

SIMULACIJE RAZLIČITIH MANEVARA AUTOMOBILA MODELIRANOG NEHOLONOMNIM SISTEMOM

SIMULATIONS OF DIFFERENT MANEUVERS OF A CAR MODELED BY A NONHOLONOMIC SYSTEM

Nikola Đorđević, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – MAŠINSTVO

Kratka sadržaj – U ovom radu analizirana je dinamika automobila pri različitim manevrima pomoću Lineikinovog modela. Diferencijalne jednačine kretanja formirane su pomoću Lagranževih jednačina druge vrste za neholonomne sisteme. Različiti slučajevi kretanja automobila dobijeni su odgovarajućim izborom početnih uslova i upravljanja, a rešenja su prikazana grafički.

Ključne reči: dinamika vozila, Lineikin-ov model automobila, neholonomni sistem, simulacija kretanja.

Abstract – This paper analyzes the dynamics of a car with different maneuvers using the Lineikin model. Differential equations of motion are formed using Lagrange equations of the second kind for nonholonomic systems. Different cases of car motion were obtained with appropriate selection of initial conditions and control. The solutions are presented graphically.

Keywords: Dynamics of car, Lineikin car model, nonholonomic system, simulation of movement.

1. UVOD

Za analizu dinamike vozila koriste se različiti matematički modeli, čija kompleksnost zavisi od količine detalja, mehanizama i procesa obuhvaćenih modelom. Najsloženiji modeli bi bili kada bi se posmatralo kretanje vozila u 3D prostoru i kada se ne bi zanemario ni jedan stepen slobode, ali se postavlja pitanje opravdanosti upotrebe toliko složenog modela. Za slučaj kada je u interesu istraživanja samo jedan aspekt kretanja vozila, praktikuje se, radi pojednostavljenja posmatranje vozila u zasebnim ravnima kretanja. Tako postoje modeli za posmatranje longitudinalnog (uzdužnog), lateralnog (bočnog) i vertikalnog kretanja, koji su razmatrani od strane velikog broja autora, videti [1]. Za realno opisivanje kretanja vozila ne smeju se zanemariti mehaničke osobine pneumatika, videti [2], [3].

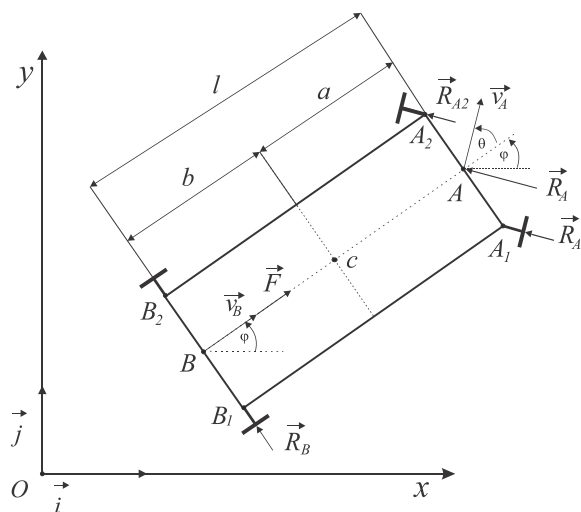
Kada se posmatra lateralno kretanje, veliki uticaj ima bočno povodenje točkova i otpori koji nastaju kao rezultat te pojave. Neki modeli koji uzimaju u obzir ovaj fenomen navedeni su u nastavku rada. Interesantno bi bilo uporediti rezultate dinamičke analize korišćenjem modela koji uzimaju i onih koji ne uzimaju u obzir bočno povodenje. U ovom radu proučeni su različiti slučajevi

kretanja vozila primenom Linei kinovog modela, koji uzima u obzir neholonomne veze usled kotrljanja točka po podlozi bez klizanja, ali ne obuhvata modeliranje deformabilnih svojstava pneumatika, videti [4]. Sa druge strane, razvijeni su razni softverski paketi za analizu dinamike automobila, pomoću kojih je moguće uzeti u obzir deformacije pneumatika i njihov uticaj na samo kretanje, te izvršiti pomenuto poređenje.

