

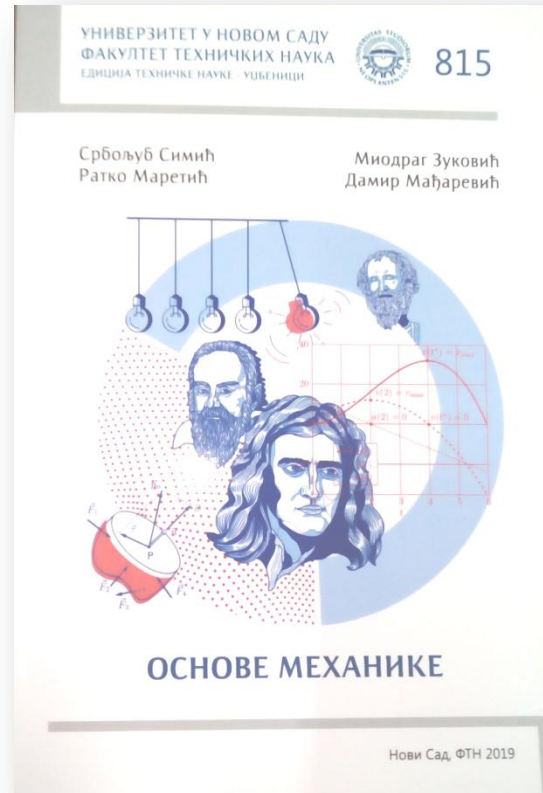
Динамика – II део

Динамика система материјалних тачака

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



Шта ћемо научити?

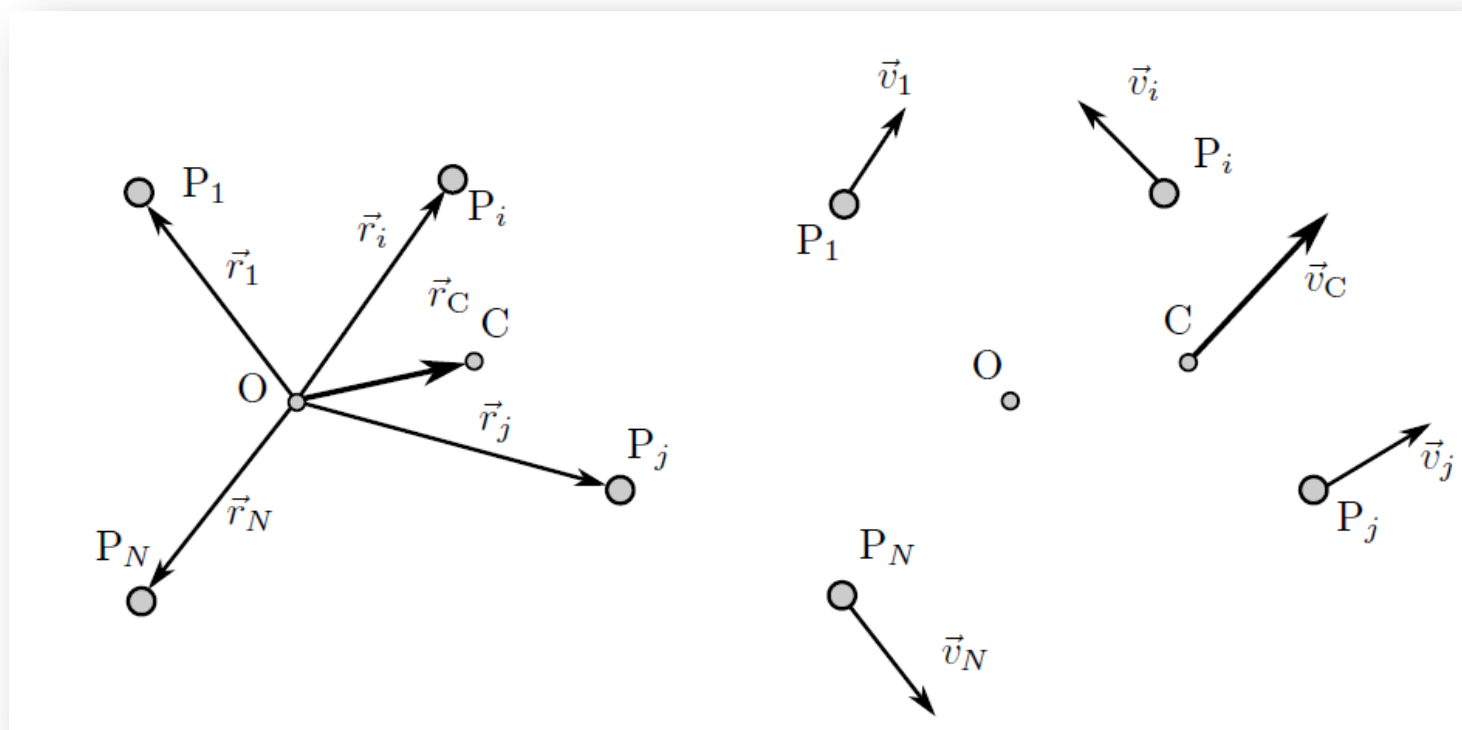
- 45. Динамика система материјалних тачака – спољашње и унутрашње силе. Диференцијалне једначине кретања.
- 46. Маса и количина кретања система. Закон о кретању центра масе и промени количине кретања система.
- 47. Кинетичка енергија система. Закон о промени и одржању енергије система.
- 48. Момент количине кретања система и закон о његовој промени.



