

**ANALIZA FRAKTALNIH STRUKTURA U OKVIRU PROJEKTA TERMINALA  
AERODROMA U NOVOM SADU****ANALYSIS OF FRACTAL STRUCTURES AS A PART OF AIRPORT TERMINAL  
PROJECT IN NOVI SAD**Dušan Arsić, Dušan Kovačević, Ivana Kovačić; *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad***Oblast – GRAĐEVINARSTVO**

**Kratak sadržaj** – U ovom radu je dat teorijski prikaz fraktalnih struktura, kao i primer praktične primene istih u oblasti građevinarstva. Teorijsko-istraživački deo rada obuhvata analitičku i numeričku analizu fraktalnog simpodijalnog drveta. U analitičkoj analizi određeni su pravci glavnih krutosti fraktalnog drveta kao i njihove vrednosti. Takođe je dobijena i elipsa pomeranja svake tačke simpodijalne strukture kao i formula za položaj centra mase. U numeričkoj analizi određene su modalne frekvencije fraktalnog drveta, uočena je lokalizacija oscilovanja i potom su analizirani odnosi oblika oscilovanja iste strukture i upoređivanje tih odnosa sa ranije iznetom teorijskom pretpostavkom. U drugom delu rada je urađen je projekat terminala aerodroma u Novom Sadu čiji glavni noseći sistem čine fraktalni stubovi. Najpre je urađena uporedna analiza fraktalnih stubova u zavisnosti od ugla grananja a nakon toga i sam projekat konstrukcije. U radu su analiza opterećenja i dimenzionisanje elemenata sprovedeni prema Eurocode-u zadovoljavajući kriterijume nosivosti, upotrebljivosti i stabilnosti.

**Ključne reči:** Fraktali, drvo, frekvencija, krutost, projekat, terminal, Eurocode.

**Abstract** – This paper is concerned with the theory of fractal structures as well as their practical implementation in Civil Engineering. In the theoretical part of the paper, the analytical and numerical analyses of a simpodial fractal tree are shown. First, the directions of main stiffness axes of every point on the simpodial tree are obtained as well as the corresponding stiffness coefficients. The ellipse of displacement of every point on the tree is calculated and the expression for the position of the center of mass is derived. In the numerical analysis, the modal frequencies are determined and the mode localization is detected. Afterwards, the ratios between modal frequencies are compared with the theoretical results. Then, the design project of the airport terminal in Novi Sad whose main load bearing system consists of fractal pillars, is carried out. The comparative analysis of fractal pillars with different branching angles is performed. The whole design is done in accordance with the Eurocode, thus satisfying the criteria of limit state, serviceability and stability.

**Keywords:** Fractals, tree, frequency, stiffness, project, terminal, Eurocode.

**NAPOMENA:**

**Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentori su bili prof. dr Dušan Kovačević i prof. dr Ivana Kovačić.**

**1. UVOD**

Ovaj rad je zamišljen kao korak ka analizi određenih fraktalnih struktura i njihove potencijalne upotrebe u inženjerstvu. Na pitanje šta je fraktal, možda i najbolji odgovor je dao Benoit Mandelbrot u svojoj knjizi „Fraktalna geometrija prirode” [1] u kojoj je fraktal definisao kao „geometrijski lik koji se može razložiti na manje delove tako da je svaki od njih, makar približno, umanjena kopija celine”. Fraktali mogu biti izuzetno korisne strukture, tako fraktalna struktura kod biljaka služi za povećanje njihove izloženosti suncu ili fraktalna struktura vena u ljudskom organizmu služi da se na najefikasniji način krv sprovede do svakog dela tela. Takođe, primena fraktala u građevinarstvu i arhitekturi nije novina. Kao primeri moguće implementacije fraktalnog drveta u građevinarstvu su se izdvojile konstrukcije Štutgartskog aerodroma kao i Palata pravde u Melunu, Francuskoj.

