Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 517.98
DOI: https://doi.org/10.24867/25JV01Erdeljan

УСЛОВНИ ХЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИ МОДЕЛИ ЗА ПРОЦЕНУ ВОЛАТИЛНОСТИ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

CONDITIONAL HETEROSKEDASTIC MODELS FOR TIME SERIES VOLATILITY ESTIMATION

Јелена Ердељан, Јелена Иветић, *Факултет техничких наука, Нови Сад*

Област – МАТЕМАТИКА У ТЕХНИЦИ

Кратак садржај – *У раду су представљени ARCH и GARCH модели за моделовање и предвиђање волатилности временских серија, као и неке модификације GARCH модела. Приказана је примена ових модела на реалном скупу података временске серије криптовалуте Биткоин.*

Кључне речи: *Временске серије, волатилност, хетероскедастичност, GARCH модел*

Abstract – *The paper presents ARCH and GARCH models for modelling and forecasting the volatility of time series, as well as some of their modifications. The application of these models to a real dataset of the Bitcoin cryptocurrency time series is demonstrated.*

Keywords: *Time Series, volatility, heteroskedasticity, GARCH model*

1. УВОД

Моделирање и предвиђање волатилности привукло је велику пажњу последњих година, углавном мотивисано њеним значајем на финансијским тржиштима. Многи модели за одређивање цене финансијских инструмената користе процене волатилности као једноставну меру ризика [1].

Волатилност представља меру непредвидиве промене неке случајне променљиве у одређеном временском периоду. У математичком смислу, волатилност се представља као стандардна девијација случајне променљиве. Информације о прошлим вредностима случајне променљиве дају најбоље резултате за оцењивање волатилности.

Овај рад представља област моделирања волатилности у финансијским временским серијама,

фокусирајући се на моделе генерализоване ауторегресивне условне хетероскедастичности (скр. GARCH модел). Експлицитним моделирањем хетеро-скедастичности тј. променљиве волатилности, GARCH модели пружају моћан оквир за разумевање и предвиђање образаца волатилности.

НАПОМЕНА:
Овај рад је проистекао из мастер рада чији ментор је била др Јелена Иветић, ванр. проф.

2. УСЛОВНИ ХЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИ МОДЕЛИ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

ARCH и GARCH модели служе за конструисање и предвиђање променљиве волатилности у временским серијама. Најчешће се користе у контексту финансијских тржишта где су флуктуације цена и/или приноса често променљиве током времена. Развијени како би приближили, објаснили и моделирали хетероскедастичност, која се јавља када стандардна девијација променљиве која се предвиђа није константна [2].

2.1. ARCH модел

Први модел који представља оквир за моделирање волатилности је увео Robert F. Engle 1968. године. Он је условну хетероскедастичност варијансе представио као линеарну функцију квадрата ранијих грешака. Овај модел се назива ауторегресивни условни хетероскедастични модел (скр. ARCH модел) [3].

Важна особина ARCH модела је њихова способност да обухвате груписање волатилности у финансијским подацима, тј. тенденцију да велике (мале) промене у приносима буду праћене великим (малим) колебањима случајног смера [1].

У следећој дефиницији се користи, низ независних, идентично распоређених случајних променљивих (скр. i.i.d. - independent and identically distributed), са средњом вредношћу 0 и варијансом једнаком 1.

Дефиниција 2.1 (ARCH(p) модел) [3]: Нека је дат природан број p и нека $t \in [1, \infty)$ ARCH(p) се дефинише:

$$r_t = \mu_t + a_t$$
$$\mu_t = \mu$$
$$a_t = \sigma_t\, \xi_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p a_{t-p}^2$$
$$\xi_t \sim N(0,1)\ i.i.d.$$

У дефинисаном моделу:

- r_t представља принос у тренутку t,
- a_t представља шок (иновацију) у тренутку t,
- μ_t је средња вредност за r_t, која не зависи од времена t,
- σ_t^2 је волатилност за r_t,
- ξ_t је грешка која се прави током линеарне регресије, представљена *i.i.d.* низом,
- α_i, за i = 1,…,p, представља параметар модела

- p представља број параметара ARCH модела.

Како би модел био добро дефинисан и како би условна варијанса била позитивна, уводе се ограничења [3]: $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_i \geq 0$, за $i > 0$.

Из структуре модела се може приметити да велики прошли квадратни шокови a_{t-i}^2 имплицирају велику условну варијансу σ_t^2 за a_t.

Стога, a_t тежи да преузме велику вредност. То значи да у оквиру ARCH модела велики шокови имају тенденцију да буду праћени још једним великим шоком.

Ова карактеристика је слична груписању волатилности уоченим у приносима [3].