45. Динамика система материјалних тачака – спољашње и унутрашње силе. Диференцијалне једначине кретања.

Система материјалних тачака

- Скуп материјалних тачака код ког кретање сваке тачке система зависи од кретања осталих тачака



$$m_i, \quad \vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t), \quad i = 1, \dots, N$$

Спољашње и унутрашње силе

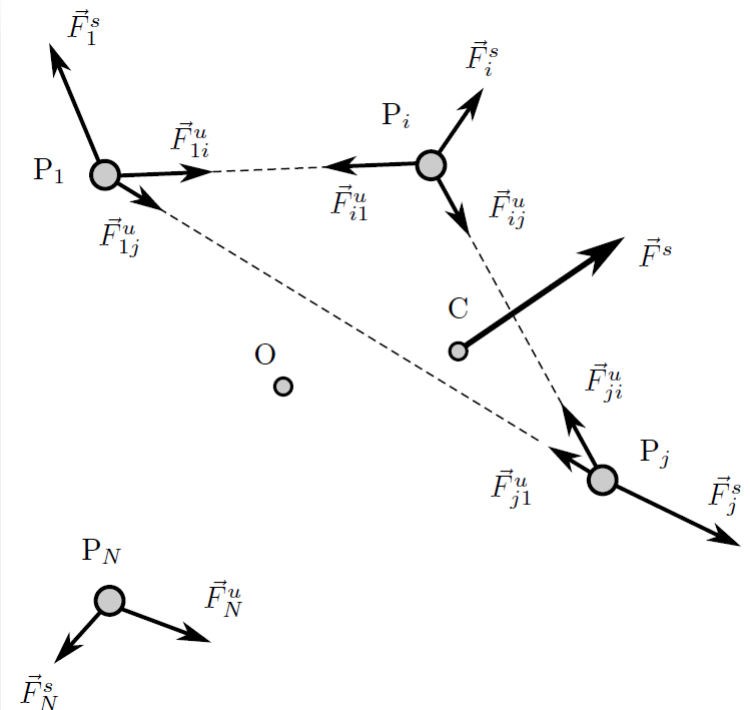
- Класификација сила
 - Спољашње (интеракција са телима ван система)
 - Унутрашње (узајамна интеракција – 3. Њутнов закон)