**2. IDEALIZOVANO FRAKTALNO DRVO**

U cilju teorijskog razmatranja ovog problema može se definisati ”idealizovano fraktalno drvo”, tj. struktura koja u sebi sadrži određeni broj  $N$  podstruktura, tj. grananja. Tako je struktura koja odgovara opisu  $N=0$  zapravo samo stablo, dok je  $N=\infty$  savršeno fraktalno drvo u kojem ćemo i nakon beskonačnog uvećanja videti početnu strukturu. Simpodijalno drvo je struktura u kojoj se, u svakoj tački grananja, postojeća grana deli samo na dve simetrične bočne grane koje sa osom postojeće grane grade ugao  $\alpha$ . Analiza se sprovodi za konačnu vrednost  $N$ . Za određenu strukturu  $N=n$  razlikuju se grane različitih vrsta. Tako npr. kada je  $N=2$ , prva grana se naziva stablom, potom će grane nastale iz stabla biti definisane kao grane prve vrste (prvog reda), a grane nastale iz njih grane druge vrste (drugog reda). Na taj način će svaka grana bilo koje strukture biti određena brojem  $N$  i svojim redom  $n$ . Prethodnim istraživanjima [2] je utvrđena zavisnost između dužine i prečnika svake grane (Slika 1.14c). Taj alometrijski zakon glasi:

$$D \sim L^\beta, \quad (1)$$

gde je  $\beta$  koeficijent vitkosti drveta. Osim toga, kod fraktalnog drveta svaka grana višeg reda je nastala grananjem grane nižeg reda. Iz ovog se može zaključiti da je poznat odnos površine poprečnog preseka grane  $(n+1)$ -og reda i grane  $n$ -tog reda. Kada je reč o simpodijalnom drvetu, tada će on biti jedinstven za svako grananje s obzirom na postojanje samo bočnih grana. Taj odnos se

naziva bočni koeficijent grananja i obeležava se sa  $\lambda$ . Na taj način, važi:

$$D_{n+1} = \sqrt{\lambda} D_n. \quad (2)$$

Kombinujući formule (1) i (2) jasno je da su dimenzije grana (dužina i prečnik), određene poznavanjem dimenzija grane nižeg reda kao i koeficijentima vitkosti i bočnog grananja  $\beta$  i  $\lambda$ . Odnosi dimenzija dve uzastopne grane su tada:

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \lambda^{\frac{1}{2\beta}}, \quad \frac{D_{n+1}}{D_n} = \lambda^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

$$\frac{L_n}{L_1} = \lambda^{\frac{n-1}{2\beta}}, \quad \frac{D_n}{D_1} = \lambda^{\frac{n-1}{2}}. \quad (4)$$

Prethodnim istraživanjima je utvrđena zavisnost modalne frekvencije od prečnika grane  $d$  i dužine grane  $l$  [2], a zavisnost modalnih frekvencija dva uzastopna oblika oscilovanja je:

$$\frac{f_{II}}{f_I} = \lambda^{\frac{\beta-2}{2\beta}}, \quad (5)$$

a odnos frekvencije grupe  $n$  prema prvoj je dat relacijom:

$$\frac{f_n}{f_1} = \lambda^{\frac{(n-1)(\beta-2)}{2\beta}}. \quad (6)$$

Može se zaključiti da se kod idealnog fraktalnog drveta sve frekvencije mogu izvesti iz prve pod uslovom da je poznat koeficijent vitkosti drveta  $\beta$  i koeficijent bočnog grananja  $\lambda$ . Poređenje ovog aproksimativnog analitičkog rezultata sa numeričkim rezultatima je dato u Poglavlju 4.

### 3. ANALITIČKI MODEL

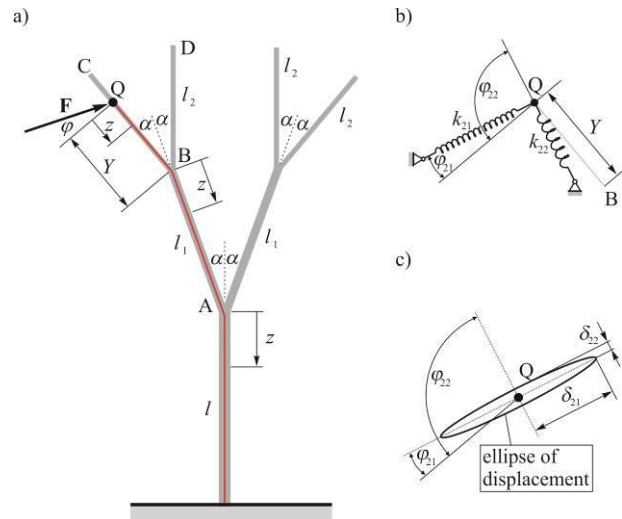
Predmet analitičke analize je simpodijalno drvo strukture  $N=2$ . Kao što se može uočiti na Slici 2a struktura se sastoji od stabla (OA), grana prve vrste (AB) i grana druge vrste (BC, BD). Grane su modelirane kao štapovi određeni svojom dužinom i prečnikom kružnog poprečnog preseka. Odnosi dimenzija grana različitih vrsta su dati formulama (3) i (4) prethodno definišući koeficijente vitkosti i bočnog grananja  $\beta$  i  $\lambda$  koji su detaljno objašnjeni u poglavlju 4.

