

**КОНТРОЛА ГРАНИЧНОГ СТАЊА УПОТРЕБЉИВОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЈА ПРИ  
ОГРАНИЧЕНОМ ПРЕДНАПРЕЗАЊУ ПРИМЕНОМ РАЗВИЈЕНОГ МАТЛАБ АЛАТА  
SERVICEABILITY LIMIT STATE CHECK AND OPTIMIZATION IN LIMITED PRE-  
STRESSING USING THE DEVELOPED MATLAB TOOL**

Александар Кањевац, Драго Жарковић, Факултет техничких наука, Нови Сад

**Област:** – ГРАЂЕВИНАРСТВО

**Кратак садржај** – У оквиру овог рада приказана је контрола граничног стања употребљивости и оптимизација преднапрегнуте греде путем алата развијеног у Matlab окружењу. Концепт анализе заснива се на идеји искоришћења капацитета чврстоће бетона на затезање у домену ограниченог преднапрезања. За ову врсту анализе креиран је алат у Matlab-и, намењен за „локални“ ниво анализе, у прелиминарним фазама прорачуна. Током рада, тема је обрађена кроз три целине. Кроз увод говори се о могућности уштеде материјала при изради преднапрегнутих конструкција, и приступу анализи са аспекта граничног стања употребљивости. Затим, кроз друго поглавље стичу се основне информације о концепту преднапрезања. Коначно, у трећем поглављу говори се о току анализе преднапрегнуте греде путем алата развијеног у Matlab окружењу. Развијени софтверски алат у могућности је одредити почетну силу преднапрезања у складу са допуштеним напонима у челику и бетону. На основу почетне силе преднапрезања одредити потребан број ужади за формирање каблова. Након тога, приказати губитке силе преднапрезања, као и вредности коначне силе преднапрезања након временских губитака. Алат поседује могућност контроле напона у бетону у тренутку утезања каблова, као и у току експлоатације.

**Кључне речи:** преднапрегнути бетон, гранично стање употребљивости, Matlab, софтверски алат

**Abstract:** In this scientific paper, the control of the serviceability limit state and optimization of a prestressed beam using a tool developed in the Matlab environment are presented. The concept of the analysis is based on the idea of using the tension strength capacity of concrete in the domain of limited prestress. For this analysis, a Matlab tool was used, intended for the "local" level of analysis, in the preliminary stages of calculations. The paper consists of the three chapters. In the first chapter it is showed possibility of saving materials when create prestressed beam, and approach to analysis from the aspect of the serviceability limit state. Then, through the second chapter, it is processed basic information about the concept of prestressing. Finally, the third chapter describes the flow of prestressed girder analysis using a

**НАПОМЕНА:**

Овај рад проистекао је из мастер рада чији ментор је био доц. др Драго Жарковић.

tool developed in the Matlab environment. The developed software tool is able to determine the initial prestressing force in accordance with the allowed stresses in steel and concrete. Then, based on the initial prestressing force, determine the required number of strand to form the tendons. After that, show the losses of the prestressing force, as well as the values of the final prestressing force after the time losses. The tool has the ability to control the stress in the concrete at the moment cable tensioning, as well as during exploitation.

**Keywords:** prestressed concrete, serviceability limit states, Matlab, software tool

## 1. УВОД

Пројектовању преднапрегнутих гредних елемената приступа се у случајевима када класични гредни елементи од армираног бетона не могу задовољити критеријуме савладавања захтеваних распона. У том процесу веома је важно искористити пуну ефикасност употребе преднапрегнутих гредних елемената.

Познато је да се применом преднапрегнутог бетона у односу на класични армирани бетон може остварити уштеда у бетону од 20-30% (захваљујући пуном суделовању затегнуте зоне бетонског пресека), док су уштеде у челику су још израженије и износе 50-60%, те се могу остварити применом оптимизованих алата током процеса пројектовања.

У складу са тим, у овом раду приказана је контрола граничног стања употребљивости преднапрегнуте греде применом алата развијеног у Matlab окружењу, са циљем оптимизације димензија носача током процеса пројектовања.

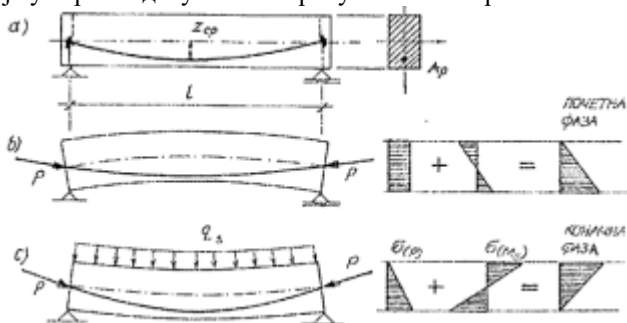
## 2. КОНЦЕПТ ПРЕДНАПРЕЗАЊА

Концепт преднапрезања заснива се на идеји утезања притиском. Идеја се темељи на уносу преднапона тј. притиска на местима где ће се у експлоатацији појавити напони затезања. Тако да се, у експлоатацији напон притиска изазван преддеформацијом треба прво савладати да би се након тога појавило затезање у том делу носача.

