

PROGRAMSKA PODRŠKA ZA ANALIZU NUMERIČKIH METODA ZA MERENJE EFEKTIVNE VREDNOSTI NAPONA**SOFTWARE FOR ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR MEASURING RMS VOLTAGE**Miloš Cicmil, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad***Oblast – ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO**

Kratak sadržaj – U radu je opisana projektovana programska podrška za analizu 6 različitih metoda za aproksimaciju efektivne vrednosti (Root mean square, RMS) napona naizmeničnog signala (koji ne mora biti prostoperiodičan), na osnovu semplovanih odbiraka, redom pravougaone, trapezne i Simpsonovih metoda (polinoma drugog i trećeg), kao i dve modifikovane Simpsonove metode [1].

Ključne reči: Merenje napona, Efektivna vrednost napona, Root mean square, RMS, Numerička integracija, Pravougaona metoda, Trapezna metoda, Simpsonova metoda, Numerička analiza

Abstract – This paper describes the operation of the developed software for analysis of 6 different methods for approximation of root mean square (RMS) voltage of a sampled signal, respectively rectangular, trapezoidal and original Simpson's polynomial methods, as well as two modified Simpson's methods.

Keywords: Voltage measurement, Root mean square, RMS, Numerical integration, Rectangle method, Trapezoidal method, Simpson method, Numerical analysis

1. UVOD

Efektivna vrednost napona naizmeničnog signala je definisana kao kvadratni koren iz srednje kvadratne vrednosti (Root mean square, RMS) funkcije napona od vremena, $u(t)$, po formuli:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) dt}. \quad (1)$$

gde je T trajanje jedne periode signala. Ova vrednost je od izuzetne važnosti u elektrotehnici (njoj je npr. direktno srazmerna snaga signala) i samim tim je veoma bitno njeno efikasno merenje.

S obzirom da se savremena tehinka za merenje uglavnom zasniva na merenjima trenutnih, diskretnih vrednosti, za kontinualne signale nepoznate prirode (nepoznate zavisnosti od vremena) je stoga nemoguće tačno izračunati RMS, tj. efektivnu vrednost, te se za njen proračun koriste različite metode

čiji je cilj minimiziranje nastale greške, uz što manju "cenu" po pitanju računarske zahtevnosti, koja je uglavnom srazmerna količini i kompleksnosti matematičkih operacija preko kojih je metoda definisana.

U radu je prikazana programska podrška, namenjena za analizu šest metoda za aproksimaciju, tj. proračun RMS različitih naizmeničnih signala (zadatog preko prvih deset harmonika). Analizira se pre svega zavisnost njihove greške od frekvencije semplovanja (f_s), tj. odnosa f_s i frekvencije merenog signala f , i zadatog naponskog "praga" koji definiše početak i kraj merenja (čije funkcionisanje je objašnjeno u daljem tekstu).

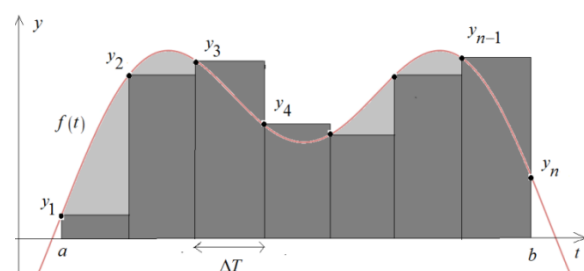
2. ANALIZIRANE METODE ZA PRORAČUN RMS

Ispitivane metode su u suštini metode za numeričku aproksimaciju integrala iz formule (1), za ekvidistantne odbirke (semplove) nastale usled konstantne f_s , i one su redom:

1. (Leva) pravougaona metoda
2. Trapezna metoda
3. Prva Simpsonova metoda (metoda polinoma drugog reda)
4. Druga Simpsonova metoda (metoda polinoma trećeg reda)
5. Modifikovana Simpsonova metoda polinoma drugog reda
6. Modifikovana Simpsonova metoda polinoma trećeg reda

2.1. Pravougaona metoda

Jedna od najčešće korišćenih integracionih metoda za numeričku integraciju jeste pravilo levih ili desnih pravougaonika [1]. Ovde je analizirana samo metoda levih pravougaonika i njena ilustracija je data na Slici 1.



Slika 1. Ilustracija leve pravougaone metode [2]

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Dragan Pejić, vanred. prof.

