Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 51-7
DOI: https://doi.org/10.24867/01JV02Bojovic

RAZLOMLJENO PROGRAMIRANJE

FRACTIONAL PROGRAMMING

Ivana Bojović, Nebojša Ralević, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – MATEMATIKA U TEHNICI

Kratak sadržaj – *Predmet istraživanja rada jeste uvid u teoriju nelinearne optimizacije i algoritme korisne za rešavanje problema razlomljenog programiranja, kao i rešavanje problema linearnog programiranja, gde je najveća pažnja posvećena simpleks metodi. Razlomljeno linearno programiranje (RLP) predstavlja metod za dobijanje rešenja klase problema nelinearnog programiranja u kojima se funkcija cilja može prikazati kao količnik dve nove funkcije uz pretpostavku da funkcija imenioca na svom domenu ne dostiže nultu vrednost. Ograničenja mogu biti u linearnoj ili nelinearnoj formi. Autori ovog rada opredelili su se da prikažu suštinu modela RLP u kojima su zadata ograničenja linearna. Najveći broj pokazatelja uspešnosti poslovanja (ekonomičnost, produktivnost, rentabilnost...) zadat je u formi razlomka tako da je RLP podesno u upravljanju proizvodnjom i ostalim oblastima poslovanja.*

Ključne reči: *linearno i nelinearno programiranje, razlomljeno programiranje, simpleks metod.*

Abstract - *The research topic of this papaer is to look at the nonlinear optimization theory and algorithms useful for solving the problem of fractional programming, with particular reference to the approximation of nonlinear problems to linear, as well as solving the problem of linear programming, where the greatest attention is devoted to the simplex method. Fractional linear programming (FLP) is a method for obtaining a nonlinear programming problem class solution where objective function can be represented as the quotient of two new functions, assuming that the function in the denominator on its domain does not reach a zero value. Constraints can be in a linear or nonlinear form. The authors have opted to show the essence of the FLP model IN which the given constraints are linear. Fractional programming problems often arise in practice, especially in economic optimization.*

Key words: *linear programming, non-linear programming, fractional programming, simplex method.*

1. UVOD

Matematičko programiranje kao oblast počinje da se razvija posle drugog svetskog rata, mada su neki radovi objavljeni mnogo ranije. Oblast matematičkog programiranja se može podeliti na linearno, nelinearno, diskretno i stohastičko programiranje i teoriju igara. Zajednička osobina ovih oblasti jeste da se traži tačka u određenom vektorskom prostoru koja zadovoljava neka ograničenja, a u kojoj data funkcija (funkcija cilja) dostiže ekstremnu vrednost (funkcija cilja i ograničenja su linearne funkcije). Većina optimizacionih problema se može modelovati linearnim jednačinama, ali postoje problemi kod kojih linearni modeli nisu dovoljni, i tako se stvara potreba za nelinearnim sistemima.

Posebnu klasu nelinearnih sistema, u kojim se funkcija cilja može prikazati kao količnik dve nove funkcije uz pretpostavku da funkcija imenioca na svom domenu ne dostiže nultu vrednost, nazivamo problemom razlomljenog programiranja.

Poslednjih nekoliko decenija matematičko modeliranje (programiranje) i optimizacija određenih ekonomskih i drugih pojava je sve prisutniji predmet velikog broja naučnih radova i česta tema na mnogim seminarima i konferencijama. Jedan od krucijalnih razloga zbog čega je matematičko programiranje tako važno leži u činjenici da ono predstavlja osnovu za buduće odluke i planiranja i ima primenu u mnogim oblastima kao što su: ekonomija, finansije, demografija, fizika, industrija i druge.

2. LINEARNI MATEMATIČKI PROGRAMI

Savremeno društvo, a pogotovo privreda svakodnevno se suočava sa raznim složenim zadacima, koji mogu imati više rešenja. Logično pitanje koje se nameće je kako doći do najboljeg, tj. optimalnog rešenja. Kod rešavanja ovakvih zadataka primenjuje se kriterijum minimuma ili maksimuma, koji podrazumeva maksimizaciju dobiti uz minimalna ulaganja. Prvi korak u rešavanju problema je formiranje matematičkog modela. Njega čine funkcija cilja i ograničenja.