Посматра се пресек у средини гредног носача (слика 1.). Систем просте греде, са параболичном трасом кабла. Слика 1, б) представља стање у тренутку утезања носача. Наиме, у том тренутку сопствена тежина представља једино присутно оптерећење.

Након уноса силе притиска у носач, напонско стање представљено је појавом напона притиска у доњој зони носача управо на месту где се у експлоатацији

очекује појава напона затезања. Затим, након оптерећења носача корисним оптерећењем у експлоатационом периоду долази до промене напонског стања. Напон притиска који је „прикупљен“ у почетној фази почиње да се постепено „троши“ под дејством корисног оптерећења. Уколико се носач пројектује по систему потпуног преднапрезања, у носачу се не допушта појава напона затезања. Слика 1. с) приказује коначну фазу, тј. фазу у експлоатацији представљена је неутрализацијом напона у доњем делу носача, док је у горњем делу носача присутан напон притиска.



Слика 1.-Концепт преднапрезања

### 3. АНАЛИЗА ПРЕДНАПРЕГНУТЕ ГРЕДЕ У МАТЛАВ СОФТВЕРСКОМ АЛАТУ

Анализира се гредни елемент, са улазним подацима:

- распон гредног носача(L):.....20m,

и следећа оптерећења,

- стално оптерећење (g):.....10 [kN/m`],
- додатно стално оптерећење (g1):..... 0 [kN/m`],
- корисно оптерећење (q1):..... 13 [kN/m`],
- корисно оптерећење (q2):..... 4 [kN/m`],

као и коефицијенти категорије корисних оптерећења,

- коефицијент категорије (q1):.....0.7,
- коефицијент категорије (q2):.....0.7,
- квази-стална комбинација (q1):.....0.6,
- квази-стална комбинација (q1):.....0.2.

Статички систем просте греде, са обостаним утезањем каблова. Котве за преднапрезање су активне са обе стране носача. Геометријске карактеристике носача дате су на слици 2. Дефинисање пресека остварено је кликом на дугме „Дефинисање пресека“, чијим активирањем се отвара прозор (слика 2.)

Почетни корак састоји се од уноса улазних података неопходних за даљу анализу. Улазни подаци дефинишу се у одељку „Улазни подаци“. Кликом на дугме „Дефинишите материјал“ отвара се поље за одабир карактеристика материјала. (слика 3).



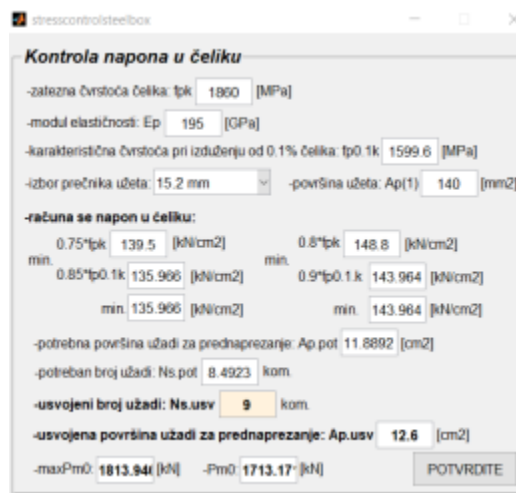
Слика 2.- Прозор за дефинисање пресека



Слика 3.- Дефинисање материјала

Кликом на дугме „Покрените прорачун“, покреће се статичка анализа носача. Затим, након завршетка рада у панелу „Улазни подаци“ прелази се на панел „Почетна сила преднапрезања“.

Контрола напона у бетону и челику спроводи се у склопу програмског алгорита. Неопходно је спровести контролу према напонима у челику, кликом на дугме „Контрола напона у челику“ активирамо панел (слика 4).



Слика 4.- Контрола напона у челику

На основу одабраних карактеристика материјала и допуштених напона у челику потребно је усвојити број ужади.

Након тога, стиче се увид у вредност силе преднапрезања која се аутоматски усваја у складу са допуштеним вредностима напона у челику и бетону.

