



RADONOVA TRANSFORMACIJA U TOMOGRAFSKOJ REKONSTRUKCIJI SLIKA  
RADON TRANSFORMATION IN THE TOMOGRAPHIC IMAGE RECONSTRUCTION

Bojana Velečković, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast- MATEMATIKA U TEHNICI

**Kratak sadržaj** – U ovom radu su analizirane osobine Radonove transformacije i njena primena u tomografskoj rekonstrukciji slika. U eksperimentalnom delu su prikazani i analizirani rezultati rekonstrukcije realizovane u Matlab programskom jeziku.

**Ključne reči** – Tomografija, Radonova transformacija, Kompjuterska tomografija

**Abstract** – This paper analyzes the properties of Radon transformation and its application in tomographic image reconstruction. In the experimental part, the results of the reconstruction realized in the Matlab program package were presented and analyzed.

**Keywords:** Tomography, Radon transformation, Computer tomography

1. UVOD

Digitalna obrada slike odnosi se na obradu slike pomoću digitalnih računara. Zasnovana je na matematičkim formulama i algoritmima. Tomografija, kao nauka, bavi se rekonstrukcijom digitalnih slika na osnovu projektovanih podataka. Ceo naziv kompjuterska tomografija, skraćeno CT [3], vezujemo za radiološku metodu snimanja koja pored rendgenskih zračenja primenjuje i tomografiju.

Posmatranjem istog objekta iz više različitih uglova dobijamo projekciju datog tela. Kada je u pitanju diskretna tomografija (DT) [1] broj projekcija je znatno manji nego u CT.

U slučaju CT kodomen od funkcije  $f$  je "skoro" beskonačan skup (npr. ograničen memorijom kompjutera), dok kod DT kodomen od  $f$  je diskretan skup od nekoliko vrednosti (npr. 0, 0.2, 0.5, 1). Još veća ograničenja se javljaju ako funkcija  $f$  uzima samo vrednosti 0 i 1, tada se diskretna tomografija naziva binarna tomografija. Ona se bavi rekonstrukcijom binarnih slika. Problem rekonstrukcije slika iz nekoliko projekcija može da se pretvori u u problem rešavanja sistema jednačina. Sistem linearnih jednačina zapisuje se u matričnom obliku

$$Ax = b, A \in R^{M \times N}, x \in R^N, b \in R^M,$$

gde se matrica  $A$  naziva projekciona matrica i svaka vrsta je određena jedim projektovanim zrakom.

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Tibor Lukić, vanredni profesor.

Ovaj sistem je najčešće neodređen, odnosno ima beskonačno mnogo rešenja, jer ima više nepoznatih (piksela) nego jednačina (projektovanih zrakova).

Prilikom rekonstrukcije binarne slike ako se koristi samo horizontalna i vertikalna projekcija zrakova, slika se može rekonstruisati pomoću Ryserovog algoritma. Da bi mogli da koristimo Ryserov algoritam potrebno je da matrica (slika) bude hv – konveksna [2]. Da bi matrica bila hv – konveksna niz crnih piksela ne sme biti prekinut ni u horizontalnom ni u vertikalnom smeru. Ako prilikom rekonstrukcije ne dobijemo odgovarajuću matricu, pomoću operacije svičevanja možemo ispraviti.

Međutim, jedan od najpopularnijih transformacija je Radonova transformacija [4], koja je u daljem radu obrađena. Radonova transformacija se veoma uspešno koristi u medicini, astronomiji, geologiji, kao i drugim naukama.

2. RADONOVA TRANSFORMACIJA

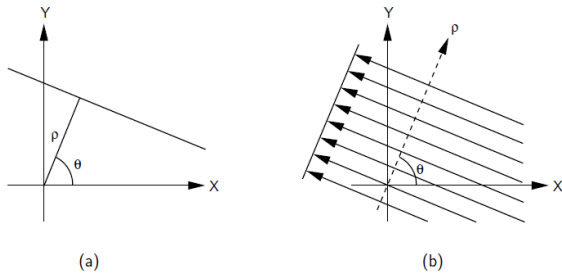
Tomografski procesi projekcije i rekonstrukcije se matematički mogu modelirati kroz Radonovu direktnu i inverznu transformaciju. Matematička veza slike i mernih podataka iz detektora daje Radonovu transformaciju, dok problem rekonstrukcije tomografske slike se može rešiti primenom inverzne Radonove transformacije.