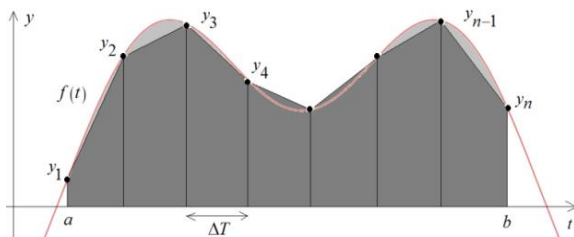
Integral se aproksimira sumom površina pravougaonika gde se za jednu njegovu stranicu uzima vrednost širine podintervala ΔT , a za vrednost druge stranice pravougaonika vrednost funkcije u levoj krajnjoj tački tog podintervala [1]. Odatle se dobija izraz za aproksimiranu RMS:

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n u^2(i\Delta T) \Delta T} = \sqrt{\frac{\Delta T}{T} \sum_{i=1}^n u^2(i\Delta T)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^2(i\Delta T)} \quad (2)$$

Odbirci $u(i\Delta T)$ se uzimaju redom počevši od prve semplovane vrednosti veće od nule, uzimajući potom sve pozitivne, pa potom sve negativne vrednosti (kraj obeležava prvi potom opet pozitivan odbirak, koji se ne uzima). Takođe, umesto nule, zadati "prag" koji definiše početak i kraj merenja, tj. semplovanja, se u aplikaciji može postaviti na proizvoljnu vrednost, i to je jedna od ključnih veličina čiji uticaj se projektovanim alatom može analizirati.

2.2. Trapezna metoda

Trapezna metoda numeričke integracije se zasniva na sumiranju integrala podintervala, koji geometrijski predstavljaju trapeze, kao što je prikazano na Slici 2.



Slika 2. Ilustracija trapezne metode [2]

Za ovu metodu se radi tačnije aproksimacije uzima jedan više odbirak (sempl) nego za pravougaonu metodu, tj. i prethodno pomenuti prvi odbirak veći od praga (jer se inače dobija veća greška uvek istog znaka (pozitivna sistematska greška) [1]).

Po ovoj metodi se za RMS dobija izraz:

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=2}^n u_i^2 + \frac{u_1^2 + u_{n+1}^2}{2} \right)} \quad (3)$$

gde je n broj odbiraka ne računajući poslednji veći od praga, tj. kao po pravougaonoj metodi.

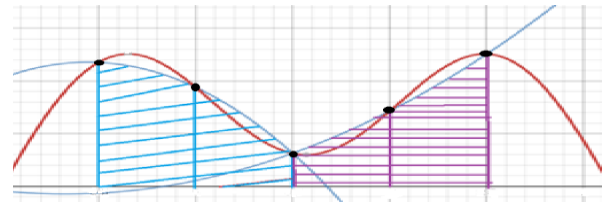
Za razliku od pravougaone metode, u kojoj su svi sabirci istog značaja, ovde za efektivnu vrednost možemo uočiti da se prvi i poslednji odbirak uzimaju sa upola manjom težinom [1].

2.3. Prva Simpsonova metoda (metoda polinoma drugog reda)

Na Slici 3 je ilustrovana numerička integracija funkcije integracionim polinomom drugog reda [1].

Tačna vrednost ovog integrala jednaka je površini ispod date funkcije (crvena kriva), a približna vrednost površini ispod krive polinoma nad periodom (plave krive) [1].

Takođe se i ovde, kao i za trapeznu metodu, radi tačnije aproksimacije, uzima jedan odbirak više nego za pravougaonu.



Slika 3. Ilustracija prve Simpsonove metode (metode polinoma drugog reda) [1]

Za tako definisan proračun integrala se za RMS dobija izraz:

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{u_1^2 + u_n^2}{3} + \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} u_{2i}^2 + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} u_{2i+1}^2 \right)} \quad (4)$$

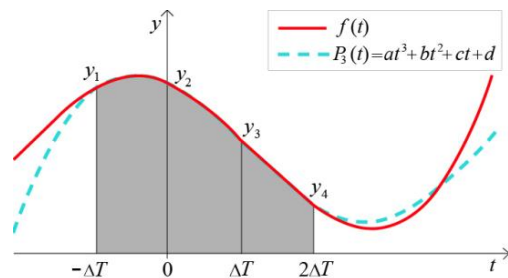
gde je n broj uzetih odbiraka (dakle računajući i poslednji odbirak veći od praga).