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u$$

- Главни вектор и главни момент спољашњих сила:

$$\vec{F}^s = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^s$$

$$\vec{M}_O^s = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^s$$

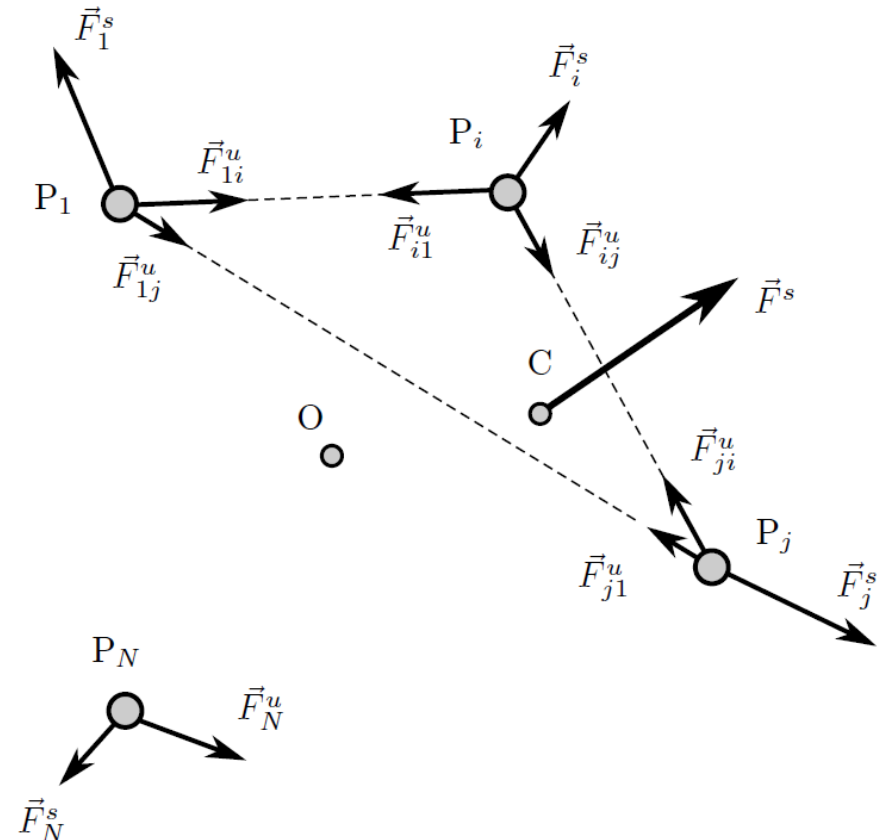


Спољашње и унутрашње силе

- Главни вектор и главни момент унутрашњих сила:

$$\vec{F}^u = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^u = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O^u = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^u = \vec{0}$$



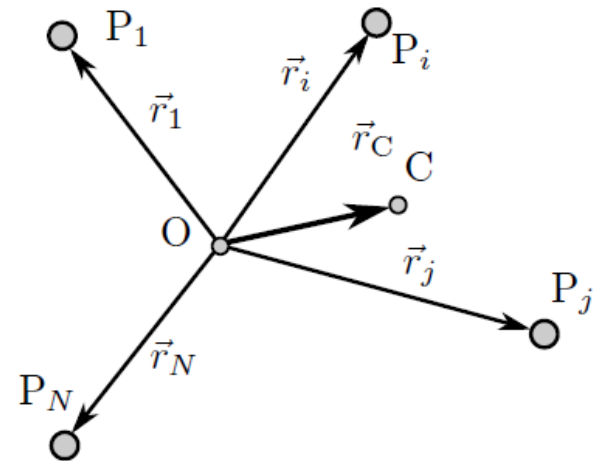
Диференцијалне једначине кретања

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 = \vec{F}_1^s + \vec{F}_1^u$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 = \vec{F}_2^s + \vec{F}_2^u$$