Dakle, zadatak je odrediti minimum ili maksimum zadate funkcije cilja na nekom skupu ograničenja. U zavisnosti od vrste funkcija kojima su opisani, problemi mogu biti linearni ili nelinearni. Linearni problem je problem u kome je funkcija cilja linearna i u kome su sva ograničenja predstavljena linearnim funkcijama. To je specijalan slučaj nelinearnog problema.

Ukoliko je funkcija cilja nelinearna, ili ako je bar jedno od ograničenja predstavljeno nelinearnom funkcijom, reč je o nelinearnom problemu. U cilju rešavanja ovih problema, razvile su se mnogobrojne metode.

U današnje vreme, zahvaljujući razvoju tehnologije, znatno je olakšano rešavanje problema linearnog programiranja bez obzira na složenost. Postoje standardni programi koji se koriste u tu svrhu kao gotove rutine. Osnovni zadatak jeste prepoznavanje i dobro formulisanje problema i naravno određivanje njegovog rešenja.

NAPOMENA:
Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Nebojša Ralević, red.prof.

Linearno programiranje (LP) predstavlja jednu vrstu matematičkog programiranja. Najčešće se koristi za rešavanje matematičkih modela koji odgovaraju maksimizaciji profita, odnosno minimizaciju troškova, pri određenim uslovima.

Matematički model treba da sadrži:

- Linearnu funkciju cilja
- Linearna ograničenja
- Dopustiv skup rešenja.

Opšti zadatak linearnog programiranja glasi:
Naći ono nenegativno rešenje
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ sistema linearnih jednčina (ograničenja):

$$\begin{gathered} \boldsymbol{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_1} \\ \dots \\ \boldsymbol{a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m} \end{gathered} \tag{1}$$

za koje funkcija cilja (linearna funkcija n promenljivih): $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ dostiže maksimalnu (minimalnu) vrednost.
Za rešavanje problema linearnog programiranja, koristili smo grafičku i simpleks metodu.
Geometrijska metoda, za razliku od algebarske (simpleks) metode ima ograničenu primenu. Ona može da se iskoristi u slučaju dve ili tri promenljive. Ova metoda se može primeniti i u slučaju ako je $n - m = 2$, gde je n broj promenljivih, a m broj jednačina. Tada se dve od n promenljivih mogu izabrati kao nezavisne (slobodne) promenljive, a preostalih m mogu se uzeti za zavisne promenljive i izraziti pomoć nezavisnih promenljivih.
Svaki linearni program koji ima rešenje može biti rešen određivanjem vrhova dopustivog skupa i zatim računanjem funkcije cilja u tim vrhovima. Ipak, samo njihovo nalaženje u višedimenzionalnom prostoru može biti prilično komplikovano.
Sredinom prošlog veka razvile su se razne metode za rešavanje problema linearnog programiranja. Jedna od najefikasnijih i najpoznatijih metoda je simpleks metoda, koja je nastala je 1947. godine. Utemeljio ju je američki matematičar *Džordž Dantzig*.
Simpleks metoda je način efikasnog pretraživanja vrhova oblasti izvodivosti (simpleksa), kako bi se pronašao onaj u kome se pojavljuje optimalna vrednost funkcije cilja. Najzanimljiviji linearni programi koji se pojavljuju u praksi uključuju veliki broj promenljivih i ograničenja, pa ih moramo rešavati uz pomoć računara.
Danas postoje razni programski paketi koji uspešno rešavaju probleme linearnog programiranja, nezavisno od njihovih dimenzija. Jedan od ovih paketa jeste *Lindo*.

3. NELINEARNI MATEMATIČKI PROGRAMI

Problem matematičkog programiranja se sastoji u određivanju vektora $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ koji predstavlja rešenje funkcije $f(x)$.
p.o.

$$\begin{gathered} \boldsymbol{g^i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m} \\ \boldsymbol{h^j(x) = 0, j = 1, \dots, p.} \end{gathered} \tag{2}$$