Следећи корак захтева усвајање броја каблова. У овом случају усвојена су 3 кабла, са по три ужета Ø15 у склопу једног кабла. Усвајањем броја каблова стекли су се услови за даљу анализу, те кликом на дугме „Покрените графички приказ резултата“ исцртава се графички приказ губитака силе преднапрезања.

Затим „Преглед губитака силе преднапрезања“ приказује табеларни приказ губитака у посматраним пресецима гредног носача (слика 5.).

Софтверски алат може спровести и контролу напона у тренутку утезања каблова, као и у временском тренутку експлоатације. Кликом на дугме „Контрола напона дуж носача“ спроводи се анализа и у оквиру табеларне форме исписују се вредности напона у посматраном тренутку времена. (Управо тако можемо стећи увид да ли носач пројектујемо по степену потпуног преднапрезања (без појаве напона затезања), или пак допуштамо контролисану појаву напона затезања у експлоатационом периоду (ограничено преднапрезање, слика 6.).

reviewlosinginbeam

### Pregled gubitaka sile prednapreznja

-Gubici sile prednapreznja usled trenja:

	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5	6-6	7-7	8-8	9-9	10-10
x [m]	0	0.5000	1	1.5000	2	2.5000	3	3.5000	4	4.5000
y-položaj kabla [m]	0	0.0481	0.0938	0.1370	0.1777	0.2160	0.2518	0.2851	0.3169	0.3454
tng	0.0987	0.0938	0.0889	0.0839	0.0790	0.0741	0.0691	0.0642	0.0593	0.0544
alfa(i-i) [rad]	0.0984	0.0935	0.0886	0.0837	0.0788	0.0739	0.0690	0.0641	0.0592	0.0543
teta(i-i) [rad]	0	0.0049	0.0098	0.0147	0.0196	0.0245	0.0294	0.0343	0.0392	0.0441
deltaPmi(x) [kN]	0	2.4043	4.8067	7.2071	9.6055	12.0017	14.3957	16.7873	19.1767	21.5643
Pm0.mi=Pm0-deltaPmi(x) [kN]	1.7132e+03	1.7108e+03	1.7084e+03	1.7060e+03	1.7036e+03	1.7012e+03	1.6988e+03	1.6964e+03	1.6940e+03	1.6916e+03

-Gubici sile prednapreznja usled uvlačenja klina:

	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5	6-6	7-7	8-8	9-9	10-10
x [m]	0	0.5000	1	1.5000	2	2.5000	3	3.5000	4	4.5000
deltaPsi(x) [kN]	68.9061	64.0750	59.2438	54.4127	49.5815	44.7504	39.9192	35.0881	30.2569	25.4258

-Gubici sile prednapreznja usled elastičnih deformacija:

	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5	6-6	7-7	8-8	9-9	10-10
x [m]	0	0.5000	1	1.5000	2	2.5000	3	3.5000	4	4.5000
Pm0.mi(i-i) [kN]	1.7132e+03	1.7108e+03	1.7084e+03	1.7060e+03	1.7036e+03	1.7012e+03	1.6988e+03	1.6964e+03	1.6940e+03	1.6916e+03
deltaPel(x) [kN]	19.8209	19.7931	19.7653	19.7375	19.7097	19.6820	19.6543	19.6267	19.5990	19.5714

-Trenutni gubici sile prednapreznja:

	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5	6-6	7-7	8-8	9-9	10-10
x [m]	0	0.5000	1	1.5000	2	2.5000	3	3.5000	4	4.5000
Pm0 [kN]	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03
deltaPmi(x)	0	2.4043	4.8067	7.2071	9.6055	12.0017	14.3957	16.7873	19.1767	21.5643
deltaPsi(x)	68.9061	64.0750	59.2438	54.4127	49.5815	44.7504	39.9192	35.0881	30.2569	25.4258
deltaPel(x) [kN]	19.8209	19.7931	19.7653	19.7375	19.7097	19.6820	19.6543	19.6267	19.5990	19.5714
Pm(t0) [kN]	1.6244e+03	1.6269e+03	1.6294e+03	1.6318e+03	1.6343e+03	1.6367e+03	1.6392e+03	1.6417e+03	1.6441e+03	1.6466e+03

-Vremenski gubici sile prednapreznja:

	1-1	2-2	3-3	4-4	5-5	6-6	7-7	8-8	9-9	10-10	11-11
x [m]	0	0.5000	1	1.5000	2	2.5000	3	3.5000	4	4.5000	5.5000
Pm0 [kN]	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03	1.7132e+03
Pm(t0) [kN]	1.6244e+03	1.6269e+03	1.6294e+03	1.6318e+03	1.6343e+03	1.6367e+03	1.6392e+03	1.6417e+03	1.6441e+03	1.6466e+03	1.6491e+03
Pm(t) [kN]	1.4152e+03	1.4173e+03	1.4194e+03	1.4216e+03	1.4237e+03	1.4259e+03	1.4280e+03	1.4302e+03	1.4323e+03	1.4345e+03	1.4366e+03

