Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 517.97
DOI: https://doi.org/10.24867/11JV01Kopanja

UVOD U VARIJACIONI RAČUN SA PRIMJERIMA

INTRODUCTION TO THE CALCULUS OF VARIATIONS WITH EXAMPLES

Tamara Kopanja, *Fakultet Tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – **MATEMATIKA U TEHNICI**

Kratak sadržaj – *U redu su sadržane osnove varijacionog računa. Posebno, opisali smo numerički postupak rješavanja Ojler-Lagranžove jednačine. Na kraju, naveli smo primjenu varijacionog računa u obradi slike*

Ključne reči: *varijacioni račun, metod opadajućeg gradijenta, obrada sllike*

Abstract - *The topic is base of calculus of variations. In particular, we described numerical procedure for solving Euler-Lagrange equation. Finally, we stated applications of calculus of variations in image processing.*

Keywords: *calculus of variations, descent gradient method, image processing*

1. UVOD

Varijacioni račun se koristi za rješavanje mnogih problema iz različitih oblasti. Ozbiljniji razvoj varijacionog računa bio je sredinom 17. vijeka. Johan Bernouli je postavio problem *Brahistrohrona* koji je zainteresovao matematičare [4]. U ovom radu ćemo prikazati taj problem i riješiti uz pomoć varijacionog računa.

Definicija 1. *Neka je X vektorski (linearan) prostor nad* $\mathbb{R}$. *Bilo koje preslikavanje iz X u* $\mathbb{R}$ *naziva se funkionela.*

Mi ćemo posmatrati funkcionele oblika

$$I(f) = \int_a^b F[x, f(x), f'(x)]dx \tag{1}$$

gdje je $f(x)$ dovoljno puta neprekidno diferencijabilna funkcija jedne realne promjenljive nad skupom $[a,b]$. Funkcija F je neprekidna funkcija tri promjenljive. Zadatak nam je da pronađemo ekstremnu vrijednost funkcionele $I(f)$, odnosno da odredimo funkciju $f(x)$ za koju vrijednost funkcionala $I(f(x))$ ima minimalnu ili maksimalnu vrijednost.

Postavljamo granične uslove: $f(a) = a, f(b) = b$. Pretpostavimo da je ekstremna vrijednost funkcionala funkcija $f(x)$. Ako sa $\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon\varphi$ označimo malu promjenu funkcije $f(x)$ gdje je $\varepsilon > 0$ i φ proizvoljna funkcija za koju važi $\varphi(a) = 0$ i $\varphi(b) = 0$ onda važi

$I(\tilde{f}) > I(f)$ ako se za $f = f(x)$ dostiže minimum,a

$I(\tilde{f}) < I(f)$ ako se za $f = f(x)$ dostiže maksimum funkcionele $I(f)$ nad $x \in [a,b]$.

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Tibor Lukić, vanr. prof.

2. VARIJACIONI RAČUN

Koristeći oznake koje smo upravo uveli jasno je da funkcionela $I(f + \varepsilon\varphi)$ dostiže svoj ekstrem za $\varepsilon = 0$. To znači da izvod $I(f + \varepsilon\varphi)$ po ε mora biti jednak nuli u tački $\varepsilon = 0$, odnosno

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[f + \varepsilon\varphi]\bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{2}$$

Ovaj izvod označavamo sa δI i nazivamo *prva varijacija* funkcionele I. Izvod funkcionele po ε je

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I[\tilde{f}] &= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\int_a^b F[x, \tilde{f}, \tilde{f}']dx\right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{f}}\frac{d\tilde{f}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{f}'}\frac{d\tilde{f}'}{d\varepsilon}\right)dx \end{aligned}$$

Važi $\dfrac{d\tilde{f}}{d\varepsilon} = \varphi$ i $\dfrac{d\tilde{f}'}{d\varepsilon} = \varphi'$, a kako x ne zavisi od ε slijedi da je $\dfrac{dx}{d\varepsilon} = 0$. Dalje je

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[\tilde{f}]\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{f}}\varphi + \frac{\partial F}{\partial \tilde{f}'}\varphi'\right)dx\bigg|_{\varepsilon=0}$$

a kako ε ne učestvuje u integraciji, uzimamo $\varepsilon = 0$, pa je

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[\tilde{f}]\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}\varphi + \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi'\right)dx$$

Koristimo parcijalnu integraciju za drugi član i dobijamo integral u sljedećem obliku

$$\delta I = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f}\varphi dx + \frac{\partial F}{\partial f'}\varphi\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi dx.$$

Ako iskoristimo uslove za funkciju φ koje smo postavili $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ prva varijacija dobija oblik

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\varphi dx = 0. \tag{3}$$

2.1. OJLER-LAGRANŽOVA JEDNAČINA

Prvo navodimo lemu koja će nam pomoći u kasnijem zaključivanju [3].

