштинуту хистерезисну петљу, која увек пролази кроз координатни почетак у напонско-струјној равни, када се на улаз доведе периодичан непарно симетричан сигнал са нултом једносмерном компонетом, било да је на улазу независтан струјни или напонски генератор [5]. Уколико је улаз струја, мемристор се назива струјом контролисан, а уколико се на улаз доведе напон, мемристор је напоном контролисан.

Временски непроменљив мемристор се такође може дефинисати преко тзв. уопштеног Омовог закона. На овај начин, струјом контролисан мемристор је дефинисан изразом [6]

$$\left.\begin{aligned} u &= M(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, i \\ \frac{dx_k}{dt} &= f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n; i), \;\; k=1,2,\ldots,n \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где је M континуална функција n променљивих стања $x_1, x_2, \ldots, x_n$, названа мемристанса (eng. *memristance*).

Дуално, напоном контролисан мемристор је дефинисан изразом [6]

$$\left.\begin{aligned} i &= W(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u \\ \frac{dx_k}{dt} &= f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n; v), \;\; k=1,2,\ldots,n \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где је W континуална функција n променљивих стања $x_1, x_2, \ldots, x_n$, названа мемдуктанса (eng. *memductance*).

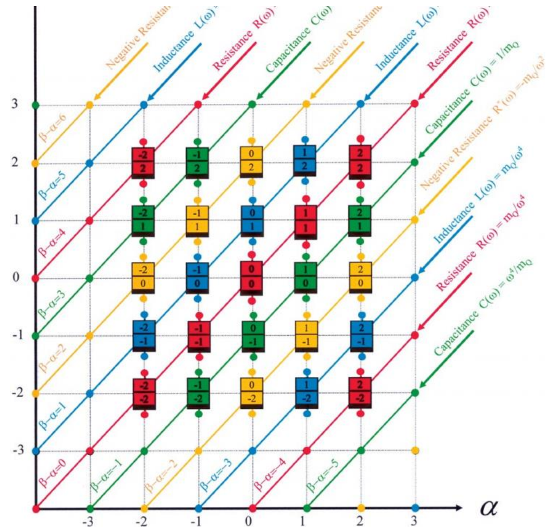
Уопштени Омов закон који збирно обухвата све класе елемената кола дат је изразом [2]

$$u(t) = D^{-1-\alpha}(M^{\alpha,\beta} D^{\beta+2}(q(t))), \tag{11}$$

где је $M^{\alpha,\beta}$ једнако

$$M^{\alpha,\beta} = \begin{cases} R, \;\; \text{за } \alpha = \beta = 0, \text{отпорник}, \\ C^{-1}, \text{ за } \alpha = 0, \beta = -1, \text{ кондензатор}, \\ L, \;\; \text{за } \alpha = -1, \beta = 0, \text{ калем}, \\ R_{\mathrm{M}}, \text{ за } \alpha = \beta = -1, \text{мемристор}, \\ C_M^{-1}, \text{ за } \alpha = -1, \beta = -2, \text{ мемкондензатор}, \\ L_{\mathrm{M}}, \text{ за } \alpha = -2, \beta = -1, \text{ мемкалем}, \\ R_{2\mathrm{M}}, \text{ за } \alpha = \beta = -2, \text{мемр. другог реда}, \\ C_{2M}^{-1}, \text{ за } \alpha = -2, \;\beta = -3, \text{ мемкон. др. реда}, \\ L_{2\mathrm{M}}, \text{за } \alpha = -3, \;\beta = -2, \text{мемкалем др. реда}, \\ R_{3\mathrm{M}}, \text{ за } \alpha = \beta = -3, \text{ мемристор трећег реда}. \end{cases} \tag{12}$$

Као што се са слике 3.1 може видети, у пресеку хоризонталних и вертикалних правих које пролазе кроз целобројне вредности параметара α и β, налазе се елементи који припадају једној од 4 класа електричних елемената (фреквенцијски зависни позитивни и негативни отпорници, калеми и кондензатори). Сви елементи чија је вредност β-α једнака, припадају истој класи. Анализом особина елемената за различите вредности β-α, примећена је периодичност по модулу ± 4 и по параметру α и по β, као што је то приказано на слици 3.1. Због ове особине периодичности, слика 3.1 је у [7] названа периодни систем свих двокрајних елемената кола, по угледу на периодни систем хемијских елемената.



Слика 3.1. *Периодни систем двокрајних елемената кола* (преузето из [7]).

