Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 624.012.4.059
DOI: https://doi.org/10.24867/17CG06Vinokic

НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ СТРУЈАЊА У ОТВОРЕНИМ ТОКОВИМА: ПРИМЕНА МОДИФИКОВАНЕ ЛАКС-ФРИДРИХОВЕ СМАКНУТЕ ШЕМЕ

NUMERICAL MODELING IN OPEN CHANNEL FLOW: APPLICATION OF MODIFIED STAGGERED LAX-FRIEDRICHS

Лука Винокић, *Факултет техничких наука, Нови Сад*

Хидраулика – ГРАЂЕВИНАРСТВО

Кратак садржај – *У овом раду је анализирано струјање воде у отвореним токовима. Изложене су основне једначине, као и сви потребни алати за формирање нумеричког модела и решавање датог проблема. Установљена су почетна непоклапања, која су накнадно коригована калибрацијом нумеричког модела и коришћењем других нумеричких метода. Добијени резултати су у складу са хидрауликом проблема и непоклапања су очекивана имајући у виду димензије лабораторијског канала. На основу овог рада се могу јасно видети предности, као и недостаци Лакс-Фридрихове шеме, а додатно и Hec-Ras-а и методе простих итерација.*

Кључне речи: *отворени токови, нумеричко моделирање, Лакс-Фридрихова шема, хидраулички скок*

Abstract – *In this thesis, we analyzed open channel water flow. Fundamental equations were presented, as well as all the other tools needed for forming the numerical model and solving this problem. Initial deviation was found and was later corrected in calibrated numerical model with the help of other numerical methods. Obtained results were in accordance with hydraulics of open channel flow. Based on findings from this paper, we can clearly see advantages, as well as disadvantages, to the modified Lax-Friedrichs scheme, and also to Hec-Ras and to the simple iteration method.*

Keywords: *open channel flow, numerical modelling, Lax-Friedrichs scheme, hydraulic jump*

УВОД

Проблематика која се обрађује у овом раду јесте математичко моделирање струјања флуида у отвореним токовима, при чему се, с обзиром да је област рада хидраулика, под флуидом подразумева искључиво течност. Математичко моделирање представља процес описивања неког проблема (неког реалног објекта или појаве) помоћу скупа математичких алата (једначина и релационих оператора).

Нумеричким моделом се назива математички модел који користи алгебарске једначине добијене нумеричком интеграцијом, тј. нумерички апроксимиране парцијалне диференцијалне једначине.

НАПОМЕНА:

Овај рад проистекао је из мастер рада чији је ментор био др Горан Јефтенић, доцент.

У хидраулици се нумерички модели користе за израчунавање једначина које описују кретање флуида.

За креирање, калибрацију и оцену нумеричког модела, базираног на измењеној Лакс-Фридриховој смакнутој шеми, користиће се теоријске подлоге математичке анализе, физике, механике флуида, као и нумеричке хидраулике.

1. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ

За потребе овог рада задржаћемо се на једнодимензионалном струјању (линијски модел), те ће и једначине бити изведене сходно томе. Најчешће се, код отворених токова, користе проток и дубина као непознате код отворених токова и за њих се пишу две једначине којима се добијају (једначине за остале сетове непознатих се незнатно разликују). Као и у класичној хидраулици, ове две једначине представљају два физичка закона од три на располагању [1]. Користимо једначину континуитета:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

и динамичку једначину:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{Q^2}{A}\right)}{\partial x} + gA\left(\frac{\partial h}{\partial x} + S_f - S_0\right) + 0 \tag{2}$$

2. ЛАБОРАТОРИЈСКА МЕРЕЊА

У лабораторији су обрађена мерења раздвојена у две целине:

1. очитавање линије нивоа

2. лоцирање хидрауличког скока

Мерење дубина вршено је у три сета мерења са три различита протока. Наиме, први сет мерења вршен је на апаратури без икакве препреке, док су за други и трећи постављени оштроивични и обликовани прелив респектабилно.

