

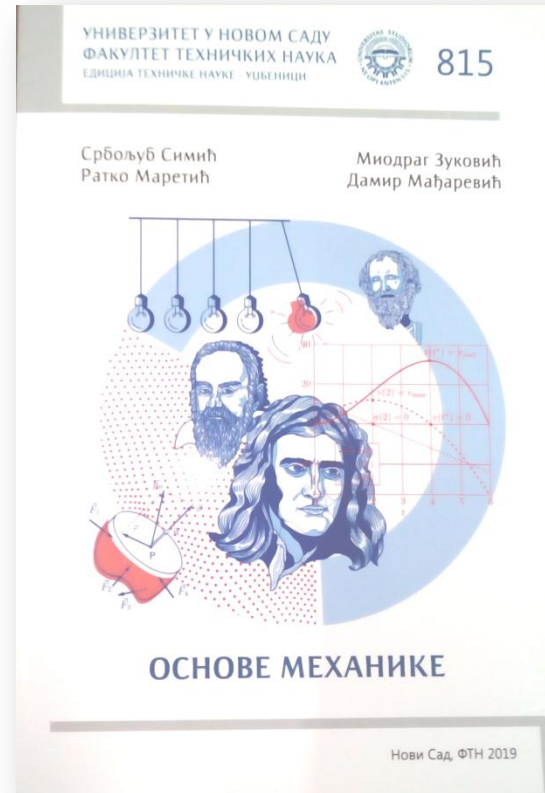
Динамика – 1. део

Кинематика тачке – 1. део – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



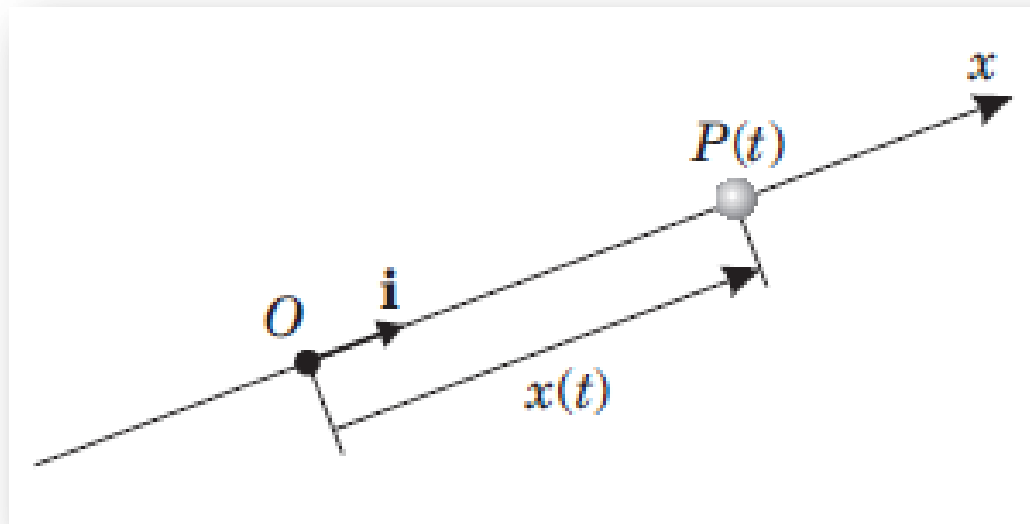
Шта ћемо научити?

- 27. Кинематика материјалне тачке: референтна и посматрана тачка, вектор положаја, кретање и промена вектора положаја, почетни тренутак, трајекторија.
- 28. Праволинијско кретање материјалне тачке. Брзина и убрзање тачке.
- 29. Једнолико и једнакопромењиво праволинијско кретање тачке.

Кинематика

Део механике који се бави изучавањем кретања материјалних тала не узимајући у обзир дејства која утичу на њега.

Праволинијско кретање тачке



- параметарска једначина $x = x(t)$
- вектор положаја $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}$

Праволинијско кретање тачке

- вектор положаја

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}$$

- брзина

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} = \dot{x}(t)\vec{i} = \dot{\vec{r}}(t)$$

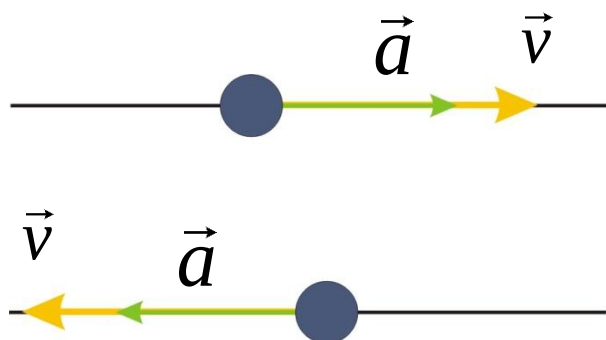
- убрзање

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} = \dot{v}_x(t)\vec{i} = \ddot{x}(t)\vec{i} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Праволинијско кретање тачке

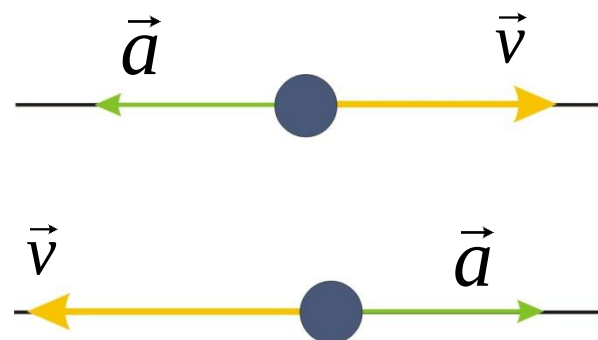
Убрзано и успорено кретање

- Убрзано кретање



$$\frac{d}{dt}|\vec{v}| > 0 \quad \left(\frac{d}{dt}(v^2) > 0 \right)$$
$$\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$$

- Успорено кретање



$$\frac{d}{dt}|\vec{v}| < 0 \quad \left(\frac{d}{dt}(v^2) < 0 \right)$$
$$\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$$

Праволинијско кретање тачке

Инверзни проблем

- задато:

