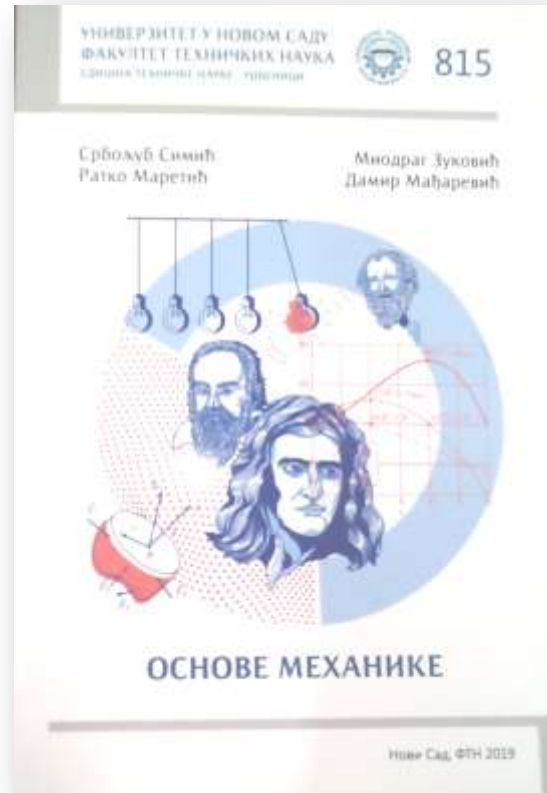


# Отпорност материјала Смицање. Увијање.

Основе механике  
Инжењерство заштите на раду  
Миодраг Зуковић

# Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



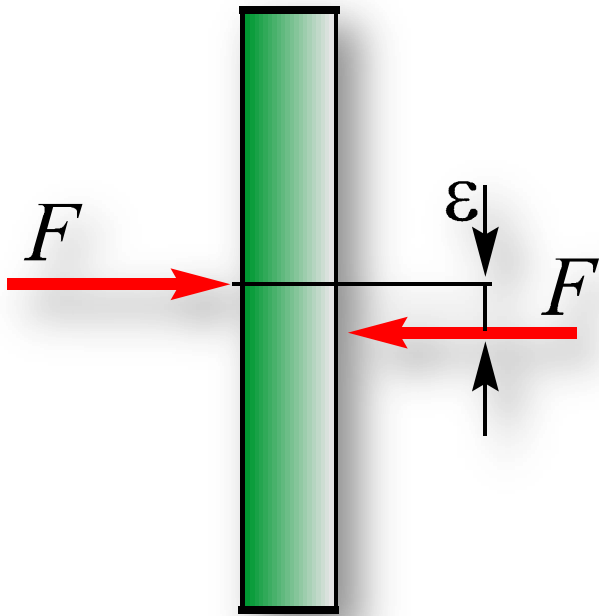
# Шта ћемо научити?

- 20. Напони и деформације при смицању.
- 21. Увијање, основни појмови.
- 22. Напони при увијању.
- 23. Одређивање угла увијања.

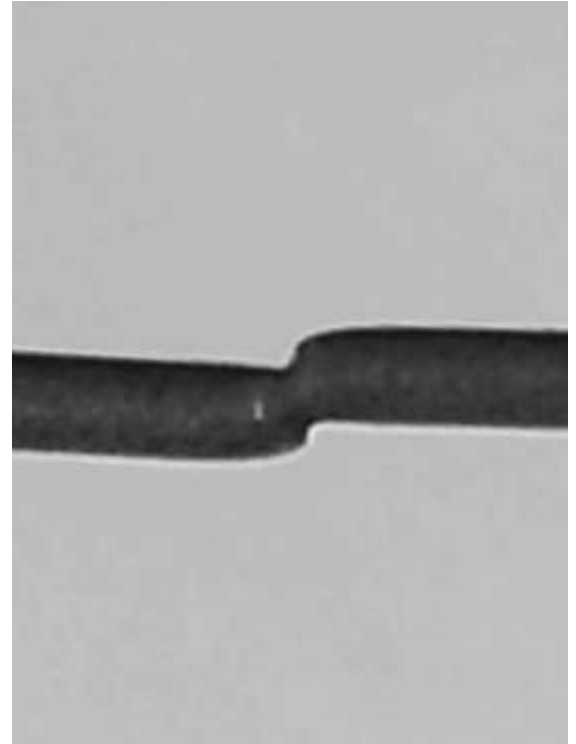
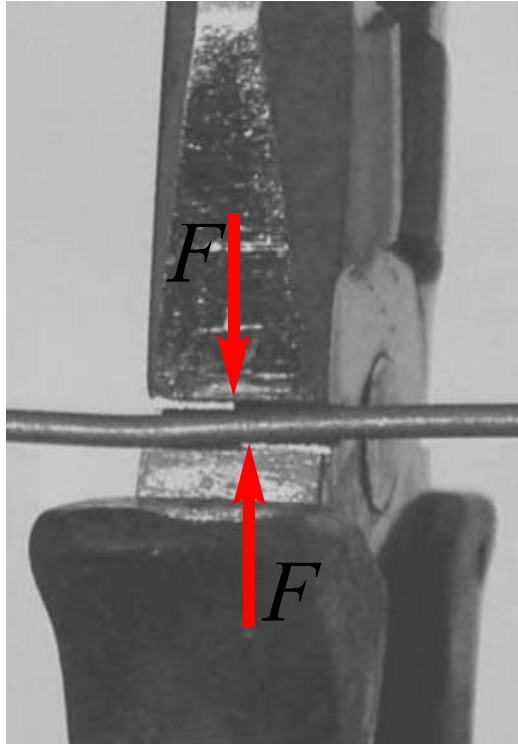
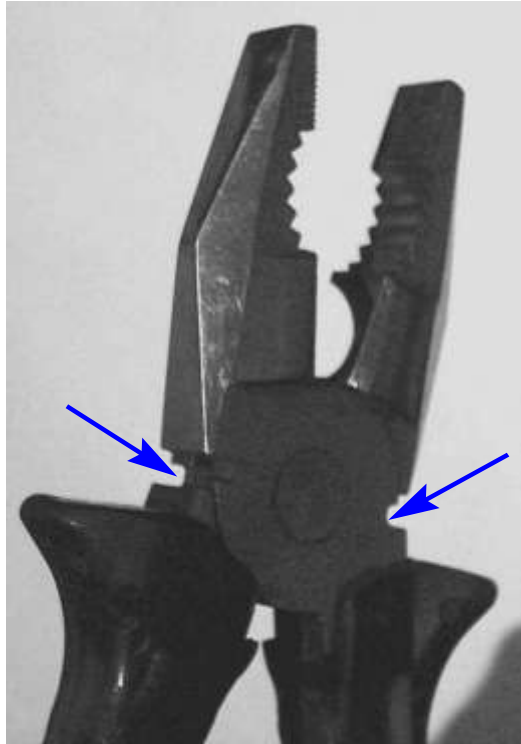
# СМИЦАЊЕ