Ako je bar jedna od datih funkcija nelinearna, tada se dobijeni problem naziva *problem nelinearnog programiranja*. Termin „nelinearno programiranje" se uglavnom odnosi na probleme u kojima funkcija cilja postaje nelinearna, ili su jedna, ili više ograničenja nelinearni, ili oboje [1,3].
Određivanje vektora $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ koji zadovoljavaju uslove (2) naziva se određivanje rešenja problema. Vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazivaju se komponentama tog rešenja. Rešenje $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ koje obezbeđuje ekstremnu vrednost funkcije cilja $f(x)$ naziva se optimalni plan ili optimalno rešenje.
Za optimalno rešenje x^* je ispunjeno: $f(x^*) \geq f(x)$ (u odnosu na bilo koje drugo rešenje iz dopustivog skupa), u slučaju da je tražen maksimum. U slučaju da se radi o traženju minimuma, onda mora biti zadovoljen uslov: $f(x^*) \leq f(x)$.
Zadaci koji imaju bar jedno optimalno rešenje, pripadaju klasi rešivih problema.

Optimalno rešenje nelinearnog optimizacionog problema izračunava se nekom od raspoloživih metoda, koja je najadekvatnija za nalaženje konkretnog rešenja. Za razliku od zadataka linearnog programiranja, zadaci nelinearnog programiranja se ne mogu rešavati primenom nekog univerzalnog metoda (kao što je to simpleks metod za zadatke linearnog programiranja).

Za zadatke nelinearnog programiranja je za svaki konkretan slučaj, u zavisnosti od njegovog matematičkog modela, dimenzija i karaktera nelinearnosti, potreban nov metod ili prilagođavanje nekog od postojećih metoda.

U velikom broju slučajeva čak i ne postoji prikladni metod na osnovu kojeg se može naći optimalno rešenje formulisanog zadatka nelinearnog programiranja, što znači da postoji još uvek veliki broj nerešivih ili teško rešivih zadataka nelinearnog programiranja [2,4].

Postoji više metoda optimizacije pomoću kojih se mogu rešavati neki zadaci nelinearnog programiranja. Svi ti metodi su specijalizovani za različite tipove zadataka nelinearnog programiranja, koji se formalno razlikuju po obliku matematičkog modela, tj. po obliku i dimenzijama funkcije cilja i skupa ograničenja. Tako, na primer, postoje specijalni metodi za linearna ograničenja i nelinearnu funkciju cilja, za funkcije cilja zadate kvadratnom formom, za celobrojne vrednosti promenljivih, nelinearno programiranje sa separabilnom funkcijom cilja itd.

Otuda potiču i neki posebni nazivi za takve specifične zadatke nelinearnog programiranja, kao što su: kvadratno programiranje, celobrojno programiranje, separabilno programiranje itd.

Zadaci nelinearnog programiranja prekrivaju znatno šire područje upravljačkih zadataka i raznovrsniji su od zadataka koji se svode na primenu linearnog programiranja. Mnogi od njih još uvek nisu rešivi jer ne postoje razvijeni algoritmi čija bi primena dala određene efekte. Primenljivost određenih algoritama procenjuje se na osnovu broja računskih operacija koje treba obaviti u procesu nalaženja rešenja. Neki algoritmi u određenim zadacima nelinearnog programiranja, čak i uz primenu savremenih računara, nisu uvek primenljivi.

4. RAZLOMLJENO PROGRAMIRANJE

Optimizacioni problemi u kojima je funkcija cilja data kao razlomak dve funkcije zovu se razlomljeni optimizacioni programi. Matematički zapis problema koji se svodi na razlomljeno linearno programiranje u opštem slučaju dat je sa:

$$\mathbf{max\,x}\, \boldsymbol{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c_i\, x_i + c_0}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{d_i\, x_i + d_0}}$$

p.o.

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2}$$
$$\ldots$$
$$\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m}$$

$$\boldsymbol{x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0}$$

U skraćenom obliku pišemo:

$$\mathbf{max\,x}\, \boldsymbol{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} C^T X + c_0}{\sum_{i=1}^{n} D^T X + d_0} \qquad (\mathbf{3})$$

p.o.

$$AX \le B$$
$$X \ge 0$$

Gde je:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dakle, sa C i D smo označili vektore koeficienta iz funkcije cilja (3). X je vektor promenljivih formata (n,1). A je matrica koeficijenata (m,n). B je vektor slobodnih članova formata (m,1), dok su c_0 i d_0 skalari.