2. LINEIKINOV MODEL AUTOMOBILA

Lineikinov model opisuje kretanje automobila u horizontalnoj ravni Oxy referentnog koordinatnog sistema. Za proučavanje kretanja ovakvog modela moraju se usvojiti određene pretpostavke pre nego što se krene sa analizom.

- Obrtanje točkova nije relevantno.
- Nema proklizavanja između točkova i podloge.



Slika 1. Lineikinov model automobila

Na slici 1 dat je prikaz sledećih karakteristika sistema: l međuosovinsko rastojanje; a rastojanje prednje osovine od centra mase; b rastojanje zadnje (pogonske) osovine od centra mase; v_A brzina tačke A koja se nalazi na sredini prednje osovine; v_B brzina tačke B koja se nalazi na sredini zadnje osovine; Sila F predstavlja pogonsku silu vozila; φ ugao zakretanja vozila u odnosu na pozitivni smer x ose; θ ugao zakretanja prednjih točkova u odnosu na uzdužnu osu vozila. Brzine tačaka A i B se mogu napisati na sledeći način:

$$\vec{v}_A = \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j}; \quad \vec{v}_B = \dot{x}_B \vec{i} + \dot{y}_B \vec{j} \quad (1)$$

Koordinate tačaka A i B su date sledećim izrazima:

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Miodrag Žigić, doc.

$$\begin{aligned} x_B &= x_C - b \cos \varphi; & y_B &= y_C - b \sin \varphi \\ x_A &= x_C + a \cos \varphi; & y_A &= y_C + a \sin \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Za opisivanje ovog sistema koristiće se Lagranževe jednačine druge vrste za neholonomne sisteme, čiji je osnovni oblik, videti npr. [5]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^* + \sum_{\beta=1}^l \lambda_{\beta} b_{\beta j} \quad (i=1, \dots, m) \quad (3)$$

Gde su q_j generalisane koordinate

$$q_j \quad (j=1, \dots, m), \quad (4)$$

a λ_{β} ($\beta=1, \dots, l$) Lagranževi množitelji. Generalisane koordinate predstavljaju parametre na osnovu kojih se može u svakom vremenskom trenutku jednoznačno odrediti položaj sistema. Za generalisane koordinate ovog sistema uzete su koordinate centra mase x_C, y_C , ugao zakretanja vozila φ i ugao zakretanja prednjih točkova θ . Jednačine neholonomnih veza, čiji je opšti oblik

$$\sum_{i=1}^n b_{\beta j} \dot{q}_j + b_{\beta} = 0 \quad (\beta=1, 2, \dots, l) \quad (5)$$

i kojih u analiziranom problemu ima dve, $l=2$, nameću ograničenja na brzine tačaka A i B koje predstavljaju sredinu prednje i zadnje osovine respektivno, pri čemu v_A i v_B imaju pravac prednjih odnosno zadnjih točkova, videti sliku 1.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{y}_B}{\dot{x}_B}; \quad \operatorname{tg} (\varphi + \theta) = \frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A} \quad (6)$$

Iz prethodnih jednačina sledi da je broj stepeni slobode:

$$n = m - l = 4 - 2 \quad (7)$$

Lagranžijan L jednak je:

$$\begin{aligned} L = E_k - \Pi &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 \\ \Pi &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Gde je: M masa vozila; J_C aksijalni moment inercije pri zakretanju vozila za ugao φ ; J_A aksijalni moment inercije pri zakretanju upravljačkih točkova. Generalisane sile nepotencijalnih dejstava označene su sa Q_j^* , $j \in \{x_C, y_C, \varphi, \theta\}$, i izvedene su iz izraza za virtualni rad nepotencijalnih sila

$$\begin{aligned} Q_{x_C} &= F \cos \varphi; & Q_{y_C} &= F \sin \varphi \\ Q_{\theta} &= M_A; & Q_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Uvrštavanjem jednačina (5), (8) i (9) u (3) dobija se sistem diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnog sistema u obliku (10) pri čemu su jednačine neholonomnih veza dobijene korišćenjem izraza (2) i (6) i predstavljene izrazom (11).