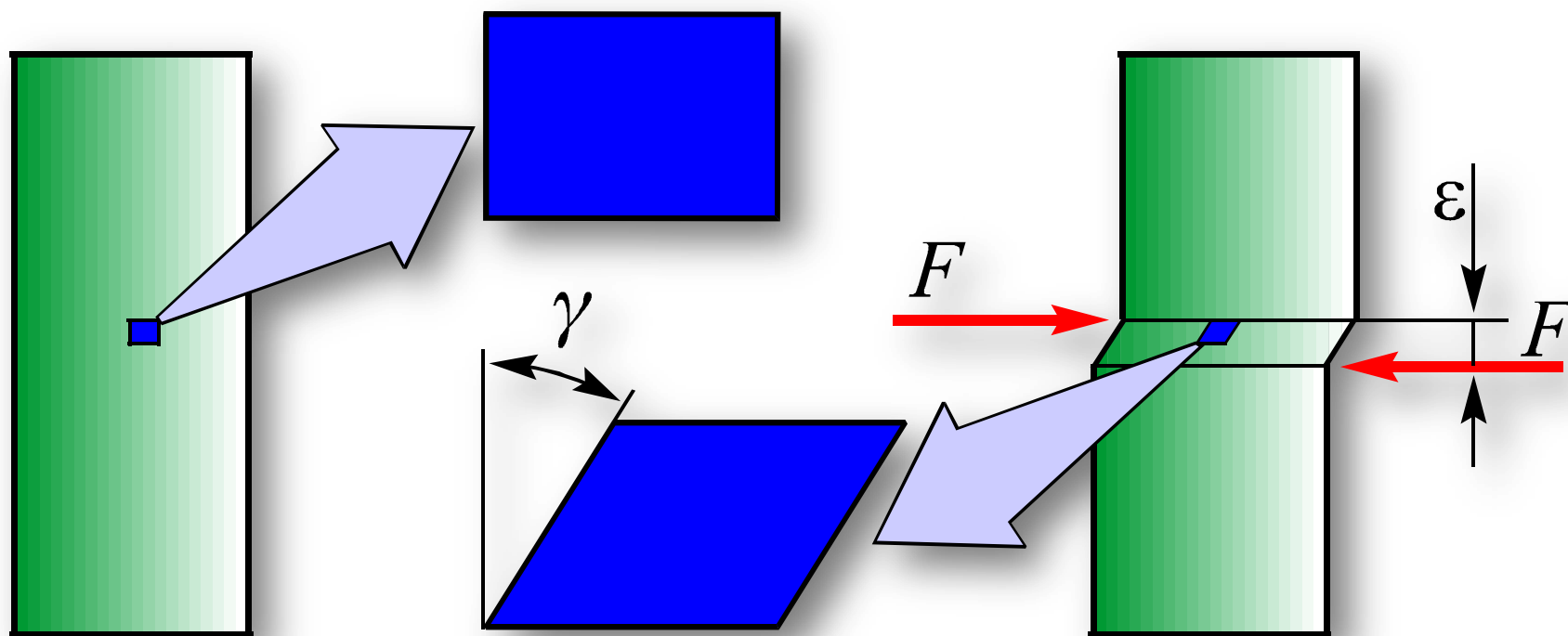
## 20. Напони и деформације при смицању.



Смицање се јавља код штапа који је оптерећен са две силе истог интензитета и супротног смера, чији су правци паралелни и на малом растојању  $\varepsilon$ .



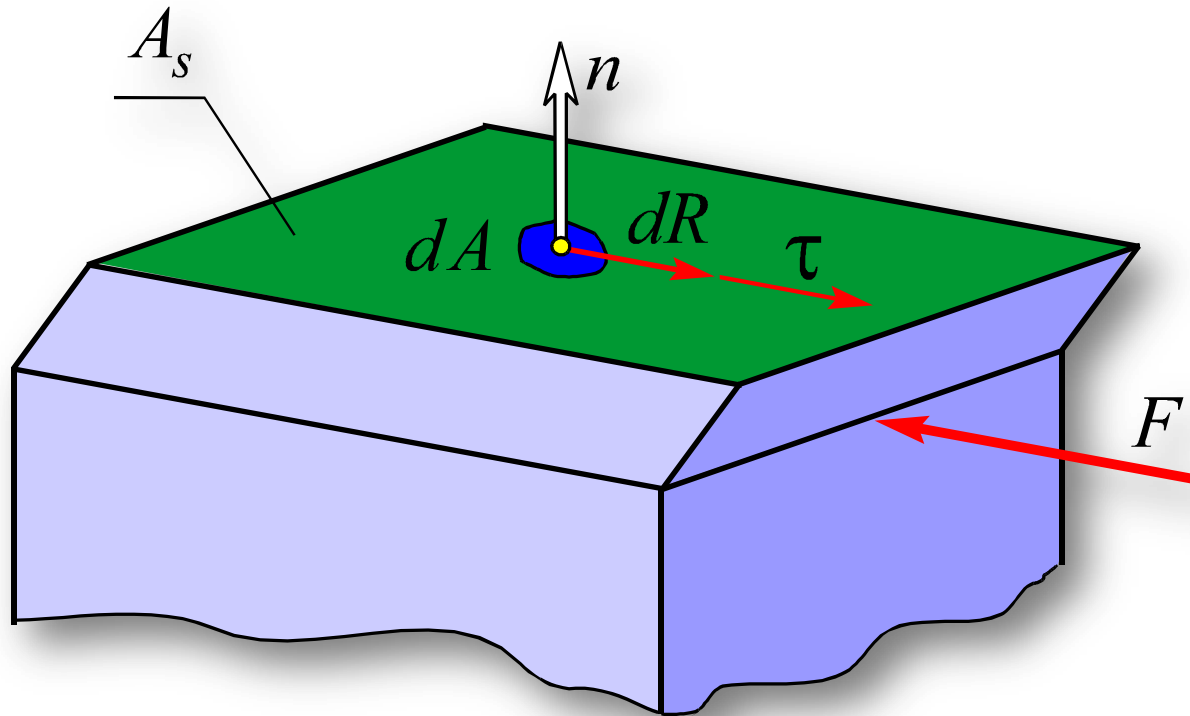
При смицању елементарно мали правоугаоник прелази у паралелограм.



$\gamma$  - угао клизања



# Анализа напона



Постоје само тангенцијални напони

$$dR = \tau dA$$

$$\tau = \text{const}$$

$$R = \tau A_s$$

# Напони и деформације при смицању.

$$R = F$$

$$\tau = \frac{F}{A_s}$$

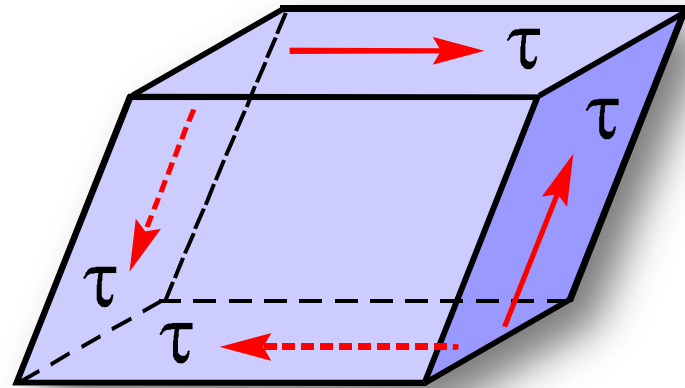
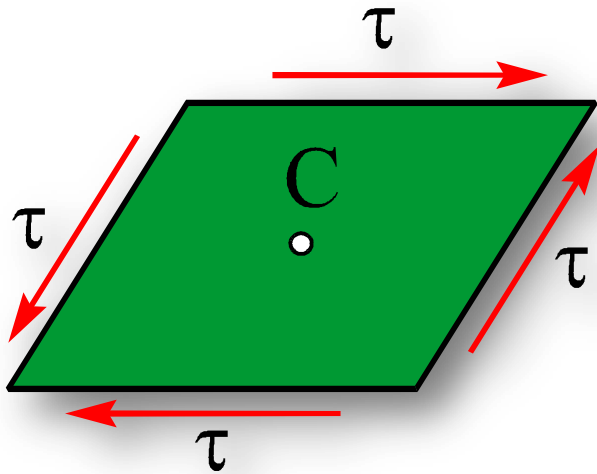
Тангенцијални напон

