Зборник радова Факултет техничких наука, Нови Сад

UDK: 51-7
DOI: https://doi.org/10.24867/29JV03Bikicki

КОНВЕКСНА ОПТИМИЗАЦИЈА И ПРИМЕНЕ

CONVEX OPTIMIZATION AND APPLICATIONS

Исидора Бикицки Хромиш, *Факултет техничких наука, Нови Сад*

Област – МАТЕМАТИКА У ТЕХНИЦИ

Кратак садржај – *У овом раду је обрађена конвексна оптимизација и њене примене. Представљене су основне дефиниције и теореме конвексних скупова и функција. Приказана је историјска подлога за увођење и примену конвексне оптимизације, као и њене примене у финансијама, статистици и фитовању функција.*

Кључне речи: *Конвексни скупови, конвексне функције, нелинеарно програмирање, конвексна оптимизација.*

Abstract – *This paper covers convex optimization and applications. Definitions and theorems related to convex sets and functions are presented. Historical background for the introduction and application of convex optimization in finance, statistics and function fitting is also provided.*

Keywords: *Convex sets, convex functions, nonlinear programming, convex optimization.*

1. УВОД

У овом раду биће речи о конвексној оптимизацији, математичкој области која се бави решавањем специјалне класе проблема оптимизације. Иако се конвексна оптимизација проучава годинама, неколико новијих достигнућа подстакло је ново интересовање јер се испоставило да су проблеми конвексне оптимизације присутнији у пракси него што се раније мислило. Методе конвексне оптимизације примењују се како у разним научним дисциплинама, тако и у индустрији и инжењерству.

Математичка оптимизација (или само оптимизација) или математичко програмирање је област математике која се бави одабиром најбољег елемента из неког скупа допустивих решења узимајући у обзир одређене критеријуме.

Проблеми оптимизације јављају се у свим квантитативним дисциплинама, од рачунарских наука и инжењерства до истраживања процеса и економије. Развој метода за решавање ових практичних проблема представља значајан интерес за употребу и развој бројних математичких алата.

Бројни научници дали су значајан допринос развоју математичке оптимизације. Фермат и Лагранж су пронашли формуле базиране на рачуну за идентификацију оптимума, док су Њутн и Гаус предложили итеративне методе за приближавање оптимуму. Израз „линеарно програмирање“ за одређене оптимизацијске случајеве повезан је са Џорџом Б. Данцигом, иако је већи део теорије представио Леонид Канторович 1939. године. Данциг је објавио Simplex алгоритам 1947. године, а такође су на теоријским аспектима линеарног програмирања радили и Њуман и други истраживачи, као што је теорија дуалности. Програмирање се у овом контексту не односи на рачунарско програмирање, већ долази од појма програма од стране америчке војске за предложене распореде обуке и логистике, што су били проблеми које је Данциг проучавао тада.

НАПОМЕНА:
Овај рад проистекао је из мастер рада чији ментор је био доц. др Срђан Милићевић.

2. О НЕЛИНЕАРНОМ ПРОГРАМИРАЊУ

Операциона истраживања су посебна област која се бави проучавањем сложености система. Постављање математичког проблема који описује тај систем је први корак у решавању реалног проблема. Он се састоји у представљању стварности помоћу прецизно дефинисаних математичких израза. За решавање проблема операционих истраживања користе се технике математичке оптимизације. Сваки оптимизациони проблем има општи циљ и захтеве који морају бити испуњени. Углавном има више могућих опција, а приликом одабира праве опције и циљ и ограничења треба да буду задовољени. Функција циља је функција која описује извршење задатка. Параметри су коефицијенти у функцијама циља и ограничењима. Скуп ограничења подразумева: ограничења типа неједнакости, ограничења типа једнакости, као и опсег оптимизационих промењљивих (алгебарске једначине и неједначине). Допустиво решење је свако решење које задовољава постојећа ограничења.

Уколико један оптимизациони проблем има више допустивих решења (што је могуће), она формирају скуп допустивих решења или скуп могућих решења. Оптимално решење је оно допустиво решење у коме функција циља достиже минимум или максимум. Вредност функције циља која одговара оптималном решењу је оптимална вредност или оптимум.

2.1. Проблем математичке оптимизације

Како је проблем одређивања максимума дате функције f на неком скупу еквивалентан одређивању минимума функције -f на том скупу, без губитка општости, у даљем излагању посматрамо само проблеме минимизације функције. Проблем линеарног програмирања је дат у облику

$$\min f_0(x)$$
$$f_i(x) \leqslant b_i,\ i \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Ако оптимизациони проблем није линеаран, онда је то проблем нелинеарног програмирања. Оптимизациони проблем где су функције циља и ограничења конвексне функције је проблем конвексне оптимизације.