Cilj ove analize jeste da se odrede pomeranja tačaka pomenute strukture kada na njih dejstvuje koncentrisana sila  $F$  koja sa normalom na granu zaklapa ugao  $\varphi$  u zavisnosti od položaja posmatrane tačke, geometrijskih i materijalnih karakteristika grana  $I$  i  $E$ , ugla grananja  $\alpha$ , kao i ugla  $\varphi$ .

Takođe, za svaku tačku na grani je zbog njenog pomeranja u ravni pretpostavljen ekvivalentni mehanički model koji se sastoji od dve međusobno upravne opruge. Ovom analizom je potrebno odrediti pravce koje te opruge, ili jedna od njih, grade sa normalom na posmatranu granu, kao i krutosti tih opruga (Slika 2b) [3].

Drugim rečima, potrebno je odrediti pri kom uglu  $\varphi$  će doći do maksimalnog, a pri kom do minimalnog pomeranja.

Poznavajući minimalno i maksimalno pomeranje moguće je konstruisati elipsu pomeranja (Slika 2c), tj. skup tačaka u kojima se može naći posmatrana tačka usled sile  $F$  kada  $\varphi$  ima vrednosti  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .



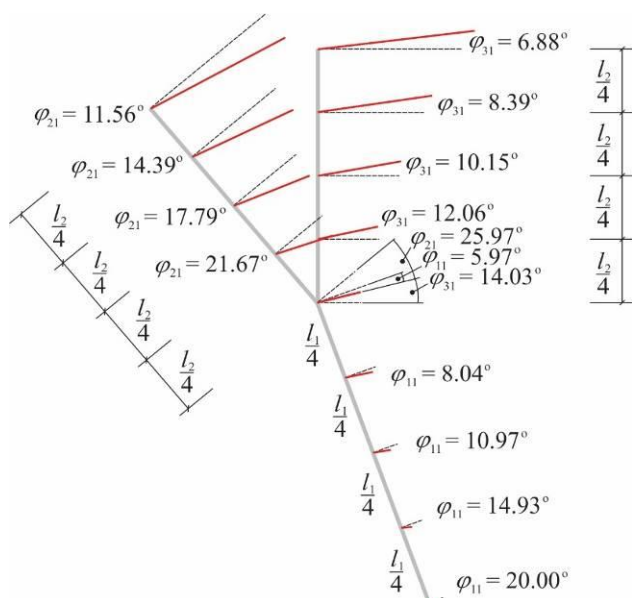
Slika 2. Simpodijalno drvo  $N=2$

Primenom Kastiljanove teoreme dobijeni su uglovi  $\varphi$  koji definišu pravce glavnih krutosti kao i odgovarajuće krutosti za svaku od posmatranih grana, a rezultati su predstavljeni u vidu brojnog primera. Pretpostavljeno je da su svi štapovi konstantnog kružnog poprečnog preseka prečnika  $D$  iz koga se dobija moment inercije poprečnog preseka  $I$ . Prečnik stabla je usvojen jednakim 100mm, dok su prečnici grana viših redova dobijeni preko formule (3) za prethodno usvojene za prethodno usvojene vrednosti koeficijenta vitkosti  $\beta=1.5$  i koeficijenta bočnog grananja  $\lambda=0.5$ . Materijalne karakteristike svih grana strukture date su preko modula elastičnosti  $E$ , čija vrednost je usvojena jednakom 11Gpa. Dužine grana su izračunavate preko formula (3) i (4), za prethodno usvojenu ukupnu visinu drveta jednaku 5m. Tada treća jednačina u sistemu tri jednačine sa tri nepoznate, gde su preostale dve odnosi dužina grane višeg i nižeg reda prema (3) i (4) postaje:

$$l_1 + l_2 \cos \alpha + l_3 = 5. \quad (2)$$

Usvajanjem da je  $\alpha=20^\circ$  i potom rešavanjem pomenutog sistema dobijaju se dužine svih grana strukture:  $l=2105\text{mm}$ ,  $l_1=1670\text{mm}$ ,  $l_2=1326\text{mm}$ .