Lema 1. *Neka važi* $\int_a^b S(x)h(x) = 0$ *za sve funkcije* $h = h(x) \in C^1[a,b]$ *za koje važi* $h(a) = h(b) = 0$*, pri čemu je*

$S(x) \in C[a,b]$ data funkcija. Tada je $S \equiv 0$.

Ako iskoristimo lemu 1 na jednakost 3 dobijamo potreban uslov za postojanje ekstrema funkcionele $I[f]$ na intervalu $[a,b]$ u vidu jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \tag{4}$$

koju nazivamo Ojler-Lagranžova jednačina.

Integralne krive koje zadovoljavaju ovu jednačinu zovemo ekstremale. Bitno je napomenuti da je Ojler-Lagranžova jednačina potreban ali nije dovoljan uslov za postojanje ekstrema funkcionele. U opštem slučaju Ojler-Lagranžova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu. Za dovoljan uslov potrebno je uvođenje druge varijacije $\delta^2 I$ što se može pronaći u [1] ili [2]. Takođe, važno je napomenuti da često nije lako naći analitičko rješenje Ojler-Lagranžove jednačine pa u tim slučajevima koristimo numeričke postupke da dođemo do približnog rješenja o čemu će biti riječi u okviru ovog rada.

No, prije toga pogledajmo specijalan slučaj Ojler- Lagranžove jednčine za slučaj kada podintegralna funkcija F ne zavisi direktno od nezavisno promjenljive x. Dakle, imamo podintegralnu funkciju $F = F[f(x), f'(x)]$.

Ako Ojler-Lagranžovu jednačinu pomnožimo sa $\frac{df}{dx}$ dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial f}\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx} = 0. \tag{5}$$

Koristeći pravilo za izvod proizvoda funkcija, računamo izvod po x

$$\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2}$$

odakle slijedi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right)' - \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Uvrstivši dobijeno u jednakost 5 dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial f}\frac{df}{dx} - \left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right)' + \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2} = 0. \tag{6}$$

Za funkciju $F = F[f(x), f'(x)]$ važi

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d^2 f}{dx^2}. \tag{7}$$

Vidimo da je lijeva strana dobijenog izraza upravo zbir prvog i trećeg člana u jednakosti 6 pa kada zamijenimo dobijamo

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{df}{dx}\right) = 0. \tag{8}$$

Integracijom po x dolazimo do jednakosti

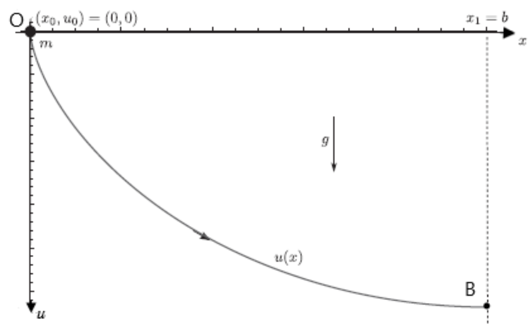
$$F - f'\frac{\partial F}{\partial f'} = 0 \tag{9}$$

koju zovemo *Beltramijeva jednakost*. Predstavlja ekvivalent Ojler-Lagranžovoj jednačini za slučaj kada funkcija F ne zavisi direktno od promjenljive x.

2.2. PROBLEM BRAHISTOHRONE

Na samom početku pomenuli smo problem brahistohrone koji je imao veliki značaj pri razvoju varijacionog računa. *Neka su tačke O i B dvije tačke u vertikalnoj ravni u odnosu na zemljinu površinu. Kriva po kojoj se kreće tijelo koje samo pod uticajem gravitacione sile ide od tačke O do tačke A za najkraće vrijeme naziva se brahistohrona. Odrediti tu krivu!*

Označimo masu tijela sa m i sa g gravitacionu konstantu (slika 1).



Slika 1. *Brahistohrona*

Tražimo krivu $u = u(x)$ od tačke $O(0,0)$ do tačke $B(b,\beta)$. Na osnovu zakona održanja kretanja važi:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgu = 0 \tag{10}$$

odakle slijedi $v(x) = \sqrt{2gu(x)}$. Vrijeme kretanja tijela računamo kao količnik pređenog puta i brzine. Pređeni put, dužina krive od tačke O do tačke B po promjenljivoj x je $\sqrt{1+u'^2}dx$. Dakle, vrijeme kretanja je $\frac{\sqrt{1+u'^2}dx}{\sqrt{2gu(x)}}$. Dobijamo izraz za ukupno vrijeme kretanja koje zavisi od krive po kojoj se tijelo kreće

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}dx$$

Cilj nam je odrediti funkciju $u = u(x)$ koja minimizira dati funkcional. Označimo sa F podintegralnu funkciju

$$F(x,u,u') = \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}.$$

Možemo primjetiti da funkcija F ne zavisi direktno od nezavisno promjenljive x pa za određivanje ekstrema možemo koristiti jednakost 9 (Beltramijevu jednakost). Parcijalni izvod funkcije F po u' je

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{2\sqrt{1+u'^2}}2u' = \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}}.$$

Uvrštavamo u Beltramijevu jednakost i važi:

$$\begin{aligned} c &= F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} \\ &= \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} - u'\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}}. \end{aligned}$$

Kvadrriranjem dobijamo

$$u(1+u'^2)=r^2 \tag{11}$$

za $r=\frac{1}{c}$. Dalje važi:

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 &= \frac{r^2}{u}-1\\ dx &= \sqrt{\frac{u}{r^2-u}}du\end{aligned}$$

Integral

$$x=\int\sqrt{\frac{u}{r^2-u}}du \tag{12}$$

rješavamo uvođenjem smjene $u=r^2\sin^2\frac{t}{2}$, odakle je $du=2r^2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$ za $t\in[0,\pi]$. Dolazimo do

$$\begin{aligned}x &= \frac{r^2}{2}(t-\sin t)\\ u &= \frac{r^2}{2}(1-\cos t)\end{aligned}$$

što predstavlja cikloidu. Dakle, brahistohrona je cikloida.

3. NUMERIČKO RJEŠAVANJE OJLER- LAGRANŽOVE JEDNAČINE

Kao što smo već rekli Ojler-Lagranžova jednačina je diferencijalna jednačina za koju se javlja problem nemogućnosti pronalaska rješenja analitičkim putem. Iz tog razloga jednačinu rješavamo numeričkim postupcima i pronalazimo približno rješenje. Opisaćemo metod opadajućeg gradijenta (eng. Descent gradient method). Podsjećanja radi, navodimo definiciju gradijenta funkcije.

Definicija 2. *Neka je $U\subseteq\mathbb{R}^n$ otvoren i $f:U\to\mathbb{R}$ parcijalno diferencijabilna funkcija. Gradijent funkcije je preslikavanje $\nabla f:U\subseteq\mathbb{R}^n$,*
$\nabla f=[D_1f(x),D_2f(x),\cdots,D_nf(x)]^T$.

Posmatramo problem minimizacije funkcije $f(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, odnosno tražimo $x\in\mathbb{R}^n$ za koju je vrijednost $f(x)$ minimalna. To ćemo uraditi tako što formiramo niz $\{x_t\}, t=1,2,\cdots$ na sljedeći način:

$$x_{t+1}=x_t-\Delta t\nabla f(x_k). \tag{13}$$

gdje je $\Delta t>0$ dužina koraka a ∇f pravac kretanja. Dužinu koraka možemo birati različito u svakom koraku ali obično se koristi ista vrijednost tokom svih iteracija. Ponavljamo iteracije dok ne dođemo do $x_{t+1}=x_t$ odnosno tada je $\nabla f(x_t)=0$, a to je upravo potreban uslov za ekstrem funkcije. Naravno, ne možemo uvijek doći do tačnog rješenja pa tada postavimo odgovarajući uslov koji želimo ispuniti, npr. zaustavljamo se kada je $||\nabla f||_2\leq\varepsilon$ za proizvoljno $\varepsilon>0$.

Postavljamo prirodno pitanje: Zašto je gradijent dobar izvor za pravac kretanja? Slijedi odgovor na to pitanje, detaljnije se može pogledati u [5].

Definicija 3. *Neka je $U\subseteq\mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f:U\to\mathbb{R}$, $x\in U$, $v\in S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:||x||=1\}$. Izvod u pravcu v funkcije f u tački x je*

$$D_vf(x):=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f(x+tv)=\lim_{t=0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

ukoliko postoji granična vrijednost.

Za vektore e_j dobijamo parcijalne izvode $D_jf(x)$. Ako skalarni proizvod označimo sa $\langle x,y\rangle$ znamo da dobro definisanu kompoziciju funkcija računamo kao $D(g(f))=(\nabla g(f))^T\cdot Df(x)=\langle\nabla g(f(x)),f(x)\rangle$. U slučaju izvoda u pravcu imamo kompoziciju funkcija $f(v)$ i $v(t)=x+tv$ pa kako je $v'(t)=v$ slijedi da je

$$D_vf(x)=D(f\circ v(0))=\langle\nabla f(x+0),v\rangle=\langle\nabla f(x),v\rangle.$$

Slijed Koši- Švarcova nejednakost.

Teorema 1. *U unitarnom vektorskom prostoru V za svako $x,y\in V$ važi*

$$\langle x,y\rangle\leq||x||\cdot||y||.$$

Pri tome, jednakost važi samo ako su vektori linearno zavisni.
Koristeći Koši - Švarcovu nejednakost dokazujemo teoremu.

Teorema 2. *Neka je $U\subseteq\mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f:U\to\mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Ako je $\nabla f(x)\neq0$ tada je izvod u pravcu funkcije f u tački x maksimalan za pravac $v_0:=\frac{\nabla f(x)}{||\nabla f(x)||}$ tj. gradijent funkcije je pravac najbržeg rasta funkcije f u tački x.*

Dokaz. Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost slijedi

$$\langle\nabla f(x),v\rangle\leq||\nabla f(x)||\cdot||v||=||\nabla f(x)||$$

čime je jasno da izvod u pravcu ima najveću vrijednost $||\nabla f(x)||$. Zanima nas za koji pravac odnosno za koji vektor se to postiže. Ako je $\nabla f(x)\neq0$ tada za $v_0=\frac{\nabla f(x)}{||\nabla f(x)||}$ dostižemo tu maksimalnu vrijednost.

$$\langle\nabla f(x),v_0\rangle=\frac{||\nabla f(x)||^2}{||\nabla f(x)||}=||\nabla f(x)||.$$

□

Na osnovu pokazane teoreme znamo da funkcija ima najbrži rast u smijeru gradijenta funkcije, a kako mi tražimo minimum idemo u smijeru suprotnom od gradijenta funkcije $(-||\nabla f(x)||)$.
Ako jednakost 13 zapišemo u obliku

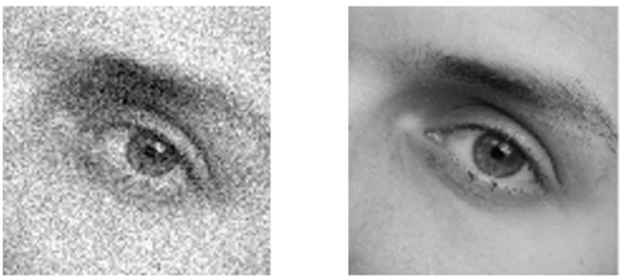
$$\frac{x_{t+1}-x_t}{\Delta t}=\nabla f \tag{14}$$