Podimo od toga da projekcija zraka prolazi kroz objekat. Taj signal slabi lokalno u tački objekta  $(x, y)$ , funkciju slabljenja označićemo sa  $f(x, y)$ . Funkcija slabljenja govori nam nešto o materiji kroz koju naš projektovani zrak prolazi. Cilj nam je da vizualizujemo funkciju slabljenja  $f(x, y)$  za sve tačke na snimljenom objektu i da na taj način odredimo izlaznu, odnosno rekonstruisanu sliku. Na osnovu našeg znanja o jačini projektovanog zračenja koji smo pustili, kao i koliko je on oslabio duž nekog pravca, želimo da rekonstruišemo  $f(x, y)$ . Za datu funkciju  $f: R^2 \rightarrow R$ , Radonova transformacija se definiše kao krivolinijski integral od  $f$  duž prave linije. Sa  $\rho$  označavamo rastojanje od koordinatnog početka (originala) do projektovanog zračenja (za koji se pretpostavlja da se kreće pravolinijski), gde je  $t$  neki parametar linije, dok  $\theta$  predstavlja ugao pod kojim zraci prolaze kroz određeni objekat, kao što je prikazano na Slici 1. (a).

Parametarski prostor  $(\rho, t)$  i koordinatni prostor  $(x, y)$  međusobno su povezani rotacijom koordinatnog sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ t \end{pmatrix} \quad (1).$$

Pretpostavićemo da su  $A$  i  $B$  ulazna i izlazna tačka projektovanog zraka u objekat. Tada posmatramo sledeći krivolinijski integral duž prave  $AB$ :



Slika 1. (a) Linija u  $R^2$  definisana uglom  $\theta \in [0, \pi]$  sa minimalnom udaljenosti  $\rho \in R$  od koordinatnog početka. (b) Data je funkcija  $f: R^2 \rightarrow R$ , Radonova transformacija svake projekcije definisana je kao integral  $f(x, y)$  ograničen za određenu liniju. Slika preuzeta iz [5]

$$\int_{AB} f(x, y) ds,$$

gde je  $ds = \sqrt{x^2 + y^2} dt$  diferencija luka. Pošto iz (1) imamo da je  $x(t) = \rho \cos \theta - t \sin \theta, y(t) = \rho \sin \theta + t \cos \theta$ , pa sledi da je  $ds = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1 dt$ . Zamenom argumenata funkcije  $f$ , dobijamo formalnu definiciju Radonove transformacije,

$$R(\rho, \theta)[f(x, y)] := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dt \quad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (3)$$

gde oznaka  $\delta$  označava  $\delta$  – funkciju koja je definisana sa

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

U nastavku ćemo pokazati da ova jednakost stvarno važi, koristimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax + b) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \delta(x) dx = \frac{1}{a} f\left(\frac{-b}{a}\right), \quad (4)$$

Jednakost jednačine (2) i jednačine (3) važi za slučaj kada je  $\sin \theta \neq 0$ .

(Pseudo) Inverzna Radonova transformacija (bez filtriranja),

$$f(x, y) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} R(\rho, \theta) \Big|_{\rho = x \cos \alpha + y \sin \alpha} dQ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} R(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) dQ.$$

Ova transformacija daje mutne slike, pa je potrebno primeniti odgovarajuće filtere. Inverzna Radonova transformaciju možemo naći na više načina. Najčešći način jeste korišćenje filtrirane projekcije unazad i Furijeove transformacije.

## 2.1. Furijeova transformacija

Furijeova transformacija je fundamentalna za sve tehnike rekonstrukcije zasnovane na transformaciji, kao što je filtrirana povratna projekcija (filtered backprojection). Identifikujmo Furijeovu transformaciju za projekciju  $R(\rho, \theta)$  u odnosu na parametar  $v$  za

$$S_{\theta}(v) = F[R(\rho, \theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} R(\rho, \theta) e^{i2\pi v \rho} d\rho. \quad (5)$$

Nakon dopunjavanja jednačine (3) u (5) i sređivanjem promenljivih dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) e^{i2\pi v \rho} d\rho \right\} dx dy. \quad (6)$$

Primenom jednačine (4) i nakon integraljenja dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi v(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy = F(v \cos \theta, v \sin \theta). \quad (7)$$

Pokazali smo da postoji veza između FT projekcije objekta i FT unutrašnjosti objekta. Procedura:

1. Odredimo projekcije (sinogram)
2. Zatim odredimo njihovu FT
3. Primenimo ram-lak filter koji pojačava visoke frekvencije (high - pass filter)
4. Na kraju odredimo inverznu dvodimenzionalnu FT i dobijamo rekonstruisanu sliku.

