Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 624.04
DOI: https://doi.org/10.24867/26SA04Dimitrijevic

ITERATIVNO GENERISANJE FRAKTALA NA PRIMERU TROUGLA SIERPINSKOG I SIERPINSKI TETRAEDRA

ITERATIVE GENERATION OF FRACTALS ON THE EXAMPLE OF SIERPINSKI TRIANGLE AND SIERPINSKI TETRAHEDRON

Marta Dimitrijević, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – RAČUNARSKA GRAFIKA

Kratak sadržaj – *Ovaj rad istražuje fraktalnu geometriju, posebno fraktale Sierpinski, njihovu istoriju, generisanje i primene. Takođe se istražuje generisanje trougla Sierpinskog i Sierpinskog tetraedra korišćenjem biblioteke Matplotlib u Google Colaboratory, nudeći različite načine za vizualizaciju ovih fraktala putem iterativnih procesa i animacija.*

Ključne reči: *fraktal, Sierpinski trougao, Sierpinski tetraedar*

Abstract – *This paper describes fractal geometry, in particular Sierpinski fractals, their history, generation and applications. The generation of the Sierpinski triangle and Sierpinski tetrahedron using the Matplotlib library in Google Colaboratory is also explored, offering different ways to visualize these fractals through iterative processes and animations.*

Keywords: *fractal, Sierpinski triangle, Sierpinski tetrahedron*

1. UVOD

Pre više od dve hiljade godina, Euklid Aleksandrijski je u svom delu "Elementi" predstavio pravila i aksiome na kojima se temelji klasična euklidska geometrija. Ova pravila su toliko dobro izražavala čovekove ideje o prostoru i predmetima da je euklidska geometrija u svom nepromenjenom obliku bila osnova matematike sve do 19. veka. Tada se pokazalo da mogu postojati i druge geometrije osim one zasnovane na Euklidovim aksiomima.

Klasična geometrija opisuje svet idealnih formi kao što su krug, kvadrat, sfera ili kocka, pa je zbog toga pogodnija za opisivanje oblika stvorenih kao delo ljudskog uma nego za pojave i forme nastale u prirodi. Nepravilne, razigrane linije prirode gotovo je nemoguće opisati jezikom klasične geometrije, ali se pokazalo da to nije nemoguće na jeziku fraktalne geometrije [1].

2. FRAKTALI

2.1 Uvod

Fraktali su kompleksni matematički oblici koji predstavljaju relativno novu granu umetnosti i nauke. Nastaju kroz ponavljanje jednostavnih procesa i često prikazuju dinamičke sisteme i haos. Ključna karakteristika fraktala je samosličnost, što znači da izgledaju isto bez obzira na nivo uvećanja. Takođe, fraktali se karakterišu fraktalnom dimenzijom, koja meri njihovu gustinu u prostoru, i oblikovanje iteracijom, gde se matematički ili geometrijski postupak iterativno primenjuje na osnovni objekat [2].

Fraktali mogu biti razvrstani prema načinu nastanka u geometrijske, algebarske i stohastičke fraktale. Geometrijski i algebarski fraktali su determinisani, dok su stohastički nedeterminisani. Takođe, fraktali se mogu klasifikovati prema stepenu samosličnosti, gde postoje potpuno samoslični, skoro samoslični i statistički samoslični fraktali.

Osim toga, fraktali se mogu podeliti na prirodne i veštačke, pri čemu veštački fraktali zadržavaju svojstva fraktala pri različitim uvećanjima, dok postoje ograničenja za prirodne fraktale u vezi s veličinom objekta [3].

2.2 Istorija fraktala

Prvi koraci u matematičkom proučavanju fraktala datiraju iz 17. veka, kada je Gotfrid Lajbnic razmišljao o rekurzivnoj samosličnosti, koristeći izraz "razlomački eksponenti".

Ključni trenuci u razvoju fraktala uključuju Karl Vajerštrasovu definiciju funkcije sa grafikom 1872. godine i rad Georga Kantaora na Kantorovim skupovima 1883. godine, koji su danas prepoznati kao fraktali. Feliks Klajn i Anri Poenkare dodali su kategoriju "samoobrnutih" fraktala krajem 19. veka.

Kasnije, Helge fon Koh dao je geometrijsku definiciju Kohove pahulje 1904. godine, a Vaclav Sierpinski konstruisao je svoj čuveni trougao i tepih tokom 1910-ih. Francuski matematičari Pjer Fatou i Gaston Žulij razvijali su teoriju atraktora i repelera povezanu s mapiranjem kompleksnih brojeva i iterativnim funkcijama, što je postalo važno za proučavanje fraktala.