Analizom Slike 3 se dolazi do nekoliko zaključaka. Prvo, može se dokazati logična činjenica uočljiva kod realnog drveća da minimalna krutost opada penjanjem uz drvo. Takođe, upoređujući vrednosti maksimalnih pomeranja tačaka na granama drugih vrsta, dolazi se do podatka da će maksimalno moguće pomeranje neke tačke unutrašnje grane drugog reda biti veće od maksimalnog pomeranja odgovarajuće tačke na spoljašnjoj grani drugog reda, što se može objasniti time što sila koja deluje na vrhu unutrašnje grane pod uglom  $\varphi_{31}$  u odnosu na normalu unutrašnje grane pravi veći moment u uklještenju od sile na vrhu spoljašnje grane koja sa normalom na spoljašnju granu gradi ugao  $\varphi_{21}$ . Posmatrajući ugao  $\varphi$ , može se zaključiti da su njegove najveće vrednosti najbliže tački grananja, kada grane nižeg reda imaju veći uticaj na pomeranje, dok taj isti ugao opada sa udaljavanjem od tačke grananja, kada grana kojoj pripada ta tačka ima glavni uticaj na ukupno pomeranje. Može se zaključiti da sa udaljenjem od tačke grananja ugao  $\varphi$  se smanjuje i da na grani dovoljne dužine teži nuli.



Slika 2. Simpodijalno drvo  $N=2$

#### 4. NUMERIČKI MODEL

U ovom poglavlju su izloženi rezultati numeričke analize simpodijalnog fraktalnog drveta. Za potrebe numeričkog modeliranja korišten je softver "AxisVM13 release 4b" u kome je modelirana fraktalna simpodijalna struktura. Posmatrane su strukture koje odgovaraju  $N=0$  do  $N=9$  i analizirane su njihove modalne frekvencije. Sve grane fraktalnog drveta su posmatrane kao puni gredni nosači kružnog poprečnog preseka. Koren stabla je tretiran kao potpuno uklještenje.

Sve veze između grana su krute. Vrednost ugla grananja  $\alpha$  je  $20^\circ$  u svim slučajevima [2]. Vrednost koeficijenta bočnog grananja  $\lambda$  je usvojena da bude 0.5, gde je u potpunosti zadovoljena da Vinčijeva pretpostavka da je ukupna površina poprečnog preseka pre i posle grananja ista. Za vrednost koeficijenta vitkosti  $\beta$  je usvojeno 1.5, kako su to mnogi autori preporučili [16]. Za zapreminsku masu drveta je usvojena vrednost od  $805 \text{ kg/m}^3$ , za modul elastičnosti 11 GPa, dok je Poasonov koeficijent usvojen jednakim 0.38. U svim strukturama je debljina stabla jednaka 100mm, dok je ukupna visina svake strukture jednaka 5m.

Rezultat su modalne frekvencije slobodnih neprigušenih oscilacija svake strukture i njihovi odnosi. Posebno je potrebno naglasiti lokalizaciju oscilovanja pri višim oblicima oscilovanja u svim strukturama  $N > 0$ . Naime, posmatrajući Tabele 1 i 2, jasno je vidljiva sličnost između oblika (modova) oscilovanja strukture  $N=1$  i  $N=2$ : u prvom modu stablo i grane se savijaju istosmerno (tj. u analognom diskretnom sistemu u istim fazama), a u trećem suprotnosmerno (tj. u analognom diskretnom sistemu u suprotnim fazama).

Između ova dva oblika oscilovanja se uočava lokalizovani mod, gde grane osciluju, dok stablo miruje. Treba napomenuti da je kod strukture  $N=2$ , uočena lokalizacija gde je moguće da osciluju kako grane prvog i drugog reda, tako i samo grane drugog reda, ali ovaj drugi slučaj u ovom radu nije prikazan.