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = f(t)$$

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$$

- одредити:

$$\dot{x}(t), x(t)$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = f(t) \rightarrow \int d\dot{x} = \int f(t)dt \rightarrow \dot{x}(t) = \int f(t)dt + C_1 = g(t) + C_1$$

$$\frac{dx}{dt} = g(t) + C_1 \rightarrow \int dx = \int (g(t) + C_1)dt \rightarrow x(t) = \int g(t)dt + C_1t + C_2 = h(t) + C_1t + C_2$$

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} h(t_0) + C_1t_0 + C_2 = x_0 \\ g(t_0) + C_1 = v_0 \end{array} \right\} \rightarrow C_1, C_2$$

Праволинијско кретање тачке

Специјални случајеви

- Једнолико (равномерно) кретање
- Једнакопроменљиво кретање

$$v_x(t) = v_0 = \text{const}$$

$$a_x(t) = 0 = \text{const}$$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

$$a_x(t) = a_0 = \text{const}$$

$$v_x(t) = a_0 t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

Пример

4.1 Материјална тачка врши праволинијско кретање које је описано следећом параметарском једначином:

$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40,$$

где је x у метрима m , а време t у секундама s . Ако је тачка започела кретање у тренутку $t_0 = 0$, одредити тренутак t_1 у ком је променила смер кретања. Одредити положај тачке $x(t_1)$ у тренутку промене смера, као и пут који је тачка прешла од почетка кретања до тог тренутка. Колико је убрзање тачке у тренутку t_1 ?

Параметарска једначина кретања,
брзина и убрзање тачке:

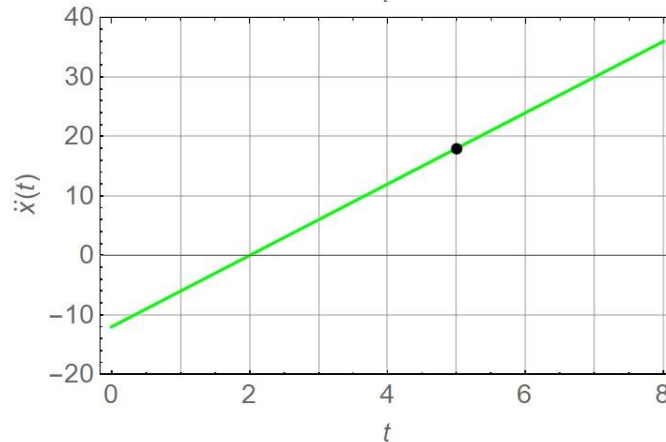
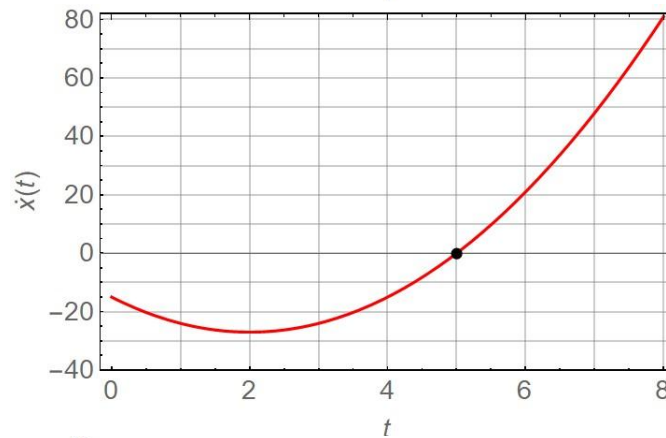
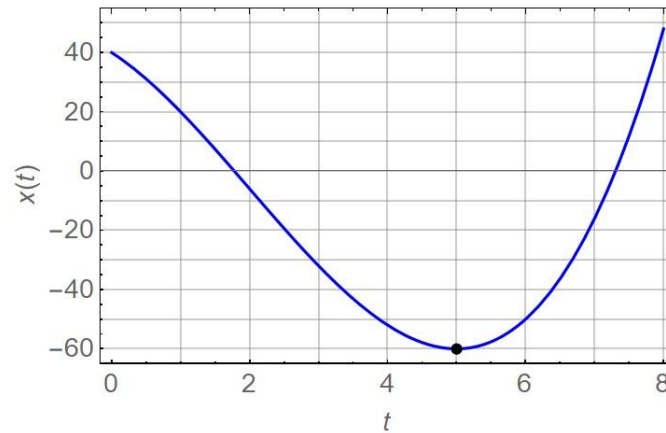
$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$$

↓

$$\dot{x}(t) = 3t^2 - 12t - 15$$

↓

$$\ddot{x}(t) = 6t - 12$$



Тренутак промене смера кретања
тачке:

$$\dot{x}(t_1) = 3t_1^2 - 12t_1 - 15 = 0$$

↓

$$t_1^2 - 4t_1 - 5 = 0$$

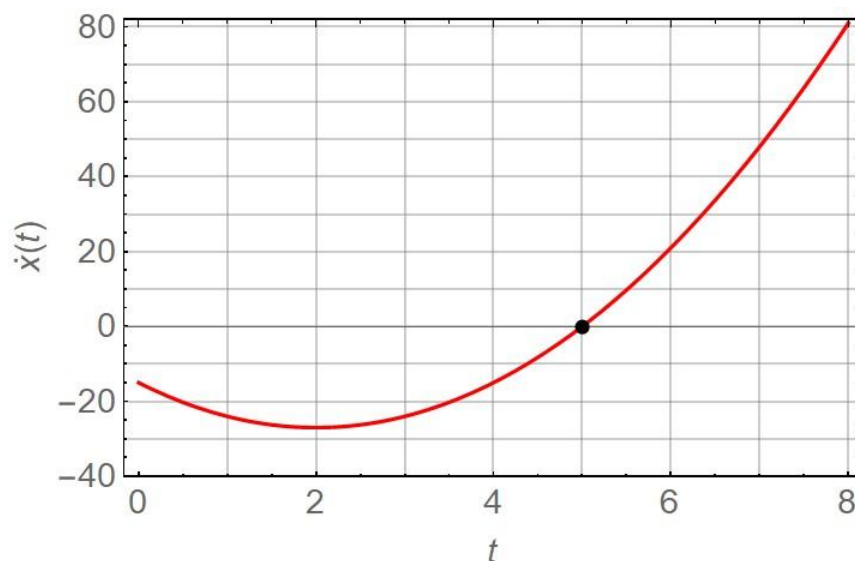
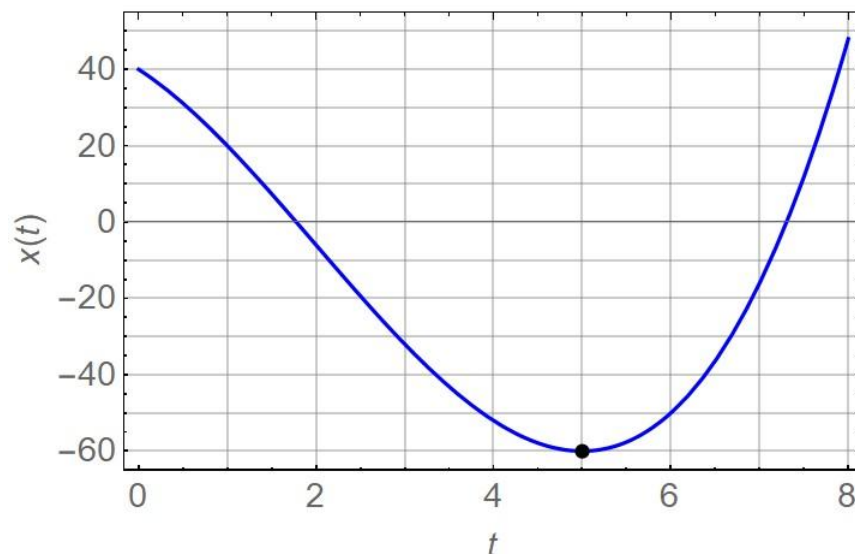
↓

