Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 51-7
DOI: https://doi.org/10.24867/15JV01Crvenkovic

# JEDNAKOSNA LOGIKA

# EQUATIONAL LOGIC

Marko-Georgije Crvenković, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

**Oblast – MATEMATIKA U TEHNICI**

**Kratak sadržaj –** *Dati su osnovni pojmovi i teoreme logike prvog reda, kao i jednakosne logike. Navode se primeri jednakosnih klasa algebri. Osnovni model je Formalna teorija brojeva, data Peanovim aksiomama. Poseban deo rada je posvećen Srednjoškolskom problemu Tarskog i prikazan je elementaran deo dokaza. Takođe, data je skica dokaza čuvene teoreme nekompletnosti K. Gedela.*

**Ključne reči:** *Relacija jednakosti, jednakosne klase algebri, problem Tarskog, teorema nekompletnosti.*

**Abstract** – *Basic notions and theorems of first order logic and equational logic are given. Some examples of equational classes og algebras are presented. The main model is Formal number theory, given by Peano axioms. The special part is devoted to Tarski's High School problem, and elementary part of the proof is presented. Also, the short proof of incompletnes theorem of K. Gedel is given.*

**Keywords:** *Equational relation, equational classes of algebras, Tarski's problem, incompleatnes theorem.*

## 1. UVOD

Jednakosna logika je deo Matematičke logike u kojoj postoji jedan relacijski simbol, simbol jednakosti i specijalne aksiome koje formalno opisuju osobine klasične jednakosti.

U stvari, Jednakosna logika je logička podloga formalnih računa koje pominjemo u ovom radu. Neke formalne račune spominjemo samo kao primere formalnih teorija kao što su Teorija grupa, Teorija prstena, Teorija Booleovih algebri i Teorija mreža.

Glavni deo ovog rada odnosi se na Formalnu teoriju brojeva. Kroz priču o velikanu matematike dvadesetog veka Kurtu Gedelu prikazujemo najveći rezultat aritmetike prirodnih brojeva, Teoremu nekompletnosti. U svoje vreme, dokaz ove teoreme praktično je pokazao da se čuveni program Davida Hilberta razvoja matematike dvadesetog veka ne može u celosti sprovesti.

Posledice ove teoreme u matematici i ostalim naukama su mnogobrojne. Zahvaljujući Gedelovom dokazu Teoreme nekompletnosti stvorena je nova oblast matematike, Teorija algoritama. Teorija algoritama iznedrila je Turingove mašine i od njih je put vodio do računara.

---

**NAPOMENA:**
**Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bila dr Silvia Ghilezan, red. prof.**

Dokazi velikih teorema samo su skicirani u ovom radu, a mogu se naći u modernim udžbenicima Matematičke logike, [1].

Poseban deo rada jeste priča o Srednjoškolskom problemu Tarskog. Alfred Tarski je šezdesetih godina prošlog veka primetio da su praktično svi zakoni koji važe u Teoriji brojeva logička posledica jedanaest osnovnih zakona koje učimo u školi. Ove zakone nazivamo HSI - High School Identities. Posle dvadeset godina, engleski matematičar Alex Wilkie je našao identitet koji je tačan u algebri prirodnih brojeva i koji ne može da se dokaže sintaksno. U radu je pokazano da je formula tačna, dok teži deo dokaza, da je formula logički neizvodljiva iz HSI iznosi više strana i veoma je tehnički zahtevan. Ono što je dokazano u ovom radu jeste činjenica da postoji pet 2-elementnih modela HSI identiteta. Prirodno je zapitati se da li smo odabrali prave aksiome da dokažemo sve identitete, tj. da li postoji konačan skup drugih aksioma čije logičke posledice su svi identiteti Teorije brojeva. Reuven Gurevič je u u jednom od svojih radova [2] dokazao da ni jedan konačan skup aksioma u jeziku Formalne teorije brojeva ne implicira sve tačne identitete.

Najveći deo rada posvećen je Kurtu Gedelu, i njegovoj Teoremi nekompletnosti. Četrdesetih godina dvadesetog veka Gedel se našao u malom američkom mestu Princeton. Skromne kuće Princetona krile su naučne veličine koje su ostavile dubok trag u mnogim naukama. Najpoznatiji od njih bio je Gedelov veliki prijatelj, Albert Einstein.

Opšte je mišljenje da su najveći logičari u istoriji čovečanstva bili Aristotel, Frege, Gedel i Tarski.

