Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 681.5
DOI: https://doi.org/10.24867/11BE06Stokanovic

ESTIMACIJA PARAMETARA MODELA PANDEMIJE COVID-19 OPISANOG OBIČNIM I FRAKCIONIM DIFERENCIJALNIM JEDNAČINAMA

PARAMETERS ESTIMATION FOR COVID-19 PANDEMIC MODEL DESCRIBED BY ORDINARY AND FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Smilja Stokanović, *Fakultet Tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO

Kratak sadržaj – *Tema ovog rada jeste estimacija parametara epidemiološkog matematičkog SIR modela, koji je opisan običnim i frakcionim diferencijalnim jednačinama. Ovaj rad je posvećen matematičkom modelovanju i estimaciji parametara pandemije COVID-19 uzrokovane virusom SARS-COV2. Metode koje su korištene za estimaciju parametara jesu linearna regresija i PSO algoritam.*

Ključne reči: *COVID-19, SIR model, matematički model, estimacija parametara, frakcioni račun*

Abstract - *The topic of this paper is parameters estimation of epidemiological SIR model described by ordinary and fractional differential equations. The purpose of this paper is mathematical modeling and COVID-19 parameters estimation which were caused by the SARS-COV2 virus. Methods that are used for parameters estimation are linear regression and PSO algorithm.*

Keywords: *COVID-19, SIR model, mathematical model, parameters estimation, fraction calculus*

1. UVOD

Virus SARS-COV2 koji kod ljudi izaziva bolest COVID-19, pojavio se prvi put krajem 2019. godine. Uslijed brzog širenja zaraze, nedostatka lijekova i ograničenih bolničkih resursa, svjetska pandemija je proglašena u martu 2020. godine. Prema svjetskoj zdravstvenoj organizaciji, broj oboljelih od koronavirusa do kraja jula 2020. godine iznosio je više od 10 miliona [1].Većina ljudi zaraženih koronavirusom imali su blage respiratorne poteškoće i oporavili su se bez posebnog tretmana. Najosjetljiviju grupu predstavljaju starije osobe, osobe sa kardiovaskularnim bolestima ili drugim zdravstvenim problemima [2].

Jedan od načina za predviđanje dinamike širenja epidemije jeste simulacija na osnovu matematičkog modela epidemije. Ključno kod minimizacije širenja virusa jeste, snimanje, praćenje i estimacija konačnog broja širenja pandemije. U ovom radu biće opisan epidemiološki SIR model.

2. SIR MODEL

Cilj matematičkog modela jeste da zamijeni realan sistem i pri tome se opisuje tako da karakteristike i ponašanje modela odgovaraju posmatranom sistemu. Matematički modeli se često koriste za ispitivanje dinamike prenosa zaraznih bolesti. Epidemiološki matematički model se koristi kako bi se predvidjela dinamika epidemije, odnosno kako će se ona širiti i kada će se završiti. SIR model predstavlja osnovni matematički model epidemije, koji su prvi put opisali Kermack i McKendrick [3] 1927. godine. Osnovni SIR model dijeli populaciju u tri grupe S - podložni (eng. *Susceptible*), I - zaraženi (eng. *Infected*), R- oporavljeni (eng. *Recovered*) i može se opisati sledećim diferencijalnim jednačinama na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{aligned} \tag{1}$$

Gdje su:

- S(t) - broj podložnih zarazi,
- I(t) - broj zaraženih,
- R(t) - broj oporavljenih, odnosno broj imunih na zarazu,
- N - ukupan broj populacije,
- β - stopa razboljevanja,
- γ - stopa oporavka.

Pored navedenih parametara, važno je spomenuti i osnovnu stopu reproduktivnosti (eng. *Basic Reproduction Number*), R_0, epidemiološku mjeru, koja se koristi za opisivanje prenosivosti zaraze bolesti. Matematički zapisano, osnovna stopa reproduktivnosti predstavlja odnos stope razboljevanja β i stope oporavka γ:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}. \tag{2}$$

2. ESTIMACIJA PARAMETARA SIR MODELA

Estimacija parametara podrazumijeva proces pronalaženja nepoznatih parametara datog sistema. U ovom radu urađena je *offline* estimacija parametara modela β i γ iz jednačine (1). Vrijednosti parametara SIR modela mogu se procijeniti na osnovu podataka iz prethodnog perioda. Parametri su procijenjeni korištenjem javno dostupnih podataka [4]. Takođe, bitno je napomenuti da se ukupan broj populacije, označen sa N, smatra konstantnim, odnosno da je zanemaren broj rođenih i umrlih. U nastavku teksta prikazan je