2.2. GARCH модел

Иако се сматра да је ARCH модел једноставан, често захтева велики број параметара како би могао на адекватан начин да опише процес волатилности приноса финансијских средстава. Tim Bollerslev je 1986. године у [4] предложио проширење ARCH модела. Ово проширење је познато још и као генерализовани ARCH (GARCH) модел.

Дефиниција 2.2 (GARCH (p,q) модел) [3]: Нека p и q представљају природне бројеве и $t\in[1,\infty)$. GARCH(p,q) je дефинисан са:

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$\mu_t = \mu$$

$$a_t = \sigma_t\, \xi_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\xi_t \sim N(0,1)\ i.i.d.$$

У моделу важе следећа ограничења:

- $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ за $i = 1, \ldots, p$
- $\beta_j \geq 0$ за $j = 1,\ldots,q$
- $\sum_{i=1}^{max(p,q)}(\alpha_i + \beta_i) < 1$.

Овде се подразумева да је $\alpha_i = 0$ за $i > p$ и $\beta_j = 0$ за $j > q$. Последње ограничење за $\alpha_i + \beta_i$ имплицира да је безусловна варијанса од a_t коначна, док се њена условна варијанса σ_t^2 развија током времена. Уколико се постави да је $q = 0$, Дефиниција 2.2 се своди на ARCH(p) модел.

Из Дефиниције 2.2 се може видети да се условна волатилност описује преко грешака из прошлости, што се користи и код ARCH модела, али и преко прошлих варијанси. Овај додатак представља генерализацију.

Основна идеја GARCH модела јесте да условна варијанса σ_t^2 има ауторегресиону структуру и да је позитивно корелисана са прошлим вредностима. ARCH модел тражи велики број параметра, док је код GARCH модела често довољно да је $p = 1$ и $q = 1$, односно често је довољан GARCH(1,1) да би се описао велики број финансијских временских серија на тачан начин.

3. МОДИФИКАЦИЈЕ GARCH МОДЕЛА

Иако се основни облика GARCH модел сматра погодним за описивање финансијских временских серија, поседује извесне недостатке. Зато је током времена предложен значајан број проширења и различитих варијанти основног модела, у циљу отклањања уочених проблема. На пример, основни GARCH модели не могу узети у обзир ефекат полуге [5], који означава појаву да негативне промене у вредностима променљиве имају већи утицај на волатилност у односу на позитивне промене исте врсте.

Поједине модификације GARCH модела, које су коришћене у практичном примеру, ће бити истакнуте у наставку.

3.1 GARCH-M модел

GARCH-M модел, где „M" означава GARCH у средњој вредности (енгл. GARCH in mean) [5], се користи за анализу временских серија финансијских података где се волатилност променљиве проучава у контексту њених ефеката на средњу вредност. У овом моделу GARCH компонента се комбинује са средњом вредношћу променљиве како би се моделовала волатилност и истовремено укључила и ефекте на средњу вредност.

Дефиниција 3.1 (GARCH-M(1,1) модел) [3]: Нека су дате константе μ и c. GARCH-M(1,1) се дефинише са:

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \xi_t$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}{}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}{}^2$$

где наведени параметри имају исто значење као у дефиницијама 2.1 и 2.2.

Ако је c позитивно и статистички значајно, онда повећани ризик, дат повећањем условне варијансе, доводи до пораста средње вредности приноса. Тако се c може назвати параметар премије ризика [3]. Такође, позитивно c указује на то да је принос позитивно повезан са његовом претходном волатилношћу [5].

3.2. Експоненцијални GARCH модел

Експоненцијални GARCH (EGARCH) модел је уведен да би омогућио асиметричне ефекте између позитивних и негативних приноса [3]. Он обухвата асиметричне одговоре временске променљиве варијансе на шокове и истовремено осигурава да је варијанса увек позитивна [6]. Nelson је увео нову функцију дефинисану на следећи начин [3]:

$$g(\xi_t) = \theta\xi_t + \gamma\, [|\xi_t| - E(|\xi_t|)]$$

где:

- θ и γ представљају реалне константе,
- $\xi_t = a_t/\sigma_t$,
- ξ_t и $|\ \xi_t\ | - E(|\xi_t|)$ представљају i.i.d. низове са средњом вредношћу 0 и непрекидном расподелом.

Такође, битно је напоменути да γ представља параметар асиметричног одговора. Негативни шок повећава будућу волатилност, док позитиван шок олакшава ефекат на будућу волатилност.

Ово је у супротности са стандардним GARCH моделом где шокови исте магнитуде, било позитивни или негативни, имају исти ефекат на будућу волатилност.

У макроекономској анализи, на финансијским тржиштима, негативни шок обично имплицира лоше вести, што доводи до неизвесније будућности [6].