2.2 Проблем нелинеарног програмирања без ограничења

Деф: Посматрајмо функцију $f : D \to R$, где је $D \subseteq R^n$ и тачку $M_0(x_0) \in D$. Ако постоји околина Ω тачке M_0 таква да је

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leqslant 0, \forall x \in \Omega,$$

кажемо да у тачки M_0 фунцкија f има локални максимум.

Ако за сваку тачку $x \in \Omega$ важи

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geqslant 0,$$

кажемо да фунцкија f у M_0 има локални минимум. Локални максимум и локални минимум су локални екстреми функције f .

Ако су неједнакости строге, говоримо о строгим локалним екстремима.

Деф: Нека је фунцкија $f : R^n \to R$ диференцијабилна у тачки $x*$. Ако је $x*$ локални минимум фунцкије f , онда важи $\nabla f(x*) = 0$.

2.3 Проблем нелинеарног програмирања са ограничењима

Ограничења нашег проблема формирају допустив скуп $S \subseteq R^n$. Зато наш проблем можемо да посматрамо у облику:

$$\min f(x), x \in S.$$

Постоје два различита приступа приликом решавања проблема са ограничењима. Први је да се одреде оптималне вредности уз елиминацију променљивих, а други је трансформација проблема тако да се функције ограничења убаце у функцију циља и новопостављени проблем се решава као проблем без ограничења.

Основна идеја методе елиминације је да се изразе променљиве из система једначина који формирају ограничења да би се елиминисало онолико променљивих колико има ограничења. Када фунцкије ограничења нису линеарне, дати метод се у општем случају не може применити.

Код друге методе формира се најпре Лагранжова фунцкија па се преко ње врши оптимизација.

Деф: Функција Лагранжа дефинише се на следећи начин:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k,$$

где су λ_k Лагранжови множитељи.

3. КОНВЕКСНИ СКУПОВИ

3.1 Особине и дефиниције

Деф: Скуп је конвексан ако дуж која спаја било које две тачке из тог скупа остаје у том скупу.

Деф: Скуп C је конвексан ако и само ако било која конвексна комбинација тачака из C такође припада C.

Конвексни омотач скупа C је најмањи конвексни скуп који садржи скуп C.

3.2 Операције које чувају конвексност

Неке основне операције које чувају конвексност су: пресек, збир скупова и перспективна трансформација. За разлику од пресека, унија два конвексна скупа не мора бити конвексан скуп.

4. КОНВЕКСНЕ ФУНКЦИЈЕ

Деф: Нека је $f : S \to R$, где је S непразан конвексан скуп из R^n. Кажемо да је функција f конвексна на S, ако је за

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

за произвољне $x_1, x_2 \in S$ и $\lambda \in [0,1]$. У случају строге неједнакости имамо строго конвексну функцију.

Деф: Епиграф функције $f : R^n \to R$ је скуп тачака

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in R^n \times R : y \geqslant f(x)\}.$$

Лема: Функција f је конвексна на R^n ако и само ако је скуп epi(f) конвексан.

4.1. Критеријуми конвексности

Теорема: Функција f је конвексна на домену $D(f) \subseteq R^n$

ако и само ако је функција g дефинисана са

$$g(t) = f(x + tv), x \in R,$$

конвексна над доменом $D(g) = \{t \in R : x + tv \in D(f)\}$.

Теорема: Нека је фунција f диференцијабилна функција на доменом $D(f) \subseteq R^n$. Функција f је конвексна на D(f) ако и само ако је D(f) конвексан скуп и ако је за све $x,y \in D(f)$ важи

$$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^T(y - x).$$

Теорема: Нека је f два пута диференцијабилна над доменом D(f). Функција f је конвексна на D(f) ако и само ако је D(f) конвексан скуп и ако је његова матрица Хесијана позитивно семидефинитна, тј.

$$H(x) = \nabla^2 f(x) \geqslant 0.$$

4.2 Својства локалних екстрема конвексних функција

Деф: Посматрајмо функцију $f : D \to R$, при чему $D \subseteq R^n$ и тачку $M_0(x_0) \in D$. Ако је $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D$, кажемо да у тачки M_0 функција f има глобални максимум. Ако је $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$, кажемо да функција f у M_0 има глобални минимум. Глобални максимум и глобални минимум су глобални екстреми функције f. Ако су неједнакости строге, говоримо о строгим глобалним екстремима.