Nedostatak ove metode je da je njena primena moguća jedino ukoliko je broj odbiraka neparan.

2.4. Druga Simpsonova metoda (metoda polinoma trećeg reda)

Ova metoda se zasniva na podeli celog intervala integracije na grupe od po četiri uzastopna odbirka i aproksimaciji integrala funkcije nad tim intervalima polinomom trećeg reda. Usled toga ona se može primeniti samo ukoliko je broj odbiraka oblika $3k+1$, gde je k ceo broj (npr. 10, 13). Za nju se takođe, kao za prethodne dve metode, uzima jedan odbirak više nego za pravougaonu metodu, tj. završno sa odbirkom koji pređe prag nakon periode.

Na Slici 4 je ilustrovana njena primena.



Slika 4. Ilustracija Druge Simpsonove metode (metode polinoma trećeg reda) [2]

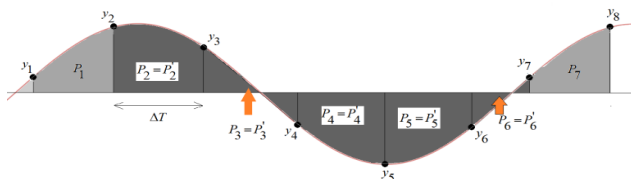
Ovde se za aproksimaciju integrala dobija izraz:

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{3}{8} (u_1^2 + u_n^2) + \frac{9}{8} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{3}} u_{2+3k}^2 + \frac{9}{8} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{3}} u_{3+3k}^2 + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}} u_{4+3k}^2 \right)} \quad (5)$$

2.5. Modifikovana Simpsonova metoda polinoma drugog reda

Na Slici 5 je prikazana ilustracija metode koja predstavlja modifikaciju Simpsonovog pravila, koju predlažu autori rada [1]. Ona je zamišljena kao rešenje za problem koji se javlja ako je broj odbiraka paran, i ona se, za razliku od originalne Simpsonove metode polinoma drugog reda, može primeniti na bilo kom broju odbiraka.

Za nju se uzima još jedan dodatni odbirak u odnosu na prethodne tri metode, dakle uključuju se i prva dva odbirka koja pređu prag nakon periode.



Slika 5. Ilustracija modifikovane Simpsonove metode polinoma drugog reda [2]

Proračun integrala se vrši sumiranjem integrala nad podintervalima određenim sa svaka 3 uzastopna odbirka, kao što je prikazano na Slici 5, te dolazi do dvostrukog uračunavanja svih podintervala osim prvog i poslednjeg, što se koriguje u konačnom izrazu za vrednost proračunatog integrala, i odatle se za proračunati RMS dobija izraz:

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \left(\frac{u_1^2 + u_n^2}{6} + \frac{5}{6} (u_2^2 + u_{n-1}^2) + \sum_{i=3}^{n-2} u_i^2 \right)} \quad (6)$$

gde je \$n\$ broj odbiraka uzetih za aproksimaciju.

2.6. Modifikovana Simpsonova metoda polinoma trećeg reda

Ova metoda je zamišljena sa istom idejom kao i prethodna, da sumiranjem integrala nad podintervalima određenim sa svaka četiri uzastopna odbirka, eliminiše potrebu originalne Simpsonove metode polinoma trećeg reda za specifičnim brojem odbiraka, tako da ova metoda može kao i prethodna da se primeni za bilo koji broj odbiraka.

Za ovu metodu se uzima još jedan dodatni odbirak u odnosu na prethodnu metodu, dakle uključuju se i prva tri odbirka koja pređu prag nakon periode, i kod nje dolazi do trostrukog uračunavanja svih podintervala osim spoljašnjih, što se koriguje u konačnom izrazu za vrednost proračunatog integrala, i odatle se za proračunati RMS dobija izraz:

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{(n-3)} \left(\frac{u_1^2 + u_n^2}{8} + \frac{1}{2} (u_2^2 + u_{n-1}^2) + \frac{7}{8} (u_3^2 + u_{n-2}^2) + \sum_{i=4}^{n-3} u_i^2 \right)} \quad (7)$$

gde je \$n\$ broj odbiraka uzetih za aproksimaciju.