Teorema 1. *Skup dopustivih rešeja NJ označićemo sa $S \subseteq \mathbb{R}^n$,*
pri čemu je

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n : AX \le B, X \ge 0\}$$

neprazan i ograničen. Ovaj skup je konveksan poliedar.

Napomena 1. *Skup dopustivih rešenja ima konačan broj ekstremnih tačaka i svaka tačka iz skupa S može se izraziti kao konveksna kombinacija mnjegovih MNJ ekstremnih tačaka*

Napomena 2. *Imenilac funkcije cilja je pozitivan, tj. $(D^T X + d_0) > 0, \forall X \in S$.*

Teorema 2. *Problem*

$$\mathbf{max\,x}\, \boldsymbol{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} C^T X + c_0}{\sum_{i=1}^{n} D^T X + d_0}$$

p.o.

$$AX \le B$$
$$X \ge 0$$

uz uslove Teoreme 1, Napomene 1 i Napomene 2 ima maksimum u nekoj ekstremnoj tački skupa S.

Osnovne metode koje su u primeni prilikom rešavanja problema razlomljenog programiranja su: Martoseva metoda, Charnes Cooperov-a metoda i Dinkelbachov-a metoda.
Ove metode se pretežno zasnivaju na modifikaciji simpleks metode.

5. PRIMENA RAZLOMLJENOG LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Fabrika želi da odredi plan proizvodnje. Uslovi proizvodnje i tržišta su sledeći:

1. Svaki od 4 proizvoda obrađuje se na mašini M1: 3,1,4 odnosno 1 mašinski čas respektivno po jedinici proizvoda. Raspoloživi fond radnih sati je 12.
2. P1, P3, P4 po tehnološkom postupku moraju se dalje obrađivati na mašini M2, i to 6,2 odnosno 4 mašinska časa respektivno po komadu proizvoda. Raspoloživi kapacitet ove mašine je 24 mašinska časa.
3. Zbirno proizvoda P2 i P4 ne može se prodati više od 6 jedinica.

Odrediti optimalan plan proizvodnje uz maksimalnu ekonomičnost ako su prodajne cene redom 2,1,3,3 novčane IH jedinice A. Varijabilni troškovi su 1,1,1,1 novčanih jedinica po jedinici proizvoda. Ukupni fiksni troškovi su tri novčane jedinice.

Rešenje.
Autor rada smatra da je za rešenje ovog RLP najpodesnije primeniti Martosev postupak zbog njegove jednostavnosti i manjeg broja računskih koraka. MUTNO:

$$\max z = \frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3}$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \le 12$$
$$6x_1 + 2x_3 + 4x_4 \le 24$$
$$x_2 + x_4 \le 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	3	1	4	1	1	0	0	12
y_2	6	0	2	4	0	1	0	24
y_3	0	1	0	1	0	0	1	6
	-2	-1	-3	-3	0	0	0	0
	-1	-1	-1	-1	0	0	0	3
Δ	6	3	9	9	0	0	0	

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
x_3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	3
y_2	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	18
y_3	0	1	0	1	0	0	1	6
	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	9
	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	6
Δ	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{21}{4}$	0	7	$-\frac{9}{4}$	0	0	

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
x_3	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{14}$	0	$\frac{12}{7}$
x_4	$\frac{9}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{36}{7}$
y_3	$-\frac{9}{7}$	$\frac{8}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	1	$\frac{6}{7}$
	$\frac{22}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{14}$	0	$\frac{144}{7}$
	$\frac{5}{7}$	$-\frac{6}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{69}{7}$
Δ	$-\frac{114}{7}$	-12	0	0	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{27}{14}$	0	

Poslednja tabela daje optimalno rešenje zato što su vrednosti u poslednjoj tabeli pozitivne. Prema optimalnom programu potrebno je proizvesti $\frac{12}{7}$ jedinica P3 i $\frac{36}{7}$ jedinica P4 uz ostvarenu maksimalnu ekonomičnost $z=\frac{48}{23}$. Proizvode P1 i P2 ne treba proizvoditi.