Локални екстреми конвексних функција су истовремено и глобални екстреми тих функција.

4.3 Операције које очувају конвексност функција

Наводимо неке операције које могу представљати корисне алате за испитивање конвексности сложенијих функција користећи одговарајуће операције: ненегативна пондерисана сума, композиција са афиним пресликавањем, композиција са монотоном конвексношћу, максимум по тачкама, минимум преко конвексног скупа.

5. КОНВЕКСНА ОПТИМИЗАЦИЈА

Проблем конвексне оптимизације дат је у следећем облику

$$\min f_0(x)$$

$$f_i(x) \leqslant b_i,\ i \in \{1, 2, ..., m\}$$
$$h_j(x) = 0,\ j \in \{1, 2, ..., p\},$$
где су функције f_i: $R^n \rightarrow R$ конвексне на R^n, тј. задовољавају услов
$$f_i(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f_i(x) + \beta f_i(y),$$
за свако x, y ∈ R^n и за свако α, β ∈ R, где је $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, а h_j афина пресликавања.

5.1 Решење проблема конвексног програмирања

Метода унутрашње тачке је алгоритам који решава проблеме оптимизације тражећи оптималну тачку унутар подручја које задовољава све задате услове. Ова метода користи се за решавање и линеарних и нелинеарних оптимизационих проблема. За разлику од Simplex методе, која прелази преко врхова ограничења, метода унутрашње тачке се креће кроз унутрашњост скупа допустивих решења. Тражимо минимизацију функције циља.

5.2 Проблем конвексне оптимизације у стандардном облику

Један од облика проблема конвексног програмирања јесте:
$$\min f_0(x)$$
$$f_i(x) \leqslant 0,\ i \in \{1, 2, ..., m\}$$
$$a^T{}_j\, x = b_j\ ,\ j \in \{1, 2, ..., p\},$$
где су $f_i : R^n \rightarrow R$ конвексне функције.

5.2.1 Проблем конкавне оптимизације

Ако проблему конвексног програмирања заменимо нотацију и запишемо као
$$\max f_0(x)$$
$$f_i(x) \leqslant 0,\ i \in \{1, 2, ..., m\}$$
$$a^T{}_j x = b_j\ ,\ j \in \{1, 2, ..., p\},$$
добијамо проблем конкавне оптимизације.

5.2.2 Апстрактни облик проблема конвексне оптимизације

Понекад задати проблем није представљен у облику проблема конвексне оптимизације, али се еквивалентним трансформацијама може приказати да то буде. То је апстрактни облик и да бисмо га решили морамо да нађемо адекватан опис скупа.

5.3 Оптимални критеријум за диференцијабилну функцију циља

Теорема: Тачка x је оптимално решење проблема ако и само ако за све y ∈ X важи
$$\nabla f_0(x)^T(y - x) \geqslant 0.$$

5.3.1 Проблеми без ограничења

За проблеме без ограничења (тј. проблеме где важи да је $m = p = 0$), услов из претходне теореме се преводи у познати потребан и довољан услов $\nabla f_0(x) = 0$, где је x оптимална тачка.

5.4 Еквивалентни конвексни проблеми

Опште трансформације које за резултат имају еквивалентне конвексне проблеме: замена променљивих, трансформације функције циља и функције ограничења, помоћне променљиве.

5.4.1 Елиминација једнакосних ограничења

Једнакосна ограничења морају бити линеарна, а она у овом случају могу бити елиминисана проналажењем партикуларног решења.

5.4.2 Увођење једнакосних променљивих

Можемо увести нове променљиве и једнакосна ограничења у проблем конвексне оптимизације.

5.4.3 Помоћне променљиве

Увођење помоћне променљиве за линеарне неједнакости очувава конвексност проблема.

5.4.4 Епиграфски облик конвексног проблема

Епиграфски облик проблема дат је у следећем облику
$$\min t$$
$$f_0(x) - t \leqslant 0$$
$$f_i(x) \leqslant 0,\ i \in \{1, 2, ..., m\}$$
$$a^T{}_j\, x = b_j\ ,\ j \in \{1, 2, ..., p\}.$$

5.5 Квази-конвексна оптимизација

Код проблема квази конвексне оптимизације, неједнакосна ограничења су конвексне функције, а функција циља је квази-конвексна функција.

Можда и најважнија разлика између конвексне и квази-конвексне оптимизације је та што проблем квази- конвексне оптимизације може имати локално оптимално решење које није и (глобално) оптимално решење.