$$(t_1)_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

↓

$$t_1 = -1 \quad , \quad t_1 = 5$$

$$t_1 = 5$$



Положај и убрзање тачке у тренутку t_1 :

$$t_1 = 5$$

$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$$



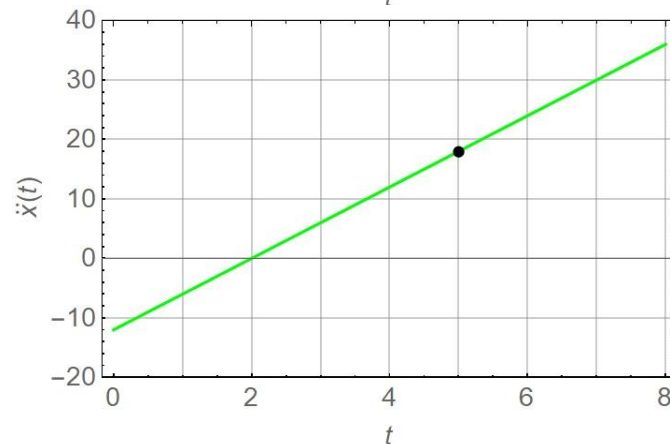
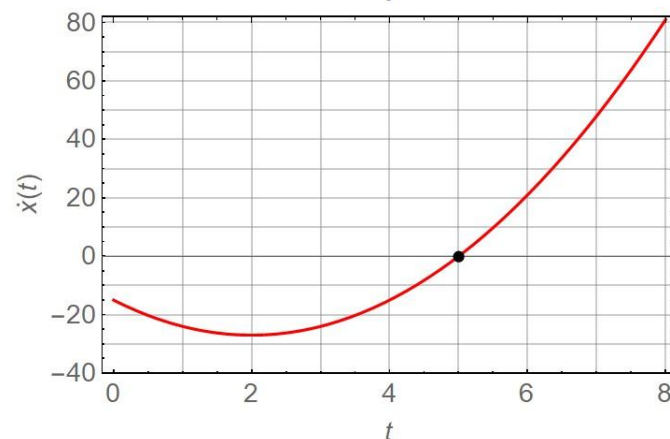
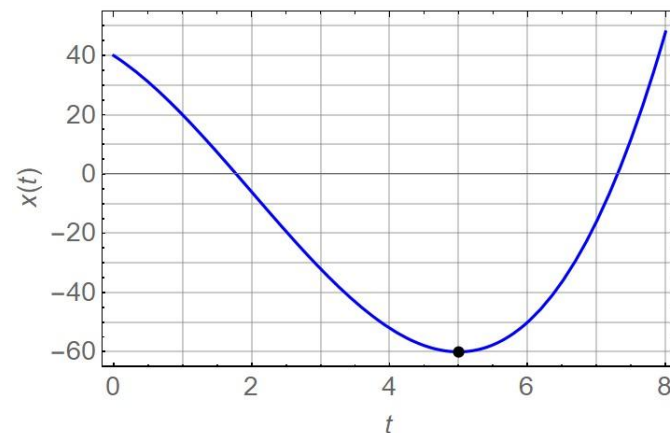
$$x(t_1) = x(5) = 5^3 - 6(5^2) - 15(5) + 40$$

$$x(t_1) = x(5) = -60$$

$$\ddot{x}(t_1) = \ddot{x}(5) = 6t - 12$$



$$\ddot{x}(t_1) = \ddot{x}(5) = 6(5) - 12 = 18$$



Пређени пут тачке до тренутка t_1 :