Коришћењем нецелобројног фракционог рачуна могуће је дефинисати елементе кола и за реалне вредности параметара α и β, што проширује периодни систем елемената са важења над дводимензионалном мрежом $\mathbb{Z}^2$ на целу $\mathbb{R}^2$ раван. Без фракционог рачуна, елементи су били дефинисани само у чворовима 2Д целобројне мреже $\mathbb{Z}^2$.

4. СОФТВЕРСКА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА МЕМФРАКТОРА

На следећим примерима је приказан резултат рада софтверске имплементације мемфрактора у *MATLAB*-у. Пример је преузет из [1] и реимплементиран у *MATLAB*-у.

Нека је мемкондензатор задат функцијом

$$C_M(\sigma) = \frac{1}{1+(2+\sigma)^2} \tag{13}$$

где је σ интеграл количине наелектрисања q $(\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} q(\tau)d\tau)$. Надаље, нека је мемристор задат својом мемристансом

$$R_M(q) = 1 + q + q^2, \tag{14}$$

мемкалем функцијом

$$L_M(q) = 1 + e^q, \tag{15}$$

и мемристор другог реда мемристансом другог реда

$$R_{2M}(\sigma) = 1 + \sigma + \sigma^2. \tag{16}$$

Ова четири елемента су сваки за себе повезани са независним струјним генератором чији је сигнал једнак

$$i(t) = \begin{cases} \cos(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Под претпоставком да је почетни услов q_0=$q(0)$=0

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau = \sin(t)\,, \tag{18}$$

тада је

$$\sigma(t) = \int_0^t q(\tau)d\tau = 1 - \cos(t)\,. \tag{19}$$

Заменом параметара α и β и функције $M^{\alpha,\beta}$ у уопштеном Омовом закону датог изразом (11), и то $\alpha \to \alpha_1 - 2,\ \beta \to \alpha_2 - 2$ и $M^{\alpha,\beta} \to F_M^{\alpha_1,\alpha_2}(t)$ добија се

$$u(t) = D^{1-\alpha_1}\left(F_M^{\alpha_1,\alpha_2}(t)D^{\alpha_2}\big(q(t)\big)\right), \tag{20}$$

то јест у нашем примеру

$$u(t) = D^{1-\alpha_1}\left(F_M^{\alpha_1,\alpha_2}(t)D^{\alpha_2}\big(\sin(t)\big)\right), \tag{21}$$

где је

$$F_M^{\alpha_1,\alpha_2} = a_{(\alpha_1,\alpha_2)}C_M^{-1}(t) + b_{(\alpha_1,\alpha_2)}R_M(t) + c_{(\alpha_1,\alpha_2)}L_M(t) + d_{(\alpha_1,\alpha_2)}R_{2M}(t), \tag{22}$$

уз вредност коефицијената

$$a_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \alpha_1(1 - \alpha_2), \tag{23}$$

$$b_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \alpha_1\alpha_2\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right), \tag{24}$$

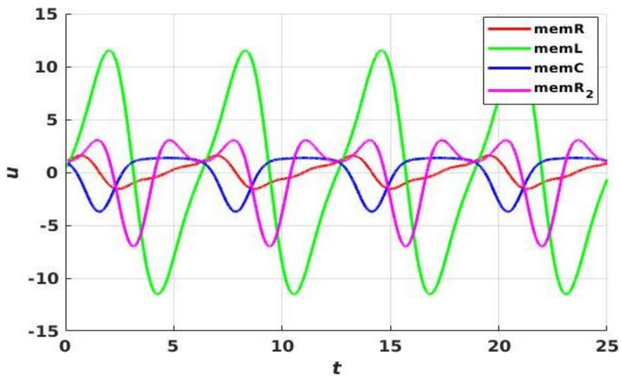
$$c_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \alpha_2(1 - \alpha_1), \tag{25}$$

$$d_{(\alpha_1,\alpha_2)} = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2). \tag{26}$$

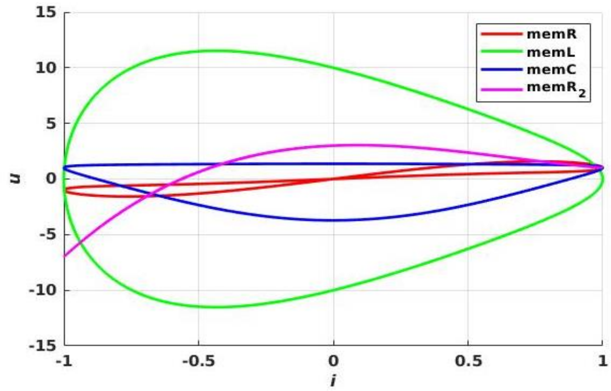
За вредности $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$ реч је о мемристору, за $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 1$ о мемкалему, за $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0$ о мемкондензатору и за $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ о мемристору другог реда. Ови закључци следе на основу једноставних веза између параметара (α_1, α_2) и (α, β), као и упоређивањем слика 3.1. и 4.1.