5.6 Проблем линеарне оптимизације

Када су фунцкије циља и функције ограничења афине, проблем се зове линеаран.

5.7 Проблем квадратне оптимизације

Проблем конвексне оптимизацаије се зове проблем квадратне оптимизације када је функција циља конвексна и квадратна, а функције ограничења афине.

6. ПРИМЕНА КОНВЕКСНЕ ОПТИМИЗАЦИЈЕ

Конвексна оптимизација је моћан математички оквир са широким спектром примена у различитим дисциплинама и индустријским областима због својих повољних особина, као што су јединственост глобалног минимума/максимума, ефикасни алгоритми решавања, теоријске гаранције конвергенције и оптималности.

6.1 Примена конвексне оптимизације у финансијама

Проблем конвексне оптимизације се примењује у финансијама, због своје способности да ефикасно решава сложене проблеме расподеле ресурса или оптимизације под неким ограничењима.

6.1.1 Управљање финансијским ризицима

У контексту ризика везаних за насумичне новчане токове, конвексност одговара темељном начелу диверсификације. Оно је основно својство прорачунских ограничења и у класичним линеарним моделима и у реалистичнијим моделима са трошковима трансакција и ограничењима.

6.1.2 Оптимизација портфолиа

Конвексна оптимизација има значајну примену у оптимизацији портфолија због својих својстава и могућности решавања проблема са одређеним ограничењима и циљевима.

6.2 Примена конвексне оптимизације у статистици

Конвексна оптимизација има значајну улогу у теорији процене и закључивања за моделе из фамилије експоненцијалних расподела, у експерименталном дизајну, у основама Њуман-Пирсон леме, итд. У раду је приказана примена на Lasso и Ridge регресију.

Lasso регресија спада у проблеме квадратног програмирања, који се најбоље решавају софтвером. За минимизацију грешке користи се L1 регуларизација.
Циљ Ridge регресије је минимизирати функцију грешке користећи L2 регуларизацију.

6.3 Примена конвексне оптимизације у фитовању функција

Тражимо функцију која ће неке задате тачке интерполирати са што мањом грешком, а једна од метода је фитовање помоћу најмањих квадрата.

7. ЗАКЉУЧАК

Постоје велике предности у препознавању или формулисању практичних проблема као проблема конвексне оптимизације јер се бројни теоријски резултати могу применити на проблеме представљене преко конвексних функција. Најосновнија предност је та што се у том случају проблем може решити веома поуздано и ефикасно коришћењем разних метода које су специфичне за конвексну оптимизацију.

Већина алгоритама је конструисана тако да се тражи локални минимум/максимум функције. Коришћењем најважнијег својства конвексне оптимизације, ако смо пронашли тачку која је локални екстрем, та иста тачка је уједно и глобални екстрем за дати проблем. Стога, може се користити било које добијено локално решење као оптимално, пошто знамо да не постоји друго решење које даје бољу вредност функције циља.

Примена конвексне оптимизације је широка, од машинског учења и операционих истраживања до економије. Од суштинског значаја је то што је она брза и ефикасна. Конвексна оптимизација ће ускоро пронаћи примену и у интеграцијама са новим технологијама попут дубоког учења или квантних рачунара. Због тога је она кључна за савремене технологије и истраживања, а њен даљи напредак ће допринети решавању будућих сложених проблема.

8. ЛИТЕРАТУРА

[1] Boyd S, Vandenberghe L. Convex Optimization, Cambridge University Press, New York, 2004.

[2] Матијевић Ј. Конвексно програмирање и примене - мастер рад, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2020.

[3] Ралевић Н. Оптимизационе методе, Факултет техничких наука, Нови Сад, 2021.

[4] Pennanen T. Convex duality in stochastic programming and mathematical finance, Institute of Mathematics, Aalto University, Aalto, 2018

[5] Pennanen T. Introduction to convex optimization in financial markes, Department of Mathematics, King’s College London, London, 2012.

[6] Simonetto A. Smooth Strongly Convex Regression, IBM Resreach Ireland,
Dublin, 2020.

[7] Стојановић В. Математичко програмирање, Природно-математички факултет, Косовска Митровица, 2012.

Кратка биографија

Исидора Бикицки рођена је у Врбасу 1998. године. Основне академске студије завршила је на Природно-математичком факултету у Новом Саду 2022. године, а све испите предвиђене планом и програмом на смеру Математика у техници на Факултету техничких наука у Новом Саду положила је 2024. године и тиме стекла право на одбрану овог мастер рада.