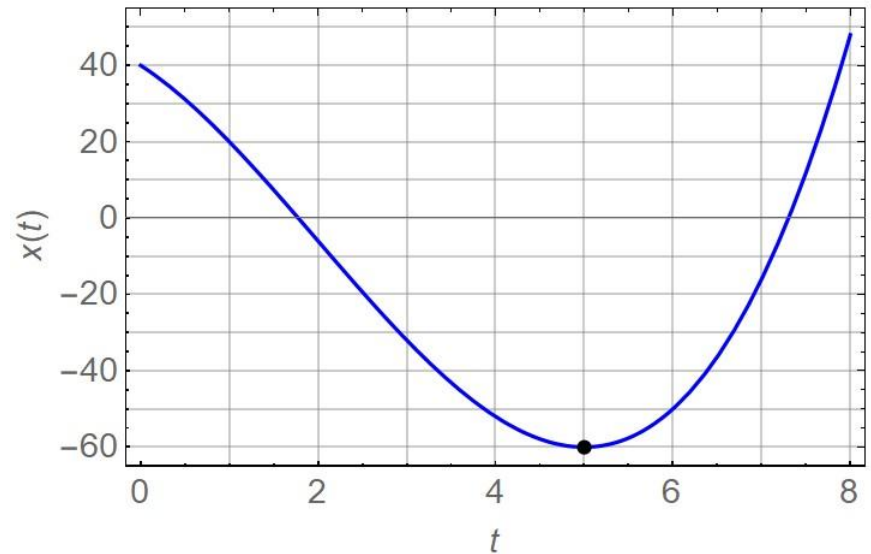
$$t_1 = 5$$

$$P[0, t_1] = P[0, 5] = |x(5) - x(0)|$$
$$P[0, 5] = |-60 - 40| = 100$$

$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$$

$$x(5) = -60$$

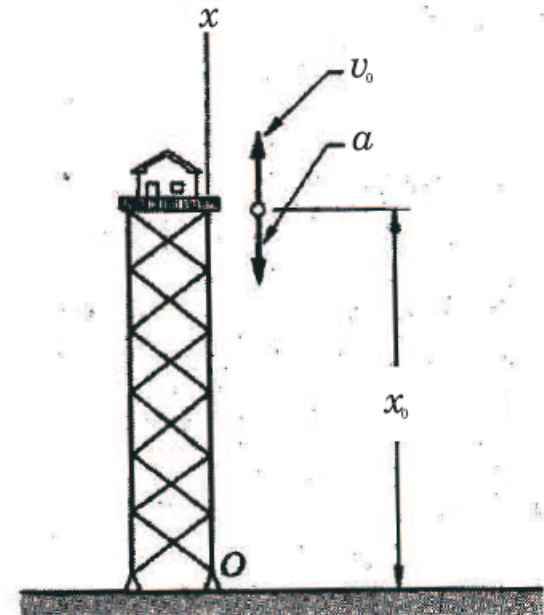
$$x(0) = 40$$



Пример

4.4 Лопта је бачена вертикално увис са платформе која се налази на висини $20m$ изнад површине земље. Почетна брзина лопте је била $v_0 = 15m/s$. Знајући да је убрзање тачке константно ($9.81m/s^2$) и усмерено на доле одредити:

- а) брзину и положај тачке у произвољном тренутку времена t ;
- б) висину лета h тачке и тренутак t_1 у ком је она достигнута;
- в) тренутак t_2 удара тачке о земљу и брзину приликом удара;
- г) нацртати кинематичке дијаграме $x-t$ и $v-t$.



$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -g = \text{const}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = g \rightarrow d\dot{x} = g dt \rightarrow \int d\dot{x} = g \int dt$$

$$\dot{x}(t) = -gt + c_1$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = gt + c_1 \rightarrow dx = gtdt + c_1 dt$$

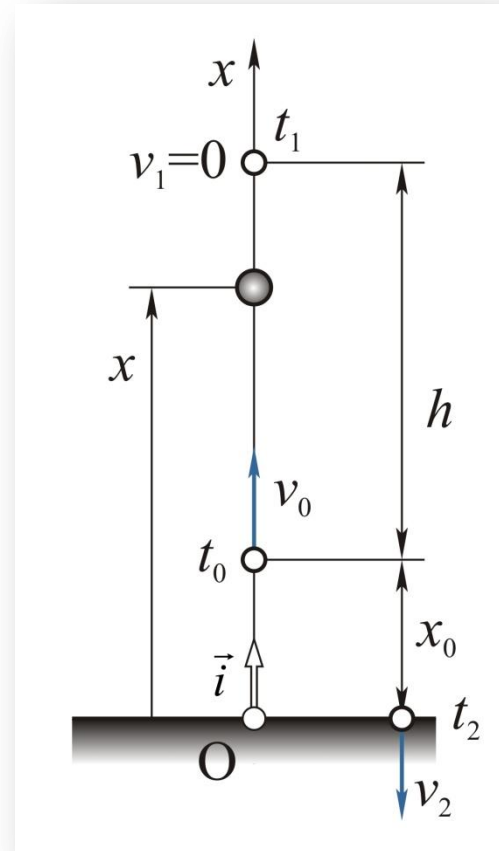
$$\int dx = g \int t dt + c_1 \int dt$$

$$x(t) = -g \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(0) = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x}(0) = c_1 = v_0 \\ x(0) = c_2 = x_0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} c_1 = v_0 \\ c_2 = x_0 \end{array}$$