---

NAPOMENA:
Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bila dr Mirna Kapetina, docent.

postupak estimacije parametara SIR modela, širenja pandemije u Kini, odakle su podaci i preuzeti za period za koji se vodi kao prvi dan pandemije 22. januar, 2020. godine, pa do danas. U nastavku će biti prikazana dva pristupa, odnosno dva algoritma za estimaciju nepoznatih parametara.

2.1. Estimacija parametara SIR modela linearnom regresijom

Linearna regresija u statistici podrazumijeva pristup u kome se modeluje veza između skalarne promjenljive y, koja odgovara nekoj veličini, čije vrijednosti želimo da procijenimo i predstavljaju tzv. zavisnu promjenljivu i vektorske promjenljive x, koja označava više veličina koje smo u stanju da izmjerimo, a koje su u pretpostavci korelisane sa vrijednošću y [6]. Najjednostavniji model linearne regresije može se zapisati kao:

$$h(x,w) = \omega_0 + \omega_1 x_1 + ... + \omega_d x_d. \tag{3}$$

Kod linearne regresije za slučaj jednog obilježja, pretpostavljamo da je veza između obilježja x i izlazne promjenljive h, linearna, gdje je sa h označena procijenjena vrijednost izlazne promjenljive. Odnosno, predviđamo vrijednost izlazne promjenljive h na osnovu hipoteze da je ta veza linearna:

$$h_\omega(x) = \omega_0 + \omega_1 x \tag{4}$$

Kao mjera odstupanja, može se usvojiti prosječna srednja kvadratna greška, na svim uzorcima i ova mjera se naziva funkcija cijene:

$$J(\omega_0, \omega_1) = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}(h_\omega(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 \tag{5}$$

gdje su:

- M - ukupan broj uzoraka,
- $x^{(i)}$ - vrijednost x kod i-tog uzorka,
- $y^{(i)}$ - vrijednost y kod i-tog uzorka,
- $h_\omega(x^{(i)})$ - prognoza vrijednosti obilježja y na osnovu hipoteze h_ω za i-ti uzorak.

Matematički, problem se svodi na minimizaciju funkcije cijene:

$$(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1) = argmin\{J(\omega_0, \omega_1)\}. \tag{6}$$

Minimizacija funkcije cijene može se izvršiti analitički, izjednačavanjem gradijenta funkcije cijene sa nulom i numerički metodom opadanja gradijenta(*gradient descent*).

Metoda opadanja gradijenta nalazi minimum na iterativan način pomjeranjem u pravcu najbržeg opadanja. Algoritam počinje inicijalizacijom početne tačke $x(0)$ i na iterativan način konvergira ka rješenju. Pošto se podaci COVID-19 ažuriraju svakodnevno, diferencijalne jednačine (1), mogu se zapisati u diskretnom vremenu, kao diferencne jednačine:

$$\begin{aligned} S(t+1) - S(t) &= -\frac{\beta(t)S(t)I(t)}{N}, \\ I(t+1) - I(t) &= \frac{\beta(t)S(t)I(t)}{N} - \gamma(t)I(t), \\ R(t+1) - R(t) &= \gamma(t)I(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Gdje je sa t označen tekući dan, a sa $t+1$, dan posle. Kod estimacije parametara linearnom regresijom, parametri β i γ se mogu izračunati za svaki dan pojedinačno, na osnovu istorijskih podataka, korištenjem sledećih jednačina:

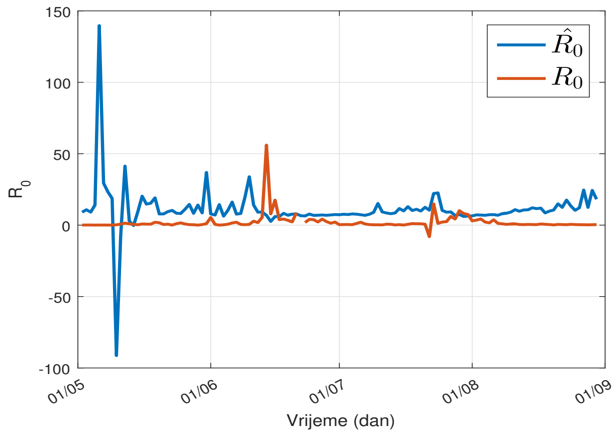
$$\gamma(t) = \frac{R(t+1) - R(t)}{I(t)}, \tag{8}$$

$$\beta(t) = \frac{[I(t+1) - I(t)] + [R(t+1) - R(t)]}{I(t)}, \tag{9}$$

Na osnovu jednačina (8) i (9), možemo estimirati nepoznate parametre β, γ, R_0 i odrediti estimirane vrijednosti broja zaraženih (I) i oporavljenih (R) korištenjem jednačine (7). Procijenjena vrijednost reproduktivnog faktora R_0, dobijenog na osnovu procijenjenih vrijednosti parametara β, γ, prikazana je na slici 1.

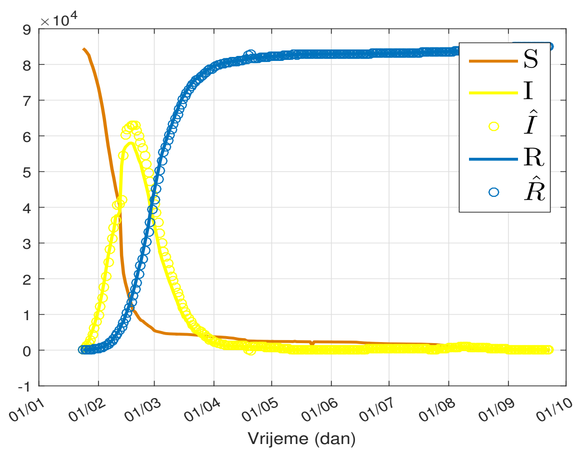
Napomena - *U nastavku teksta, sve promjenljive sa oznakom* $\hat{}$ *označavaju estimirane vrijednosti.*

Sa slike 1, možemo da zaključimo da je vrijednost R_0 dramatično opala od maja 2020. godine, međutim zbog naglih promjena vrijednosti u kratkom periodu, algoritam nije uspio da isprati sve promjene.



Slika 1: *Estimacija R_0 linearnom regresijom za SIR model epidemije COVID-19 u Kini*

Stvarne i procijenjene vrijednosti promjenljivih S, I i R prikazane su na slici 2.



Slika 2: *Estimacija parametara linearnom regresijom za SIR model epidemije COVID-19 u Kini*

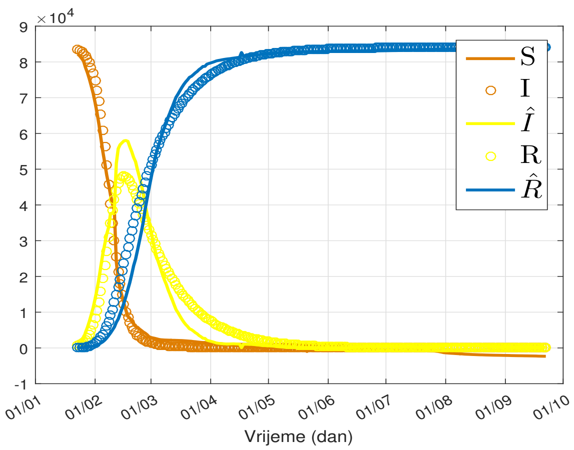
2.2.Estimacija parametara PSO algoritmom

Estimacija parametara može se izvršiti pomoću optimizacije rojem čestica (eng. *Particle Swarm Optimisation - PSO*). Ovaj optimizacioni algoritam pri pretraživanju prostora rješenja koristi skup čestica - jedinki, roj. Čestice u roju svojim kretanjem, istražuju taj prostor uz pretpostavku da će nakon izvjesnog vremena pronaći cilj, odnosno globalni optimum kriterijuma optimalnosti *f(x)*, što predstavlja analogiju stvarnom kretanju jedinski u prostoru [7].