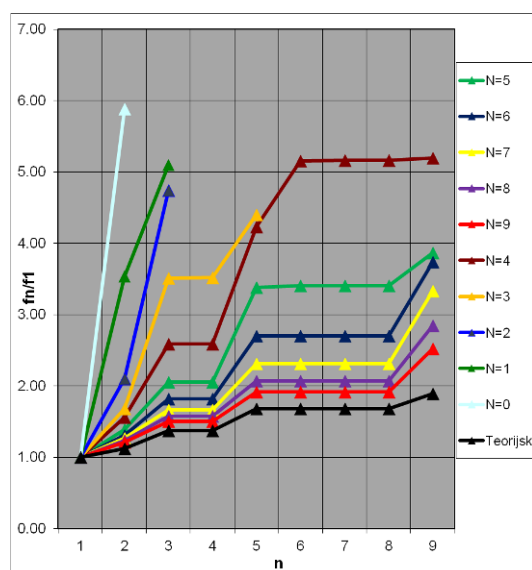
Tabela 1. Modalna analiza strukture  $N=1$

Mod	1	2	3
Oblik oscilovanja			
Frekvencija [Hz]	2.18	7.71	11.11
$f_n/f_1$	1.00	3.54	5.10

Tabela 2. Modalna analiza strukture  $N=2$

Mod	1	2	3
Oblik oscilovanja			
Frekvencija [Hz]	2.15	4.53	10.02
$f_n/f_1$	1.00	2.11	4.74

Na Slici 4 prikazani su odnosi frekvencija svake strukture prema frekvenciji prvog oblika oscilovanja te strukture, kao i teorijska vrednost krive izračunate preko jednačine (6). Uočljivo je da se sa povećanjem  $N$ , kriva približava teorijskoj vrednosti kada je  $N=\infty$ , što je i očekivano s obzirom da je pomenuta jednačina pretpostavljena za idealno fraktalno drvo, tj. za slučaj kada se uklještenje iz korena pomeri u neku tačku grananja, pretpostavlja se da postoji takođe beskonačan broj grana viših od tog uklještenja



Slika 4 Odnosi modalnih frekvencija za  $N=0$  do  $N=9$  dobijeni numerički i poređenje sa aproksimativnim teorijskim vrednostima



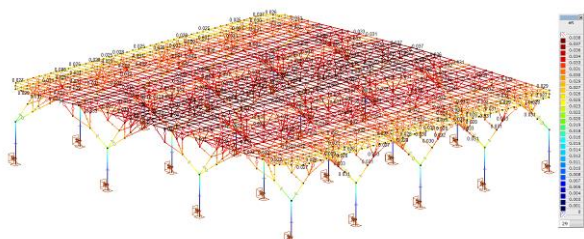
## 5. ANALIZA FRAKTALNOG STUBA U KONSTRUKCIJI

Za potrebe projektovanja terminala aerodroma u Novom Sadu analizirane su tri različite geometrije fraktalnih stubova. Cilj je da se uporede ekonomske, statičke i vizuelne karakteristike fraktalnih stubova u zavisnosti od ugla grananja  $\alpha$ . Naime, prvi slučaj je slučaj u kome grane prve vrste u x pravcu sa pravcem stabla zaklapaju ugao  $\alpha=40^\circ$ , u drugom  $\alpha=57.5^\circ$  a u trećem  $\alpha=70^\circ$ .

Ukupna visina konstrukcije i tačke oslanjanja rožnjača na fraktalni stub u sva tri slučaja su iste što za posledicu ima promenu dužine elemenata fraktalnog stuba. U analizi su upoređeni maksimalni naponi u konstrukciji, njene sopstvene frekvencije, rezultati stabilitetne analize kao i utrošak materijala.

Posmatrajući modalne frekvencije dolazi se do zaključka da struktura sa najmanjim uglom  $\alpha=40^\circ$  ima najveću frekvenciju prvog oblika oscilovanja samim tim i najveću krutost, a ugao  $\alpha=75^\circ$  najmanju frekvenciju, tj krutost. Može se konstatovati kako krutost konstrukcije opada sa porastom ugla  $\alpha$ . Analizom rezultata stabilitetne analize dolazi se do zaključka kako faktor kritičnog opterećenja, poput frekvencije, opada sa porastom ugla  $\alpha$ , odnosno kako se struktura  $\alpha=40^\circ$  pokazuje najboljom po kriterijumu stabilnosti.