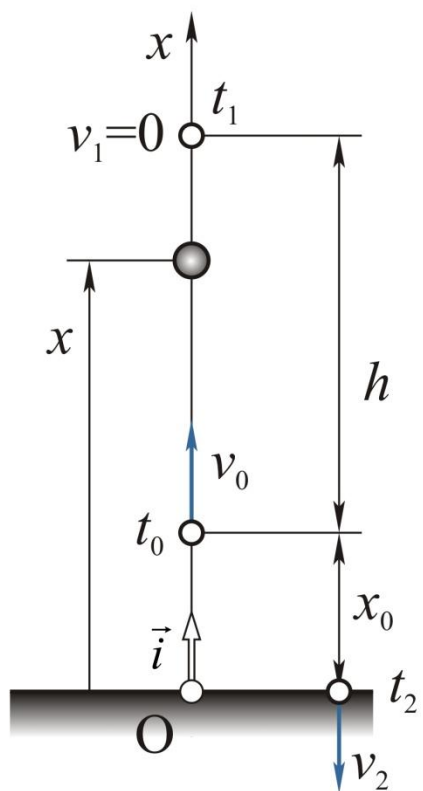
$$\dot{x}(t) = -gt + v_0$$

$$x(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$



$$\dot{x}(t) = -gt + v_0$$

$$x(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$



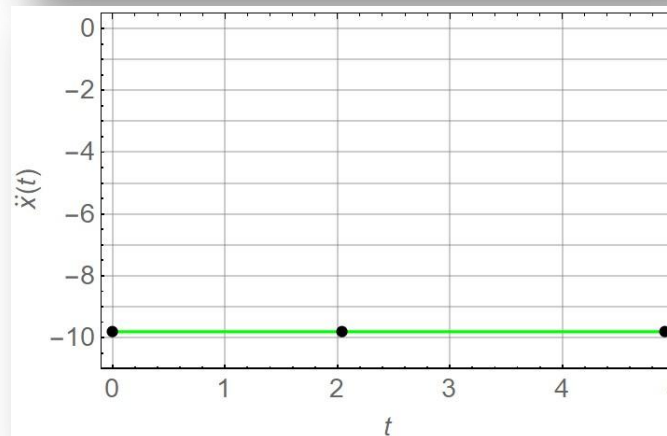
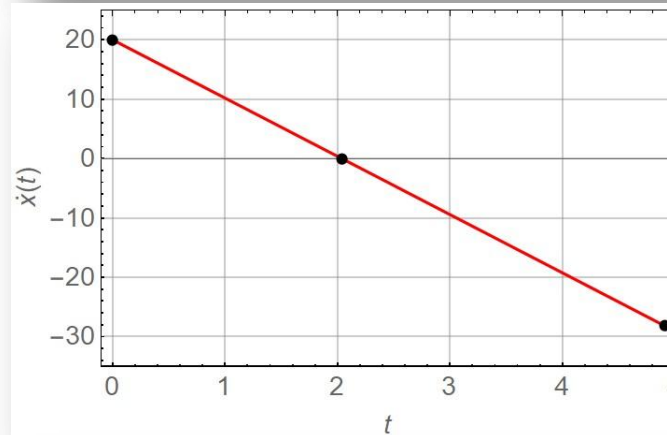
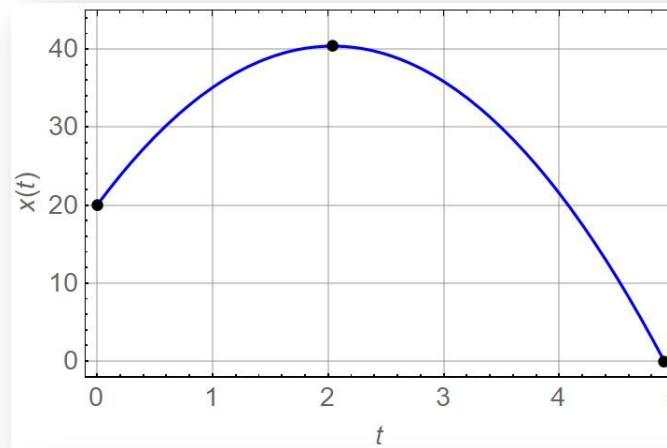
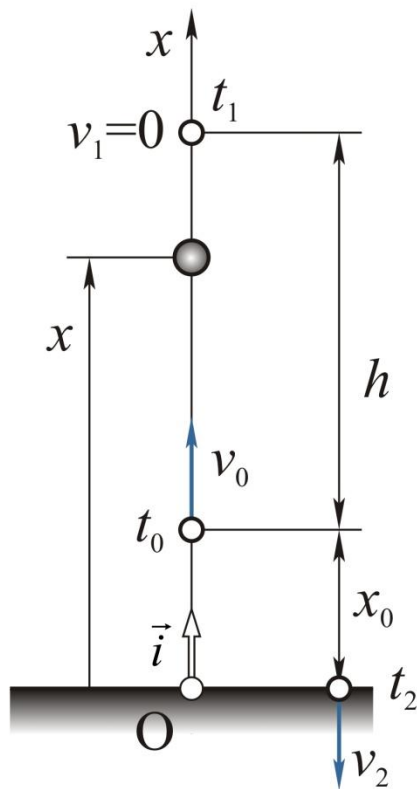
$$t = t_1 \rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x}(t_1) = 0 \\ x(t_1) = x_0 + h \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -gt_1 + v_0 = 0 \\ -g \frac{t_1^2}{2} + v_0 t_1 + x_0 = x_0 + h \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{v_0}{g} \\ h = \frac{v_0^2}{2g} \end{array} \right\}$$

$$t = t_2 \rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x}(t_2) = v_2 \\ x(t_2) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} v_2 = -gt_2 + v_0 \\ -g \frac{t_2^2}{2} + v_0 t_2 + x_0 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} v_2 = -\sqrt{v_0^2 + 2gx_0} \\ t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gx_0}}{g} \end{array} \right\}$$

$$\ddot{x}(t) = -g$$

$$\dot{x}(t) = -gt + v_0$$

$$x(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$



$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_0 = 20 \text{ m}$$



$$t_1 = 2.039 \text{ s}$$

$$h = 20.387 \text{ m}$$

$$t_2 = 4.908 \text{ s}$$

$$v_2 = -28.1496 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Пример

4.5 Праволинијско кретање материјалне тачке описано је следећом параметарском једначином:

$$x(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t \right).$$

Одредити:

- а) тренутак t_1 у ком ће тачка први пут проћи кроз координатни почетак;
- б) брзину и убрзање тачке у том тренутку;
- в) пут који ће тачка прећи током првих 6 секунди кретања.

Параметарска једначина кретања,
брзина и убрзање тачке:

$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{3\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{3\pi^2}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

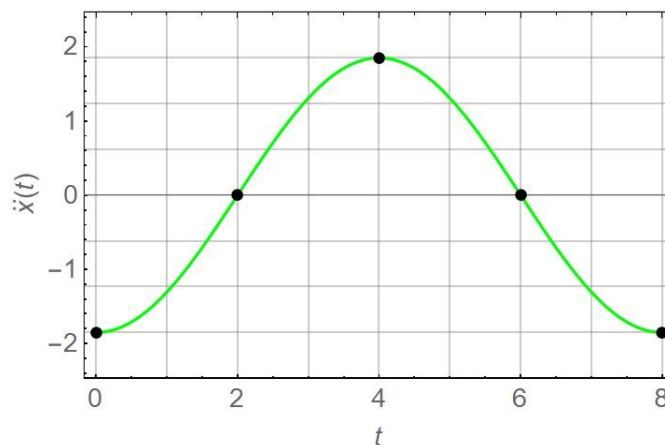
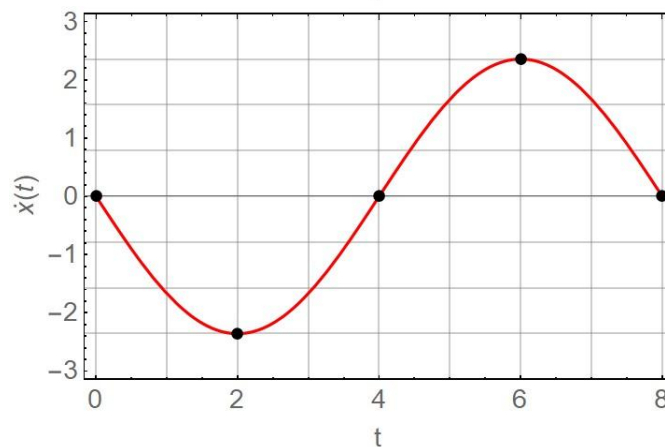
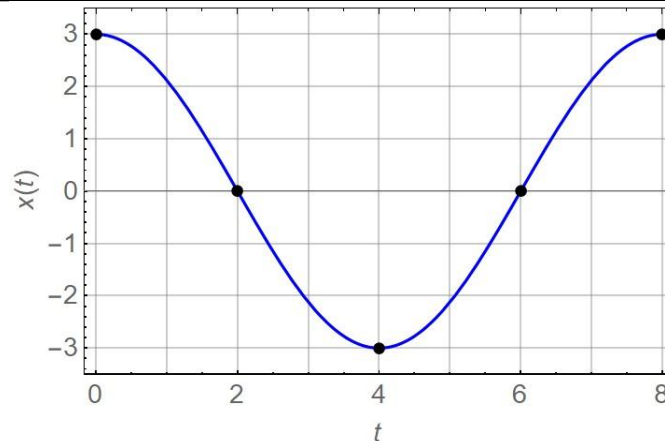
$$x(0) = 3, \dot{x}(0) = 0, \ddot{x}(0) = -\frac{3\pi^2}{16}$$

