Зборник радова Факултета техничких наука, Нови Сад

УДК: 517.98
ДОИ: https://doi.org/10.24867/24JV02Gagic

ПРИМЕНА ИНТЕГРАЛНИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА НА РЕШАВАЊЕ ПАРЦИЈАЛНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

APPLICATION OF INTEGRAL TRANSFORMS FOR SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Звездан Гагић, *Факултет Техничких наука, Нови Сад*

Област – МАТЕМАТИКА У ТЕХНИЦИ

Кратак садржај - *Овај рад описује примену интегралних трансформација на решавање парцијалних диференцијалних једначина конкретно једнодимензионалне таласне једначине, и једначине провођења топлоте.*

Кључне речи: *Парцијалне диференцијалне једначине, Фуријеова трансформација, Лапласова трансформација*

Abstract - *This paper describes application of integral transforms to solving partial differential equations specifically to one-dimensional wave equation and the heat equation.*

Keywords: *Partial differential equations, Fourier transform, Laplace transform*

1. УВОД

Парцијалне диференцијалне једначине могу се решавати применом начина који укључују разне методе. Један од начина може укључивати примену Фуријеове и Лапласове трансформације које се могу примењивати на разне једначине математичке физике. У овом раду, за пример примене Фуријеове и Лапласове трансформације узете су једначине као што су једнодимензионална таласна једначина која је решавана применом Фуријеове трансформације, и једначина провођења топлоте, која је решена применом Лапласове трансформације.

2. ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНА ТАЛАСНА ЈЕДНАЧИНА

Таласна једначина је парцијална диференцијална једначина хиперболичког типа којом се описује ширење таласа. Таласи могу бити различите природе: механички или електромагнетни, али се сви простиру по истом принципу који је описан таласном једначином. Таласна једначина се јавља и користи у различитим областима као што су: акустика, електромагнетизам, оптика и динамика флуида [1].

НАПОМЕНА:
Овај рад проистекао је из мастер рада чији ментор је био др Филип Томић, ван. проф.

2.1. Решавање једнодимензионалне таласне једначине

Најједноставнији пример примене Фуријеове трансформације на решавање таласне једначине је окарактерисан следећом једначином:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad 0 < t. \tag{1}$$

Гранични и почетни услови исказани су на следећи начин, респективно:

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) \to 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad -\infty<x<\infty, \tag{3}$$

при чему су $f,g \in G(\mathbb{R})$. Тражење решења једначине (1) може се започети множењем исте једначине са $e^{-i\omega x}$ и интеграцијом као што следи:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{d^2}{dt^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx \right] = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\omega x} dx. \tag{4}$$

Применом правила парцијалне интеграције, добија се:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\omega x} dx = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\omega u \right) e^{-i\omega x} \Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx. \tag{5}$$

Пошто $u(x,t)$ и $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ теже нули када $|x| \to \infty$, комбиновање једначина (4) и (5) даје почетни проблем у облику

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \omega^2 c^2 U(\omega, t) = 0, \tag{6}$$

при чему је:

$$U(\omega, 0) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \tag{7}$$

$$U'(\omega,0)=G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx, \qquad (8)$$

и $U(\omega,t)$ је Фуријеова трансформација функције $u(x,t)$.

У једначини (8) ознака „прим" означава извод по променљивој t. Решење једначине (6) које задовољава почетне услове (7) и (8) је дато у облику:

$$U(\omega,t)=\frac{1}{2}F(\omega)(e^{i\omega ct}+e^{-i\omega ct})+ \\ +\frac{G(\omega)}{2i\omega c}(e^{i\omega ct}-e^{-i\omega ct}). \qquad (9)$$

Зато је решење $u(x,t)$ дато у облику:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\big[e^{i\omega(x+ct)}+e^{i\omega(x-ct)}\big]d\omega$$

$$+\frac{1}{4\pi c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{i\omega}\big[e^{i\omega(x+ct)}-e^{i\omega(x-ct)}\big]d\omega. \qquad (10)$$

Коначно, ако се примети да важи:

$$f(x\pm ct)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega(x\pm ct)}d\omega, \qquad (11)$$

и

$$\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\left(\int_{x-ct}^{x+ct} e^{i\omega\xi}d\xi\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{i\omega}\big[e^{i\omega(x+ct)}-e^{i\omega(x-ct)}\big]d\omega, \qquad (12)$$

једначина (10) се може написати у облику

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi. \qquad (13)$$

Последњи резултат (13) познат је као Д'Аламберова формула, и даје таласно кретање у хомогеној средини неограничене ширине.

3. ЈЕДНАЧИНА ПРОВОЂЕЊА ТОПЛОТЕ

Након технике раздвајања променљивих, решавање парцијалних диференцијалних једначина Лапласовом трансформацијом је најексплоатисанија техника. Кључан елемент ове технике је проналажење Лапласове трансформације функције $u(x,t)$ по временској променљивој t која представља решење полазне парцијалне диференцијалне једначине. Ако је Лапласова трансформација од $u(x,t)$ задата интегралом облика:

$$U(x,s)=\int_{0}^{\infty} u(x,t)e^{-st}dt, \qquad (14)$$

тада се Лапласова трансформација првог извода $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ добија применом парцијалне интеграције као:

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\int_{0}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-st}dt=sU(x,s)-u(x,0),$$

при чему је уведен почетни услов $u(x,0)$. Ове Лапласове трансформације зависе како од променљиве x тако и од параметра s. Лапласова трансформација извода функције $u(x,t)$, по променљивој x јесте:

$$L\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\frac{d}{dx}\{L[u(x,t)]\}=\frac{dU(x,s)}{dx},$$

али и другог извода:

$$L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{d^2}{dx^2}\{L[u(x,t)]\}=\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}.$$

Лапласовом трансформацијом је парцијална диференцијална једначина трансформисана у обичну диференцијалну једначину са граничним условом. Тако Лапласова трансформација поједностављује полазни проблем. Наравно да би ова техника била успешна Лапласова трансформација мора постојати [2].