S obzirom na vizualizaciju fraktala, Benoa Mandelbrot je tokom 1960-ih godina doprineo popularizaciji fraktala. Njegovi radovi, kao što je Mandelbrotov set, ilustrovali su matematičke definicije impresivnim kompjuterskim vizualizacijama. Loren Carpenter je 1980. godine predstavio softver za generisanje i renderovanje fraktalnih pejzaža na konferenciji SIGGRAPH, što je označilo početak primene fraktala u kompjuterskoj grafici [4].

NAPOMENA:
Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bila vanr. prof. dr Lidija Krstanović.

2.3 Benoa Mandlebrot - otac fraktala

Naziv "fraktal" u matematici uveo je Benoa Mandelbrot sedamdesetih godina 20. veka, iako su mnoge ideje o fraktalima i fraktalnoj geometriji bile poznate i ranije. Francuski matematičar Gaston Moris Žulija dao je značajan doprinos teoriji fraktala u prvoj polovini 20. veka, ali njegova dela su bila zaboravljena sve do ponovnog oživljavanja Benoa Mandelbrota, koji se sada smatra ocem fraktalne geometrije.

Mandelbrot, rođen u Poljskoj 1924. godine, preselio se sa svojom porodicom u Pariz kao dečak i razvio interesovanje za matematiku pod uticajem svog oca i mlađeg brata matematičara. Nakon studija, preselio se u Sjedinjene Američke Države i radio u istraživačkom odeljenju IBM-a u Njujorku. Tokom svoje tridesetpetogodišnje karijere u IBM-u, Mandelbrot je imao priliku da istražuje neobične matematičke ideje i pionirski razvija teoriju fraktala.

Mandelbrot je bio retko usredsređen na geometriju u vreme kada je većina matematičara bila fokusirana na algebru. Njegova izuzetna geometrijska intuicija omogućila mu je da vizualizuje algebarske probleme kao geometrijske slike i da poveže različite ideje u teoriju fraktala. Njegova revolucionarna knjiga "Fraktalna geometrija prirode" iz 1982. godine istražuje skrivene obrasce u naizgled haotičnim oblicima i donosi svetu matematike i prirodnih nauka novu perspektivu [3].

2.4 Primena fraktala

Fraktali su matematički objekti koji imaju svojstvo samosličnosti pri različitim razmerama, a Benoa Mandelbrot je ključna figura u njihovom proučavanju i popularizaciji. Početno se Mandelbrot bavio problemom merenja dužine britanske obale, primetivši samosličnost obale bez obzira na skaliranje.

Fraktali su postali osnova za razumevanje haosa i kompleksnih sistema, koriste se u kompjuterskoj grafici za modeliranje terena i pri stvaranju računarski generisanih slika. Takođe, koriste se u medicini za dijagnozu i proučavanje DNK sekvenci, dok se u biologiji primenjuju za modeliranje evolutivnih odnosa i rasta bakterija.

Fraktali se takođe koriste u različitim oblastima kao što su zemljotresi, gromovi, finansijsko tržište, naftne bušotine, veštačka inteligencija i mnoge druge. U filmskoj industriji su promenili način na koji se stvaraju posebni efekti i računarski generisane slike, omogućavajući realistične vizuelne efekte.

Mandelbrotov set, koji opisuje samosličnost kompleksnih brojeva, ostaje jedan od najpoznatijih fraktala u matematici [4].

3. SIERPINSKI FRAKTALI

3.1 Vaclav Sierpinski

Vacław Frańćišek Sierpinski (1882–1969) bio je istaknuti poljski matematičar čiji doprinosi su obuhvatali različite grane matematike. Poznat je po svojim radovima u teoriji skupova, teoriji brojeva, teoriji funkcija i topologiji.

Sierpinski je takođe imao značajan uticaj na razvoj fraktalne geometrije, a njegovo ime je povezano s poznatim fraktalima kao što su trougao Sierpinskog, tepih Sierpinskog i kriva Sierpinskog.

Sierpinski je pokazao svoj matematički talenat još u ranom detinjstvu i brzo se istakao kao perspektivan student. Nakon završetka studija matematike i fizike na Univerzitetu u Varšavi, Sierpinski je nastavio svoje istraživačke radove, uključujući teoriju iracionalnih brojeva i teoriju skupova.