Sistem diferencijalnih jednačina (10) i (11) predstavljaju jednačine kretanja automobila. U nastavku sledi rešavanje ovog sistema jednačina i simulacije kretanja automobila numeričkim rešavanjem sistema jednačina (10) i (11) za različite slučajeve početnih uslova i upravljanja.

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_C &= F \cos \varphi + \lambda_1 \sin \varphi + \lambda_2 \sin(\varphi + \theta) \\ M \ddot{y}_C &= F \sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \cos(\varphi + \theta) \\ J_C \ddot{\varphi} &= \lambda_1 b - \lambda_2 a \cos \theta \\ J_A \ddot{\theta} &= M_A \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_C \sin \varphi - \dot{y}_C \cos \varphi + b \dot{\varphi} &= 0 \\ \dot{x}_C \sin(\varphi + \theta) - \dot{y}_C \cos(\varphi + \theta) - a \cos \theta \dot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

3. REŠENJE I REZULTATI SIMULACIJA

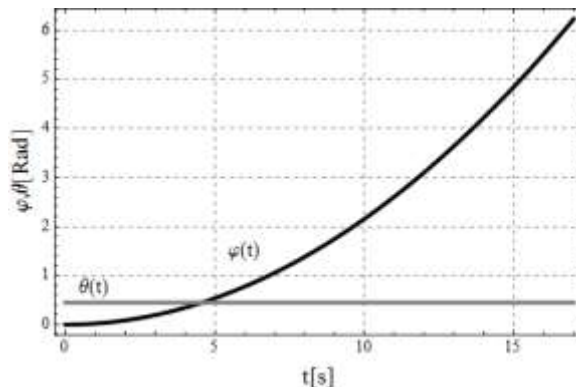
Vozilo za koje se vrši simulacija kretanja ima sledeće parametre.

$$\begin{aligned} M &= 1790 \text{ kg}; & l &= 2.810 \text{ m}; & a &= 1.300 \text{ m}; \\ b &= 1.510 \text{ m}; & J_C &= 2600 \text{ kgm}^2; & J_A &= 1 \text{ kgm}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Za potrebe analize, proučiće se različiti slučajevi, koji će se razlikovati u načinu upravljanja i početnim uslovima. Sistemom se upravlja pomoću pogonske sile F i obrtnog momenta M_A , koji utiče na ugao zakretanja upravljačkih točkova θ . Sistem diferencijalnih jednačina (10) i (11), uz odgovarajuće početne uslove, parametre sistema i upravljanje pri različitim maneuvrima, rešen je numerički.

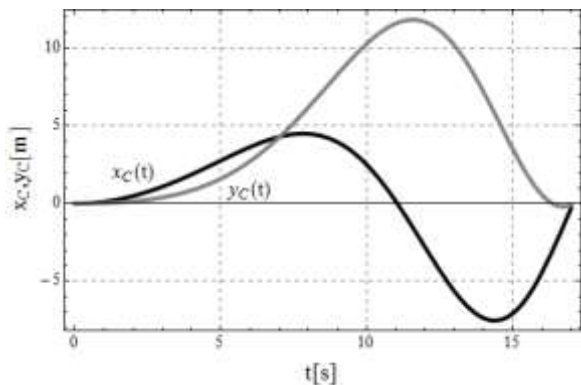
3.1. Prvi manevar, kretanje centra mase po kružnici

U ovom slučaju kretanja, pogonska sila F uzeta je kao konstanta i iznosi $F=500$ N. Kako bi se centar mase C kretao po kružnici, upravljački točkovi moraju biti zakrenuti pod određenim uglom koji se neće menjati tokom vremena, pa sledi da je $q(0)=0.45$ Rad $\approx 26^\circ$. Kako ugao θ treba da ostane konstantan, moment M_A mora biti jednak nuli, što se može videti i iz jednačine (10)₄. U početnom trenutku centar mase C vozila nalazi se u koordinatnom početku referentnog koordinatnog sistema i njegova početna brzina je jednaka nuli. Takođe, prednji deo vozila je usmeren prema pozitivnom delu ose x , ugao i ugaona brzina zakretanja vozila u početnom trenutku su jednaki nuli, kao i ugaona brzina zakretanja točkova. Na slikama 2 i 3 date su vrednosti generalisanih koordinata u funkciji vremena.