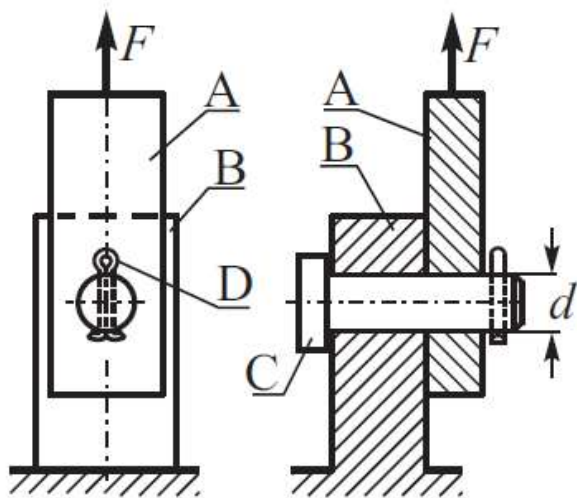
$$\tau = G \gamma$$

Хуков закон за смицање

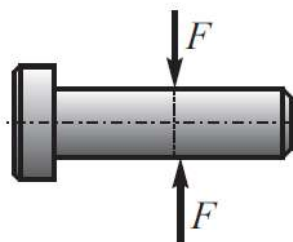
$G$  - модул клизања

Тангенцијални напони делују на све  
четири стране паралелограма

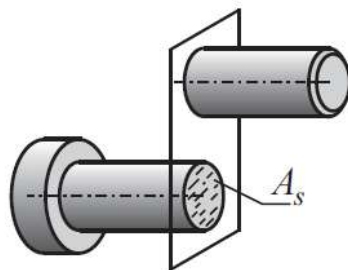




**Пример 3.10** На слици је дато техничко решење зглобног везивања штапа  $A$  са постољем  $B$  које је у склопу подлоге. Кроз кружне отворе на штапу и постољу увучена је цилиндрична осовиница  $C$ , чије је евентуално испадање спречено расцепком  $D$ . На тај начин је спречено померање штапа у правцу силе, али ова веза омогућава да се штап може закретати у односу на постоље. Осовиница је пречника  $d$ , а штап је оптерећен силом  $F$ . Одредити напон у осовиници.



а)



б)

► При дејству силе  $F$  на штап постоји тежња да се он помери то јест “склизне” у односу на постоље у чему га спречава осовиница. Уколико се осовиница издвоји из приказаног склопа, потребно је заменити утицај штапа и постоља на њу. Штап делује на осовиницу силом истог интензитета  $F$  као

што је и сам оптерећен, због чега постоји тежња да се осовиница помери ка горе. Међутим у томе је спречава постоље делујући на осовиницу силом истог интензитета  $F$ , али супротног смера (видети слику а)). Ова приближна анализа доводи до закључка да је осовиница оптерећена силама истог интензитета и супротног смера, чији су правци на малом растојању, што је дефиниција смицања. Према томе, у осовиници је јављају тангенцијални напони који износе:

$$\tau = \frac{F}{A_s},$$

при чему је  $A_s$  површина на којој наступа смицање (површина смицања). Да би се она одредила поћи ће се од претпоставке да је дошло до лома штапа. У том случају површина на којој наступа лом је површина смицања. До лома би дошло на пресеку на којем би штап “склизнуо” по постољу (видети слику б)), па је површина смицања једнака површини попречног пресека штапа. Заменом у израз за напон добија се да је напон у осовиници:

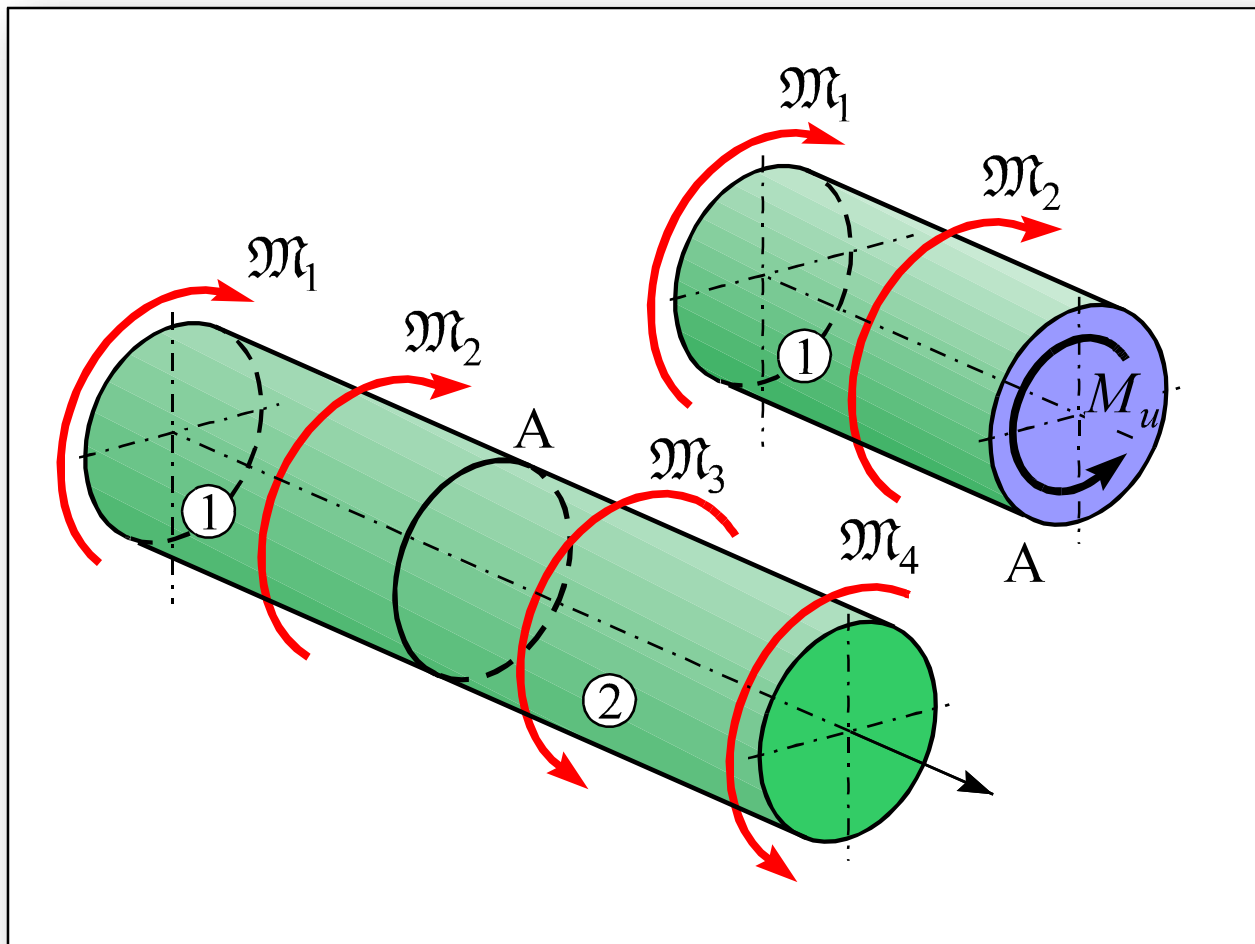
$$\tau = \frac{4F}{d^2\pi}.$$

# УВИЈАЊЕ



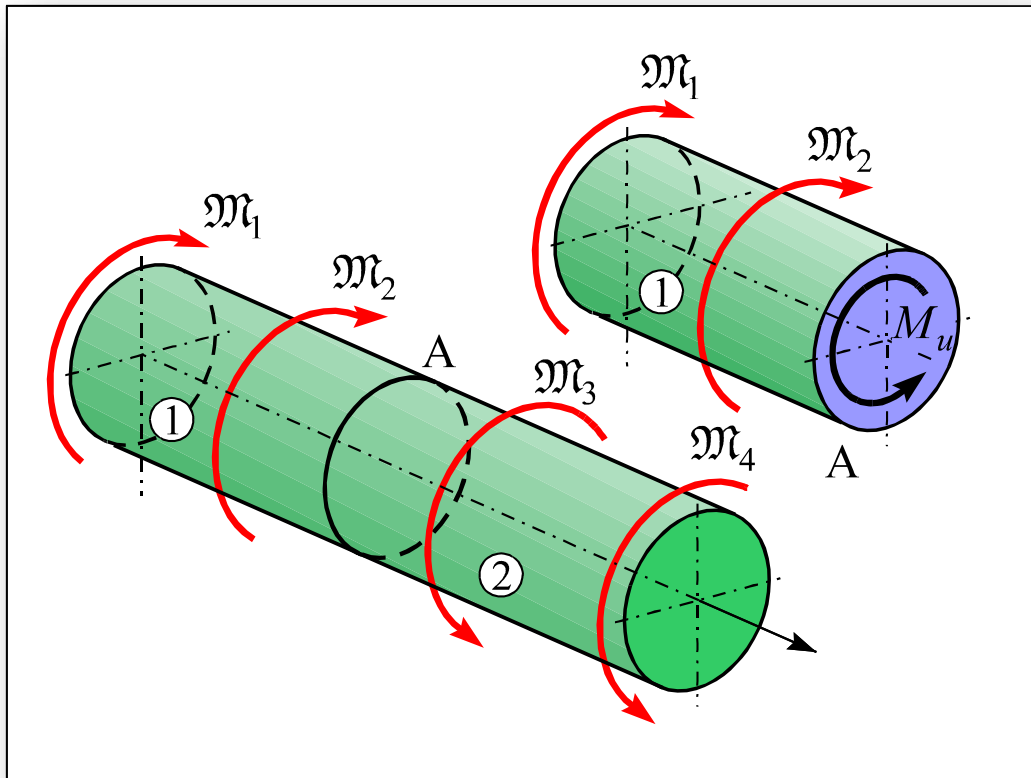
## 21. Увијање, основни појмови.

Штап је оптерећен на увијање уколико је изложен дејству спрегова чије су равни нормалне на осу штапа





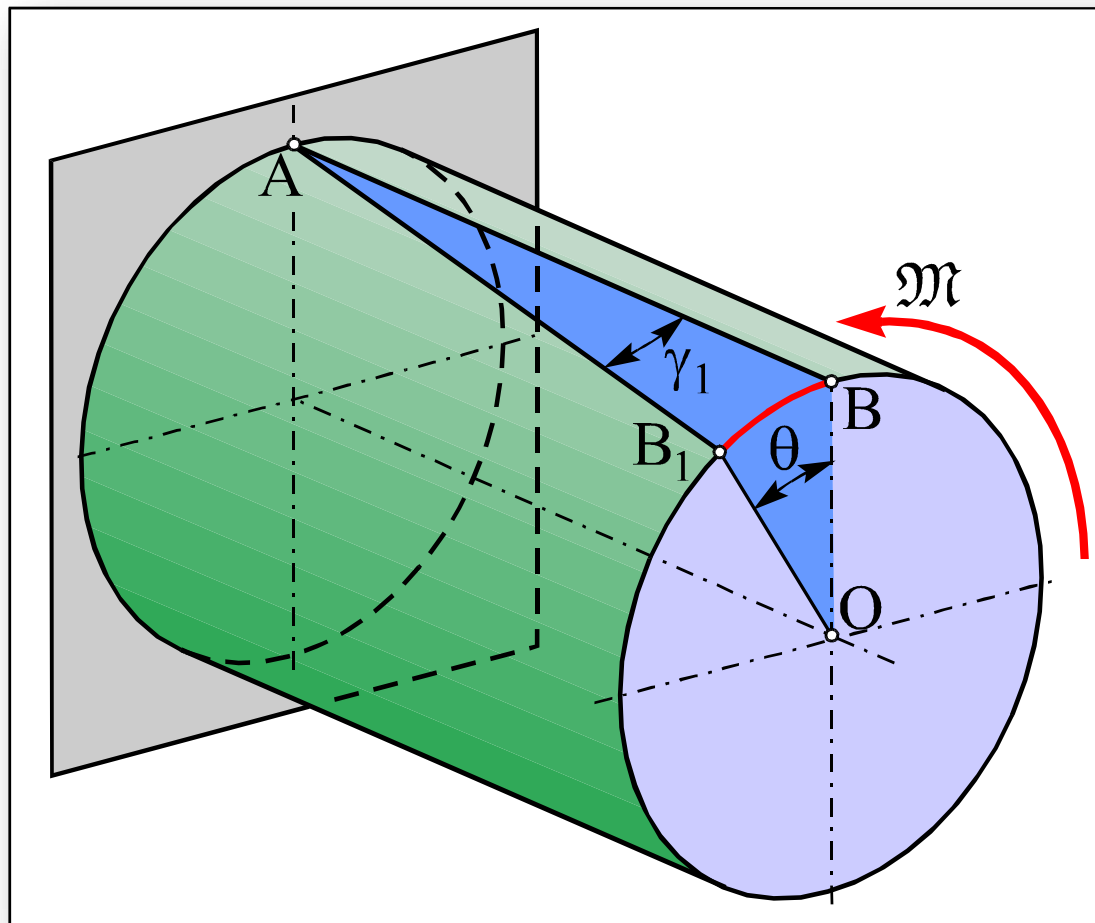
Момент увијања у пресеку је збир спрегова са леве, или са десне стране пресека