Tokom Prvog svetskog rata, Sierpinski je radio s Nikolajem Luzinom u Moskvi i dao je prvi primer apsolutno normalnog broja, značajnog koncepta u teoriji brojeva. Nakon povratka u Poljsku, bio je aktivan u matematičkoj zajednici, osnivajući važan časopis "Fundamenta Mathematica" i doprinoseći teoriji skupova [5].

3.2 Sierpinski trougao

Sierpinski trougao se karakteriše time da se u svakoj tački ukršta, što ga čini jednim od osnovnih primera sebi sličnih skupova u matematici. Konkretno, ovo znači da se trougao sastoji od beskonačno mnogo manjih trouglova koji čine njegov unutrašnji oblik, a koji se mogu reprodukovati pri svakom uvećanju ili smanjenju. Ovaj fraktal se takođe naziva atraktorom sistema iteriranih funkcija (IFS).

Da bi se trougao Sierpinskog konstruisao kao atraktor IFS-a, određeni uslovi moraju biti ispunjeni. IFS se sastoji od tačno tri neprekidne i kontraktivne sličnosti, pri čemu fiksne tačke svake mape čine vrhove trougla. Atraktor se ne preklapa i dodiruje samo tri tačke gde se mape sastaju, pri čemu svaka od ovih tačaka je kolinearna sa dva različita temena trougla.

Postoji više načina za konstrukciju trougla Sierpinskog, uključujući skaliranje, rotaciju i translaciju. Ovaj fraktal takođe može da se generiše i korišćenjem različitih geometrijskih oblika kao osnova, što rezultira različitim varijacijama trougla Sierpinskog. On je takođe povezan s različitim matematičkim konceptima i problemima, uključujući i igru Kula Hanoja. Ova bogata varijacija konstrukcija čini trougao Sierpinskog fascinantnim i izazovnim objektom u svetu matematike [6].

3.3 Sierpinski tetraedar

Sierpinski tetraedar je trodimenzionalni fraktalni objekat definisan kao atraktor sistema iteriranih funkcija (IFS). Ovaj fraktal karakteriše fraktalna dimenzija koja je dva, što znači da može biti generisan korišćenjem različitih algoritama kao što su deterministički i CGR algoritmi. Rezultati ovih algoritama pružaju informacije o strukturalnim i fraktalnim svojstvima, uključujući fraktalnu dimenziju, ukupnu veličinu fraktala, broj iteracija i broj jedinica koje čine fraktal.

Klasični pristup konstrukciji Sierpinskog tetraedra uključuje uzimanje unija transformisanih kopija početnog tetraedra, koristeći operacije kao što su skaliranje, rotacija, translacija i preslikavanje. Ovaj pristup omogućava konstrukciju fraktala bez obzira na dimenzije i početni oblik, što ga čini veoma fleksibilnim.

Fraktalni objekti poput tetraedra Sierpinskog imaju svojstvo da se izgled njihovih projekcija menja u zavisnosti od ugla pod kojim ih posmatramo, što čini njihove senke interesantnim i dinamičnim. Ovaj fraktal, iako trodimenzionalan, ima dvodimenzionalne karakteristike u odnosu na fraktalnu dimenziju. Ovi fraktali se često koriste u matematici i računarstvu kao ilustracije i modeli za proučavanje fraktalnih svojstava i procesa [7].

4. GENERISANJE FRAKTALA

4.1 Generisanje trougla Sierpinskog

Generisanje trougla Sierpinskog rađeno je korišćenjem biblioteke Matplotlib. Ova biblioteka je korišćena zato što pruža robustan okvir za kreiranje i vizuelizaciju geometrijskih obrazaca na jednostavan i prilagodljiv način. Faktori koji pokazuju zašto je Matplotlib odgovarajući izbor za generisanje trougla Sierpinskog su:

1. Dobre preformanse u 2D crtanju: trougao Sierpinski, koji je dvodimenzionalni geometrijski fraktal, zahteva alat za crtanje koji omogućava dobru 2D vizualizaciju.
2. Mogućnost crtanja zasnovanog na koordinatama: Matplotlib nudi pojednostavljen proces za definisanje koordinata i crtanje tačaka, linija i oblika.
3. Prilagođavanje: Matplotlib omogućava korisnicima opcije prilagođavanja, kao što su boja, stil linije, markeri i svojstva grafika. Opcije su od ključnog značaja za prilagođavanje vizuelnih karakteristika trougla Sierpinskog.
4. Integracija sa NumPy: Poboljšava računarsku efikasnost potrebnu za zadatke kao što su kalkulacije srednje tačke i koordinata svojstvene generisanju trougla Sierpinskog.
5. Jaka korisnička baza i dokumentacija: Ima veliku korisničku bazu, sveobuhvatnu dokumentaciju i mnoštvo onlajn tutorijala i primera.
6. Mogućnosti za interaktivnost: Interaktivnost može poboljšati istraživanje i proučavanje fraktala, omogućavajući korisnicima da dinamički zumiraju, pomeraju i stupaju u interakciju sa grafikom, čime se omogućava dublji uvid.

Generisanje trougla Sierpinskog je rađeno na dva načina. Prvi način je putem iterativnog procesa poznatog kao algoritam igre haosa koji se postiže tako što se na svakom koraku dodaju tačke na slici. Počinje sa jednom tačkom, a zatim na svakom narednom koraku dodaje tačke oko svake prethodno dodate tačke, stvarajući tako trougle unutar trougla.
Ovaj proces se ponavlja više puta. Što je veći broj iteracija, više je detaljan prikaz trougla Sierpinskog. U suštini, više iteracija doprinosi dodavanju više detalja u fraktalnom uzorku, dok manji broj iteracija rezultira jednostavnijem prikazu (Slika 1).

Slika 1. *Prikaz trougla Sierpinskog generisanog sa manjim i većim brojem iteracija*

Drugi način takođe generiše trougao Sierpinskog kroz iterativni proces, ali se koristi drugačija tehnika. Na svakom koraku ovog procesa, umesto dodavanja pojedinačnih tačaka, iscrtava se poligon (trougao) sa precizno definisanim vrhovima i bojom. Ovaj deo generisanja trougla Sierpinskog takođe uključuje kreiranje animacije, što omogućava vizualno praćenje iterativne konstrukcije trougla (Slika 2).

Slika 2. *Prikaz trougla Sierpinskog generisanog preko poligona*

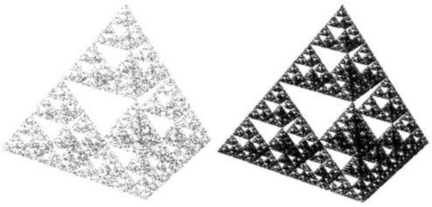
4.2 Generisanje Sierpinskog tetraedra

Generisanje Sierpinskog tetraedra je takođe rađeno u Google Colaboratory korišćenjem biblioteke Matplotlib. Faktori koji pokazuju zašto je Matplotlib odgovarajući izbor za generisanje Sierpinskog tetraedra su:

1. Dobre preformanse u 3D crtanju: Sierpinski tetraedar je trodimenzioni objekat, a Matplotlib se ističe u generisanju 3D vizuelizacija. Kod koristi modul mpl_toolkits.mplot3d, koji omogućava upotrebu osnovnih alata za konstruisanje i manipulisanje 3D crtežima.
2. Spektar prilagođavanja: Matplotlib nudi sveobuhvatan spektar opcija prilagođavanja, omogućavajući korisnicima da pažljivo prilagode vizuelne aspekte svojih kreacija. Posebno su relevantne Matplotlib-ove karakteristike prilagođavanja koje obuhvataju specifikaciju boja, senčenje i svetlosne efekte.
3. Dinamička animacija: Kod koristi Matplotlib-ove mogućnosti animacije za izradu dinamičkih vizuelizacija koje živopisno razjašnjavaju iterativni proces generisanja Sierpinskog tetraedra.
4. Robusna korisnička baza i dokumentacija: Dobra korisnička baza, dopunjena sveobuhvatnom dokumentacijom, tutorijalima i primerima dostupnih na mreži.
5. Besprekorna integracija: Matplotlib se neprimetno integriše sa drugim Python bibliotekama, uključujući svestrani NumPy, koji se često koristi za numeričke operacije.
6. Konzistentnost na više platformi: Ova osobina garantuje pouzdano generisanje Sierpinski tetraedra na različitim platformama, čime se povećava raznovrsnost i dostupnost rezultujućih fraktalnih obrazaca.