POTVRDITE

Слика 5.- Контрола напона у пресецима носача

stresscontrolinbeam

### Kontrola napona duž nosača

	10-10	11-11	12-12	13-13	14-14	15-15	16-16	17-17	18-18	19-19	20-20	21-21
x [m]	4.5000	5	5.5000	6	6.5000	7	7.5000	8	8.5000	9	9.5000	10
y [m]	0.3444	0.3703	0.3937	0.4147	0.4332	0.4493	0.4628	0.4740	0.4826	0.4888	0.4925	0.4937
Mg(i-i) [kNm]	348.7500	375	398.7500	420	438.7500	455	468.7500	480	488.7500	495	498.7500	500
Mk(i-i) [kNm]	899.7750	967.5000	1.0288e+03	1.0836e+03	1.1320e+03	1.1739e+03	1.2094e+03	1.2384e+03	1.2610e+03	1.2771e+03	1.2868e+03	1.2900
Pm(t0) [kN]	8466e+03	1.6491e+03	1.6516e+03	1.6540e+03	1.6565e+03	1.6590e+03	1.6579e+03	1.6556e+03	1.6533e+03	1.6509e+03	1.6486e+03	1.6463e+03
Pm(t) [kN]	4345e+03	1.4366e+03	1.4388e+03	1.4409e+03	1.4431e+03	1.4453e+03	1.4443e+03	1.4423e+03	1.4403e+03	1.4382e+03	1.4362e+03	1.4342e+03
t0-sigma10 [kN/cm2]-bottom (pressure)	0.7723	0.7933	0.8125	0.8301	0.8459	0.8600	0.8693	0.8756	0.8800	0.8825	0.8832	0.8820
t0-sigma10<=0.6*fck-bottom (pressure)	z. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.
t0-sigma20 [kN/cm2]-top (tension)	0.2802	0.2621	0.2455	0.2305	0.2172	0.2054	0.1961	0.1887	0.1831	0.1793	0.1773	0.1769
t0-sigma20>=fctm-top (tension)	z. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.
t-sigma1t [kN/cm2]-bottom (tension)	-0.0199	-0.0538	-0.0842	-0.1111	-0.1345	-0.1545	-0.1738	-0.1906	-0.2042	-0.2144	-0.2212	-0.2247
t-sigma1t>=fctm-bottom (tension)	z. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.
t-sigma2t [kN/cm2]-top (pressure)	0.8603	0.8908	0.9182	0.9426	0.9640	0.9825	0.9986	1.0121	1.0228	1.0306	1.0355	1.0375
t-sigma2t<=0.6*fck-top (pressure)	z. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.

Obaveštenje: Kriterijumi naponskog stanja su zadovoljeni duž nosača. U nosaču se ne pojavljuju prsline.

POTVRDITE

Слика 6.- Контрола напона у пресецима носача

Међутим, предност развијеног алата огледа се у могућности брзе итерације. Тако се у другој итерацији коригује висина носача на  $h = 115 \text{ cm}$ . Само променом висине без корекције осталих вредности постиже се оптимизација носача и

повећање искоришћености чврстоће бетона на затезање за 23%. У носачу се јавља напон затезања у износу од  $\sigma_z = 0.3090 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$  у временском тренутку експлоатације. (слика 7.)