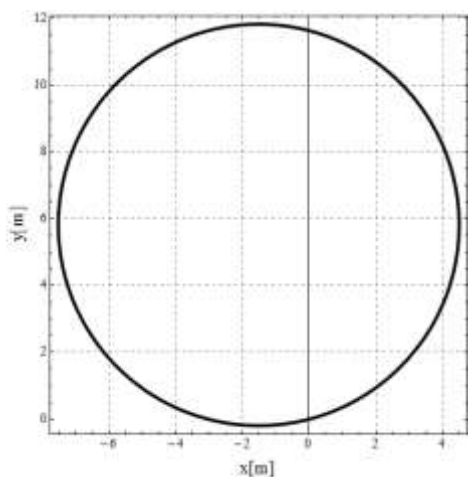


Slika 2. Uglovi φ i θ tokom prvog manevara

Sa slike 2 vidi se da će ugao θ ostati konstantan, dok će ugao φ tokom vremena da raste. Slika 3 prikazuje kretanje centra mase tokom vremena. U trenutku kada se koordinate x_C i y_C nakon početnog trenutka ponovo istovremeno nađu na osi x , centar mase C je obišao ceo krug.

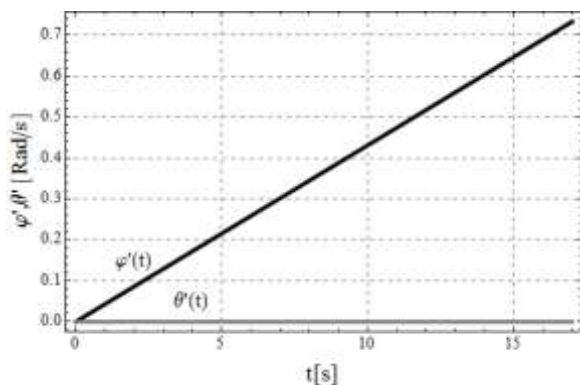


Slika 3. Koordinate centra mase x_C i y_C tokom prvog manevara.

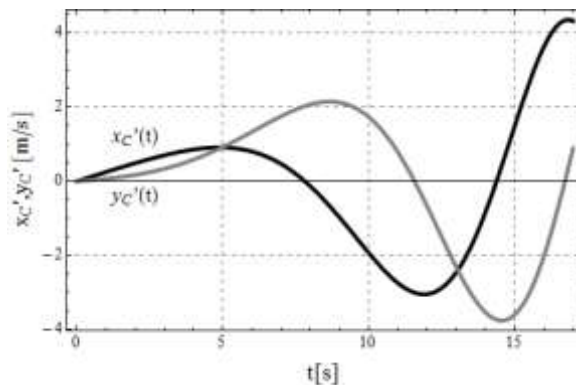


Slika 4. Trajektorija centra mase tokom prvog manevara

Na slici 4 prikazana je trajektorija centra mase C , koja je za ovaj slučaj kružnica. Trenutak kada centar mase obiđe ceo krug je $t=17,07s$. Na slikama 5 i 6 prikazane su generalisane brzine u funkciji vremena tokom prvog manevara.



Slika 5. Ugaone brzine tokom prvog manevara



Slika 6. Projekcije brzine centra mase C tokom prvog manevara

Na slikama 2 – 6 dati su rezultati prvog slučaja kretanja na kojima se jasno može videti da će se centar mase vozila zaista kretati po kružnici. Ovakav način kretanja će se održati ukoliko sila trenja na mestu kontakta pneumatika i podloge ne pređe graničnu vrednost sile trenja. U tom slučaju došlo bi do proklizavanja točkova i do odstupanja centra mase sa kružne trajektorije prikazane na slici 4.