Хидраулички скок је вештачки направљен да буде на средини канала за одређени проток тако што је подешавана висина низводног прелива (P) и отвореност уставе (a).

Канал је хоризонталан, дужине 1.1 m и ширине 7.7 cm.

2.1. Резултати мерења протока и линије нивоа

Како мерач протока у лабораторији није у функцији, проток се мора мерити волуметријски $Q = V/_t$. Измерени су протоци за различиту разлику запремине у три сета мерења, након чега су резултати осредњени.

Табела 1: *Усвојене вредности протока у [l/s]*

	израчунато	усвојено
Q_1 [l/s]	1.681087298	1.68
Q_2 [l/s]	0.139485084	0.14
Q_3 [l/s]	0.832165749	0.83

Линија нивоа представља скуп свих тачака који означавају дубину у пресецима по целој дужини канала. У пракси се мери дубина на одређеном растојању (Δx), па се затим повежу те тачке како би се формирала пијезолинија. Тако је и у овом случају вршено бележење дубина у лабораторији, на сваких 2.5cm за случаје са препреком и на 5cm за случајеве без препреке. Приказане су слике канала из лабораторије.

Слика 1: *Приказ канала из лабораторије за случај оштроивичног прелива -* Q_1

Слика 2: *Приказ канала из лабораторије за случај обликованог прелива –* Q_1

Слика 3: *Приказ канала из лабораторије за случај без препреке –* Q_1

2.2. Намештање хидрауличког скока

Хидраулички скок представља скоковити прелаз из бурног у миран режим струјања. Вештачки га правимо на овој апаратури помоћу уставе (узводно) и прелива (низводно), као и кориговањем протицаја.

У лабораторији је за последњи протицај (Q3) „намештен“ скок тако да буде на средини канала. То се постигло подешавањем отвора код уставе на a=10mm и висине прелива на P=20mm, са чиме је постигнут ниво испред уставе од 130mm..

Слика 4: *Хидраулички скок добијен у лабораторији*

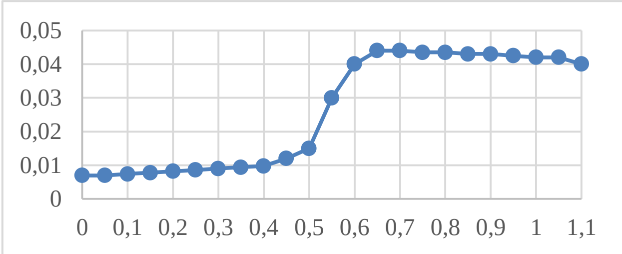

График 1: *Очитана линија нивоа за хидраулички скок*

3. НУМЕРИЧКИ МОДЕЛ

За формирање нумеричког модела је коришћена нумеричка метода која се често користи у хидротехници, а то је метода коначних разлика. Она се заснива на дискретизацији једначине, што значи да се диференцијално мале величине замењују коначним. Наиме, парцијални изводи у диференцијалним једначинама се апроксимирају коначним прираштајима, тј. коначним разликама (одакле и назив „метод коначних разлика“) користећи вредности функција у тачки [1].

3.1. Дискретизација

Да би парцијалне диференцијалне једначине могле да се користе у у нумеричком моделу, потребно их је дискретизовати и од њих направити алгебарске једначине [1]. Сама дискретизација зависи од начина апроксимирања првог извода, тј. од тога која се шема користи. Као што је већ поменуто, за потребе овог рада је примењивана модификована Лакс-Фридрихова шема са смакнутим временским размаком (staggered grid). Проток је рачунат за тачан временски тренутак n, док су за дубине коришћени „смакнути временски тренуци“ n−12.