stresscontrolinbeam

**Kontrola napona duž nosača**

	10-10	11-11	12-12	13-13	14-14	15-15	16-16	17-17	18-18	19-19	20-20	21-21
x [m]	4.5000	5	5.5000	6	6.5000	7	7.5000	8	8.5000	9	9.5000	10
y [m]	0.3265	0.3511	0.3733	0.3932	0.4108	0.4260	0.4389	0.4494	0.4576	0.4635	0.4670	0.4681
Mg(i-1)[kNm]	348.7500	375	398.7500	420	438.7500	455	468.7500	480	488.7500	495	498.7500	500
Mk(i-1)[kNm]	899.7750	967.5000	1.0288e+03	1.0836e+03	1.1320e+03	1.1739e+03	1.2094e+03	1.2384e+03	1.2610e+03	1.2771e+03	1.2868e+03	1290
Pm(t0)[kN]	6473e+03	1.6497e+03	1.6520e+03	1.6544e+03	1.6568e+03	1.6592e+03	1.6594e+03	1.6571e+03	1.6548e+03	1.6526e+03	1.6503e+03	1.6481e+03
Pm(t1)[kN]	4349e+03	1.4370e+03	1.4391e+03	1.4412e+03	1.4432e+03	1.4453e+03	1.4454e+03	1.4435e+03	1.4415e+03	1.4395e+03	1.4376e+03	1.4356e+03
t0-sigma10[kN/cm2]-bottom (pressure)	0.7677	0.7873	0.8054	0.8218	0.8367	0.8499	0.8596	0.8653	0.8694	0.8716	0.8721	0.8709
t0-sigma10<=0.6*fck-bottom (pressure)	z. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.
t0-sigma20[kN/cm2]-top (tension)	0.3095	0.2926	0.2771	0.2632	0.2507	0.2398	0.2308	0.2240	0.2188	0.2153	0.2134	0.2131
t0-sigma20>=fctm-top (tension)	z. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.
t-sigma1t [kN/cm2]-bottom (tension)	-0.0760	-0.1149	-0.1499	-0.1810	-0.2081	-0.2312	-0.2522	-0.2712	-0.2864	-0.2978	-0.3053	-0.3090
t-sigma1t>=fctm-bottom (tension)	z. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.
t-sigma2t [kN/cm2]-top (pressure)	0.9329	0.9681	0.9997	1.0279	1.0526	1.0740	1.0923	1.1078	1.1200	1.1289	1.1344	1.1366
t-sigma2t<=0.6*fck-top (pressure)	z. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.	u doz. gran.

Obaveštenje: Kriterijumi naponskog stanja su zadovoljeni duž nosača. U nosaču se ne pojavljuju prsline.

POTVRDITE

Слика 7.- Контрола напона у пресецима носача

Констатује се да дозвољени напони нису прекорачени ни у тренутку утезања носача, како у зони притиска тако и у зони затезања. Извршена корекција проузроковала је смањење висине пресека за 5 cm.

Имајући у виду да се рад бави преднапрегнутим гредним елементима који су подложни серијској производњи, остварена оптимизација остварује уштеду од  $0,45 \text{ m}^3$ , по гредном елементу распона  $20 \text{ m}$ .

#### 4. ЗАКЉУЧАК

Анализа граничног стања употребљивости преднапрегнуте греде са тенденцијом искоришћености чврстоће бетона на затезање приказана је у овом раду. Представљена анализа гредног носача спроведена је коришћењем софтверског алата развијеног у Matlab програмском пакету, док су анализе спроведене са циљем оптимизације пресека носача, тако да се напон затезања у експлоатацији појави, али са недостизањем границе чврстоће бетона на затезање. Међутим, приметило се да постоји простора за додатно повећање искоришћености разматраног параметра, те је извршена корекција висине пресека.

Варирањем висине пресека повећана је искоришћеност чврстоће бетона на затезање и остварена оптимизација пресека.

Имајући у виду да се тема рада бави контролом граничног стања употребљивости код преднапрегнутих носача, који су подложни серијској производњи остварена уштеда на разматраном примеру показује оптимизацију преднапрегнутог пресека остварену путем повећања искоришћености чврстоће бетона на затезање. Такође, оптимизовани приступ олакшан је применом алата развијеног у Matlab-у.

#### 5. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ђурђевић. М.: Преднапрегнути бетон основе, Грађевински факултет Универзитета у Београду.  
 [2] Leonhart F.: Prednapregnuti beton u praksi (prevod sa nemačkog), Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

[3] Јевтић Д.: Преднапрегнути бетон 1, Грађевинска књига, Београд, 1979.

[4] Теорија бетонских конструкција примери за вежбе, Депарتمان за грађевинарство и геодезију Нови Сад.

[5] Пајовић Р.: Претходно напрегнути бетон, Универзитет Црне Горе, Грађевински факултет, 1999.

#### Кратка биографија:



**Александар Кањевац** рођен је у Краљеву 1998. године. Основну и средњу школу завршио је у Краљеву. Мастер рад на тему „Унапређење продуктивности при пројектовању преднапрегнутих носача помоћу алата развијених у Matlab окружењу“ на Факултету техничких наука у Новом Саду, на смеру Грађевинарство-конструкције одбранио је 2023. године.

Контакт:  
[aleksandarpg13@gmail.com](mailto:aleksandarpg13@gmail.com)



**Драго Жарковић** рођен је 1985. године у Задру. Од 2009.-2015. године радио као стално запослен у пројектним бироима а од 2015. године је запослен на Факултету техничких наука као асистент. Од 2021. године је запослен као доцент на Факултету техничких наука Универзитета у Новом Саду.