$\vdots$

$$m_N \vec{a}_N = \vec{F}_N = \vec{F}_N^s + \vec{F}_N^u$$



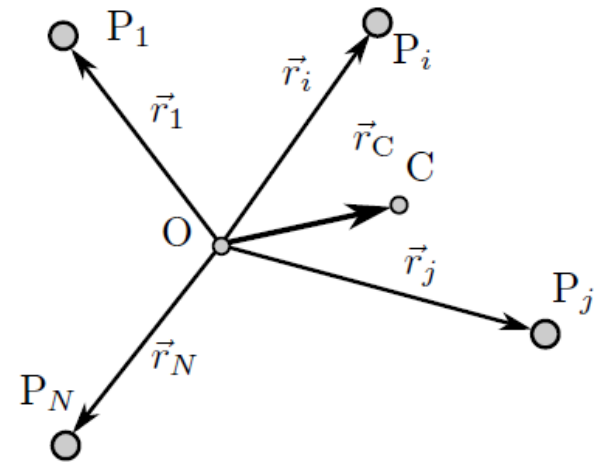
$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

46. Маса и количина кретања система. Закон о кретању центра масе и промени количине кретања система.

Маса система

- Маса система

$$M = m_1 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i$$



- Закон одржања масе (за затворен систем)

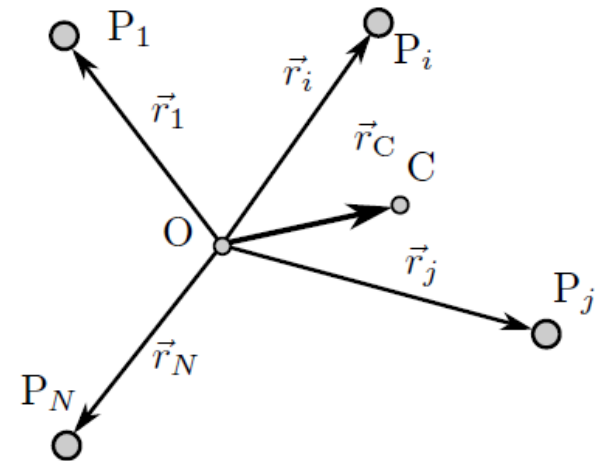
$$M = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{M} = \frac{dM}{dt} = 0$$

Центар масе система

- Вектор положаја центра масе:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$M \vec{r}_C = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$



Центар масе система

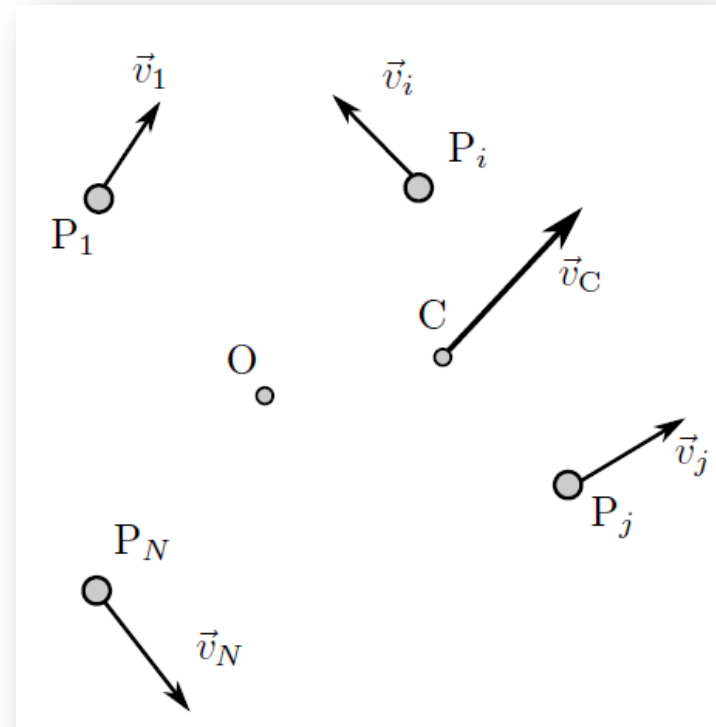
- Вектор брзине центра масе:

$$M \vec{v}_C = M \dot{\vec{r}}_C = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_C \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