$$x(2) = 0, \dot{x}(2) = -\frac{3\pi}{4}, \ddot{x}(2) = 0$$

$$x(4) = -3, \dot{x}(4) = 0, \ddot{x}(4) = \frac{3\pi^2}{16}$$

$$x(6) = 0, \dot{x}(6) = \frac{3\pi}{4}, \ddot{x}(6) = 0$$

$$x(8) = 3, \dot{x}(8) = 0, \ddot{x}(8) = -\frac{3\pi^2}{16}$$



Пређени пут тачке до тренутка $t=6$:

$$t = 6$$

$$P[0,6] = P[0,4] + P[4,6]$$

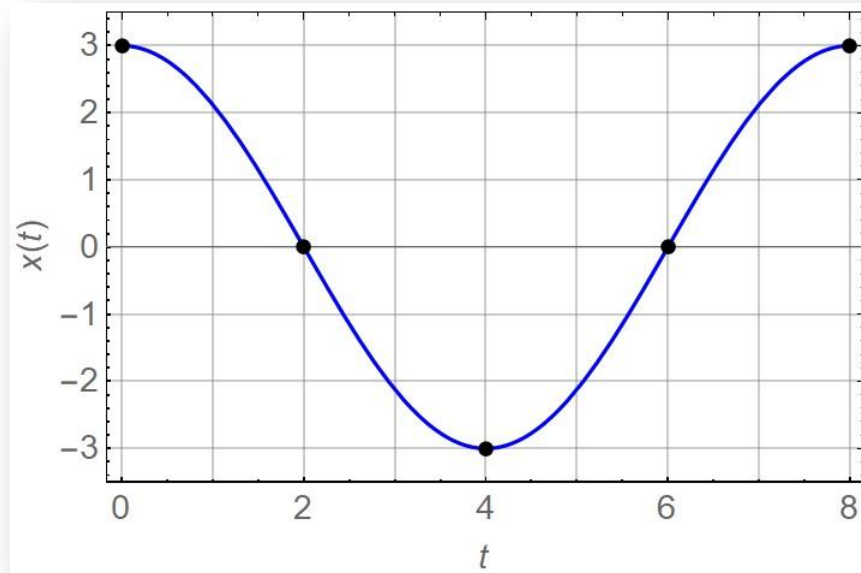
$$P[0,6] = |x(4) - x(0)| + |x(6) - x(4)|$$

$$P[0,6] = |-3 - 3| + |0 - (-3)|$$

$$P[0,6] = 9$$

$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$x(0) = 3, x(4) = -3, x(6) = 0$$



Пример

4.6 Материјална тачка се креће праволинијски и при томе се убрзање мења на следећи начин:

$$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{\tau} \right),$$

$a_0 - m/s^2$, $\tau - s$. Одредити кретање тачке (параметарску једначину) ако се зна да је тачка започела кретање у тренутку $t_0 = 0$ из координатног почетка и да је имала брзину v_0 , $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Одредити положај и брзину тачке у тренутку у ком је њено убрзање једнако нули.

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) = a_0 - \frac{a_0}{\tau} t$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = a_0 - \frac{a_0}{\tau} t$$

$$d\dot{x} = a_0 dt - \frac{a_0}{\tau} t dt$$

$$\int d\dot{x} = a_0 \int dt - \frac{a_0}{\tau} \int t dt$$

$$\dot{x}(t) = a_0 t - \frac{a_0}{2\tau} t^2 + c_1$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = a_0 t - \frac{a_0}{2\tau} t^2 + c_1$$

$$dx = a_0 t dt - \frac{a_0}{2\tau} t^2 dt + c_1 dt$$

$$\int dx = a_0 \int t dt - \frac{a_0}{2\tau} \int t^2 dt + c_1 \int dt$$

$$x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} - \frac{a_0}{6\tau} t^3 + c_1 t + c_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(0) = v_0 \\ x(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x}(0) = c_1 = v_0 \\ x(0) = c_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} c_1 = v_0 \\ c_2 = 0 \end{array}$$

$$\dot{x}(t) = a_0 t - \frac{a_0}{2\tau} t^2 + v_0$$

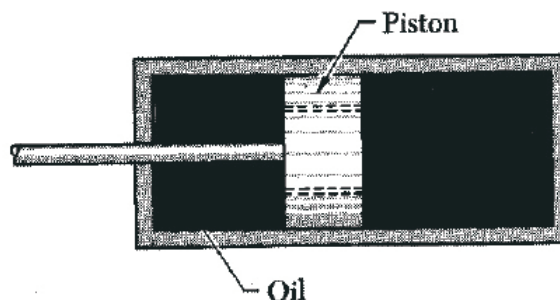
$$x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} - \frac{a_0}{6\tau} t^3 + v_0 t$$

Пример

4.8 Кретање клипа кроз цилиндар у кочионом систему описано је параметарском једначином:

$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}),$$

$v_0 - m/s$, $k - s^{-1}$. Одредити:



- а) брзину и убрзање клипа у произвољном тренутку времена;
- б) брзину клипа у почетном тренутку t_0 и тренутак t_1 у ком ће брзина клипа пасти на половину почетне вредности;
- в) пут који је клип прешао од почетка кретања до тог тренутка.