i parametar t tumačimo kao vrijeme primjećujemo da je promjena vrijednosti x po vremenu jednaka gradijentu funkcije f. Kada dođemo do toga da je promjena x po vremenu, odnosno x_t' jednaka nuli, tada je i $\nabla f(x)=0$ čime je ispunjen potreban uslov za ekstrem funkcionele. Zbog ovoga često metod opadajućeg gradijenta nazivaju i „time marching“. U slučaju koji nas ovdje prvenstveno zanima imamo funkcionelu čiji minimum tražimo. Dakle, tražimo funkciju $f(x)$ koja minimizuje funcionelu 1. Gradijent je, u tom slu- čaju, prva varijacija funkcionele. Kažemo da se krećemo ka ekstremu u smijeru Ojler-Lagranžove jednačine. Za proizvoljno odabranu početnu funkciju $f_0(x)$ i dužinu koraka Δt dobijamo metod opadajućeg gradijenta za minimizaciju posmatrane funkcionele

$$f_{t+1}(x) = f_t(x) - \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial f'} \right) F(x, f_t, f_t'). \quad (15)$$

4. OTKLANJANJE ŠUMA PRIMJENOM TOTALNE VARIJACIJE

Varijacioni račn ima široku primjenu u mnogim primjerima iz prakse. Između ostalog, obrada slika zahtijeva primjenu varijacionog računa. Dvodimenzionalna digitalna slika je uređen par (Σ, u) gdje je u funkcija slike za koju važi $u : \Sigma \to R$, pri čemu Σ zovemo domen slike, a $u(x,y)$ je intenzitet ili sivi nivo slike u tački $(x,y) \in \Sigma$. Neki od osnovnih zadataka u obradi slike su segmentacija, uklanjanje šuma, izoštravanje i oporavak izgubljenih podataka. O svakom zadatku može se pronaći više informacija u [2]. Mi ćemo se ukratko osvrnuti na otklanjanje šuma.
Šum na slici nastaje kao posljedica neadekvatne osvjetljenosti objekta ili greške u prenosu podataka. Kao posljedica načina distribucije sunčevih zraka javlja se „prirodni šum“. Pogledajmo primjer slike sa šumom postignutog u Matlabu i originalne slike 2.



Slika 2. *Primjer slike opterećene šumom (lijevo) i originalne slike (desno)*

Neka je $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ data slika gdje je u dovoljno puta neprekidno diferencijabilna. Funkcionelu

$$I(u) = \iint_{\Sigma} ||\nabla u|| dxdy$$

zovemo *totalna varijacija* i ona predstavlja odličan primjer anizotropnog zaglađivanja. To je zaglađivanje koje ostaje samo sa jedne strane objekta, odnosno ne prelazi ivicu objekta. Ojler-Lagranžova jednačina za totalnu varijaciju je

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{||\nabla u||} \right) = 0$$

Osim anizotropnog postoji i izotrono zaglađivanje za koje ivica objekta ne predstavlja prepreku. Primjer izotropnog zaglađivanje je

$$I(u) = \iint_{\Sigma} ||\nabla u||^2 dxdy$$

čija je Ojler-Lagranžova jednačina

$$\operatorname{div}(\nabla u) = 0.$$

Za više detalja u vezi sa otklanjanjem šuma ali i ostalih aspekata obrade slike pogledati niz predavanja koje predaje profesor Guillermo Sapiro [6].

5. ZAKLJUČAK

Medicinskim snimanjem, na primjer, dobijamo slike koje su mutne ili imaju šum pa je potrebno primjeniti varijacioni račun da bismo dobili sliku boljeg kvaliteta. Na kraju, možemo zaključiti da je varijacioni račun primjenljiv i aktuelan metod u rješavanju mnogih problema.

6. LITERATURA

[1] L. Čomić, Lj. Pavlović ”Funkcija više promenljivih”, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, 2000.

[2] K. W. Cassel, “Variational Mathods with Applications in Science and Engineering”, Cambridge, 2013.

[3] N. Teofanov,M. Žigić, “Osnovi optimizacije”, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2014.

[4] H. Goldstine, “A History of Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century”, Springer, 1980.

[5] J.Stewart, “Calculus”, Mc Master University and University of Toronto, Eighth Edition, 2015.

[6] https://www.youtube.com/watch?v=B_TiVX7zN8U&list=PLZ9qNFMHZ-A79y1StvUUqgyL-O0fZh2rs&index=55 (pristupljeno u septembru 2020.)

Kratka biografija:

Tamara Kopanja rođena je u Banjaluci 1996. god. Master rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti primjenjene matematike– Matematika u tehnici odbranila je 2020. god.
Kontakt: kopanjatamara@gmail.com