3.1. Решавање једначине провођења топлоте

Сада се може разматрати једначина провођења топлоте која је облика:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0<x<\infty, \quad 0<t \qquad (15)$$

са почетним условом:

$$u(x,0)=1, \qquad 0<x<\infty, \qquad (16)$$

и граничним условом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \qquad \lim_{x\to\infty}|u(x,t)|<\infty, \quad 0<t. \qquad (17)$$

Узимајући Лапласову трансформацију од једначине (15) и једначине (17) и замењујући почетни услов, добија се једначина:

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=sU(x,s)-1 \qquad (18)$$

са почетним условима:

$$U'(0,s)=\frac{1}{s} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}|U(x,s)|<\infty. \qquad (19)$$

Остаје да се реши једначина:

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-sU(x,s)=-1, \qquad (20)$$

која представља нехомогену диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима. Она се решава формирајући опште решење које се добија као збир решења одговарајућег хомогеног и одговарајућег партикуларног решења.

Почињемо формирајући одговарајућу хомогену једначину:

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - sU(x,s) = 0, \tag{21}$$

која има карактеристичну једначину облика:

$$\alpha^2 - s = 0, \tag{22}$$

тј.

$$\alpha^2 = s. \tag{23}$$

Решења једначине (23) су облика: $\alpha_1 = \sqrt{s}$ односно $\alpha_2 = -\sqrt{s}$. Зато је хомогено решење једначине (20) дато као:

$$U_h(x,s) = C(s)e^{x\sqrt{s}} + D(s)e^{-x\sqrt{s}}.$$

Партикуларно решење одговарајуће једначине (20) се тражи у облику:

$$U_p(x,s) = E(s),$$

па су $\frac{dU_p}{dx} = 0$ и $\frac{d^2U_p}{dx^2} = 0$, што увршетавањем у једначину (20) даје:

$$-sE(s) = -1,$$

тако да се за $E(s)$ добија:

$$E(s) = \frac{1}{s},$$

па је партикуларно решење једначине (20) облика: $U_p(x,s) = \frac{1}{s}$. Зато је опште решење полазне диференцијалне једначине (18):

$$U(x,s) = U_h(x,s) + U_p(x,s) = C(s)e^{x\sqrt{s}} + D(s)e^{-x\sqrt{s}} + \frac{1}{s}. \tag{24}$$

Ако се потражи извод по променљивој x општег решења (24), добијамо:

$$U'(x,s) = \frac{dU(x,s)}{dx} = C(s)\sqrt{s}e^{x\sqrt{s}} - D(s)\sqrt{s}e^{-x\sqrt{s}},$$

да би се убацивањем почетних услова (19) добиле следеће две једначине:

$$U'(0,s) = C(s)\sqrt{s} - D(s)\sqrt{s} = \big[C(s) - D(s)\big]\sqrt{s} = \frac{1}{s},$$

и

$$C(s) - D(s) = \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}. \tag{25}$$

Уважавајући услов $\lim\limits_{x\to\infty} |U(x,s)| < \infty$, добијамо:

$$|C(s)e^{x\sqrt{s}} + D(s)e^{-x\sqrt{s}}| < \infty, \quad x \to \infty. \tag{26}$$

Да би услов (26) био задовољен, треба да важи $C(s) = 0$, а самим тим из једначине (25) следи да је

$$D(s) = -\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

Напослетку, решење које задовољава једначину (18), узимајући у обзир граничне услове (19) гласи:

$$U(x,s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{3/2}}. \tag{27}$$

Применом таблица инверзних Лапласових трансформација и особина долази се до решења полазне једначине (15) које гласи:

$$u(x,t) = 1 - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + x\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),$$

при чему је $\mathrm{erfc}(x)$ дато са формулом: $\mathrm{erfc(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-z^2}dz$.

4. ЗАКЉУЧАК

Парцијалне диференцијалне једначине, као и разне једначине математичке физике, могле би се решавати применом Фуријеове методе раздвајања променљивих, и других нумеричких метода, као што су: метод мрежа које не укључују примену било које трансформације. Међутим, употреба Лапласове или Фуријеове трансформације у великој мери олакшава решавање ових једначина, јер се парцијална диференцијална једначина која укључује почетне и граничне услове преводи у обичну диференцијалну једначину. Та обична диференцијална једначина се може третирати познатим методама за решавање обичних диференцијалних једначина да би се добило опште решење граничног проблема. Употребом инверзне трансформације добијамо решење полазног проблема.

5. ЛИТЕРАТУРА

[1] `http://sh.wikipedia.org/wiki/Talasnajedna%C4%8Dina` (приступљено у марту 2023.)

[2] Dean G. Duffy, *"Transform methods for Solving Partial Differential Equations"*, Chapman and Hall/CRC, 2004.

Кратка биографија:

Звездан Гагић рођен је у Сплиту у Р. Хрватској 1980. год. Мастер рад на Факултету техничких наука из области примењене математике одбранио је 2023. год.

Контакт: zvezdangagic@gmail.com