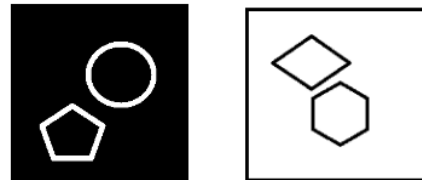
Korišćenjem formule za dvodimenzionalnu FT dobija se formula za računanje Inverzne Radonove transformacije

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |v| S_{\theta}(v) e^{i2\pi v(x \cos \theta + y \sin \theta)} dv \right] d\theta.$$

Jedan od problema jeste i način snimanja. Aparat koji snima objekat se okreće pa ne znamo koliki je ugao u pitanju, već nam uređaj koji snima daje rezultat u funkciji vremena pa na osnovu ugaone brzine aparata određujemo ugao. Ponekad već imamo sliku, pa nam je potrebno da odredimo Radonovu transformaciju.

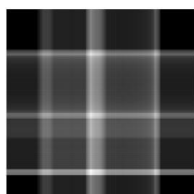
## 3. EKSPERIMENTALNI REZULTATI PRIMENOM RADONOVE TRANSFORMACIJE

U nastavku prvo će biti predstavljena rekonstrukcija binarnih slika. Posmatrano je koliko projekcija je potrebno kako bi se rekonstruisala crno-bela slika u kojoj su isključivo zastupljene crna i bela boja. Posmatramo slike na kojima je vršen eksperiment.

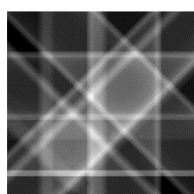


Slika 2. Predstavlja crno-belu kombinaciju pozadine i geometrijskih objekata kao najjednostavniju kombinaciju.

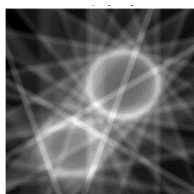
Prve dve slike u oba slučaju predstavljaju rekonstrukciju slike iz dve i četiri projekcije, dok je u naredne dve slike broj projekcija dvocifren. Za dobijanje dobre projekcije bilo je potrebno 180 projekcija.



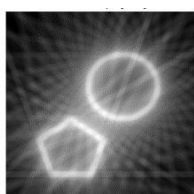
(a)



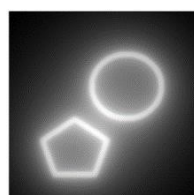
(b)



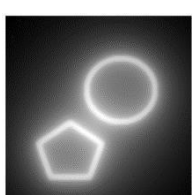
(c)



(d)



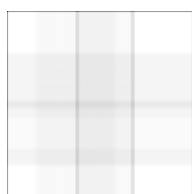
(e)



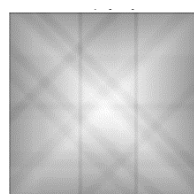
(f)

Slika 3. Rekonstrukcija slike sa crnom pozadinom. Slika (a) je rekonstrukcija iz dve projekcije, kao i pod (b) gde imamo projekciju iz četiri ugla. Slika (c) je deset projekcija, na njoj su već vidljivi obrisi geometrijskih tela. (d) je rekonstrukcija iz osamnaest projekcija, (e) devedeset projekcija i na kraju (f) iz 180 projekcija.

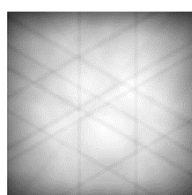
Kao što možemo da primetimo, geometrijska tela su prepoznatljiva već iz deset projektovanih uglova. Veoma dobra rekonstrukcija slike je dobijena iz 90 projektovanih uglova. Dok je najčistija rekonstrukcija slike dobijena iz 180 uglova projektovanih zraka. Gore navedenu rekonstrukciju ćemo uporediti sa sledećom.