6. ZAKLJUČAK

Značaj matematičkog modeliranja i programiranja je neosporan. To se ogleda u činjenici da gotovo ne postoji oblast ljudskog angažovanja u oblasti prirodnih nauka i ekonomije koja ne zahteva neki oblik optimizacije u uslovima ograničenih resursa. Ograničenost resursa (materijalnih i nematerijalnih) glavni je pokretač angažovanja matematičara u ovom polju kroz istoriju. Ovim radom dotaknut je samo jedan mali delić znanja o matematičkoj optimizaciji. Osim metoda navedenih u ovom radu autor veruje da će vremenom doći do otkrića i razvitka novih postupaka koji će još brže i efikasnije dovesti do optimalnog rešenja.

Takođe, primena metoda razlomljenog programiranja, kao što je to ilustrovano ovim radom zahteva poznavanje kompleksnih algoritama kako bi se njihova primena odvijala na adekvatan način. Razlomljeno programiranje predstavlja metod za dobijanje rešenja klase problema nelinearnog programiranja u kojima se funkcija cilja može prikazati kao količnik dve nove funkcije uz pretpostavku da funkcija imenioca na svom domenu ne dostiže nultu vrednost. Ograničenja mogu biti u linearnoj ili nelinearnoj formi. Autor se opredelio da prikaže suštinu modela RLP u kojima su zadata ograničenja linearna.
Najveći broj pokazatelja uspešnosti poslovanja (ekonomičnost, produktivnost, rentabilnost,...) zadat je u formi razlomka tako da je razlomljeno linearno programiranje podesno za primenu u upravljanju proizvodnjom i ostalim oblastima poslovanja.

7. LITERATURA

[1] V. Vujičić, M. Ašić, N. Miličić, "Matematičko programiranje", Matematički institut, Beograd, (1980).

[2] S. Zlobec, J. Petrić, "Nelinearno programiranje", Naučna knjiga, Beograd, (1989).

[3] I.M. Stancu - Minasian, "Fractional Programming", Centre for mathematical Statistics, The Romanian Academy, Bucharest, (1997).

[4] I. Kuzmanović, K. Sabo, "Linearno programiranje", Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osjek,(2016).

[5] D. Barkovic, "Operacijska istraživanja", Ekonomski fakultet - Osjek, Osjek, (2001).

[6] G. Giorgi, T.H. Kjeldesen, "Traces And Emergence of Nonlinear Programming", Birkhauser, Roskilde, (2014).

[7] V. Kovačević - Vujičić, "Operaciona istraživanja, Nelinearno programiranje - materijal za predavanja", Fakultet organizacionih nauka, Beograd, strane 2-16, (2009).

[8] I. Aganovic, K. Veselić, "Matematičke metode i modeli", Sveucilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osjek,(2009).

[9] Lj. Kocić, G. Milovanovic, S. Marinković, "Operaciona istraživanja", Elektronski fakultet, Niš, (2008).

[10] S. Boyd, L.Vandenberghe, Convex Optimization", CambridgeUniversity Press, NewYork, (2004).

[11] M. Ivanovic, "Nelinearno programiranje - materijal sa vežbi", Matematčki fakultet, Beograd,strane 4-12, (2013).

[12] M. Šovljanski, "Primena linearnog programiranja u rešavanju igara nulte sume", Prirodno – matematički fakultet, Novi Sad, strane 8-26, (2011).

[13] G. Milovanović, P. Stanimirović, "Simbolička implementacija nelinearne optimizacije", Naučna knjiga, Niš, (2002).

Kratka biografija:

Ivana Bojović je rođena 17.12.1993. godine u Somboru. Nakon završene Osnovne škole "Žarko Zrenjanin", upisala je Gimnaziju "Nikola Tesla"opšti smer u Apatinu. Nakon završene srednje škole 2012. godine, upisala je osnovne akademske studije na Prirodno matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer diplomirani profesor matematike, koje završava u septembru 2016. godine. Iste godine upisuje master studije primenjene matematike na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, smer Matematika u tehnici. Kontakt: bojovicivana1@gmail.com

Nebojša M. Ralević rođen je 1965. god. u Beranama. Doktorirao je na PMF-u u Novom Sadu 1997. god, a od 2010. god. je u zvanju redovnog profesora matematike na FTN-u u Novom Sadu. Oblasti interesovanja su teorija mere i verovatnoće, nelinearne jednačine, fazi sistemi, obrada slike i optimizacija.