3.2. Drugi manevar, sinusna promena ugla zakretanja upravljačkih točkova

Za ovaj manevar pogonska sila će imati istu vrednost kao i u prethodnom slučaju, dok je moment M_A izražen na sledeći način

$$M_A = -Ak^2 \sin(kt) \quad (13)$$

gde je k frekvencija oscilovanja i za potrebe simulacije imaće vrednost 1 s^{-1} ; A je amplituda oscilovanja i njena vrednost je $0,45 \text{ Rad}$. Iz jednačine (10)₄ sledi da je ugao θ opisan funkcijom

$$\theta(t) = A \sin(kt). \quad (14)$$

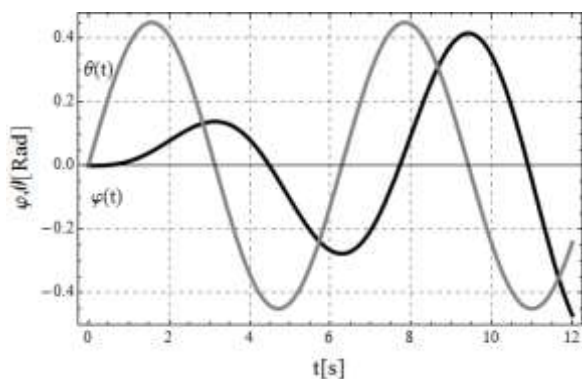
Centar mase, kao i u prethodnom scenariju, u početnom trenutku se nalazi u koordinatnom početku referentnog koordinatnog sistema i njegova početna brzina je jednaka nuli. Takođe, vozilo je usmereno prema pozitivnom delu ose x , ugao zakretanja vozila u početnom trenutku je jednak nuli, kao i ugaona brzina zakretanja. Ugao zakretanja točkova u početnom trenutku je jednak nuli, dok je ugaona brzina zakretanja točkova

$$\omega_\theta(0) = Ak. \quad (15)$$

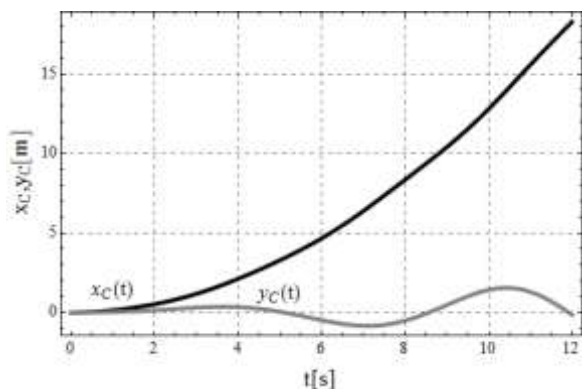
Na slikama 7 i 8 prikazane su generalisane koordinate sistema u funkciji vremena. Sa slike 7 može se videti da se upravljački točkovi zakreću po sinusnom zakonu.

Sa slike 9 očigledno je da će centar mase C vozila oscilovati oko x ose nepokretnog koordinatnog sistema. Ovo potvrđuje i slika 8, sa koje se vidi da generalisana koordinata y_C osciluje oko svog početnog položaja, dok x_C raste tokom vremena. Na slikama 10 i 11 prikazane su generalisane brzine u funkciji vremena tokom drugog manevara.

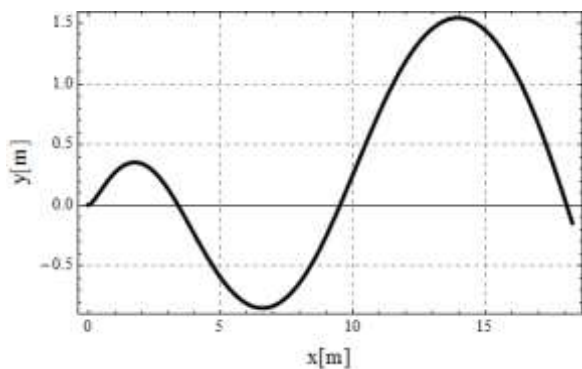
Na slikama 7-11 prikazani su rezultati drugog scenarija kretanja, na kojima se može videti da će se centar mase C vozila kretati po sinusnom zakonu sa rastućom amplitudom.