## 2. SREDNJOŠKOLSKI PROBLEM TARSKOG

Šezdesetih godina prošlog veka Alfred Tarski je primetio da postoji samo jesanaest osnovnih identiteta koji važe u algebri pozitivnih celih brojeva $\mathbf{N}^{+}$ i čija posledica bi bili svi zakoni koji važe na $\mathbf{N}^{+}$. Ove zakone učimo u osnovnoj i srednjoj školi. Tarski ih je nazvao *High School Indentities*, skraćeno *HSI.* To su identiteti:

1. $x + y \approx y + x$
2. $x + (y + z) \approx (x + y) + z$
3. $x \cdot 1 \approx x$
4. $x \cdot y \approx y \cdot x$
5. $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$
6. $x \cdot (y + z) \approx x \cdot y + x \cdot z$
7. $1^{x} \approx 1$
8. $x^{1} \approx x$

9. $x^{y+z} \approx x^y \cdot x^z$
10. $(x \cdot y)^z \approx x^z \cdot y^z$
11. $(x^y)^z \approx x^{y \cdot z}$

Identiteti od 1. do 6. se označavaju $\overline{HSI}$ i uključuju samo operacijske simbole $+, \ \cdot, 1$.

*Definicija 1. Neka je $\mathcal{L}$ jezik $\mathcal{L} = \{+,\cdot,\uparrow,1\}$. Algebra* **A** *koja zadovoljava identitete 1. – 11. naziva se HSI – algebra. Umesto $a \uparrow b$ pišemo $a^b$ - stepenovanje.*

Primetimo da je $\mathbf{N}^+ = (\mathbb{N}^+,+,\cdot,\uparrow,1)$, gde je $\mathbb{N}^+$ skup pozitivnih celih brojeva, *je HSI – algebra.*

*Definicija 2. Neka je $\bar{\mathcal{L}} = \{+,\cdot,1\}$. $\bar{\mathcal{L}}$ - algebra* **A** *koja zadovoljava $\overline{HSI}$ naziva se $\overline{HSI}$– algebra.*

U $\overline{HSI}$ – algebri **A** pišemo $n$ umesto $\underbrace{1+1+\cdots 1}_{n}$

Jasno, $\overline{\mathbf{N}^+} = (\mathbb{N}^+,+,\cdot,1)$ je $\overline{HSI}$– algebra. Takođe, ako je **A** HSI – algebra, onda je i $\bar{\mathbf{A}} = (\boldsymbol{A},+,\cdot,1)$, gde su $+,\cdot,1$ isti kao u A, $\overline{HSI}$– algebra.

U stvari, identiteti *HSI* izolovani su u poznatom radu [3] Dedekinda iz 1888 godine. Dedekin je dokazao da oni slede iz Peanovih aksioma.

Kada govorimo o HIS identitetima, važi sledeće:

(1) Postoji mnogo vrlo malih modela *HSI*.

(2) Postoje tačni identiteti u $\mathbf{N}^+$ koji se ne mogu izvesti iz *HSI*.

Kad radimo sa jednakosnom teorijom čiji je model $\overline{\mathbf{N}^+}$ imamo korisnu činjenicu da svaki $\bar{\mathcal{L}}$-term $t$ ima prostu normalnu formu $v(t)$ , koju zovemo polinom. Sve normalne forme, tj. polinomi su posledice $\overline{HSI}$.

*Teorema 1.*

*(a) Jednakosna teorija čiji su specijalni aksiomi 1. – 6. je odlučiva.*

*(b) Svi identiteti koji važe $\overline{\mathbf{N}^+}$ u mogu se izvesti iz $\overline{HSI}$.*

*Dokaz.* (a) Neka je $t_1 \approx t_2$ identitet u jeziku $\bar{\mathcal{L}}$ koji važi u $\overline{\mathbf{N}^+}$. Pomoću $\overline{HSI}$ 1. – 6. odredimo normalne forme $v(t_1)$ i $v(t_2)$. Tada je $v(t_1) = v(t_2)$. U protivnom bismo dobili različite vrednosti za $t_1$ i $t_2$ u $\overline{\mathbf{N}^+}$ jer je $\overline{\mathbf{N}^+}$ model ove teorije.

(b) Neka je $\Sigma$ skup $\bar{\mathcal{L}}$ - identiteta koji se mogu izvesti iz $\overline{HSI}$. Kako je $\overline{\mathbf{N}^+}$ model od $\overline{HSI}$, sledi da je $\Sigma$ podskup svih identiteta koji važe u $\overline{\mathbf{N}^+}$. Neka $t_1 \approx t_2$ važi u $\overline{\mathbf{N}^+}$. Koristeći $\overline{HSI}$ možemo naći normalne forme za $t_1$ i $t_2$ i to onda daje izvođenje za $t_1 \approx t_2$. ■

Međutim, kada gledamo *HSI* i $\mathbf{N}^+$ nemamo više takvih normalnih formi. Situacija postaje mnogo komplikovanja zbog operacije $\uparrow$. Prirodni modeli od $\overline{HSI}$ su pozitivni racionalni i realni brojevi.

Međutim, kad tražimo prirodne modele od *HSI* ove mogućnosti nestaju. Na primer, pozitivni racionalni brojevi nisu zatvoreni za stepenovanje $\uparrow$ . $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

U literaturi je prvi rad koji se odnosi na Problem Tarskog rad [4].

***Srednjoškolski problem Tarskog*** glasi:

*Da li su svi identiteti koji važe u algebri* $\mathbf{N}^+$ *sintaksna posledica HSI?*

Odgovor je negativan. Problem je rešio A.J. Wilkie 1980. godine u rukopisu [5]. Wilkie je pronašao formulu u jeziku $\mathcal{L}$ koja je tačna u $\mathbf{N}^+$, ali se ne može izvesti iz *HSI*. Navodimo Wilkijev identitet $W(x,y)$.

$$((1+x)^y + (1+x+x^2)^y)^x \cdot ((1+x^3)^x + (1+x^2+x^4)^x)^y \approx$$
$$((1+x)^x + (1+x+x^2)^x)^y \cdot ((1+x^3)^y \cdot (1+x^2+x^4)^y)^x.$$

Da bismo videli da je ovaj identitet tačan u $\mathbf{N}^+$ primetimo sledeće

$$1+x^3 \approx (1+x)\cdot(1-x+x^2)$$
$$1+x^2+x^4 \approx (1+x+x^2)\cdot(1-x+x^2).$$

Označimo sa $A = 1+x,\ B = 1+x+x^2, C = 1-x+x^2$. Tada Wilkijev identitet postaje

$$(A^y + B^y)^x \cdot ((A\cdot C)^x + (B\cdot C)^x)^y \approx$$
$$(A^x + B^x)^y \cdot ((A\cdot C)^y + (B\cdot C)^y)^x$$

što je očigledno tačno, tj. leva i desna strana su identične. Naime, leva i desna strana Wilkijevog identiteta pomnožena je sa $C^{xy}$.

Međutim, ovaj identitet se ne može izvesti iz *HSI*. Problem je polinom $C = 1-x+x^2$. Znak oduzimanja, $-$, u *C* nije u jeziku $\mathcal{L}$. Pitanje je da li možda postoji neko drugo *C* koje bi bilo u jeziku $\mathcal{L}$. Wilkie je pokazao da ne postoji. Nepostojanje C ne znači da se identitet ne može prikazati na neki drugi način semantički ili čak sintaksno. Wilkie je pokazao da se njegov identitet nikako ne može izvesti iz *HSI*.

Čovek koji je na elementaran način približio problem genijalnog A. Tarskog je profesor Univerziteta Waterloo u Kanadi. S. Burris, u radu [6]. Pre ovog rada S. Burris i S. Lee su objavili interesantan rad [7] u kome su navedeni mali modeli *HSI* identiteta. Sledio je rad [8] u kome je konstruisana algebra u kojoj su važili HSI, a nije važio Wilkijev identitet $W(x,y)$ i koja je imala 12 elemenata.

Postavlja se pitanje da li su nas pogrešno učili u školi, odnosno da li postoji neki drugi konačan skup aksioma iz kojih bismo izveli sve zakone algebra pozitivnih celih brojeva. Odgovor je negativan. R. Gurevič je 1990. godine dokazao da takav skup ne postoji. Preciznije rečeno, Gurevič je pokazao sledeće:

Neka je $\mathcal{L} = \{termovi\ signature\ (+,\cdot,\uparrow,1)\}$ i $K = \{(t \approx u) | t,u \in \mathcal{L},\ \ \boldsymbol{N}^+ \vDash\ t \approx u\}$.

*Za bilo koji konačan $S \subset K$ postoji identitet (Wilkijevog tipa) $(t \approx u) \in K$, od jedne promenljive, takav da se*

*$t \approx u$ ne može izvesti iz $S$.*

Aktuelnost i primenljivosti ovih rezultata potvrđuje njihova implementacija i verifikacija u interaktivnom dokazivaču, koji je u COQ uradio Joseph Tassarotti 2015. godine, [9].

## 3. GEDELOV UNIVERZUM

Kraj devetnaestog veka nagovestio je veliko spremanje u matematici. Stvarane su nove matematičke discipline: Matemtička logika i Teorija skupova. Centralne figure u razvoju tzv. *osnova matematike* tog doba bili su Gotlab Frege, Georg Cantor, David Hilbert, Bertrand Russell, Giusepe Peano, Richard Dedekind, Lejeune Dirichlet.

Ispostavilo se da Euklidovi dokazi nisu tako savršeni kao što se mislilo preko dve hiljade godina. Veliki posao oko sređivanja uradio je Hilbert. Njegova knjiga iz 1899. godine i dan danas se smatra odličnim udžbenikom Geometrije. Hilbertova knjiga je dočekana sa velikim uvažavanjem u matematičkom svetu. Početkom dvadesetog veka Hilbert je smatran za vodećeg matematičara sveta.

U leto 1900. godine održao se u Parizu Drugi međunarodni kongres matematičara. Hilbert je bio pozvan da održi jedno od glavnih predavanja na kongresu.

Drugi problem koji je postavio na svetskom matematičkom kongresu 1900. godine Hilbert je fomulisao ovako:

*Dokazati da aksiome aritmetike nisu protivrečne, tj. da se polazeći od njih u konačnom broju logičkih koraka ne može doći do razultata koji protivreče jedan drugom.*

Aksiome koje je Hilbert imao u vidu na kongresu odnose se na aritmetiku realnih brojeva. Kasnije, a naročito počevši od dvadesetih godina prošlog veka, problem je shvaćen kao da se odnosi, pre svega, na aritmetiku u pravom smislu reči, tj. na teoriju prirodnih brojeva i Peanove aksiome.
Od 5. do 7. septembra 1930. godine u nemačkom gradu Konigsbergu održana je konferencija o epistemologiji egzaktnih nauka. Konferenciju je organizovalo Društvo za empirijsku filozofiju iz Berlina, koje je održavalo veze sa Bečkim krugom. Sastanak je održan uoči konferencije Društva nemačkih naučnika i lekara i Šeste skupštine nemačkih fizičara i matematičara.

Prvi dan su bila jednočasovna plenarna izlaganja tri rivalska filozofska pravca: logicizam, intuicionizam i formalizam. Govornici su bili Rudolf Carnap, Arend Heyting i John van Neumann. Dan kasnije Hilbert, na skupštini matematičara drži svoje čuveno predavanje. Tada je rekao:

*Za matemetičara nema Ignorabimus i po mom mišljenju, ni uopšte za bilo koju prirodnu nauku. Pravi razlog zašto niko nije pronašao nerešiv problem jeste, prema mom mišljenju, taj da ne postoji nerešiv problem. Nasuprot luckastom Ignorabimus, naš kredo glasi: Mi moramo znati - mi ćemo znati.*

Sutradan, u nedelju, za okruglim stolm, Gedel je jednostavno rekao:

*Možemo navesti primere rečenica koje su jasno tačne, ali nedokazive u formalnom sistemu klasične matematike.*

Gedelov rezultat je dokrajčio skoro stogodišnji trud da se pronađu aksiome matematike iz kojih bi pomoću logičkih pravila mogla biti dokazana sva tačna matematička tvrđenja.
Grubo rečeno, Gedelova teorema o nepotpunosti formalne aritmetike glasi:

*Unutar formalne aritmetike, pod uslovom da je neprotivrečna, postoje istinita tvrđenja za koja ne postoji formalni dokaz unutar te teorije.*

Komentar čuvenog matematičara Andre Weila bio je:

*Bog postoji jer je aritmetika nesumnjivo neprotivrečna, a đavo postoji jer to ne možemo dokazati.*

## 4. LITERATURA


[1] P. Janičić, Matematička logika u računarstvu, Matematički fakultet, Beograd 2009.

[2] R. Gurevič, Equational theory of positive numbers with exponantiation is not finitely axiomatizable, annals of Pure and Applied Logic 49, 1-30, 1990.

[3] R. Dedekind, Was sind und was sallen die Zahlen, Vierweg, 1898. [2] A.E. Bryson, Y.C. Ho, *“Applied Optimal Control”*, New York, Wiley, 1975.

[4] J. Doned, A. Tarski, An extended arithmetic of ordinal numbers, Fundamenta Mathematice, 65, 95-127, 1969.

[5] A. I. Wilkie, On exponentiation - a solution to Tarski's high school problem, Oxford University 1980.

[6] S. Burris, S. Lee, Tarski's high school identities, American Mathematical Monthly, 100, No. 3, 231-236, 1993.

[7] S. Burris, S. Lee, Small models of the high school identities, International Journal of Algebra and Computation, Vol. 2., No. 2. 139-178, 1992.

[8] S. Burris, K. Yeats, The Saga of the High School Identities, Algebra Universalis, Vol. 52, 325-342, 2008-

[9] Tassarotti, Formalization of Tarski's High School Algebra Problem in Coq. GitHub https://github.com/jtassarotti/tarski-hsap, 2015


### Kratka biografija:


**Marko-Georgije Crvenković** rođen je u Novom Sadu 1990. god. Master rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Matematika – Matematička logika odbranio je 2021.god.
kontakt: marko.crvenkovic@gmail.com