Слика 4.1: *Шематски приказ односа мемристора, мемкондензатора, мемкалема и мемристора другог реда у α_1-α_2 равни.*

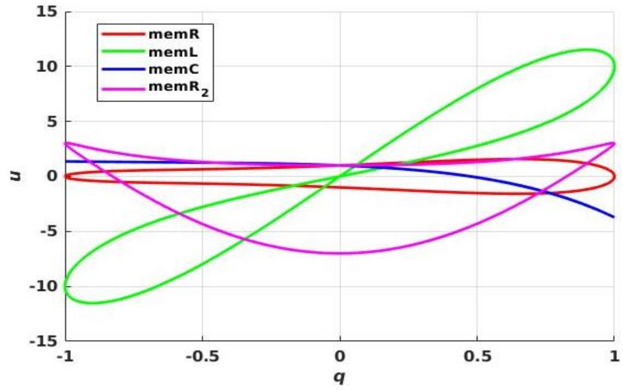
На сликама 4.2, 4.3 и 4.4 су редом приказане функције $u(t)$, $u(i)$ и $u(q)$. На овим графицима крива црвене боје описује мемристор, крива зелене боје мемкалем, крива плаве боје мемкондензатор и крива розе боје мемристор другог реда.



Слика 4.2. *Приказ таласног облика напона.*

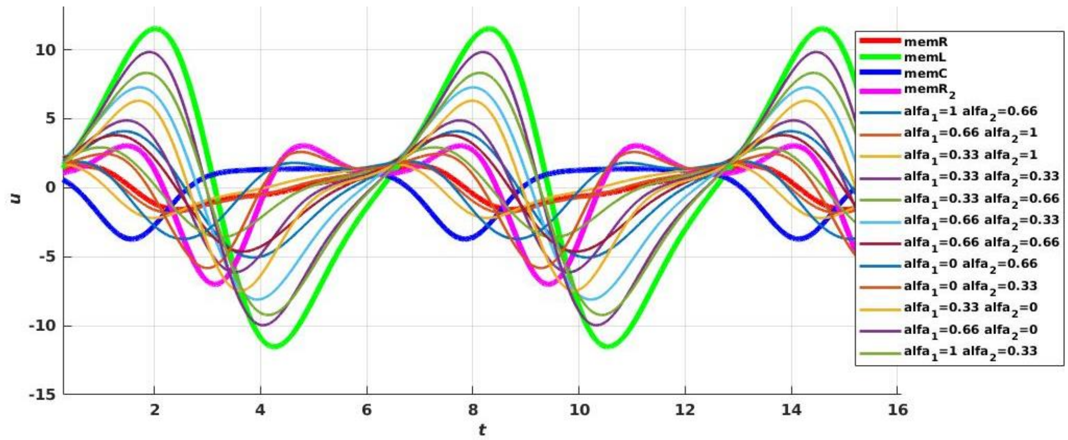


Слика 4.3. *Струјно-напонска к-ка за мемристор, мемкалем, мемконд. и мемристор другог реда.*

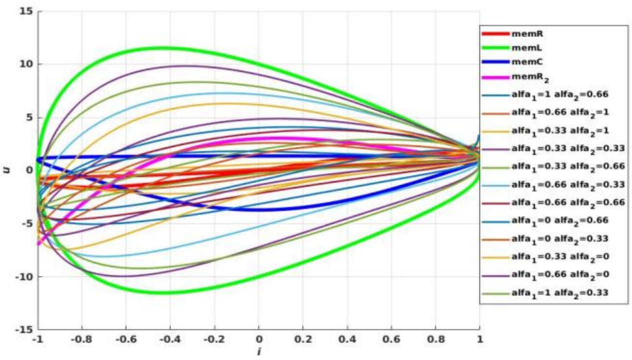


Слика 4.4. *Приказ $u(q)$ за мемристор, мемкалем, мемкондензатор и мемристор другог реда.*