Kod estimacije parametara PSO algoritmom smatramo da su parametri β i γ konstante i da se ne mijenjaju tokom vremena. Prema tome, može se formirati sledeći kriterijum optimalnosti:

$$J=\sum_{j=1}^{L}((S(j)-\hat{S}(j))^2+(I(j)-\hat{I}(j))^2+(R(j)-\hat{R}(j)))^2 \tag{10}$$

čijim minimiziranjem primjenom PSO algoritma, koji je pokrenut u 400 iteracija, rojem od 100 čestica, kao rezultat dao je optimalne vrijednosti parametara: $\beta=0.32$ i $\gamma=0.04$. Poređenje stvarnih vrijednosti i numeričkih vrijednosti dobijenih optimalnim parametrima, prikazani su na slici 3.



Slika 3: *Estimacija parametara PSO algoritmom za SIR model epidemije COVID-19 u Kini*

3. SIR model opisan frakcionim diferencijalnim jednačinama

Frakcioni račun (eng. *fractional calculus*) predstavlja oblast matematičke analize koja se bavi izučavanjem i primjenom izvoda i integrala proizvoljnog realnog ili kompleksnog reda. Modeli zasnovani na frakcionim diferencijalnim jednačinama pokazali su se korisnim u mehanici, fizici, elektrotehnici, medicini i mnogim drugim naukama. Izvodi necijelog reda imaju veoma važnu osobinu, koja se naziva memorijski efekat i koja ne postoji kod izvoda cijelog reda. To dalje implicira da buduće stanje frakcionog sistema ne zavisi samo od trenutnog stanja, nego i od prethodnih stanja sistema.

Pretpostavka za postojanja memorijskog efekta i zavisnost stanja od prethodnih, može da se uvede i kod broja ljudi koji su podložni zarazi. Iz tih razloga javila se ideja za modifikovanje osnovnog SIR modela sa frakcionim članom koji bi pomenuti efekat modifikovao. Takav matematički model može se zapisati kao:

$$\begin{aligned}\dot{S}+\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha}&=-\frac{\beta SI}{N},\\ \frac{dI}{dt}&=\frac{\beta SI}{N}-\gamma I,\\ \frac{dR}{dt}&=\gamma I.\end{aligned} \tag{11}$$

Kako je poznato da proces numeričkog rješavanja diferencijalnih jednačina frakcionog reda nije jednostavan, u sklopu ovog rada biće korištena ekspanziona formula opisana u radu [8], čije će osnovne postavke biti date u nastavku.

3.1. Ekspanziona formula [8]

Ekspanziona formula predstavlja analitičku, a samim tim i numeričku aproksimaciju frakcionih jednačina, koje su pokazale zavidnu tačnost, kada je najstariji izvod prvog reda.

$$\dot{x}(t)+k({}_0D_t^\alpha x)(t)=G(x,t), x(0)=x_0 \tag{12}$$

$x(t)$ predstavlja promjenljivu stanja, a t vremenski opseg. $({}_0D_t^\alpha x)(t)$ predstavlja Riemann- Liouville izvod α-tog reda i definisan je na sledeći način:

$$({}_0D_t^\alpha x)(t)=\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{x(\tau)}{(t-\tau)}d\tau, 0<\alpha<1 \tag{13}$$

Gdje Γ predstavlja gama-funkciju, a $G(x,t)$ algebarski član. Pretpostavka je da je u jednačini (12), opisanoj u radu [8], najveći izvod cijelobrojnog reda, u ovom slučaju 1, dok je k=const. Glavna ideja metode [8], jeste da se redukuje sistem (12) u sistem sa samo cjelobrojnim izvodima:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=G(x,t)-k\Big[\frac{x(t)}{t^\alpha}A(\alpha)+\sum_{i=2}^{P}B(\alpha,i)\frac{\tilde{v}_i}{t^{i-1+\alpha}}\Big]\\ &\tilde{v}_i=-(i-1)t^{i-2}x(t), i=2,...,P\end{aligned} \tag{14}$$

pri čemu moraju biti zadovoljeni početni uslovi:

$$x(0)=x_0, \tilde{V}_i(0)=0, i=2,3..P \tag{15}$$

$A(\alpha)$ i $B(\alpha,p)$ su definisani sledećim izrazima:

$$\begin{aligned}A(\alpha)&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)}\\ &\quad x\sum_{p=2}^{N}\frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{(p-1)!}\\ B(\alpha)&=-\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)}\frac{\Gamma(i-1+\alpha)}{(i-1)!}\end{aligned} \tag{16}$$