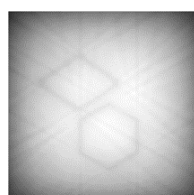
(a)



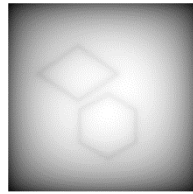
(b)



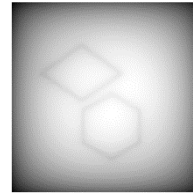
(c)



(d)



(e)



(f)

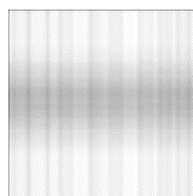
Slika 4. Rekonstrukcija slike sa belom pozadinom i crnim geometrijskim objektima. Na slici (a) je prikazana rekonstrukcija iz dva projektivna ugla, (b) iz četiri ugla projektovani zruci, slika (c) je deset projekcija na njoj se i dalje ne vide geometrijski oblici. Sa osamnaest projektovanih zraka (d) vide se obrisi geometrijskih tela, već sa devedeset projekcija (e) i stoosamdeset projekcija (f) rekonstrukcija je znatno uspešnija.

Možemo primetiti da slika sa crnom pozadinom i belim geometrijskim objektima je bolje obrađena. Geometrijski objekti su vidljiviji u odnosu na drugu sliku sa belom pozadinom.

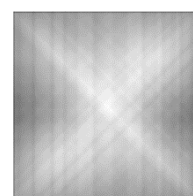
Slika sa belom pozadinom čak i nakon projektovanih zraka iz 180 uglova nije u potpunosti rekonstruisana. Međutim, za narednu sliku koja ima belu pozadinu i na kojoj je automobilska tablica, nije bilo dovoljno ni projekcija iz 180 uglova, slika je i dalje slabo vidljiva.



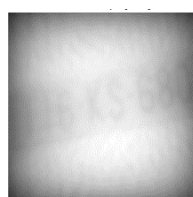
Slika 5. Automobilska tablica



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Slika 6. Rekonstrukcija automobilske tablice. Projekcije su iste kao u prethodna dva primera.

Kao što može da se primeti za rekonstrukciju je bilo potrebna 180 projekcija i sa toliko projekcija slika nije čista kao prethodne dve. Sa većim brojem projekcija slika nije bila jasnija i dalje. Možemo da zaključimo što su kontrasti jači (boje intenzivnije) to je proces bolji. Za obradu ovih fotografija korišćena je Radonova transformacija koju smo u prethodnom poglavlju obrađivali.

#### 4. ZAKLJUČAK

Visok kvalitet slike nije uvek ključan cilj. U zavisnosti od potreba koje se zahtevaju, digitalna slika se rekonstruiše iz dve, četiri ili više projekcija. Što je veći broj projekcija to će slika biti boljeg kvaliteta. Metod sa dve i četiri projekcije najčešće se koristi u industrijskoj proizvodnji kada su potrebni crno-beli snimci koji pokazuju odsustvo ili prisustvo nekog specifičnog materijala, pretežno homogene strukture.

Kod korišćenja u medicinske svrhe vodi se računa da se koristi što manji broj projektovanih zraka kako bi se uticaj zračenja sveo na minimum. Zbog štetnosti zračenja koja nastaje usred velikog broja projektivnih zraka nauka teži da napravi modele koji će dati kvalitetnu sliku uz što manji broj projekcija.

#### 7. LITERATURA

- [1] G. T. Herman, A. Kuba, "Discrete Tomography", Springer Science, USA, 1999
- [2] E. Barcucci, A. D. Lungo, M. Nivat, R. Pinzani, "Reconstructing convex polyominoes from their horizontal and vertical projections", Theoretical Computer Science, pp. 321-347, 1996
- [3] M. Poth, I. Lendak, "Branch and Bound Discrete Tomography Reconstruction of Binary Contours", SISY, Subotica, pp. 29-32, 2010
- [4] H. Gabor, "Fundamentals of computerized tomography: image reconstruction from projections", Springer Science USA, 2009

#### KRATKA BIOGRAFIJA



**Bojana Velečković** rođena je u Novom Sadu 1988. god. Osnovne i master studije završila je na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Primenjena matematika. Dok druge master studije završava na Fakultetu – tehničkih nauka smer Matematika u tehničari.