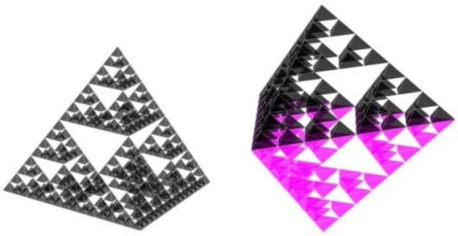
Generisanje Sierpinskog tetraedra je takođe rađeno na dva načina. Prvi način je generisanje 3D prikaza Sierpinskog tetraedra kroz iterativni proces gde se tačka iscrtava u 3D koordinatama na svakom koraku, pri čemu broj iteracija određuje krajnji prikaz modela.
Ovo omogućava dinamično kreiranje tetraedra, pri čemu svaka iteracija doprinosi dodavanju tačaka i oblikovanju složene fraktalne strukture.

Kao rezultat, model može postati sve detaljniji kako se povećava broj iteracija, što omogućava raznolike vizualizacije Sierpinski tetraedra (Slika 3).



Slika 3. *Prikaz Sierpinski tetraedra generisanog sa manjim i većim brojem iteracija*

Drugi način generisanja Sierpinski tetraedra je putem iterativnog procesa kontrolisanog promenljivom max_depth. Ovde se koristi rekurzija kako bi se na svakom nivou rekurzije dodala lica tetraedara na listu lica koje će se iscrtati. Osim toga, u ovom delu je uključena i animacija koja vizuelno demonstrira iterativnu konstrukciju tetraedra. Kontrola promenljive max_depth omogućava korisniku da odabere koliko duboko će se rekurzivno generisati tetraedar, što utiče na složenost i detaljnost rezultujućeg fraktala (Slika 4.a). Treći način generisanja Sierpinski tetraedra je rađeno kreiranjem dva Sierpinski tetraedra različitih boja koristeći efekat ogledala (eng. *mirror effect*). U ovom delu je odrađena animacija koja postepeno rotira model oko z-ose, kao i animacija iteracija, stvarajući dinamičan prikaz fraktala. Ovo znači da se tokom animacije postepeno dodaju iteracije, omogućavajući posmatračima da vide kako se fraktal razvija tokom vremena. Rotacija modela, u kombinaciji sa varijacijama boja i preslikavanjem, proizvodi vizuelizaciju Sierpinski tetraedra (Slika 4. b).



Slika 4. a) *prikaz Sierpinski tetraedra generisanog preko poligona, b) prikaz dva Sierpinski tetraedra generisanih preko poligona, efekat ogledala*

4. ZAKLJUČAK

Ovaj rad istražuje proces iterativnog generisanja fraktala na primeru trougla Sierpinskog i Sierpinski tetraedra. U toku izučavanja pogodnih alata za iterativno generisanje Sierpinski trouga i tetraedra odluceno je da se koristi Google Colab. Prednosti korišćenja Google Colab-a u odnosu na ostale programe su mnogobrojne.

Colab obezbeđuje pristupačnost sa bilo kog uređaja bez potrebe za lokalnim instalacijama, što ga čini jednostavnim za korišćenje. Omogućava brže izračunavanje složenih fraktalnih obrazaca.

Unapred instalirane biblioteke, vizuelne mogućnosti i široka korisnička zajednica čine ga pogodnom i robusnom platformom za potrebe iterativnog generisanja fraktala na primeru trougla Sierpinskog i Sierpinski tetraedra.

5. LITERATURA

[1] Barnsley, Michael F, “Fractals Everywhere”, 2nd Edition, Academic Press Professional, 1993

[2] Aleksandra Ivković, “Fraktalna geometrija Koch-ove krive”, master rad

[3] Taylor R, Micolich A, Jonas D, “Fractal analysis of Pollock`s drip paintings”, Nature 399, 422 (1999). https://doi.org/10.1038/20833

[4] Michael F, Benoit M, Fractals, Graphics, and Mathematics Education, Cambridge University Press, 2002

[5] Kuratowski, Kazimiez, “Waclaw Sierpisnki”, Acta Arithmetica, 21(1): 1-5. doi:10.4064/aa-21-1-1-5, 2022

[6] Bannon, Thomas. "Fractals and Transformations," Mathematics Teacher, March 1991

[7] Vinod S, Ergun A, "Connected & Manifold Sierpinsky Polyhedra", ACM Symposium on Solid Modeling and Applications

Kratka biografija:

Marta Dimitrijević rođena je u Kragujevcu 1998. godine. Osnovne studije Animacije u inženjerstvu na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu završila je 2022. godine i iste godine upisala Master studije.