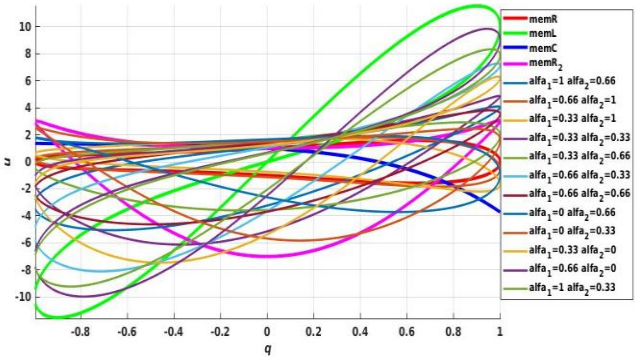
На сликама 4.5, 4.6 и 4.7 су редом приказане функције $u(t)$, $u(i)$ и $u(q)$. На овим графицима су поред мемристора, мемкалема, мемкондензатора и мемристора другог реда, приказане карактеристике елемената који су добијени „хибридизацијом" ова четири основна елемента, у смислу да су карактеристике нових елемената „интерполиране" негде између карактеристика четири елемента са слике 4.1. Код њих су α_1 и α_2 нецелобројне вредности $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ и $0 \leq \alpha_2 \leq 1$. На сликама 4.5, 4.6 и 4.7 су приказане карактеристике мемфрактанси које одговарају свим преосталим комбинацијама два елемента између четири вредности из скупа {0, 0.33, 0.66, 1}.



Слика 4.5. *Приказ u(t) за различите вредности параметара,* (α_1, α_2) $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ *и* $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.



Слика 4.6. *Приказ* $u(i)$ *за* $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ *и* $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.



Слика 4.7. *Приказ* $u(q)$ *за* $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ *и* $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.

5. MATLAB TOOLBOX ЗА ФРАКЦИОНИ РАЧУН

Toolbox који је коришћен у овом раду носи назив *FOMCON* [8]. Као и већина *toolbox*-ова који раде са фракционим рачуном, тако је и код овог случај да су развијени за област аутоматике. У овом раду је дати *toolbox* модификован за потребе области електронике, те је проширен основни сет функција и *Simulink* модел. Поновљен је пример из поглавља 4 и у самом *MATLAB* делу као и у *Simulink*-у.

6. ЗАКЉУЧАК

У овом раду описана је софтверска имплементација мемфрактансних електричних елемената, чије су карактеристике базиране на нецелобројним изводима и интегралима, као и на проширењу скупа основних електричних елемената (отпорник, калем, кондензатор) новим елементима са меморијом (мемристор, мемкондензатор и мемкалем првог и виших целобројних редова). На тај начин је омогућен опис математичког модела и алгоритамска симулација понашања елемената у било којој тачки унутар $\alpha - \beta$ равни (приказане на слици 3.1). Ови елементи до сада нису били имплементирани у *MATLAB*-у и *Simulink*-у, као ни у специјализованим наменским софтверским библиотекама за фракциони рачун, као што је *FOMCON*.

7. ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Chua, “Memristor - The Missing Circuit Element”, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 18, no. 5, 1971.

[2] M.-S. Abdelouahab, R. Lozi and L. Chua, “Memfractance: A Mathematical Paradigm for Circuit Elements with Memory”, *International Journal of Bifurcation and Chaos, World Scientific Publishing*, pp.1430023- 1430023-29, 2014.

[3] I. Podlubny, “Fractional differential equations”, *Academic Press, San Diego*, 1999.

[4] A. Loverro, “Fractional Calculus History, Definitions and Applications for the Engineer”, *Rapport technique, Univeristy of Notre Dame*, IN 46556, U.S.A., 2004.

[5] L.Chua, “Everything You Wish to Know About Memristors but are afraid to ask”, *Radioengineering*, vol. 24, no. 2, 2015.

[6] Shyam Prasad Adhikari, et al, “Three fingerprints of Memristor”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 60, no. 11, 2013.

[7] L. Chua et al, “Nonlinear Circuit Foundations for Nanodevices”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, no. 11, 2003.

[8] A. Tepljakov, E. Petlenkov, and J. Belikov, “Fomcon: a *MATLAB* Toolbox for Fractional- order System Identification and Control”, *International journal of microelectronics and computer science*, vol. 2, no. 2, 2011.

Кратка биографија:

Јована Зорановић рођена је у Новом Саду 1994. године. Факултет техничких наука је уписала 2013. године, а дипломски B.Sc. рад одбранила 2018. године.