Дефиниција 3.2 (EGARCH(p, q) модел) [3]: Нека је α_0 константна и оператор B представља оператор померања уназад (или заостајања) такав да важи:

- $Bg(\xi_t) = g(\xi_{t-1})$
- $1 + \beta_1 B + \cdots + \beta_s B^s$ и $1 - \alpha_1 B - \cdots - \alpha_m B^m$ су полиноми са нулама изван јединичног круга и немају заједничких фактора.

Тада се EGARCH(p, q) модел дефинише са:

$$a_t = \sigma_t \xi_t$$

$$ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1+\beta_1 B+\cdots+\beta_q B^q}{1-\alpha_1 B-\cdots-\alpha_p B^p} g(\xi t - 1).$$

Како $\ln(\sigma_t^2)$ може бити негативан нема потребе да се параметри ограничавају да би десна страна претходне једначине остала ненегативна као што је случај код основног GARCH модела [7].

4. МОДЕЛОВАЊЕ ВОЛАТИЛНОСТИ КРИПТОВАЛУТЕ БИТКОИН ПРИМЕНОМ GARCH МОДЕЛА

У овом делу рада је приказана практична примена GARCH модела, као и њихова конструкција на реалном скупу података како би се боље разумела динамика волатилности. GARCH модели ће бити примењени на временску серију приноса криптовалуте Биткоин. У периоду од 29.06.2022. до 29.06.2023 (366 дана трговања). Израчунавања ће бити реализована у NumXL пакету уз помоћ уграђених функција.

Први корак у анализи је провера да ли се GARCH модели могу применити на посматрану временску серију, тј. да ли она има неконстанту волатилност. Примењује се дескриптивна статистика и тест на ARCH ефекте. Како је тест за ARCH ефекте статистички значајан на нивоу значајности од 0.05, даље се наставља са формирањем GARCH модела и одабиром најбољег за прогнозирање волатилности временске серије приноса криптовалуте Биткоин. Метода логаритам максималне веродостојности (скр. LLF) [8] бира најбољи модел на основу максималне вредности, док је према информационом критеријуму (скр. AIC) [9] најбољи модел онај који има најмању вредност.

На посматрану временску серију приноса Биткоина је примењено укупно 12 модела: основни GARCH, GARCH-M и EGARCH, сваки са по четири комбинације параметара (p,q = 1,2). Они су приказани у Табели 4.1., као и добијене вредности за LLF и AIC. Из Табеле 4.1. се може закључити да је и према LLF методи и према AIC критеријуму најбољи модел за моделовање и предвиђање посматране серије приноса EGARCH(2,1) модел.

За сваки од конструисаних модела из Табеле 4.1., израчунате су прво иницијалне вредности параметара које нису оптималне, затим је модел калибрисан. Калибрација GARCH модела у NumXL-у се односи на поступак процене оптималних вредности параметара модела на основу доступних података. Циљ калибрације је прилагођавање GARCH модела подацима како би се што тачније описала и предвидела варијабилност у временској серији [10].

Model	LLF	AIC
GARCH(1,1)	-868.34	1742.67
GARCH(2,2)	-870.69	1751.37
GARCH(1,2)	-870.69	1749.37
GARCH(2,1)	-870.69	1749.37
EGARCH(1,1)	-867.75	1745.5
EGARCH(2,2)	-859.66	1735.32
EGARCH(1,2)	-867.11	1746.21
EGARCH(2,1)	-859.6	1733.2
GARCH-M(1,1)	-869.56	1747.11
GARCH-M(2,2)	-870.69	1753.37
GARCH-M(1,2)	-870.69	1751.37
GARCH-M(2,1)	-870.69	1751.37
	MAX	MIN
	-859.6	1733.2

Табела 4.1 LLF и AIC вредности за приказане GARCH моделе

У наставку је приказана Табела 4.2, која приказује вредности параметара одабраног EGARCH(2,1) модела после калибрације параметара модела.

На основу оптималних параметара EGARCH(2,1) модела добијених калибрацијом даље се предвиђа волатилност посматране временске серије за 15 корака унапред. Резултати предвиђања су приказани у Табели 4.3.

EGARCH(2,1)		
	Param	Value
	μ	-0.01
	α_0	1.31
	α_1	0.55
	α_2	0.12
	γ_1	0.01
	γ_2	-2.37
	β_1	0.06

Goodness-of-fit		
LLF	AIC	CHECK
-859.60	1733.20	1

	Residuals (standardized) Analysis						
	AVG	STDEV	Skew	Kurtosis	Noise?	Normal?	ARCH?
	0.04	1.00	0.20	3.46	TRUE	FALSE	FALSE
Target	0.00	1.00	0.00	0.00			
SIG?	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE			

Табела 4.2 Вредности параметара EGARCH(2,1) модела после калибрације, вредности параметара квалитета фитовања и анализа стандардизованих резидуала