$$M_u = \sum M_i^l$$

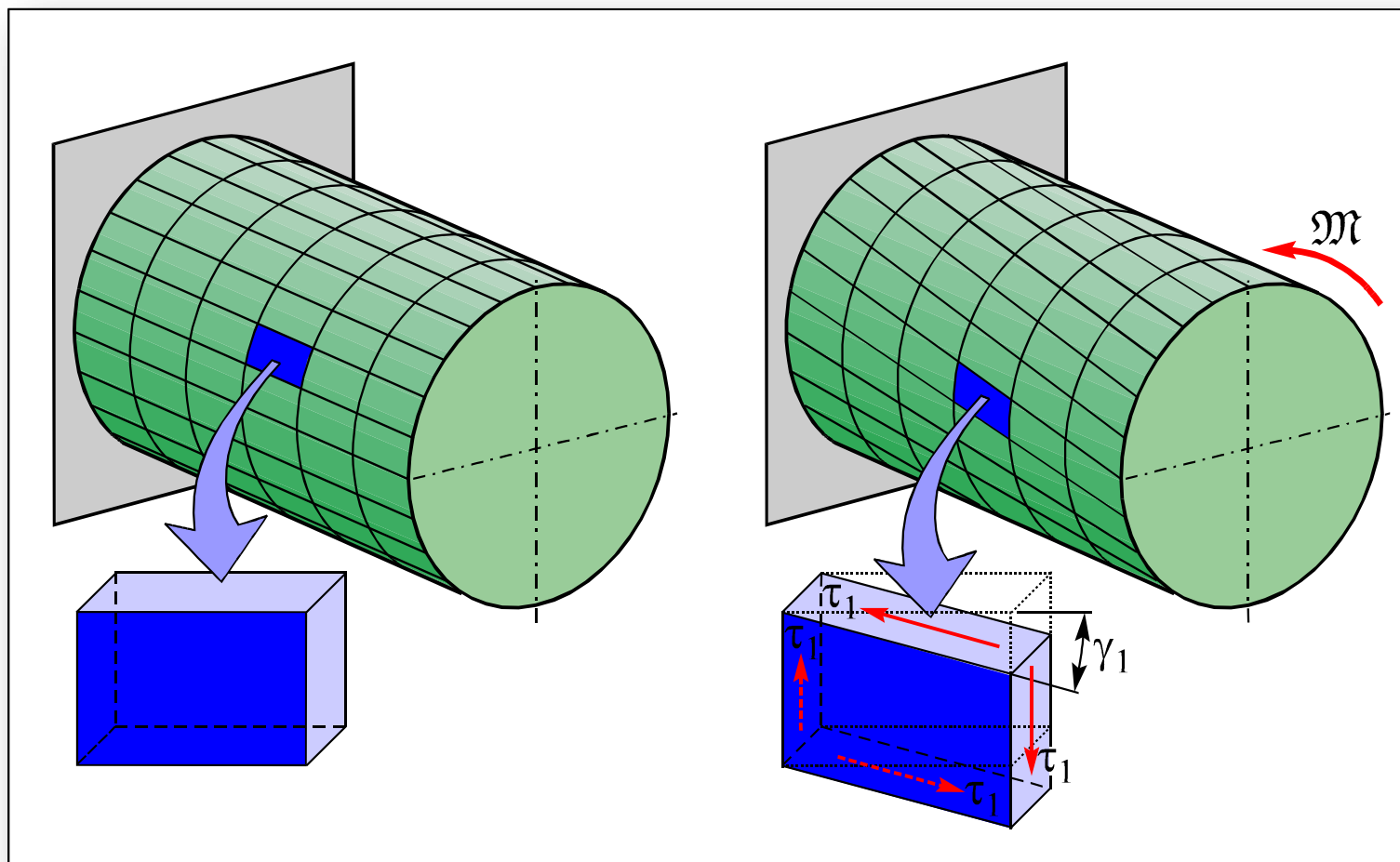
$$M_u = \sum M_i^d$$

## 22. Напони при увијању.



$\theta$  – угао увијања

$\gamma_1$  - угао закретања изводнице



Деформација елементарног дела при увијању  
је иста као при смицању.  
Напони су тангенцијални



$$\overline{\text{DD}}_1 = l\gamma$$

$$\widehat{\text{CC}}_1 = R \theta$$

$$\widehat{\text{DD}}_1 = \rho \theta$$

$$l_{\gamma_1} = R\theta$$

$$l_{\gamma} = \rho \theta$$

$$l\gamma_1 = R\theta$$

$$l\gamma = \rho\theta$$

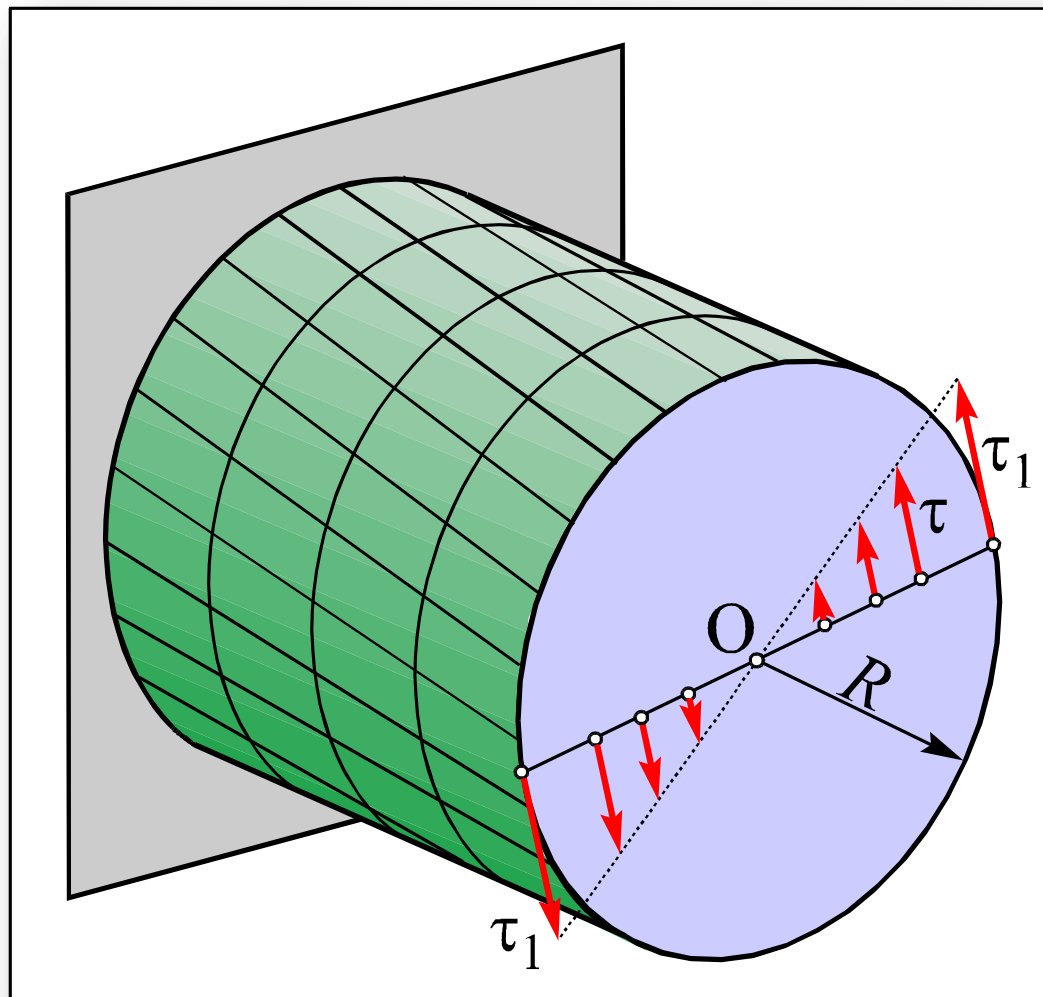
$$\gamma = \frac{\gamma_1 \rho}{R}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \gamma_1 = \frac{\tau_1}{G}$$