3. OPIS SIMULACIJE

Cilj softvera je da za zadati signal izračuna tačnu vrednost RMS i ispita kolika je tačnost, tj. greška svake od šest metoda za aproksimaciju RMS predstavljenih u

prethodnom delu teksta, i to u zavisnosti od sledećih parametara:

1. Samog zadatog signala
 2. Naponskog praga koji definiše početak i kraj periode, tj. semplovanja
 3. Odnosa frekvencije semplovanja i frekvencije zadatog signala \$fs/f\$
1. Broja koraka (proračuni se simuliraju za redom više početnih trenutaka, ekvidistantno uzetih između početka periode zadatog signala i početka periode semplovanja)

Prikaz korisničkog interfejsa projektovanog softvera dat je na Slici 6.



Slika 6. Prikaz korisničkog interfejsa projektovanog softvera

Pojedini rezultati simulacije se ispisuju na određenim poljima na interfejsu, pojedini se predstavljaju grafički, a pojedini skladište u izlazne datoteke zarad daljih ispitivanja.

3.1. Zadati signal

Signal na kojem se simulira semplovanje i sprovede analize se zadaje preko amplituda i faza svojih prvih deset harmonika, u gornjem levom delu interfejsa.

Ispod toga se nalazi dugme za sračunavanje njegove tačne vrednosti RMS, kao koren iz polovine sume kvadrata amplituda svakog harmonika. Takođe se pritiskom na to dugme i prikazuje jedna perioda signala u novoootvorenom prozoru.

Jasno je da se za različite zadate signale dobijaju različite aproksimacije po svim metodama, različitim tačnosti, odnosno grešaka.

3.2. Naponski prag koji definiše početak i kraj periode

Semplovanje se vrši ekvidistantno sa frekvencijom \$fs\$ zadatom preko \$fs/f\$ (odnosa frekvencije semplovanja i frekvencije zadatog signala), na jednoj periodi zadatog signala. Perioda signala se "detektuje", kao što je to slučaj i u konkretnoj tehnici koja se u praksi koristi za merenje RMS nepoznatih signala, poređenjem semplovanih vrednosti sa odabranim naponskim pragom koji definiše početak i kraj periode i semplovanja, uz pretpostavku da signal u toku svoje jedne periode prolazi kroz prag samo jedanput u rastućem i jedanput u opadajućem trendu (kao što je to npr. slučaj sa prostoperiodičnim signalom). Prolaz u rastućem trendu, tj. prvi odbirak koji je veći od praga, tako da je njemu prethodni bio manji ili jednak pragu, predstavlja prvi odbirak za proračun, i potom se uzimaju redom svi odbirci dok se ne desi opet isti slučaj, da je jedan odbirak manji ili jednak pragu, a drugi veći od

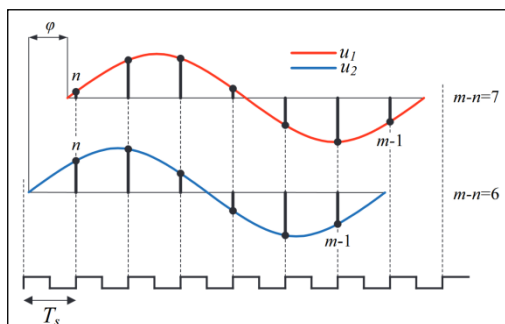
praga. Potom se uzimaju još i taj prvi odbirak veći od praga, koji se koristi za trapeznu i originalne Simpsonove metode, i još sledeća dva odbirka, koji su potrebni za predstavljene modifikovane Simpsonove metode.

Na osnovu opisanog algoritma za “detekciju” periode zadatog signala, lako se može zaključiti da postoje signali za koje ovaj algoritam neće dobro detektovati periodu, što su signali koji više puta prolaze kroz zadati prag, i za takve signale ovaj softver nije predviđen.

Dosadašnje analize [3,1] su pokazale da se po svim metodama za aproksimirani RMS dobija mnogo manja greška ukoliko se za prag uzme vrednost približna pravoj vrednosti RMS zadatog signala, nego recimo 0, i to se potvrđuje simulacijama ovog alata.