Преко следеће једначине се тражи дубина за „следећи полутренутак“:

$$h_i^{n+\frac{1}{2}} = h_i^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{B\Delta x}\left(Q_{i+1}^n - Q_i^n\right) \tag{3}$$

Дата једначина добијена је директно из дискретизоване једначине континуитета, док се проток рачуна по динамичкој једначини која је значајно компликованија:

$$Q_i^{n+1} = Q_Q - \Delta t\left[\frac{1}{B\Delta x}\left(\frac{Q_{Q2}^2}{h_{h2}} - \frac{Q_{Q1}^2}{h_{h1}}\right) + gBh_h\left(\frac{h_{h2} - h_{h1}}{\Delta x} + S_f - S_o\right)\right] \quad (4)$$

где је:

$$h_{h1} = \frac{1}{2}\left(h_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i-1}^{n-\frac{1}{2}}\right) \quad (5)$$

$$h_{h2} = \frac{1}{2}\left(h_{i}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i}^{n-\frac{1}{2}}\right) \quad (6)$$

$$h_{h} = \frac{1}{4}\left(h_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i-1}^{n-\frac{1}{2}} + h_{i}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i}^{n-\frac{1}{2}}\right) \quad (7)$$

$$Q_{Q1} = \frac{1}{2}(Q_i^n + Q_{i-1}^n) \quad (8)$$

$$Q_{Q2} = \frac{1}{2}(Q_{i+1}^n + Q_i^n) \quad (9)$$

$$Q_Q = \frac{1}{4}(Q_{i+1}^n + 2Q_i^n Q_{i-1}^n) = \frac{1}{2}(Q_{Q1} + Q_{Q2}) \quad (10)$$

3.2. Почетни и гранични услови

Како би се формирао нумерички модел у програму *Microsoft Excel*, потребно је пажљиво задати временске и просторне коначне разлике да би шема била стабилна. Стога, да шема не би „пуцала“, временски размаци су подешени на Δx=0.025m и Δt=0.01s. Такође, неопходно је дефинисати почетне и граничне услове.

Почетни услови за протоке су измерени протоци у лабораторији, док се за дубине, када се рачуна у оквиру устаљеног течења, постављају неке претпостављене вредности (нпр. 0.1m), па се линија нивоа формира како се протоци стабилизују и постану једнаки у сваком пресеку (Q=Q_0).

Код устаљеног течења, улазни хидрограм је једна хоризонтална линија и представља константан задати протицај кроз време. За разлику од протока, ниво се за први пресек може, као и код осталих, рачунати дискретизованим једначинама, те се у тим пољима пише дискретизована једначина континуитета. Другим речима, за ову шему није неопходан узводни услов дубине. Што се тиче низводних, као и унутрашњих граничних услова, за њих узимамо изразе из класичне хидраулике. Теоријски, при слободном истицању, тј. наглом прекиду канала, се формира критична дубина, па задајемо гранични услов дубине [2]:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} \quad (11)$$

За вредности коефицијента преливања ће се узети вредности које су устаљени у инжењерској пракси, а то је m=0.42 за оштроивични прелив и m=0.49 за обликован прелив. Према следећој формули ће се рачунати дубина за пресек пре прелива [2]:

$$h^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{(Q^2)^n}{2gm^2B^2}} + P \quad (12)$$

Устава се у *Excel-u*, код дате шеме, симулира тако што ће се додати још један фиктивни пресек на крају мреже, тако да представља пресек тачно испод уставе.

Када се занемари коефицијент брзине, у претходно поменутом фиктивном пресеку се уписују следеће једначине за рачунање протока:

$$Q^{n+1} = h_s B\sqrt{2g\left(h^{n+\frac{1}{2}} - h_s\right)} \quad (13)$$

Додатни услов чини један фиктиван пресек и он се ставља на крај сваког дела канала који се рачуна појединачно. Разлог овог пресека лежи у чињеници да је дискретизованим једначининама потребан проток из наредног пресека, па се тај проток узима из фиктивног пресека у ком је проток изједначен са претходним.