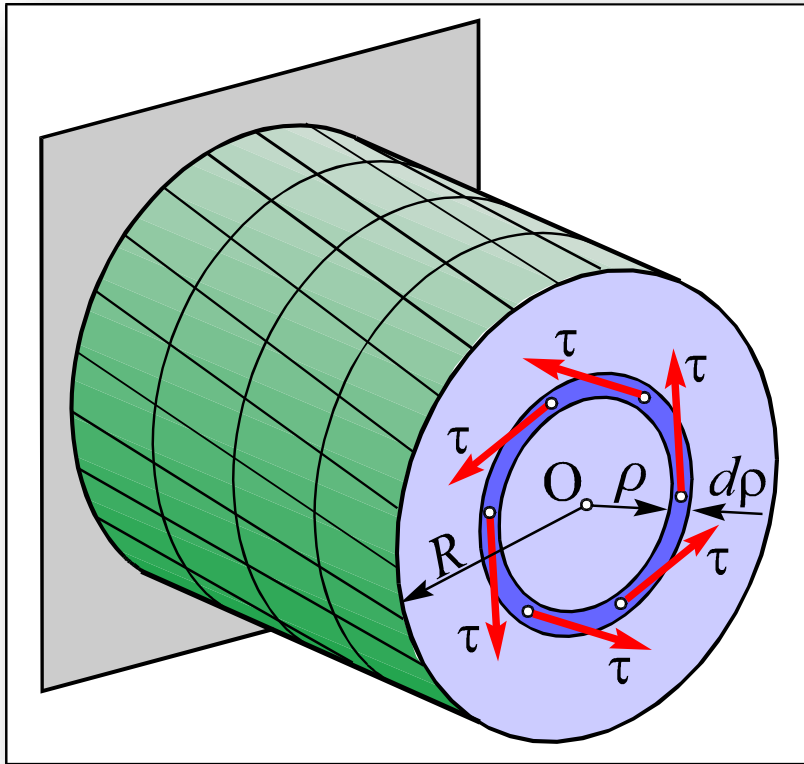
Хуков закон за  
смицање

$$\tau = \frac{\tau_1}{R} \rho$$

Зависност напона при  
увијању од координате  $\rho$



При увијању је највећи напон на  
омотачу штапа



$$\tau = \frac{\tau_1}{R} \rho \quad dA = 2\pi\rho d\rho$$

$$d\mathfrak{M} = \tau \rho dA$$

$$d\mathfrak{M} = \frac{2\pi\tau_1\rho^3 d\rho}{R}$$

$$M_u = \mathfrak{M} = \int_0^R \frac{2\pi\tau_1\rho^3 d\rho}{R}$$



$$I_0 = \int_0^R 2\pi \rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

$I_0$  - је поларни момент инерције

$$M_u = \frac{\tau_1}{R} I_0$$

## Највећи тангенцијални напон при увијању

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_u}{I_0} R.$$

Тангенцијални напон у тачки која  
није на омотачу штапа

$$\tau = \frac{\tau_1}{R} \rho$$

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_u}{I_0} R.$$

$$\tau = \frac{M_u}{I_0} \rho$$

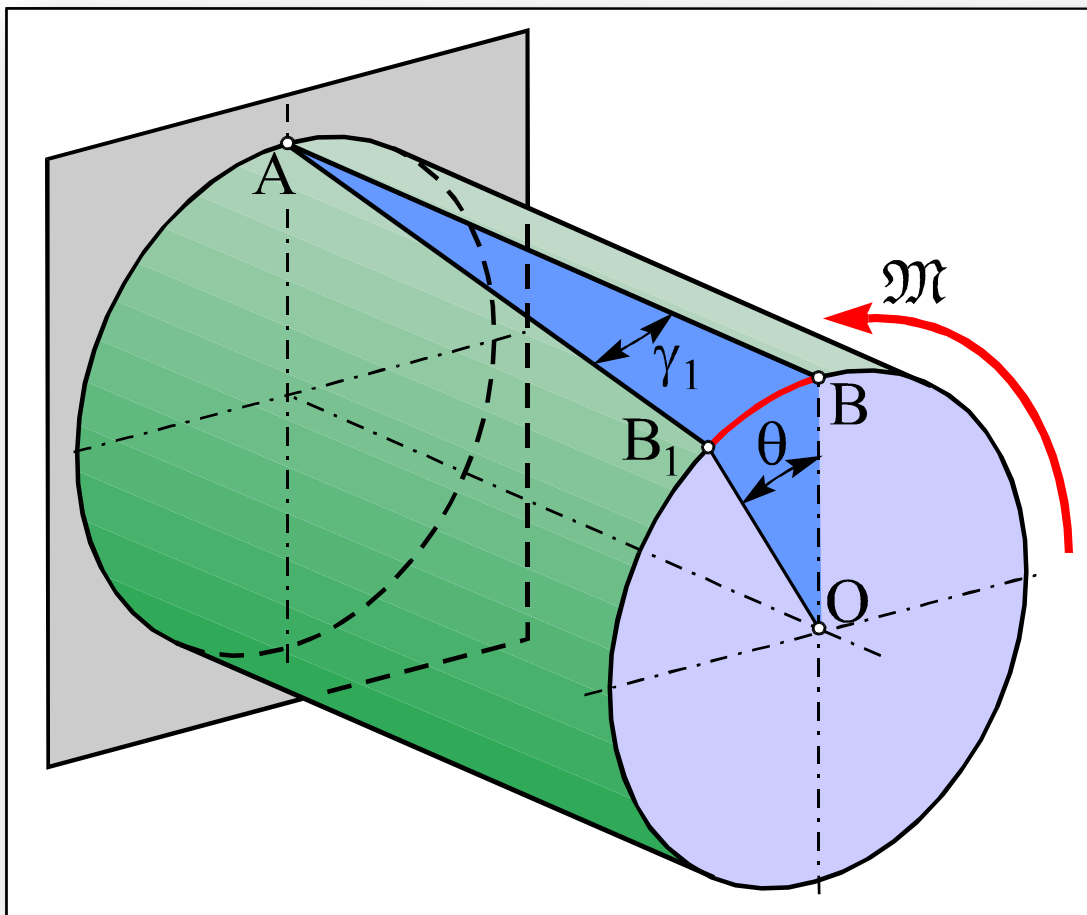
## Поларни момент инерције за кружни попречни пресек