Step	Mean	STD	TS	UL	LL
1	-0.01	2.74	2.74	5.35	-5.37
2	-0.01	2.44	2.59	4.77	-4.79
3	-0.01	2.65	2.61	5.19	-5.21
4	-0.01	2.67	2.63	5.22	-5.23
5	-0.01	2.67	2.63	5.22	-5.24
6	-0.01	2.67	2.64	5.22	-5.24
7	-0.01	2.67	2.64	5.22	-5.24
8	-0.01	2.67	2.65	5.22	-5.24
9	-0.01	2.67	2.65	5.22	-5.24
10	-0.01	2.67	2.65	5.22	-5.24
11	-0.01	2.67	2.65	5.22	-5.24
12	-0.01	2.67	2.65	5.22	-5.24
13	-0.01	2.67	2.65	5.22	-5.24
14	-0.01	2.67	2.66	5.22	-5.24
15	-0.01	2.67	2.66	5.22	-5.24

Табела 4.3 Вредности добијене приликом прогнозирања волатилности уз помоћ EGARCH(2,1) модела

Из Табеле 4.3 може се видети на пример:

- локална волатилност тј. волатилност десетог дана од краја посматраног периода, се предвиђа да буде 2.67;
- TS (енгл. *Term Structure*), односно функција која дефинише волатилности за различите будуће периоде, предвиђа се да буде 2.65.

На крају овог примера биће израчуната још годишња вредност дугорочне волатилности σ_A тј. волатилност ка којој временска серија тежи током времена. Она се дефинише на следећи начин [11]:

$$\sigma_A = 12 \cdot \sigma_{LR}$$

$$\sigma_{LR} = \lim_{k\to\infty} \sigma_{t+k}$$

Дугорочна волатилност за посматрану временску серију износи 2.67.

5. ЗАКЉУЧАК

Анализа финансијских временских серија представља комплексан процес који захтева примену напредних статистичких метода. Разумевање и моделовање волатилности је неопходно за предвиђање кретања на финансијским тржиштима, као и за процену ризика. У том контексту, GARCH модели су постали централни алат у савременој економетријској анализи.

Еволуцијом GARCH модела током времена дошло је до развоја различитих модификација модела. Ове модификације су корисне при моделирању специфичних карактеристика финансијских временских серија, као што су асиметрија, упорније промене у активности, ефекат полуге и друге.

На конкретном реализованом примеру временске серија приноса изразито волатилне криптовалуте, показано је да се волатилност може моделирати и предвиђати применом GARCH модела. Од 12 конструисаних модела, на основу критеријума LLF и AIC, се у датом случају најбоље показао експоненцијални асиметрични EGARCH(2,1) модел.

6. ЛИТЕРАТУРА

[1] John Knight, Stephen Satchell (2007), *Forcasting Volatility in the Financial Markets*, Third edition, Butterworth – Heinemann

[2] Adam Hayes (20. April 2022), Heteroscedasticity Definition: Simple Meaning and Types Explained, https://www.investopedia.com/terms/h/heteroskedasticity.asp

[3] Ruel S. Tsay (2010), *Analysis of Financial Time Series*, Third edition, John Wiley and Sons

[4] Tim Bollerslev (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, Volume 31, Issue 3, pp. 307-327

[5] Chris Brooks (2008), *Introductory Econometrics for Finance*, Second edition, Cambridge University Press

[6] Peijie Wang (2009), *Financial Econometrics*, Second edition, Routledgem

[7] David Ruppert (2004), *Statistics and Finance*, Springer

[8] Jon Danielsson (2011), *Financial risk forecasting*, John Wiley and Sons

[9] George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel (2008), *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Fourth edition, John Wiley and Sons

[10] Mohamed (3rd November 2016), *Model Calibration*, https://support.numxl.com/hc/en-us/articles/215115906-Model-Calibration

[11] Hojatallah Goudarzi (2011), *Modeling Asymmetric Volatility in the Indian Stock Market*, International Journal of Business and Management, Volume 6, No. 3, pp. 221-231

Кратке биографије:

Јелена Ердељан рођена је у Новом Саду 1998. године. Дипломирала је на Природно – математичком факултету у Новом Саду из области Математика 2020. године. Мастер рад на Факултету техничких наука из области Примењена математика је одбранила 2023. године.

Контакт: jelenae0501@gmail.com

Јелена Иветић запослена је од 2003. на Факултету техничких наука, а од 2021. је у звању ванредног професора. Предаје статистику на разним студијским програмима, а области научног рада су јој примењена статистика и вероватноћа, и логика у рачунарству.

Контакт: jelenaivetic@uns.ac.rs

ЗАХВАЛНИЦА:

Јелена Иветић је финансијски подржана од стране пројекта Департмана за опште дисциплине у техници, ФТН УНС, „Примена информационо комуникационих технологија у настави општих дисциплина“.