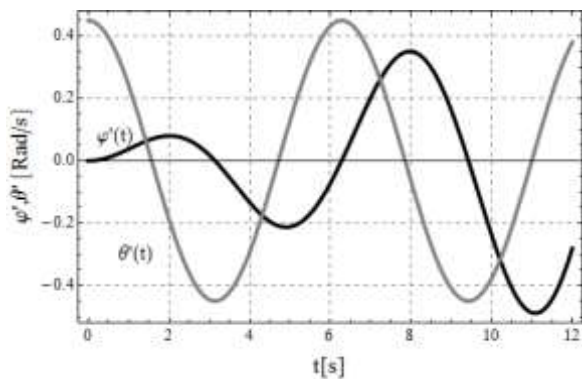
Slika 7. Promena uglova φ , θ tokom drugog manevra



Slika 8. Koordinate centra mase tokom drugog manevra



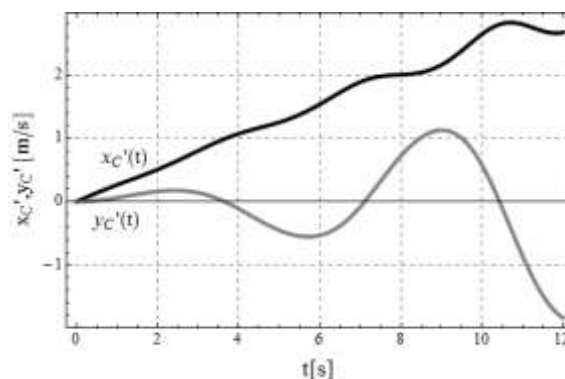
Slika 9. Trajektorija centra mase tokom drugog manevra



Slika 10. Ugaone brzine tokom drugog manevra

Porast amplitude je rezultat dejstva konstantne sile F na vozilo. Ovakav način kretanja, gde se centar mase C kreće sa ubrzanjem usled dejstva sile F , dovodi tokom vremena do sve većih bočnih sila koje dejstvuju na točak na mestu

kontakta sa podlogom. Analizom kontaktnih sila, za poznatu vrednost koeficijenta trenja između pneumatika i podloge, može se analizirati da li i u kom trenutku može da se javi proklizavanje točka.



Slika 11. Projekcije brzine centra mase C tokom drugog manevra

3. ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazana su dva slučaja kretanja automobila. Ostali ispitivani slučajevi kao i njihova dublja analiza prikazani su u master radu. Lineikinov model automobila, koji je ovde korišćen za opisivanje kretanja, može da se zameni sa drugim kompleksnijim modelima koji uzimaju u obzir uticaj više faktora, kao što su obrtanje točkova, mehanička svojstva pneumatika itd., da bi se dobio realniji opis kretanja automobila. Neki od složenijih modela navedeni su u pomenutoj literaturi. Iako Lineikinov model ima određene nedostatke može se sa velikom tačnošću primeniti na jednostavnije slučajeve kretanja vozila. Jedna od mogućnosti koja može da se implementira na Lineikinov model jesu disipativne sile kao što su sile otpora pri kretanju vozila kroz materijalnu sredinu i sile trenja u slučaju proklizavanja točkova.

4. LITERATURA

- [1] W. Chen, H. Xiao, "Integrated vehicle dynamics and control", Hefei, Wiley, 2016.
- [2] G. Rill, "Road vehicle dynamics fundamentals and modeling", Boca Raton, CRC Press, 2012.
- [3] H.B. Pacejka, "Tyre and vehicle dynamics", Delft, Elsevier, 2006.
- [4] В.В.Добронравов, "Основы механики негोलомных систем", Издательство высшая школа, Москва, 1970.
- [5] D.T. Spasić, "Mehanika: osnove, opšte, proširenja.", Универзитет у Новом Саду, у припреми.

Kratka biografija:

Nikola Đorđević rođen je u Sremskoj Mitrovici 1991. god. Bečelov rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Mašinstva-Tehnička mehanika i dizajn u tehnicu odbranio je 2014. god.