Параметарска једначина кретања,
брзина и убрзање тачке:

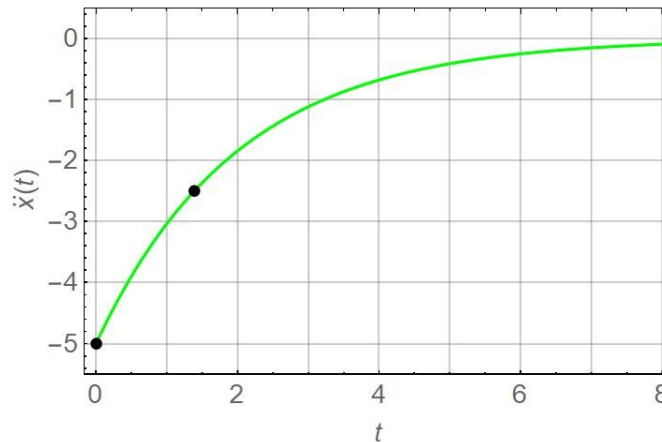
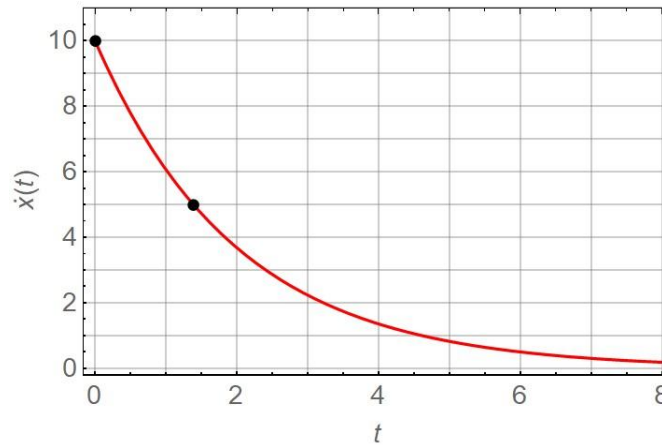
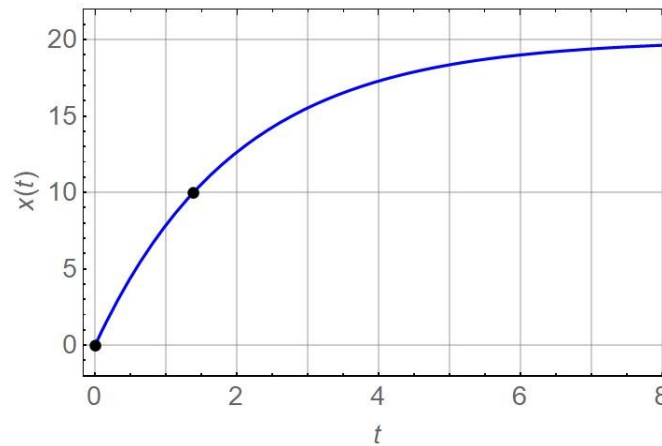
$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k} - \frac{v_0}{k} e^{-kt}$$

↓

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-kt}$$

↓

$$\ddot{x}(t) = -k v_0 e^{-kt}$$



$$v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$k = 0.5 \frac{1}{\text{s}}$$

Брзина клипа у почетном тренутку тачке:

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-kt}$$

↓

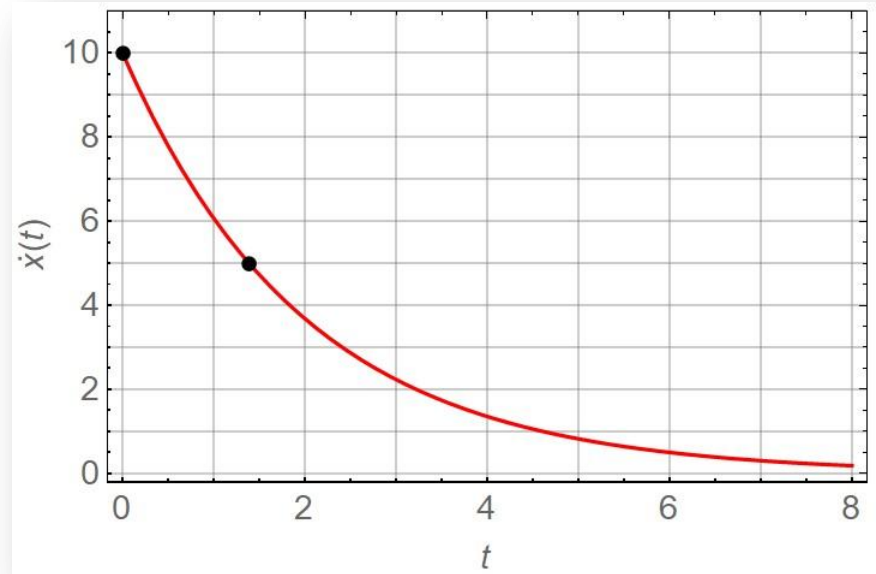
$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}(0) = v_0 e^0 = v_0$$

