Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 517.98
DOI: https://doi.org/10.24867/23JV01Drinic

NEKE KLASE FUNKCIJA AGREGACIJE I NJIHOVA PRIMENA

SOME CLASSES OF AGGREGATION FUNCTIONS AND THEIR APPLICATION

Miljana Drinić, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – MATEMATIKA U TEHNICI V2

Kratak sadržaj – *Tema ovog rada jeste predstavljanje nekih klasa funkcija agregacije i njihova primena u praksi. Data je osnovna definicija matematičke funkcije agregacije kao i prikaz nekih od primena koje funkcije agregacije imaju u praksi.*

Ključne reči: *Funkcije agregacije, segmentacija slike*

Abstract – *The topic of this paper is the presentation of some classes of aggregation functions and their application in practice. The basic definition of the mathematical function of aggregation is given, as well as a presentation of some of the applications that aggregation functions have in real life.*

Keywords: *Aggregation functions, image segmentation*

1. UVOD

Agregacija informacija predstavlja zadatak sistema koji su zasnovani na znanju. Tu spadaju obrada slike, donošenje odluke, koriste se u velikoj meri u statistici, ekonomiji i finansijama kako bi se obezbedile ključne brojke koje predstavljaju ekonomsko zdravlje ili tržišni učinak. Funkcija agregacije se jednostavno odnosi na proračune obavljene na skupu podataka kako bi se dobio jedan broj koji tačno predstavlja osnovne podatke. Sa opšte tačke gledišta, može se reći da agregacija ima za cilj istovremeno korišćenje različitih informacija za donošenje zaključka ili odluke.

2. FUNKCIJA AGREGACIJE

Agregacija je proces kombinovanja nekoliko numeričkih vrednosti u jednu. Preslikavanje ulazne u izlaznu vrednost vrši se uz pomoć funkcija. Funkcije se obeležavaju sa $f(x) = y$ gde je x nezavisna, a y zavisna promenljiva, odnosno vrednost. Najčešći slučaj kod funkcija agregacije jeste da je ulazna vrednost vektor, $x = (x_1, \dots x_n)$.

Kao argumente i vrednosti funkcije agregacije je moguće razmatrati razne skupove brojeva, ali takođe i elemente Bulovih algebra i parcijalno uređenih skupova sa najvećim i najmanjim elementom. U većini primena su od interesa intervali realnih brojeva, te će u ovom radu biti razmatrana tri intervala u tu svrhu.

Neka je u daljem tekstu I jedan od sledećih intervala realnih brojeva ili proširenih realnih brojeva:

i. $I_1 = [0,1]$,
ii. $I_2 = [0, \infty)$,
iii. $I_3 = [0, \infty]$.

Definicija 2.1 [1] (n-arna funkcija agregacije) Za $n \in \mathbb{N}$, n-arna funkcija agregacije je funkcija $A_{[n]}: I^n \to I$ sa sledećim osobinama.

1) Važe granični uslovi
   1a) $A_{[n]}(0, \dots, 0) = 0$,
   1b) i u zavisnosti od posmatranog intervala I je
   - za $I = I_1 = [0,1]$
   $$A_{[n]}(1, \dots, 1) = 1,$$
   - za $I = I_2 = [0, \dots, \infty)$
   $$\lim_{\forall i \in \{1,\dots,n\}, a_i \to \infty} A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) = \infty,$$
   - za $I = I_3 = [0, \infty]$
   $$A_{[n]}(\infty, \dots, \infty) = \infty.$$
2) Funkcija A je monotono neopadajuća u svakoj komponenti, tj. važi implikacija
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \leq b_i$$
$$\Rightarrow A_{[n]}(a_1, \dots, a_n) \leq A_{[n]}(b_1, \dots, b_n) \quad (1)$$
za sve $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in I^n$.

Definicija 2.2 [1] (Proširena funkcija agregacije). Proširena funkcija agregacije je funkcija A: $\bigcup_{n \epsilon N} I^n \to I$ takva da je njena restrikcija $A_{[n]} I^n \to I$ n-arna funkcija agregacije za svako $n \in \mathbb{N}$.

3. PRIMENE FUNKCIJE AGREGACIJE

Fuzija informacija je proces integrisanja informacija iz različitih izvora u cilju opisivanja ponašanja određenog sistema.

Cilj fuzije informacija jeste da podrži određene odluke koje se odnose na dati sistem. Interesovanje za fuziju informacija je rastao tokom godina, izdvojeno je nekoliko osnovnih koncepata cilja fuzije:

(i) Poboljšanje dostupnog znanja o trenutnom stanju u svetu.
(ii) Ažuriranje informacija o predmetima od interesa.
(iii) Beleženje globalne tačke gledišta eksperata.
(iv) Poboljšavanje znanja uz pomoć podataka, vidi [1]

3.1. Ponderisana aritmetička sredina kao funkcija agregacije

Većina metoda u „*multi criteria decision making*“, *MCDM*-u koristi za funkciju agregacije ponderisanu aritmetičku sredinu, stavljajući pondere $\omega_1, \dots, \omega_n$ na kriterijume kako bi se predstavio njihov značaj. Međutim, u mnogim situacijama, ponderisana aritmetička sredina daje kontraintuitivne rezultate.

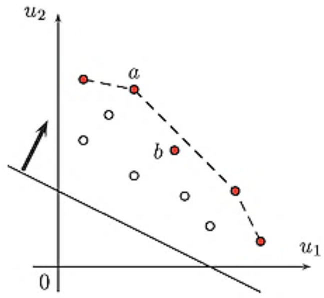
NAPOMENA:
Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio prof. dr Ljubo Nedović.

Razmotrimo tri alternative a, b i c procenjene na osnovu dva atributa, kako sledi:

$$u_1(a_1) = 0.45,\ u_1(b_1) = 0, u_1(c_1) = 1,$$
$$u_2(a_2) = 0.45\ u_2(b_2) = 1, u_2(c_2) = 0.$$

Ako vrednost 1 dodelimo na zadovoljavajućem nivou, vidimo da je alternativa b zadovoljavajuća po drugom kriterijumu, ali ne i po prvom, dok je suprotno za alternativu c. Ako donosilac odluke smatra da su oba kriterijuma važna, ni b ni c nisu prihvatljivi, a a bi se moglo pojaviti kao najbolja opcija jer je uravnotežena na oba kriterijuma, sa vrednošću koja je, iako nije na najvišem nivou, ipak prihvatljiva.

Ovaj primer nije izolovan slučaj, već je dobro poznata pojava u multiobjektivnoj optimizaciji, gde je poznato da ponderisana aritmetička sredina nije u stanju da istraži konkavne delove Pareto granice. Ovo se lako može objasniti na slici 1, sa dva kriterijuma



Slika 1. *Pareto granice* [2]

Objašnjenje slike 1: Crvene tačke označavaju Pareto granicu, a isprekidana linija označava njen konveksni trup. Alternativa b je u konkavnom delu granice, tako da maksimiziranje ponderisane aritmetičke sredine (kao što je predstavljeno pravom linijom koja se kreće nagore) može dati samo jednu od crvenih tačaka na konveksnom trupu kao optimalno rešenje, vidi [2].

3.2 Konstrukcija novih funkcija rastojanja i primena u segmentaciji slike

U ovoj sekciji je prikazan metod konstrukcije novih funkcija rastojanja primenom neke funkcije agregacije na niz datih, inicijalnih funkcija rastojanja, kao i primena tako konstruisane funkcije rastojanja u segmentaciji slike. Pojam funkcije rastojanja je uopštenje pojma metrike, tj. metrike su specijalne vrste funkcija rastojanja. Naime, za proizvoljan neprazan skup X, funkcija $d: X^2 \to [0, \infty)$ je funkcija rastojanja ako

1) ima osobinu refleksivnosti, tj. za svako $x \in X$ je
$$d(x, x) = 0,$$
2) i ima osobinu simetričnosti, tj. za sve $x, y \in X$ je
$$d(x, y) = d(y, x).$$

Jedan od veoma dobrih algoritama za segmentaciju slike (klasterovanje piksela slike) jeste algoritam fazi c-sredina, *Fuzzy c-means algorithm (FCM)* na engleskom, vidi [5]. To je iterativni algoritam za generisanje takozvane pseudo-particije $\mathcal{P} = \{A_1,..., A_c\}$ čiji elementi predstavljaju klastere piksela. Članovi pseudo-particije su fazi skupovi čijom defazifikacijom se dobija segmentirana slika. Pseudo particija, ili fazi c particija $\mathcal{P}$ konačnog skupa piksela $X = \{x_1,..., x_n\}$ je konačna kolekcija $\mathcal{P} = \{A_1,..., A_c\}$ fazi skupova preko X sa sledećim osobinama:

1) $\forall k \epsilon \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^{c} A_i(x_k) = 1,$
2) $\forall k \epsilon \{1, \dots, c\}, 0 < \sum_{i=1}^{n} A_i(x_k) < n.$

Takva konačna pseudo-particija konačnog skupa X može biti predstavljena matricom P = $[u_{ik}]_{c \times n}$ gde $u_{ik} = A_i\ (x_k)$ ukazuje stepen pripadnosti elementa $x_k \in$ X fazi skupu A_i.

Dakle, neka je $X = \{x_1,..., x_n\}$ skup piksela slike. Osim skupa X, algoritam zahteva sledeće input podatke:

1) c -broj klastera, $c \in \mathbb{N}$,
2) m - težinski koeficijent, $m \in [1, \infty)$, koji utiče na brzinu izvršenja algoritma,
3) d – funkcija rastojanja koja služi kao mera razlike dva piksela,
4) $\varepsilon > 0$ – jedan od kriterijuma kraja algoritma kada se u dve uzastopne iteracije dobiju pseudoparticije koje se razlikuju za manje od $\varepsilon > 0$,
5) T – drugi kriterijum kraja algoritma - maksimalan broj iteracija koje će se izvršiti ako željena tačnost od ε nije postigunuta.

FCM algoritam je u radu [3] testiran sa metrikama konstruisanim kao konveksne kombinacije standardne metrike $d(x, y) = |x - y|$ u skupu realnih brojeva. Testirane slike su snimljene u *RGB (red/green/blue)* tehnici. Kao vrednosti parametara za oba testa izabrani su kao

$c \in \{3, 4\}$ (broj klastera),
$m \in \{1{,}5, 2{,}0, 2{,}5, 3{,}0\}$ (težinski koeficijent),
$\varepsilon = 0{,}01$ (prvi kriterijum kraja algoritma), i
T = 40 (maksimalno dozvoljeno ponavljanje - drugi krajnji kriterijum).

Elementi x_i koji su grupisani u klastere su pikseli $(r_i, g_i, b_i) \in [0{,}255]^3$ čije su komponente stepeni od crvene, zelene i plave boja (*red, green ,blue*), tim redosledom. U oba eksperimenta, vrednosti „indeksa učinka“ za neke osnovne metrike i neke metrike dobijene korišćenjem funkcije rastojanja konstruisane primenom operatora agregacije su upoređene.

U svrhu poređenja „indeksa učinka“, sve metrike su normalizovane, tj prostor piksela X = $[0{,}255]^3$ ima vrednosti u $[0{,}1]^3$. Normalizovane metrike d_r, d_g i d_b daju segmentaciju po kriterijumu razlikovanja u crvenoj, zelenoj i plavoj boji tim redosledom:

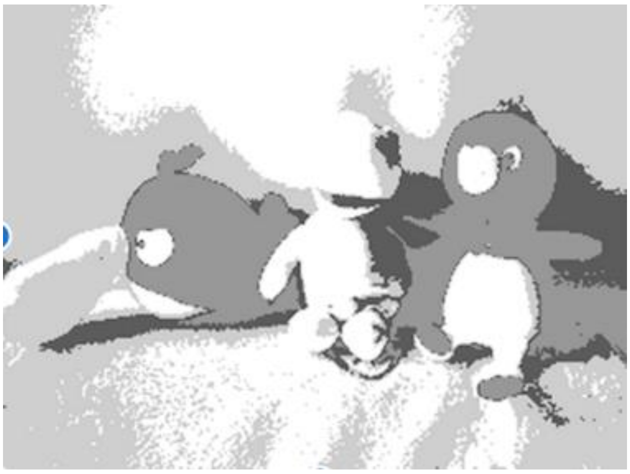
$$d_r((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2)) = \frac{1}{255}|r_1 - r_2|, \tag{2}$$
$$d_g((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2)) = \frac{1}{255}|g_1 - g_2|, \tag{3}$$
$$d_b((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2)) = \frac{1}{255}|b_1 - b_2|. \tag{4}$$

Konveksna kombinacija $d_{\alpha_r,\alpha_g,\alpha_b}$ daje segmentaciju prema zajedničkom kriterijumu sa ponderisanim koeficijentima $\alpha_r, \alpha_g\ i\ \alpha_b$, tj.

$$d_{\alpha_r,\alpha_g,\alpha_b}((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2))$$
$$= \sum_{i \in (r,g,b)} \alpha_i d_i\left((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2)\right).$$

RGB slika u boji veličine 225 × 300 piksela, vidi sliku 2, je segmentirana. Fotografija je uslikana pomoću mobilnog telefona, vidi [3].

Slika 2. *Originalna slika* [3]



Slika 3. *Slika 2 segmentisana korišćenjem metrike* $d_{0.6,0.2,0.2}$,. [3]

Na primer, slika 3 prikazuje segmentiranu originalnu sliku 2, korišćenjem metrike $d_{0.6,0.2,0.2}$,.

3.3. Agregacija niza fazi mera

U ovom pododeljku prikazujemo konstrukciju nove fazi mere primenom proizvoljne funkcije agregacije na niz fazi mera bilo kog tipa i sa vrednostima u ograničenom ili beskonačnom interval [4].

Neka je $A \subseteq P(X)$ proizvoljna σ-algebra na $X \neq \emptyset$. Neka je I ponovo jedan od prethodno razmatranih intervala $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [0, \infty)$ ili $I_3 = [0, \infty]$.

Definicija 3.1. [4] Neka je m_i: A → I, i ∈ ℕ niz fazi mera na σ-algebri A. Neka je A: $\bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ proizvoljna proširena funkcija agregacije. Za $n \in \mathbb{N}$, neka je funkcija $m_{[n]}$: A → I definisana sa:

$$m_{[n]}(F) = A_{[n]}\big(m_1(F), \dots, m_n(F)\big), F \epsilon A$$

Funkcija $m_{[n]}$ je tada fazi mera na A, vidi [4], i u zavisnosti od odgovarajućih svojstava funkcije agregacije $A_{[n]}$, fazi mera $m_{[n]}$ može naslediti neke važne osobine od početnih fazi mera m_i, $i \in \mathbb{N}$.

4. ZAKLJUČAK

Funkcije agregacije primenje su u mnogim tehnološkim dostignućima. Imaju primenu u matematici (funkcionalne jednačine, teorija srednjih vrednosti, teorija integracije), u primenjenoj matematici (verovatnoća, statistika), u kompjuterskim i inženjerskim naukama (veštačka inteligencija, operacija istraživanja, analiza slika), u ekonomiji i finansijama (teorija igara, teorija glasanja, donošenje odluka), zatim u društvenim naukama (psihologija), kao i u mnogim drugim oblastima fizike i prirodnih nauka.

5. LITERATURA

[1] M. Grabisch, J. L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, „*Aggregation functions*", Cambridge University press, 2009.

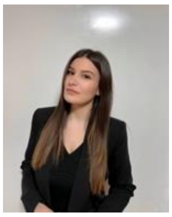
[2] M. Grabisch, *"Set functions, games and capacities in decision making"*, Springer Cham, 2016.

[3] Lj. Nedović, N. M. Ralević, I. Pavkov, "Aggregated distance functions and their application in image processing", *Soft Computing*, Vol. 22, pp. 4723-4739, July 2018.

[4] Lj. Nedović, E. Pap, „Aggregation of sequence of fuzzy measures", *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 17, pp. 39-55, November and December 2020.

[5] J. C. Bezdek, R. Ehrlich, W. Full, „Fcm: the fuzzy c-means clustering algorithm", *Computers & Geosciences*, Vol. 10, pp. 191-203, 1984.

Kratka biografija:



Miljana Drinić rođena je u Novom Sadu 1997. god. Diplomirala na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu iz oblasti Matematika 2020.god.
kontakt: miljanadrinic@gmail.com