- Вектор убрзања центра масе:

$$\vec{a}_C \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$



Количина кретања система

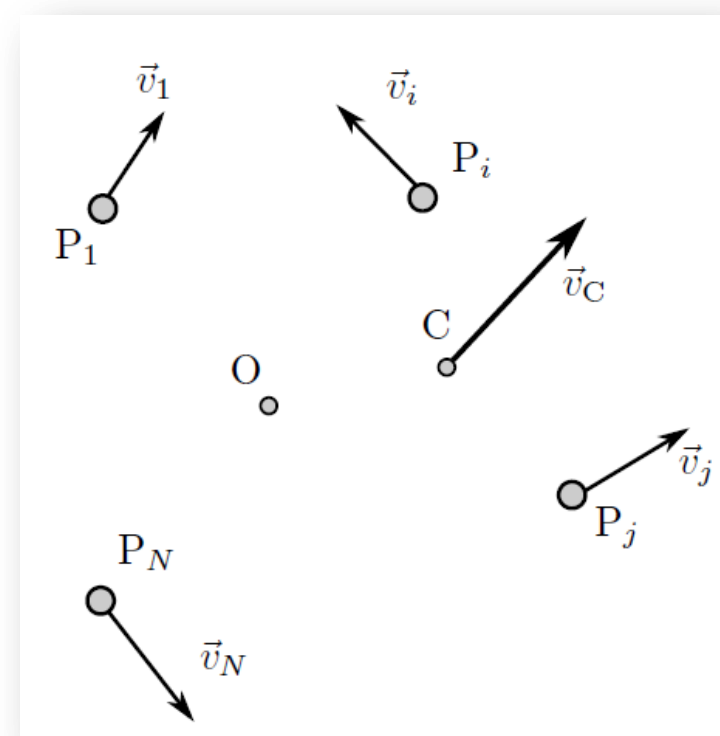
- Количина кретања материјалне тачке

$$\vec{K}_i = m_i \vec{v}_i$$

- Количина кретања система

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{K} = M \vec{v}_C$$



Закон о кретању центра масе

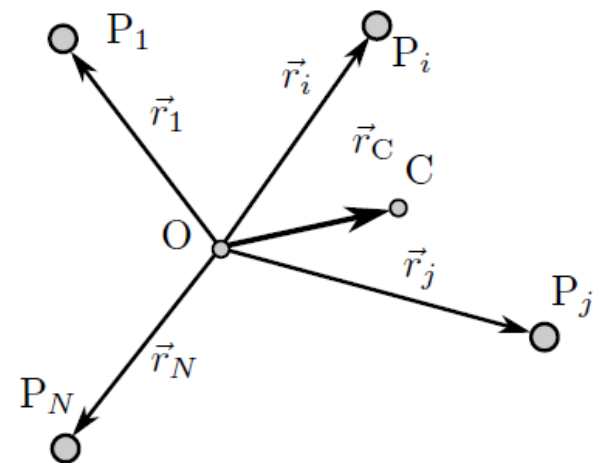
- Диференцијалне једначине кретања:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- Закон о кретању центра масе:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^u$$

$$M \vec{a}_C = \vec{F}^s$$



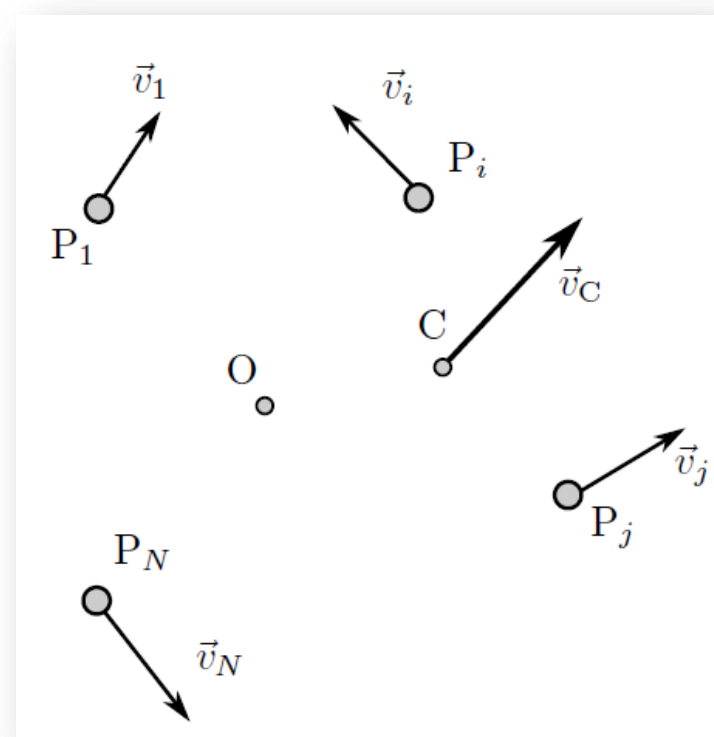
Закон о промени количине кретања система

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C$$

$$\dot{\vec{K}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_C$$

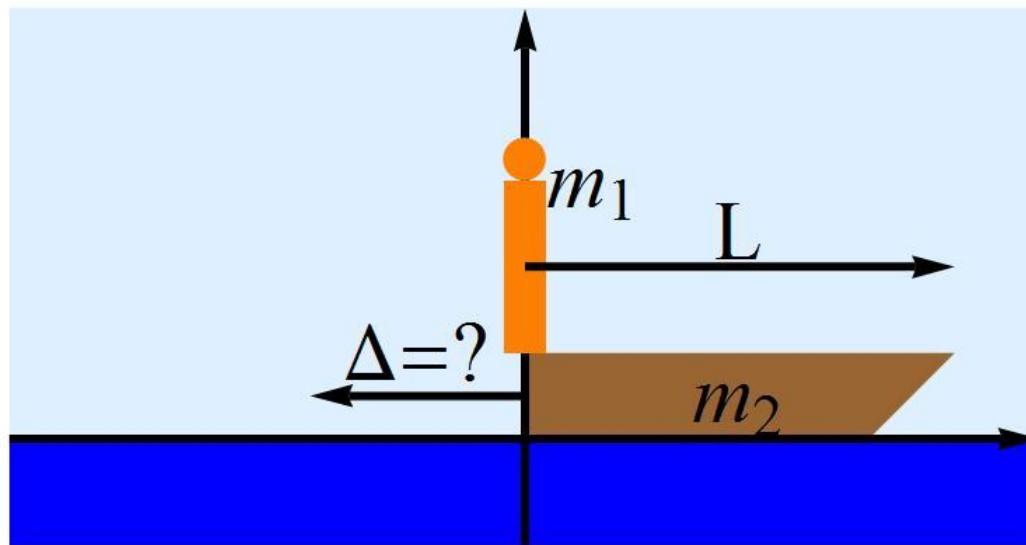
$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^u$$

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F}^s$$



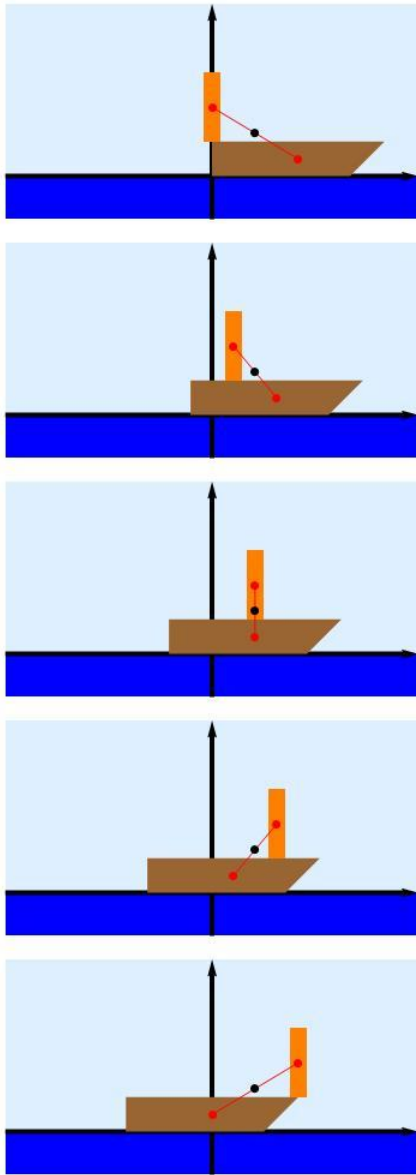
Пример

- Човек, масе m_1 , стоји на левом крају чамца, масе m_2 и дужине L . За колико ће се померити чамац ако човек пређе на други крај. Отпоре воде кретању чамца занемарити (мала брзине). Систем у почетном тренутку мирује.