Тренутак t_1 у коме је брзина клипа једнака половини почетне брзине:

$$\dot{x}(t_1) = \frac{v_0}{2} \rightarrow v_0 e^{-kt_1} = \frac{v_0}{2}$$

$$e^{-kt_1} = \frac{1}{2} \rightarrow e^{kt_1} = 2 \rightarrow$$

$$t_1 = \frac{1}{k} \ln 2$$

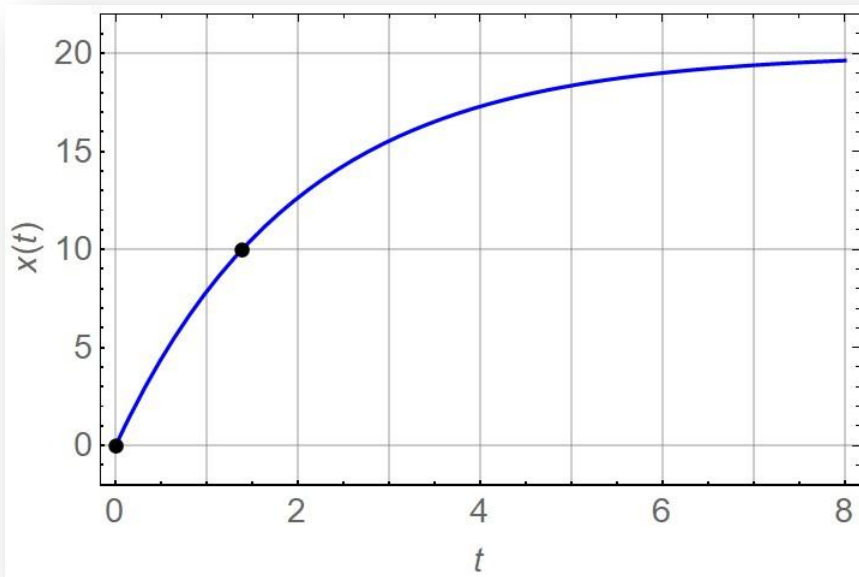


$$v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, k = 0.5 \frac{1}{\text{s}}$$

Пређени пут тачке до тренутка t_1 :

$$P[0, t_1] = P\left[0, \frac{1}{k} \ln 2\right] = \left|x\left(\frac{1}{k} \ln 2\right) - x(0)\right|$$

$$P[0, t_1] = \left|\frac{v_0}{2k} - 0\right| = \frac{v_0}{2k}$$



$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

↓

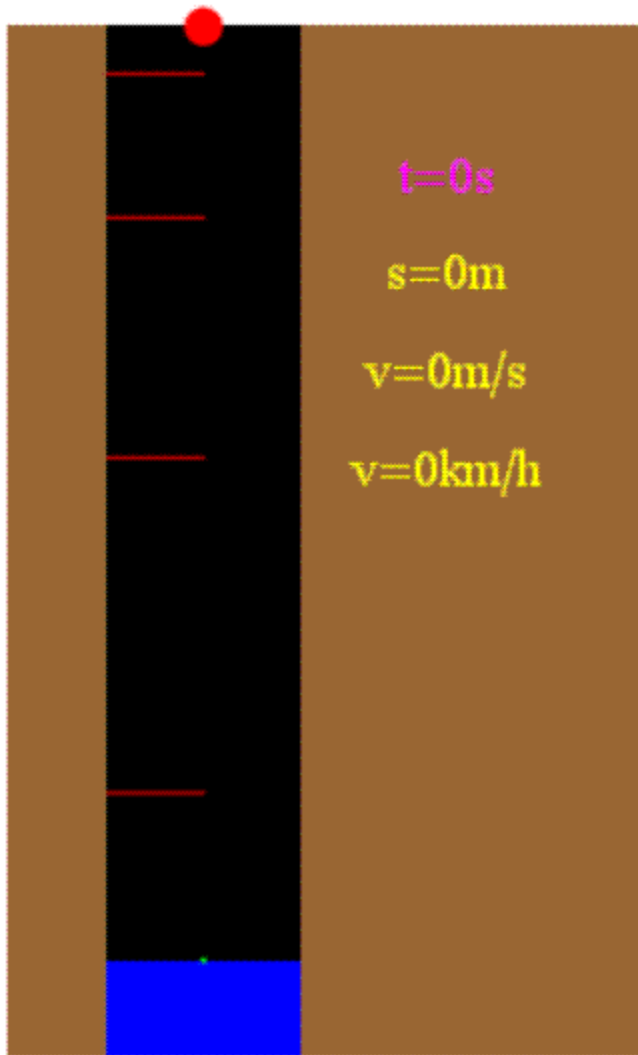
$$x(t_1) = x\left(\frac{1}{k} \ln 2\right) = \frac{v_0}{k} \left(1 - e^{-k \frac{1}{k} \ln 2}\right)$$

$$x(t_1) = \frac{v_0}{k} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_0}{2k}$$

$$x(t_0) = x(0) = \frac{v_0}{k} (1 - e^0) = 0$$

Пример

4.9 *Задатак за размишљање.* Камен је пуштен да пада у бунар без почетне брзине. Звук пада у воду се чуо $4.7s$ касније. Ако се зна да је гравитационо убрзање $g = 9.81m/s^2$, а брзина простирања звука $v_Z = 336m/s$, одредити дубину бунара h .



Време које протекне од тренутка када је камен пуштен до тренутка када се чуо звук пада камена у воду једнако је збиру времена које је било потребно камену да падне на површину воде и времена које је било потребно да звучни талас пређе од површине воде до врха бунара.

$$t_1 + t_2 = T$$

$$T = 4.7s$$

Кретање камена - једнакопроменљиво кретање:

$$a_x(t) = g = \text{const}, v_x(t) = gt + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

$$\left. \begin{matrix} v_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

$$x(t_1) = \frac{1}{2}gt_1^2 = h$$

Кретање звука - једнолико кретање:

$$v_x(t) = v_z = \text{const}$$

$$x(t) = v_zt + x_0$$

$$x_0 = 0 \rightarrow x(t) = v_zt$$

$$x(t_2) = v_zt_2 = h$$

$$\left. \begin{matrix} t_1 + t_2 = T \\ \frac{1}{2}gt_1^2 = h \\ v_zt_2 = h \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} t_1 = \frac{\sqrt{v_z(v_z + 2gT)} - v_z}{g} \\ t_2 = T - \frac{\sqrt{v_z(v_z + 2gT)} - v_z}{g} \\ h = v_z \left(T - \frac{\sqrt{v_z(v_z + 2gT)} - v_z}{g} \right) \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} t_1 = 4.42\text{s} \\ t_2 = 0.28\text{s} \\ h = 95.6\text{m} \end{matrix}$$

Шта смо научили?

- 27. Кинематика материјалне тачке: референтна и посматрана тачка, вектор положаја, кретање и промена вектора положаја, почетни тренутак, трајекторија.
- 28. Праволинијско кретање материјалне тачке. Брзина и убрзање тачке.
- 29. Једнолико и једнакопромењиво праволинијско кретање тачке.

Динамика – 1. део

Кинематика тачке – 1. део – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић