

OSCILOVANJE I STABILNOST AKSIJALNO OPTEREĆENE I UKLEŠTENE PRAVOUGAONE PLOČE NA NEHOMOGENOJ ELASTIČNOJ PODLOZI

VIBRATION AND STABILITY OF AN AXIALLY LOADED CLAMPED RECTANGULAR PLATES ON A NON-HOMOGENEOUS ELASTIC BASE

Radivoj Smiljanić, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

**Oblast – MAŠINSTVO - TEHNIČKA MEHANIKA**

**Kratak sadržaj** – U radu je analiziran način nalaženja frekvencije oscilovanja pravougaone ploče kao i vrednost kritične sile pri kojoj dolazi do gubitka stabilnosti ploče. Nađene osnovne jednačine postavljenog problema su prebačene u bezdimenzijski oblik i kao takve numerički rešavane. Dobijeni su rezultati kružne frekvencije oscilovanja ploče kao i rezultati kritične sile pri kojoj dolazi do savijanja ploče.

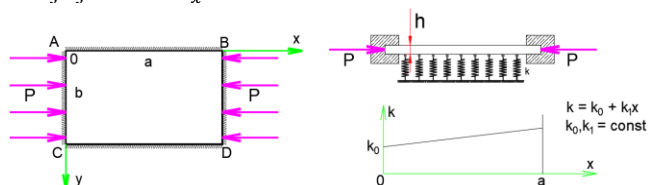
**Ključne reči:** oscilovanje i stabilnost ploče, kružna frekvencija, kritična sila

**Abstract** – The paper analyzes the way of finding the oscillation frequency of a rectangular plate as well as the value of the critical force at which it comes to the loss of plate stability. The basic equations of the posed problem were transferred to the dimensionless form and as such numerically solved. The results of the natural frequency of the plate as well as the results of the critical force at which the plate bending occurs were obtained.

**Keywords:** vibration and stability of plates, natural frequency, critical force

**1. UVOD**

Tema ovog rada je analiza problema nalaženja frekvencije oscilacija pravougaone ploče kao i vrednost kritične sile pri kojoj dolazi do gubitka stabilnosti ploče. Sistem, prikazan na slici 1, sastoji se od pravougaone ploče, stranica  $a$  i  $b$ , koja je ukleštena sa sve četiri strane. Osim ukleštenja, ploča je oslonjena na elastičnu podlogu čija se krutost podloge menja prema jednačini  $k = k_0 + k_1x$ , gde su  $k_0, k_1 = const$ . Na posmatranu ploču, duž stranice  $b$ , deluje još i sila  $N_x$ .



Slika 1. Pravougaona ploča

U ovom radu prikazaće se matematički model za rešavanje zadatog problema ploče.

Određiće se konačni oblik diferencijalne jednačine za postavljeni problem kao i odgovarajući granični uslovi. Zatim će se pomenute jednačine prebaciti u bezdimenzijski oblik

**NAPOMENA:**

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Valentin Glavardanov, red. prof.

i kao takve rešavati pomoću softvera Mathematica. Za razne, proizvoljno odabrane, parametre predstaviće se rešenje postavljenog problema, tj. prikazaće se za koje vrednosti parametara dolazi do gubitka stabilnosti ploče. Suština rada je da se pokaže kakav uticaj na stabilnost ploče imaju kružna frekvencija, sila u oprugama i sila  $P$  koja deluje u pravcu ose  $x$ .

Cela analiza odrađiće se za ploču kvadratnog oblika (kada je odnos stranica  $\frac{a}{b} = 1$ ) i ploču pravougaonog oblika (kada je odnos stranica  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ). Rešavanje sličnih problema može se videti u radovima [1]-[5].

**2. MATEMATIČKI MODEL AKSIJALNO OPTEREĆENE I UKLEŠTENE PLOČE POSTAVLJENE NA ELASTIČNU PODLOGU**

Za postavljeni problem koji je prikazan na slici 1, potrebno je odrediti frekvencije oscilacija i kritičnu silu pri kojoj dolazi do gubitka stabilnosti ploče.

Bitne stvari koje je potrebno uočiti sa slike 1, su da je ploča (stranica  $a$  i  $b$ ) sa sve četiri strane ukleštena i da je oslonjena na elastičnu podlogu. Zatim se vidi da na ploču u pravcu ose  $x$  deluju određene sile  $P$ . Da bi se odredila frekvencija oscilacija i kritična sila pri kojoj dolazi do gubitka stabilnosti, neophodno je izvesti diferencijalnu jednačinu koja opisuje postavljeni problem. Pa tako, polazimo od osnovne diferencijalne jednačine savijanja ploče koja je poprečno opterećena, jednačina (1).

Diferencijalna jednačina savijanja ploče koja je poprečno opterećena ima oblik:

$$D\nabla^4 w = q \tag{1}$$

U ovoj jednačini  $D$  predstavlja savojnu krutost,  $\nabla^4$  bilaplasijan od  $w$  ( $w$  - ugib ploče), dok je  $saq$  predstavljen intenzitet neprekidno podeljenog opterećenja. Savojna krutost  $D$ , data je jednačinom:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2}$$

gde  $h$  označava debljinu ploče,  $\nu$  Poisson-ov koeficijent, a  $E$  Young-ov modul elastičnosti.  $\nabla^4$  bilaplasijan od  $w$  je dat jednačinom:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \tag{3}$$

Desna strana znaka jednakosti jednačine (1) tj. intenzitet neprekidno podeljenog opterećenja  $q$  predstavlja sumu svih opterećenja koja deluju na posmatranu ploču. Oscilovanje ploče, sile koje deluju uz celu dužinu stranice  $b$  kao i sile u oprugama, su opterećenja koja utiču na stabilnost poče. Navedena opterećenja prikazaće se kroz naredne jednačine.

Osnovna diferencijalna jednačina oscilovanja ploče koja se dobija primenom D'alambertov-og principa ima oblik:

$$D\nabla^4 w = -\rho h \ddot{w} \quad (4)$$

Opšta jednačina pomoću koje se opisuju problemi prikazani na slici 2 je oblika:

$$D\nabla^4 w = -\rho h \ddot{w} - cw + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5)$$

Sa slike 2 vidi se da sledeći članovi nemaju nikakav uticaj na dalje rešavanje diferencijalne jednačine. Kako nema opterećenja u pravcu y-ose, dobija se:

$$N_y = 0 \quad (6)$$

kao i u pravcu xy odnosno yx sledi da je:

$$N_{xy} = N_{yx} = 0 \quad (7)$$

U pravcu x-ose postoji opterećenje i ono je u obliku:

$$N_x = -P \quad (8)$$

Zadatkom je zadato da se krutost podloge menja prema relaciji:

$$c = k = k_0 + k_1 x \quad (9)$$

gde su  $k_0, k_1$  konstante.

Znajući sve navedene jednačine, jednačina (5) postaje:

$$D\nabla^4 w = -kw - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho h \ddot{w} \quad (10)$$

Jednačina (10) je diferencijalna jednačina kojom se rešavaju zadati problemi sa slike 2. Za napisanu jednačinu primeniće se Galerkinova metoda pomoću koje će se dalje rešavati diferencijalna jednačina.

Primenom Galerkinove metode pretpostavlja se rešenje u obliku:

$$w = F(x, y) \sin \omega t \quad (11)$$

Zatim se za jednačinu (11) odredi drugi izvod po vremenu pa postaje:

$$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \omega^2 F(x, y) \sin \omega t \quad (12)$$

Raspisivanjem bilaplasijana u jednačini (10) dobijamo istu jednačinu zapisanu u obliku:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -kw - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho h \ddot{w} \quad (13)$$

Uvrštavanjem jednačina (8),(9) i (12) u jednačinu (13), jednačina (13) postaje:

$$D \left( \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) \sin \omega t = -(k_0 + k_1 x) F \sin \omega t - P \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho h \omega^2 F(x, y) \sin \omega t \quad (14)$$

gde se deljenjem sa  $\sin \omega t$  dobija:

$$D \left( \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) = -(k_0 + k_1 x) F - P \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho h \omega^2 F \quad (15)$$

Jednačina (15) je konačna jednačina aksijalno opterećene i ukleštene pravougaone ploče na nehomogenoj elastičnoj podlozi. Pored dobijene diferencijalne jednačine potrebno je ispisati granične uslove pomoću kojih će se rešiti jednačina. Sa slike 2 će se ispisati granični uslovi za posmatranu ploču. Sve četiri stranice su ukleštene i na osnovu toga imamo da su granični uslovi:

za stranicu AB:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

za stranicu AC:

$$\begin{aligned} w(0, y) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

za stranicu BD:

$$\begin{aligned} w(a, y) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

za stranicu CD:

$$\begin{aligned} w(x, b) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, b) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

čime je predstavljeno da su za sve četiri stranice pomeranje i ugao nagiba tangente jednaki nula.

Diferencijalnu jednačinu za aksijalno opterećenu i ukleštenu pravougaonu ploču na nehomogenoj elastičnoj podlozi (15) kao i granične uslove (16-19) potrebno je prebaciti u bezdimenzijski oblik radi lakšeg rešavanja problema.

### 3. BEZDIMENZIJSKI OBLIK POSTAVLJENOG PROBLEMA PLOČE

Prebacivanjem konačne diferencijalne jednačine kao i graničnih uslova u bezdimenzijski oblik pojednostavljuje se dalje rešavanje posmatranog problema. Jednačinama u bazdimenzijskom obliku smanjuje se ukupan broj parametara za koje je potrebno pronaći rešenje.

Da bi se diferencijalna jednačina (15) napisala u bezdimenzijskom obliku, neophodno je za početak uvesti bezdimenzijske veličine u obliku:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b}; f = \frac{F}{h}; \beta = \frac{a}{b}; \lambda = \frac{Pa^2}{D}; \Omega^2 \\ &= \frac{\omega^2 \rho h a^4}{D}; B_1 = \frac{k_0 a^4}{D}; B_2 \\ &= \frac{k_1 a^5}{D}; X = \frac{w}{a}; Y = \frac{w}{b}; \end{aligned} \quad (20)$$

Uvedene bezdimenzijske veličine, jednačine (20)<sub>1,2,3</sub> uvrštavaju se u jednačinu (15) i dobija se:

$$\begin{aligned} D \left( \frac{\partial^4 f h}{\partial \xi^4 a^4} + 2 \frac{\partial^4 f h}{\partial \xi^2 a^2 \partial \eta^2 b^2} + \frac{\partial^4 f h}{\partial \eta^4 b^4} \right) &= -(k_0 + k_1 \xi a) f h - P \frac{\partial^2 f h}{\partial \xi^2 a^2} \\ &+ \rho h \omega^2 f h \end{aligned} \quad (21)$$

Zatim se množenjem prethodne jednačine sa  $\frac{a^4}{h}$  i korišćenjem jednačine (20)<sub>4</sub> dobija:

$$\begin{aligned} D \left( \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \beta^2 + \beta^4 \frac{\partial^4 f}{\partial \eta^4} \right) &= -(k_0 + k_1 \xi a) f a^4 - P \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} a^2 \\ &+ \rho h \omega^2 f h \end{aligned} \quad (22)$$

A na kraju se primenom jednačina (20)<sub>5,6,7,8</sub> na jednačinu (22) dobija konačna diferencijalna jednačina u bezdimenzijskom obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \beta^2 + \beta^4 \frac{\partial^4 f}{\partial \eta^4} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \Omega^2 f + B_1 f \\ + B_2 f \xi = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Sada je potrebno uz primenu jednačina (20) zapisati granične uslove u bezdimenzijskom obliku:

stranica AB:

$$\begin{aligned} w(x, 0) = 0 &\Rightarrow Y(0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) = 0 &\Rightarrow Y'(0) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

stranica AC:

$$\begin{aligned} w(0, y) = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = 0 &\Rightarrow X'(0) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

stranica BD:

$$\begin{aligned} w(a, y) = 0 &\Rightarrow X(1) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = 0 &\Rightarrow X'(1) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

stranica CD:

$$\begin{aligned} w(x, b) = 0 &\Rightarrow Y(1) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, b) = 0 &\Rightarrow Y'(1) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Bezdimenzijska diferencijalna jednačina (23) kao i granični uslovi u bezdimenzijskom obliku (24-27), rešavaju se uz korišćenje numeričkih metoda uz pomoć softvera Wolfram Mathematica. Navedenim jednačinama potrebno je dodati i odabrane poznate funkcije kako bi se došlo do rešenja traženih parametara.

#### 4. ANALIZA REZULTATA – ZAVISNOST FREKVENCije OSCILOVANJA OD PARAMETARA KOJI DELUJU NA PLOČU

U ovom delu predstaviće se zavisnost kružne frekvencije od ostalih parametara koji deluju na posmatranu ploču (slika 2). Na vrednost bezdimenzijske kružne frekvencije  $\Omega$  utiče: bezdimenzijski odnos stranica ploče  $\beta$ , bezdimenzijska kritična sila u aksijalnom pravcu ploče  $\lambda$ , bezdimenzijske sile u oprugama  $B_1, B_2$ .

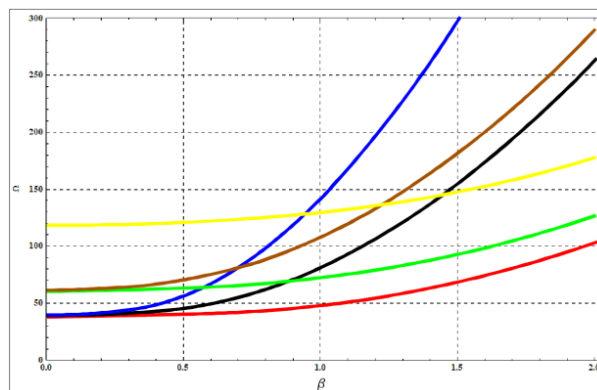
U tabeli 1 predstaviće se dobijene vrednosti bezdimenzijske kružne frekvencije oscilovanja ploče po modovima za različit odnos stranica ploče. Uzete vrednosti za bezdimenzijsku kritičnu silu u aksijalnom pravcu kao i bezdimenzijske sile u oprugama iznose  $\lambda = 40, B_1 = B_2 = 1000$ . Ovakav odabir vrednosti parametara govori da sve veličine koje deluju na posmatranu ploču imaju uticaj na istu.

Tabela 1. Bezdimenzijska kružna frekvencija po modovima za različit odnos stranica ploče kada su ostali parametri  $\lambda = 40, B_1 = B_2 = 1000$ .

	$\Omega_{m1}$	$\Omega_{m2}$
$\beta = 0.5$	39.9216	45.0004
$\beta = 1$	47.9439	72.5443
$\beta = 1.5$	68.6453	92.8958
$\beta = 2$	103.447	126.453

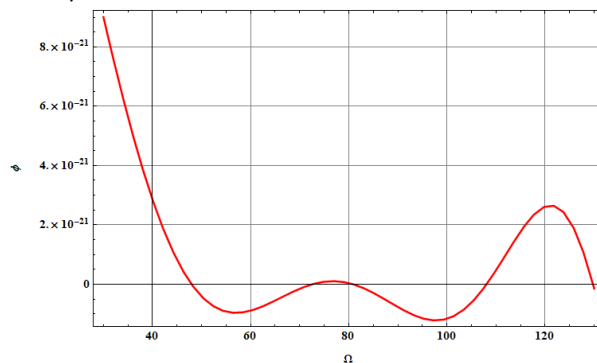
Iz tabele 1 vidi se kako se ponaša bezdimenzijska kružna frekvencija za prva dva moda u zavisnosti da li je posmatrana ploča pravougaonog (odnos stranica dat:  $\beta=0.5, \beta=1.5, \beta=2$ ) ili kvadratnog oblika (odnos stranica:  $\beta=1$ ), a da na nju ne deluje niti sila u aksijalnom pravcu niti sile u oprugama.

Može se videti da i u prvom i u drugom modu kružna frekvencija raste prilikom povećanja odnosa između dve stranice ploče. Kako se jedna strana ploče povećava u odnosu na drugu tako dolazi do povećanja bezdimenzijske kružne frekvencije. Navedeni rezultati iz tabele 1 predstavljeni su na slici 3.



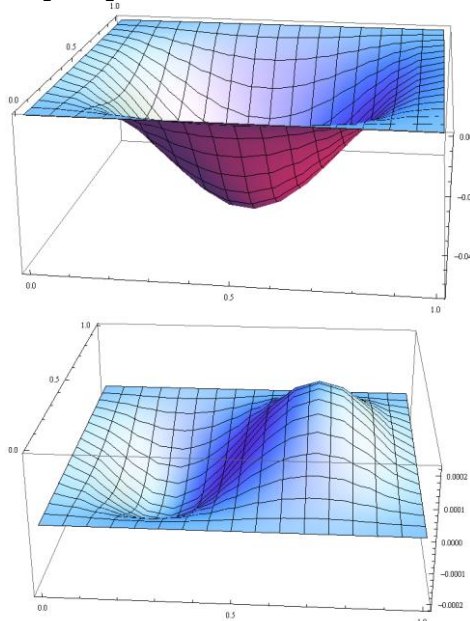
Slika 3. Grafički prikaz kružne frekvencije i odnosa stranica ploče

U nastavku slede dobijeni rezultati za ploču kvadratnog oblika  $\beta=1$ .



Slika 4. Dijagram bezdimenzijske kružne frekvencije

Na slici 4 prikazan je dijagram bezdimenzijske kružne frekvencije za slučaj kada vrednost bezdimenzijske kritične sile u aksijalnom pravcu ploče iznosi  $\lambda = 40$ , dok je vrednost bezdimenzijske sile u oprugama koje deluju na ploču  $B_1 = B_2 = 1000$



Slika 5. Oblik oscilovanja ploče – prva dva moda

Sa slike 5 vidi se kako posmatrana ploča osciluje, prva dva moda, kada na nju deluju sve posmatrane sile sa svojim vrednostima  $\lambda = 40, B_1 = B_2 = 100$ , za vrednost kružne frekvencije  $\Omega_{m1} = 47.9439$  kod prvog moda i vrednost kružne frekvencije  $\Omega_{m2} = 72.5443$  kod drugog moda.

## 5. ANALIZA REZULTATA - ZAVISNOST KRITIČNE SILE OD PARAMETARA KOJI DELUJU NA PLOČU

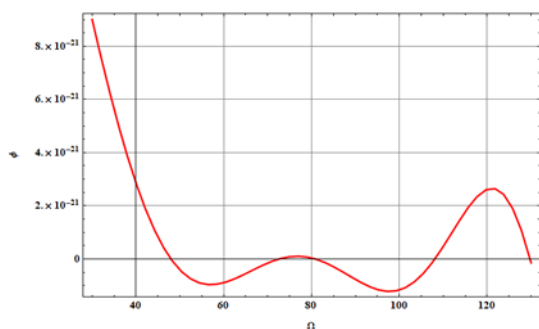
U ovom delu predstaviće se zavisnost kritične sile koja deluje u aksijalnom pravcu od ostalih parametara koji deluju na posmatranu ploču (slika 2). Na vrednost bezdimenzijske kritične sile  $\lambda$  utiče: bezdimenzijski odnos stranica ploče  $\beta$ , bezdimenzijske sile u oprugama  $B_1, B_2$ . Bezdimenzijska kružna frekvencija  $\Omega$  u ovom slučaju je jednaka nuli.

U tabeli 2 predstaviće se dobijene vrednosti bezdimenzijske kritične sile ploče za prva dva moda kod primera pravougaone i kvadratne ploče. Uzete vrednosti za bezdimenzijske sile u oprugama iznose  $B_1 = B_2 = 100$ .

Tabela 2. Bezdimenzijska kritična sila po modovima za različit odnos stranica ploče kada su ostali parametri  $B_1 = B_2 = 100$ .

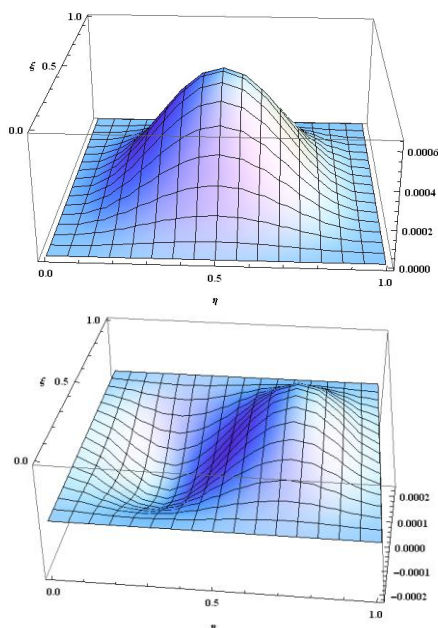
	$\lambda_{m1}$	$\lambda_{m2}$
$\beta = 0.5$	58.9968	96.5497
$\beta = 1$	109.974	128.851

U nastavku slede dobijeni rezultati za ploču kvadratnog oblika  $\beta=1$ .



Slika 6. Dijagram bezdimenzijske kritične sile  $\lambda$

Na slici 6 prikazan je dijagram bezdimenzijske kritične sile za slučaj kada je vrednost bezdimenzijske sile u oprugama koje deluju na ploču  $B_1 = B_2 = 100$ .



Slika 7. Oblik oscilovanja ploče – prva dva moda

Tražene vrednosti prva dva moda bezdimenzijske kritične sile su one tačke na dijagramu gde crvena linija preseca nultu liniju za razne vrednosti parametara koji utiču na ploču  $B_1, B_2, \beta$ . Dobijene vrednosti su vrednosti pri kojima dolazi do gubitka stabilnosti ploče, tj. ploča više nije stabilna. Kritična sila u oba moda raste prilikom povećanja odnosa između dve stranice ploče. Što je veća vrednost bezdimenzijske sile u oprugama to je vrednost bezdimenzijske kritične sile veća.

Sa slike 7 vidi se kako se posmatrana ploča savija, prva dva moda, kada na nju deluju sve posmatrane sile sa svojim vrednostima  $B_1 = B_2 = 100$ , za vrednost kritične sile  $\lambda_{m1} = 109.974$  kod prvog moda i vrednost kritične sile  $\lambda_{m2} = 128.851$  kod drugog moda.

## 6. ZAKLJUČAK

Zadatak rada je bio da se odredi vrednost bezdimenzijske frekvencije oscilovanja ploče i vrednost bezdimenzijske kritične sile pri kojoj dolazi do gubitka stabilnosti aksijalno opterećene i ukleštene pravougaone ploče na nehomogenoj elastičnoj podlozi.

Prvo je prikazana diferencijalna jednačina savijanja ploče koja je poprečno opterećena (1). Zatim se uz primenu Dalamberovog principa došlo do jednačine u kojoj se opisuje oscilovanje ploče (4). Potom se za postavljeni problem sa slike 1 uz primenu Galerkinove metode izvela diferencijalna jednačina (15) koja opisuje isti, kao i granični uslovi koji odgovaraju postavljenom problemu (16-19). Pomenute jednačine su prebačene u bezdimenzijski oblik (23, 24-27) i kao takve rešavane primenom numeričkih metoda pomoću softvera Wolfram Mathematica. Analizirani su dobijeni rezultati pri kojima dolazi do gubitka stabilnosti posmatrane ploče sa fokusom na bezdimenzijsku frekvenciju oscilovanja i bezdimenzijsku kritičnu silu. Rezultati su dati u vidu slika i tabela.

## 7. LITERATURA

- [1] Arthur W. Leissa, Vibration of plates, (NASA Report SP-160).
- [2] Bhalchandra Y. B., Vibration of Rectangular Plates, Houston, Texas, July [1966].
- [3] Hajdin N., Teorija Površinskih Nosača, (Naučna Knjiga, Građevinski Fakultet, Beograd, 1989).
- [4] S. Timošenko, S. Vojnovski-Kruger, Teorija ploča i ljuski, Građevinska knjiga - Beograd, [1962].
- [5] Szilard R., Theories and Applications of Plate Analysis, (John Wiley & Sons Inc. New Jersey) [2004].

### Kratka biografija:

**Radivoj Smiljanić;** rođen je u Sremskoj Mitrovici 1991. god. Master rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Mašinstvo – Tehnička mehanika i dizajn u tehnici odbranio je 2020.god. kontakt: radivojsmiljanic@gmail.com