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

## Поларни момент инерције за прстенасти попречни пресек

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

## 23. Одређивање угла увијања.



$$\widehat{BB_1} = l \gamma_1 = R \theta$$

$$\theta = \frac{l \gamma_1}{R}$$

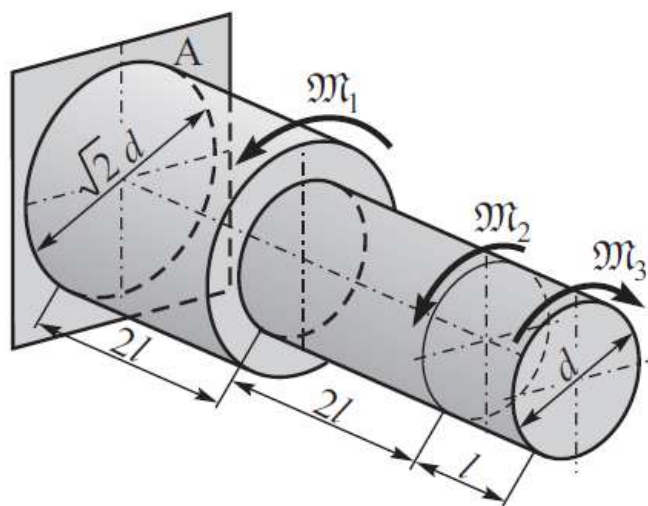
$$\tau_1 = \frac{M_u}{I_0} R \longrightarrow \gamma_1 = \frac{\tau_1}{G}$$



$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{G} = \frac{M_u R}{I_0 G} \longrightarrow \theta = \frac{l \gamma_1}{R}$$

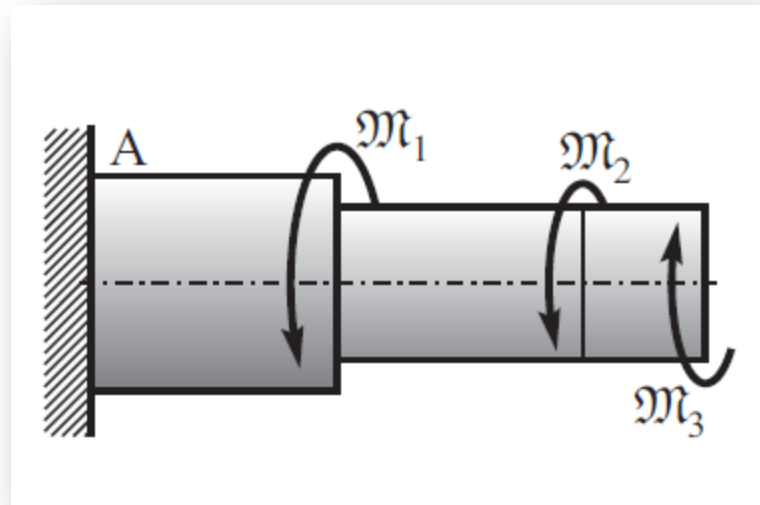


$$\theta = \frac{M_u l}{G I_0}$$



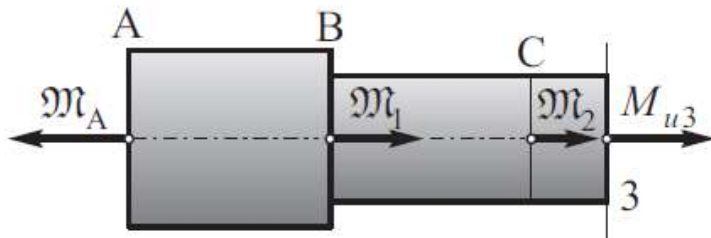
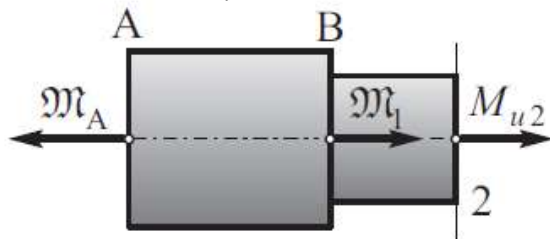
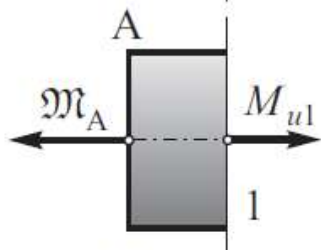
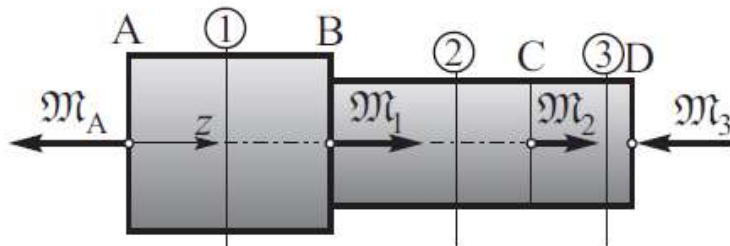
**Пример 3.11** Штап приказан на слици је крајем  $A$  причвршћен за зид и оптерећен са три активна спрега интензитета  $M_1 = M$ ,  $M_2 = 3M$  и  $M_3 = 2M$ . Штап је степенастог попречног пресека, у првом делу је пречника  $\sqrt{2}d$ , а у другом пречника  $d$ . Одредити максимални напон у штапу и угао увијања. Задатак решити за опште вредности, а затим и за конкретне које износе:  $M = 0.6 \text{ Nm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $l = 2 \text{ cm}$ , материјал је гума  $G = 3 \text{ MPa}$ .





$$\sum M_x = -\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = 0.$$

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M} + 3\mathfrak{M} - 2\mathfrak{M} = 2\mathfrak{M}.$$

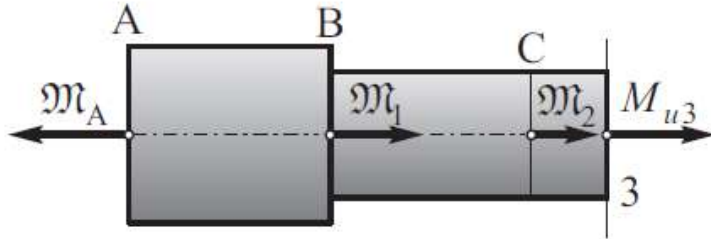
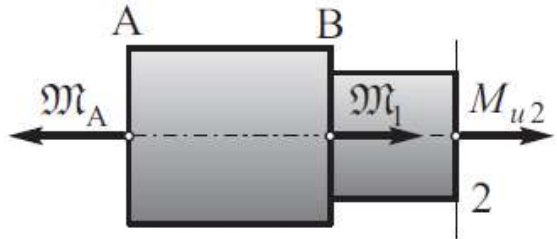
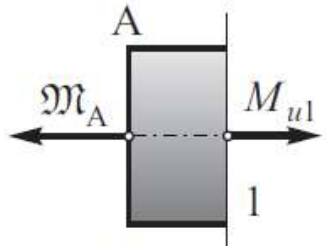
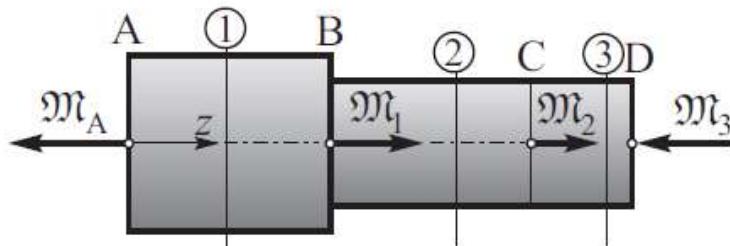


$$M_{u1} = \mathfrak{M}_A = 2\mathfrak{M};$$

$$M_{u2} = \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M};$$

$$M_{u3} = \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = -2\mathfrak{M}.$$

$$\tau_i = \frac{M_{ui}}{I_{0i}} \rho.$$



$$I_{01} = \frac{\pi}{32}(\sqrt{2}d)^4 = \frac{\pi d^4}{8}; \quad I_{02} = I_{03} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$\rho_{\max 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}d; \quad \rho_{\max 2} = \rho_{\max 3} = \frac{d}{2},$$