У случају истицања испод уставе постоје два фиктивна пресека. Један служи за рачунање дубине комбинације једначине континуитета и једначине истицања, док други служи за рачунање протока према динамичкој једначини (као за остале случајеве).

4. АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА

4.1. Линија нивоа

Због велике количине резултата, приказаће се само поједини значајни и коначни резултати за средњи проток. Треба имати у виду да су одступања код већег протока већа и обрнуто.

При увиду у иницијалне резултате, примећују се, пре свега, значајна непоклапања на низводном крају канала. Анализирана је грешка на самом крају деонице где се јавља пад дна.

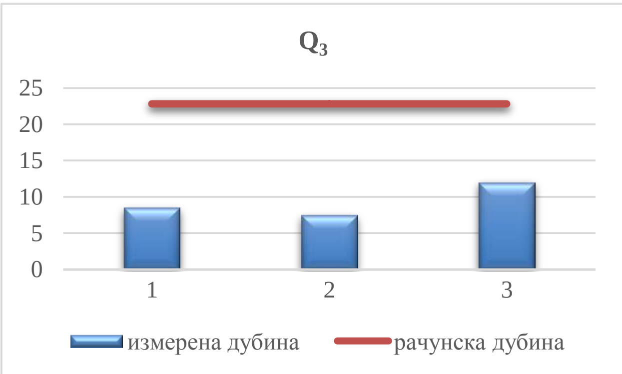

График 1: *Приказ измерене и рачунске дубине на низводном крају канала за проток* - Q_3

Узећи да је грешка преко 50%, извршио се покушај кориговања протока према критичној дубини, који се испоставио да за собом носи јоше већу грешку.

Након ове претпоставке се поставља следећа, а то је да се не остварује критична дубина на низводном крају канала. Ова претпоставка се оправдава тиме што се на низводном крају не налази само промена нагиба дна, већ се дешава комплетни губитак дна, те на том пресеку суштински не постоји дубина. Пошто је израз за добијање критичне дубине формиран уз претпоставке о паралелним струјницама и постојања

хидростатичке промене притисака, није неочекивано добити грешку када се у стварности ове две претпоставке не остварују.
Са прихватањем дате претпоставке, уз претпоставку да је комплетна деоница низводно од прелива у бурном режиму, прелази се на рачунање у *Hec-Ras-u*. Ово се дешава због немогућности Лакс-Фридрихове шеме да симулира бурно течење. Након калибрације модела и усвајање Манинговог коефицијента $n = 0.01 \frac{s}{m^{1/3}}$, добијамо следеће резултате:

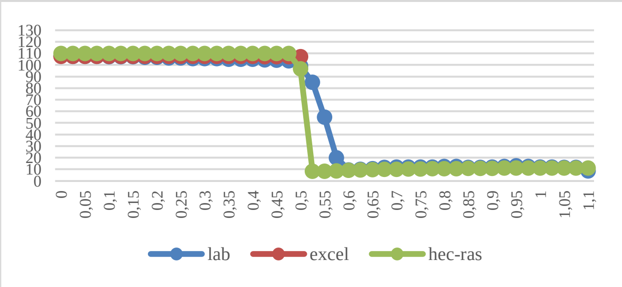

График 2: *Коначно поређење резултата за оштроивични прелив -* Q_3

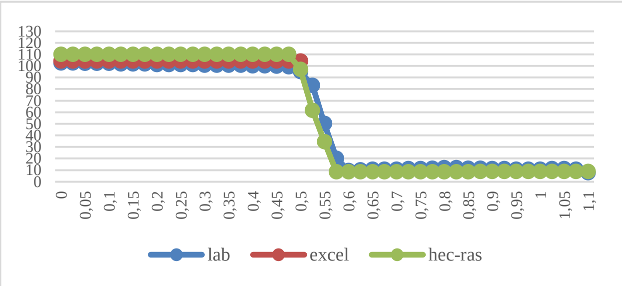

График 3: *Коначно поређење резултата за обликовани прелив -* Q_3

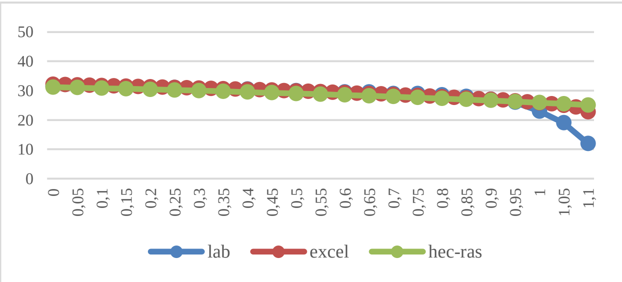

График 4: *Коначно поређење резултата за канал без препреке -* Q_3

4.2. Линија нивоа

Због величине резултата, како хидраулички скок није могао да се симулира преко постојећег модела, као ни преко *Hec-Ras-a*, приступило се методи простих итерације јер она има флексибилност да комбинује енергетску једначину и једначину хидрауличког скока.

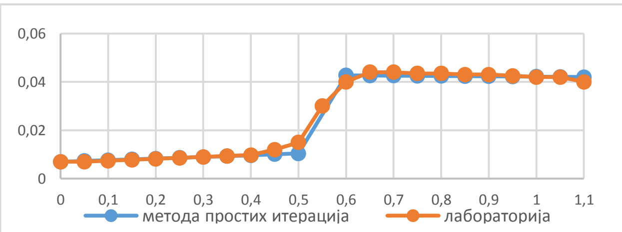

График 5: *Поређење хидрауличког скока добијеног преко методе простих итерација и лабораторије* $(L \approx 0.1m)$

ЗАКЉУЧАК

У овом раду је, у сврхе математичког моделирања струјања у каналу, коришћено три нумеричка поступка: модификована Лакс-Фридрихова шема, *Hec-Ras* и метода простих итерација. Један од главних закључака је немогућност рада у бурном режиму модификоване Лакс-Фридрихове смакнуте шеме у *Excel-u*. У бурном режиму се јавља силовито течење где су брзине велике, што значи да се, пошто је у питању експлицитна шема, временски размаци морају смањити како би шема била стабилна. Ово значи и даље повећање броја редова како би *Excel* могао да дође до устаљеног решења. Чак и ако су ове немогућности техничке природе и ако би се успели добити резултати уколико се стави још мањи временски размак и још више редова, дешава се да програм постаје превише спор и неадекватан за рад у њему. Тако и у овом случају, када је шема „пуцала“, *Excel* је био пребукиран и радио је поприлично споро. Такође врло битан закључак јесте да *Hec-Ras* једноставно нема механизам за симулирање хидрауличког скока у случају истицања испод уставе. Ово је веома чудна ствар за програм који је нашироко коришћен у хидротехничкој струци широм света.

На крају се може констатовати да су добијени валидни резултати који потврђују и оправдавају примену математичких модела у анализи оваквих случајева за отворене токове. Нарочито када се узме у обзир да је канал на коме су вршена мерења у лабораторији и према коме је касније формиран нумерички модел врло мали и као такав не задовољава неке од основних критеријума за валидни лабораторијски канал и то по више основа. Апроксимације које се користе за извођење многих израза су за овакав канал значајне грешке, па је самим тим и само свођење на једнодимензионални модел одређена грешка која је на овакаквом моделу осетна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Спасојевић, „*Нумеричка хидраулика- отворени токови*“, Суботица: Грађевински факултет Универзитета у Новом Саду, 1996.

[2] Г. Хајдин, „*Механика флуида – књига трећа - Додатна поглавља*“, Београд: Грађевински факултет Универзитета у Београду, 2009.

Кратка биографија:

Лука Винокић рођен је у Новом Саду 1997. год. Мастер рад на Факултету техничких наука из области Хидраулике - грађевинарство написао је 2021. год. контакт: lukavinokic@yahoo.com