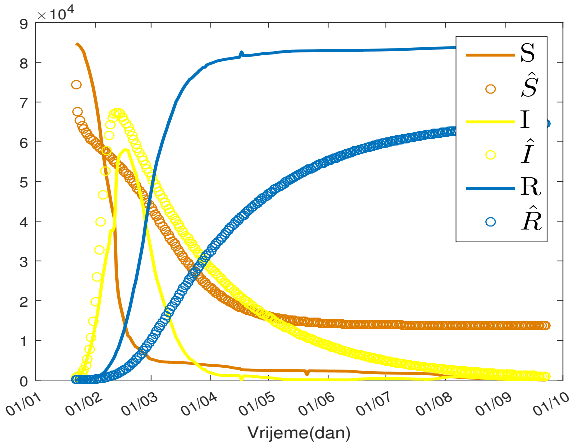
Jasno je da je broj jednačina cijelobrojnog reda, a time i tačnost aproksimacije zavisi od paramtra P, što je dalje srazmjerno broju pomoćnih promjenljivih stanja koje se uvode u sistem.

3.2. Estimacija parametara frakcionog SIR modela

Prethodno opisana ekspanziona formula (14) može se primjeniti za simulaciju frakcionizovane promenljive stanja S, koja dobija oblik:

$$\dot{S}(t)=-\frac{\beta SI}{N}-k\Big[\frac{S}{t^\alpha}+\sum_{i=2}^{N}B(\alpha,i)\frac{\tilde{v}_i}{t^{i-1+\alpha}}\Big] \tag{17}$$

Kao i kod SIR modela opisanog običnim diferencijalnim jednačinama, izvršena je estimacija parametara SIR modela upotrebom PSO algoritma. U slučaju SIR modela opisanog frakcionim diferencijalnim jednačinama, pored parametara β i γ, potrebno je estimirati i parametre α i k iz jednačine (17). Simulacija je izvršena za P=4, primjenom kriterijuma optimalnosti (10), za PSO algoritam sa 400 iteracija i 100 jedinki, dobijeni optimalni parametri su: $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.08$, $\alpha = 0.85$ i $k = 0.68$.



Slika 4: *Estimacija parametara PSO algoritmom za SIR model epidemije COVID-19 u Kini opisanog frakcionim diferencijalnim jednačinama*

4. ZAKLJUČAK

U ovom radu predstavljen je osnovni epidemiološki SIR model, koji opisuje širenje zaraze koronavirusom. Estimacija nepoznatih parametara izvršena je upotrebom PSO algoritma i linearne regresije. Uveden je i pojam frakcionog računa, pa je pored modela opisanog običnim diferencijalnim jednačinama, predstavljen i SIR model opisan frakcionim diferencijalnim jednačinama.

Postoje mnogi načini da se ova ideja proširi. Ovde je prikazan najjednostavniji epidemiološki model, međutim, postoje razne modifikacije SIR modela, koje uzimaju u obzir broj umrlih, broj rođenih i broj izloženih, te je samim tim model precizniji. Takođe, ukoliko bi se dodalo upravljanje, koje bi bilo predstavljeno u vidu vakcine ili samoizolacije, moglo bi se uporediti koja metoda bi bila najefikasnija za smanjene širenja zaraze.

5. LITERATURA

[1] „WHO Coronavirus Disease (COVID-19) Dashboard” https://covid19.who.int/

[2] „Coronavirus-World Health Organisation” https://www.who.int/health-topics/coronavirus

[3] William Ogilvy Kermack, Anderson Gray McKendrick, „Contributions to the mathematical theory of epidemics - I", Bulletin of Mathematical Biology, 1927.,

[4] „Worldometer COVID-19 CORONAVIRUS PANDEMIC” https://www.worldometers.info/coronavirus/

[5] Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko, „Modelovanje i simulacija sistema: sa primerima", Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2015.,

[6] Vladimir Crnojević, „Prepoznavanje oblika za inženjere", Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2014.

[7] Željko Kanović, Zoran Jeličić, Milan Rapaić, „Evolutivni optimizacioni algoritmi u inženjerskoj praksi", Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2017.

[8] Zoran Jeličić, Nebojša Petovački, „Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems", Springer, Verlag, 2008.

Kratka biografija:

Smilja Stokanović rođena je u Bijeljini 1997. god. Master rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Elektrotehnike i računarstva – odbranila je 2020. godine.
Kontakt: smiljastokanovic@gmail.com