3.3. Odnos frekvencije semplovanja i frekvencije zadatog signala f_s/f

Zadati odnos f_s/f direktno definiše broj odbiraka na osnovu kojeg se vrši semplovanje zadatog signala. S obzirom da, kao i u praksi, ovaj odnos ne mora biti celobrojan, može se desiti da samo zavisi od trenutka kada se počne sa semplovanjem nekad imamo više a nekad manje odbiraka, kao što je prikazano na Slici 7, što značajno utiče na proračun RMS po bilo kojoj metodi.



Slika 7. Prikaz kako za isti signal, f_s/f i prag, samo zavisi od početnog trenutka semplovanja, nekad možemo imati npr. sedam, a nekad šest odbiraka koji odgovaraju jednoj periodu

Stoga se, radi što bolje analize prosečnih performansi metoda, proračuni u softveru simuliraju za redom više početnih trenutaka, ekvidistantno uzetih između početka periode zadatog signala i početka periode semplovanja T_s , čiji broj se definiše u interfejsu pod poljem “Broj ponavljanja”. Proračun RMS se vrši za svaki ovako odabran trenutak, za svaku od šest predstavljenih metoda, i rezultati se u vidu matrice brojnih vrednosti (zadate preciznosti) beleže u fajl pod imenom “Rezultati 1.txt”, a u donjem desnom delu intefejsa se prikazuju srednja vrednost proračunate RMS za svaku metodu, kao aritmetička sredina izračunatih RMS za svaki od navedenih početnih trenutaka, a desno od njih se prikazuje i njihova relativna greška (u odnosu na prethodno opisano teoretski izračunatu tačnu vrednost RMS zadatog signala). Ukoliko je broj odbiraka takav da originalne Simpsonove metode ne mogu da se primene, ti slučajevi se ne uzimaju za proračun srednje vrednosti RMS.

Softver ima opciju i za vršenje analize tačnosti metoda za zadati interval vrednosti odnosa f_s/f , na osnovu koje se može bolje shvatiti i predvideti ponašanje metoda za proizvoljan odnos f_s/f . Parametri koji definišu početak, kraj i korak ovog intervala se zadaju u donjem levom delu interfejsa. Ispod njih se nalazi dugme “Prikaži”, pritiskom na koje se na osnovu zadatog intervala za svaki zadati korak, grafički prikazuju:

1. Proračunate (srednje) vrednosti RMS po svim metodama, kao i tačna vrednost RMS
2. Standardna devijacija za proračunate RMS
3. Minimalna i maksimalna izračunata vrednost za svaku RMS

Uporedo se dobijeni rezultati beleže i u fajl pod nazivom “Rezultati 2.txt”.

4. ZAKLJUČAK

Projektovani softver omogućuje brzo i lako ispitivanje performansi navedenih šest metoda za aproksimaciju RMS zadatog signala, u zavisnosti od nekoliko ključnih parametara, poput odnosa frekvencije semplovanja i frekvencije zadatog signala f_s/f , i naponskog praga koji definiše početak semplovanja, te će se koristiti kao alat za buduća istraživanja na ovu temu.

Za sada imamo neke zaključke za prostoperiodičan oblik signala, a za složenoperiodične slede dalja istraživanja korišćenjem ovog alata.

5. LITERATURA

- [1] M. Bulat, S. Mirković, D. Pejić, M. Urekar, Đ. Novaković i N. Gazivoda, “Primena numeričkih metoda integracije na računanje efektivne vrednosti”, *ETRA 2019*, Srebrno jezero, Srbija, 2019.
- [2] M. Bulat, S. Mirković, D. Pejić, P. Sovilj, M. Urekar, Đ. Novaković i N. Gazivoda, “Modifikacija Simpsonovih Pravila Numeričke Integracije Pri Određivanju Efektivne Vrednosti Napona”, *Kongres metrologa*, Šabac, Srbija, Oktobar 2019,
- [3] S. Mirković, D. Pejić, M. Urekar, B. Vujičić, Đ. Novaković, “Improvement of an Existing Method of Asynchronous Sampling for Determining RMS Value”, *Serbian Journal Of Electrical Engineering*, Vol. 15, No. 1, Februar 2018

Kratka biografija:



Miloš Cicmil rođen je u Vrbasu 1993. god. Master rad na Fakultetu tehničkih nauka iz oblasti Elektrotehnike i računarstva – Instrumentacija i merenje odbranio je 2019.god.

kontakt: miloscicmil@rocketmail.com