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{u1}}{I_{01}} \rho_{\max 1} = \frac{8\sqrt{2}\mathfrak{M}}{\pi d^3};$$

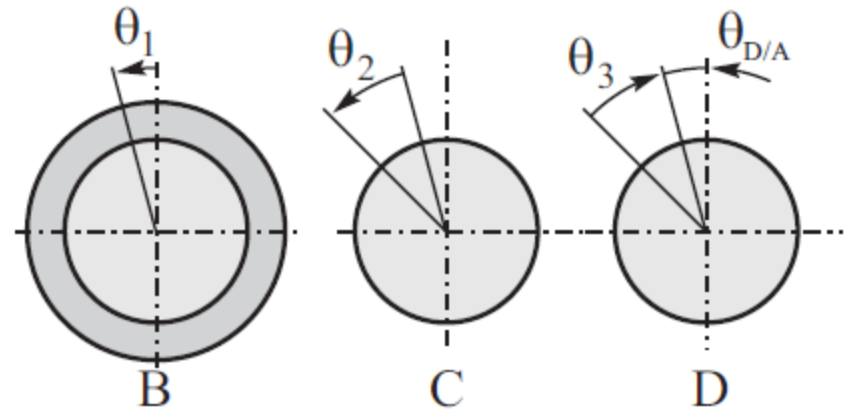
$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{u2}}{I_{02}} \rho_{\max 2} = \frac{16\mathfrak{M}}{\pi d^3};$$

$$\tau_{\max 3} = \frac{M_{u3}}{I_{03}} \rho_{\max 3} = -\frac{32\mathfrak{M}}{\pi d^3}.$$

$$\theta_1 = \frac{M_{u1}l_1}{GI_{01}} = \frac{32\mathfrak{M}l}{G\pi d^4};$$

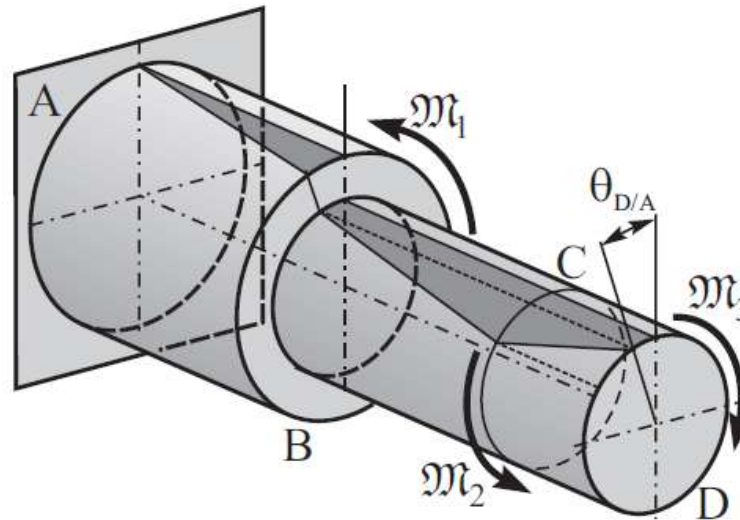
$$\theta_2 = \frac{M_{u2}l_2}{GI_{02}} = \frac{64\mathfrak{M}l}{G\pi d^4};$$

$$\theta_3 = \frac{M_{u3}l_3}{GI_{03}} = -\frac{64\mathfrak{M}l}{G\pi d^4}.$$



$$\tau_{\max 1} = 0.27 \text{ MPa}; \quad \tau_{\max 2} = 0.38 \text{ MPa}; \quad \tau_{\max 3} = 0.76 \text{ MPa};$$

$$\theta_1 = 0.255 \text{ rad} = 14,6^\circ; \quad \theta_2 = 0,509 \text{ rad} = 29,2^\circ; \quad \theta_3 = -0.509 \text{ rad} = -29,2^\circ.$$



$$\theta_{C/A} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{96\mathfrak{M}l}{G\pi d^4} = 0.764 \text{ rad} = 43,8^\circ.$$

$$\theta_{D/A} = \theta_{C/A} + \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{32\mathfrak{M}}{G\pi d^3} = 0.255 \text{ rad} = 14,6^\circ.$$

## Прорачун штапова изложених увијању

Код штапова који се увијају се димензионисање попречног пресека врши према критеријуму чврстоће, а у појединим случајевима и према критеријуму крутости.

Уколико се прорачун врши према критеријуму чврстоће, тада максимални напон у штапу не сме бити већи од дозвољеног тангенцијалног напона, који зависи од материјала од којег штап треба изградити, па је:

$$\tau_{\max} \leq \tau_d.$$

Како се максимални напон рачуна на основу:

$$\tau_{\max} = \frac{M_u}{I_0} \rho_{\max},$$

онда при димензионисању штапа мора бити задовољено

$$\frac{M_u}{I_0} \rho_{\max} \leq \tau_d. \quad (3.23)$$

На пример, у случају штапа константног кружног попречног пресека пречника  $d$  који је на крајевима оптерећен спреговима супротног смера, а истог интензитета  $\mathfrak{M}$  је:

$$M_u = \mathfrak{M}; \quad I_0 = \frac{\pi d^4}{32}; \quad \rho_{\max} = \frac{d}{2}.$$

Тада је на основу израза (3.23):

$$\frac{16\mathfrak{M}}{\pi d^3} \leq \tau_d,$$

одакле пречник штапа мора задовољити услов:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16\mathfrak{M}}{\pi \tau_d}}.$$

Понекад се, посебно ако су у питању врло дугачка, а танка вратила, врши димензионисање на основу критеријума крутости, према ком се захтева да угао увијања штапа не буде већи од извесне задате дозвољене вредности, па је:

$$\theta \leq \theta_d.$$

Како се угао увијања одређује на основу (3.22), онда је:

$$\frac{M_u l}{GI_0} \leq \theta_d,$$

па се сада може извршити димензионисање. Уколико је штап кружног попречног пресека пречника  $d$  и дужине  $l$  и ако је оптерећен у сваком пресеку истим моментом увијања  $\mathfrak{M}$ , тада је:

$$\frac{32\mathfrak{M}l}{G\pi d^4} \leq \theta_d,$$

а одавде је тражени пречник:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32\mathfrak{M}l}{G\pi\theta_d}}.$$

Уколико се димензионисање врши на основу оба критеријума, тада се као меродаван пречник мора усвојити онај који је већи.

# Шта смо научили?

- 20. Напони и деформације при смицању.
- 21. Увијање, основни појмови.
- 22. Напони при увијању.
- 23. Одређивање угла увијања.