Iako je ustanovljeno da utrošak materijala takođe raste sa smanjenjem ugla grananja, povećanje utroška materijala je sporije od porasta nosivosti konstrukcije sa porastom ugla  $\alpha$ . Međutim, iz tehnološko-estetskih razloga, usvaja se rešenje koje se smatra optimalnim uzevši u obzir sve prethodno navedene razloge a to je struktura fraktalnog stuba sa uglom grananja jednakim  $57.5^\circ$  (Slika 5).

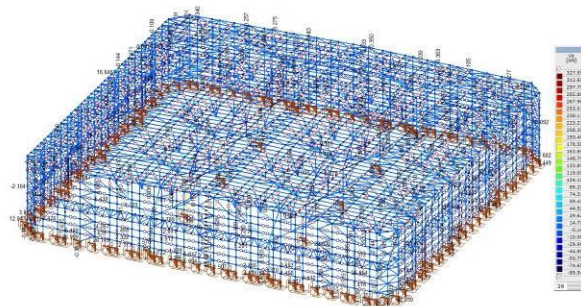


Slika 5. Struktura  $\alpha=57.5^\circ$

## 6. STATIČKI PRORAČUN I DIMENZIONISANJE KONSTRUKCIJE

Nakon definisanja geometrije fraktalnih stubova, u okviru softverskog paketa AxisVM X4 urađeno je modeliranje, proračun i dimezionisanje svih elemenata konstrukcije. Kao rezultat proračuna proistekle su dimenzije svih elemenata u konstrukciji koja zadovoljava kriterijume nosivosti, upotrebljivosti i stabilnosti.

Fraktalni stubovi koji su osnovni predmet analize master rada, u konstrukciji su usvojeni reda  $N=3$ , gde su sve grane šuplje cilindrične cevi. Za stablo je usvojen profil  $\varnothing 813 \times 20$ , za granu prve vrste  $\varnothing 559 \times 20$ , grana druge vrste je  $\varnothing 406.4 \times 16$  i grane treće vrste  $\varnothing 273 \times 16$ , slika 6.



Slika 6. Konstrukcija terminala aerodroma

## 7. ZAKLJUČAK

U master radu je najpre analiziran pojam samih fraktala i njihova primena kako u prirodi tako i u inženjerstvu. Potom je detaljnije prikazana struktura fraktalnog drveta i definisani su svi parametri koji su potrebni kako bi se konstruisala takva struktura. Sama analiza fraktalnog drveta je urađena na dva načina: analitički i numerički. U okviru analitičke analize, posmatrano je fraktalno drvo reda  $N=2$  i određeni su pravci glavnih krutosti kao i njihove vrednosti, kao i elipsa pomeranja usled promenljivog ugla delovanja sile u posmatranoj tački. U numeričkom modelu je analizirana prethodna pretpostavka o odnosima modalnih frekvencija fraktalnog drveta.

Primenom MKE pomenuta pretpostavka se može smatrati dokazanom i uočena je lokalizacija oblika oscilovanja u pojedinim strukturama koja može biti od izuzetnog značaja u daljoj analizi fraktalnih struktura.

U drugom delu rada analizirane su fraktalne strukture u konkretnoj građevinskoj konstrukciji, pre svega njihove karakteristike u zavisnosti od ugla grananja. Zaključeno je da nosivost, krutost i stabilnost konstrukcije raste sa smanjivanjem ugla grananja, dok u isto vreme raste utrošak materijala kao i gabariti fraktalnih stubova,

## 8. LITERATURA

- [1] Mandelbrot, B.B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, San Francisco
- [2] Rodriguez M., de Langre E., Moulia B. (2008) *A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization*. American Journal of Botany 95(12), pp. 1523-1537
- [3] Kovacic I., Radomirovic D., Arsic D., Zukovic M., *Symposium fractal structures: tree-inspired concept for biomimetic engineering design*, European Nonlinear Oscillation Conference ENOC 2017, 25-30 June 2017, Budapest, Hungary

### Kratka biografija:



**Dušan Arsić** - rođen je u Novom Sadu 1993. godine. Diplomski rad iz oblasti građevinarstvo - stabilnost i dinamika konstrukcija 2017. godine na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Master rad iz oblasti MKE Analiza fraktalnih struktura u okviru projekta terminala aerodroma u Novom Sadu odbranio je na istom fakultetu 2019.