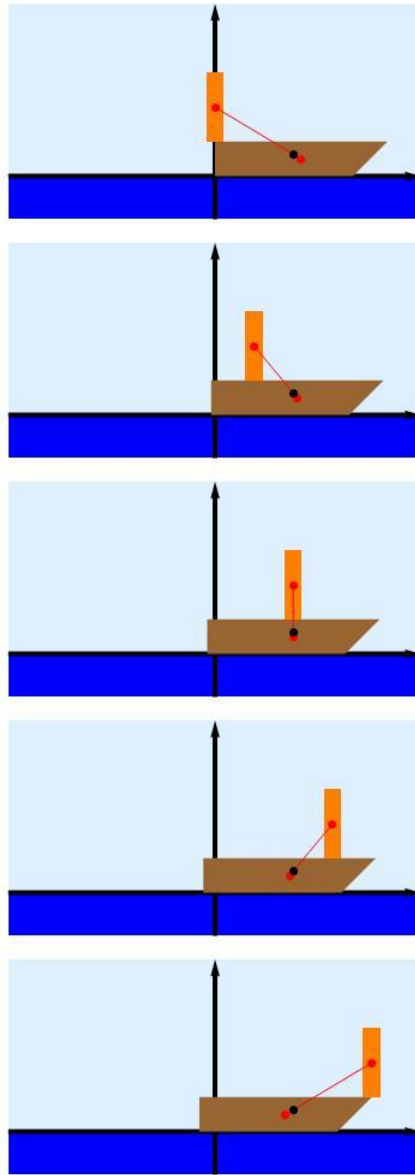
$$m_1 = m, m_2 = m$$

$$\Delta = (1/2)L$$



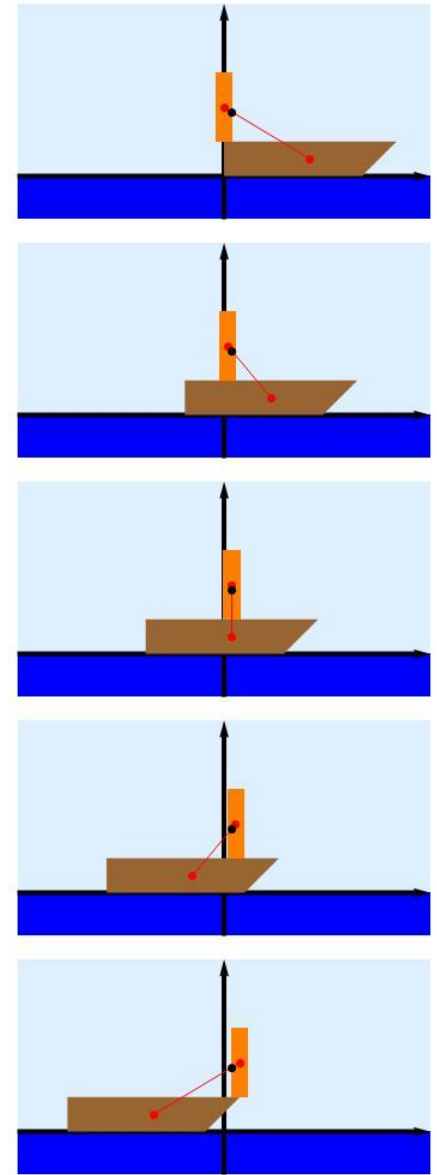
$$m_1 = m, m_2 = 10m$$

$$\Delta = (1/11)L$$

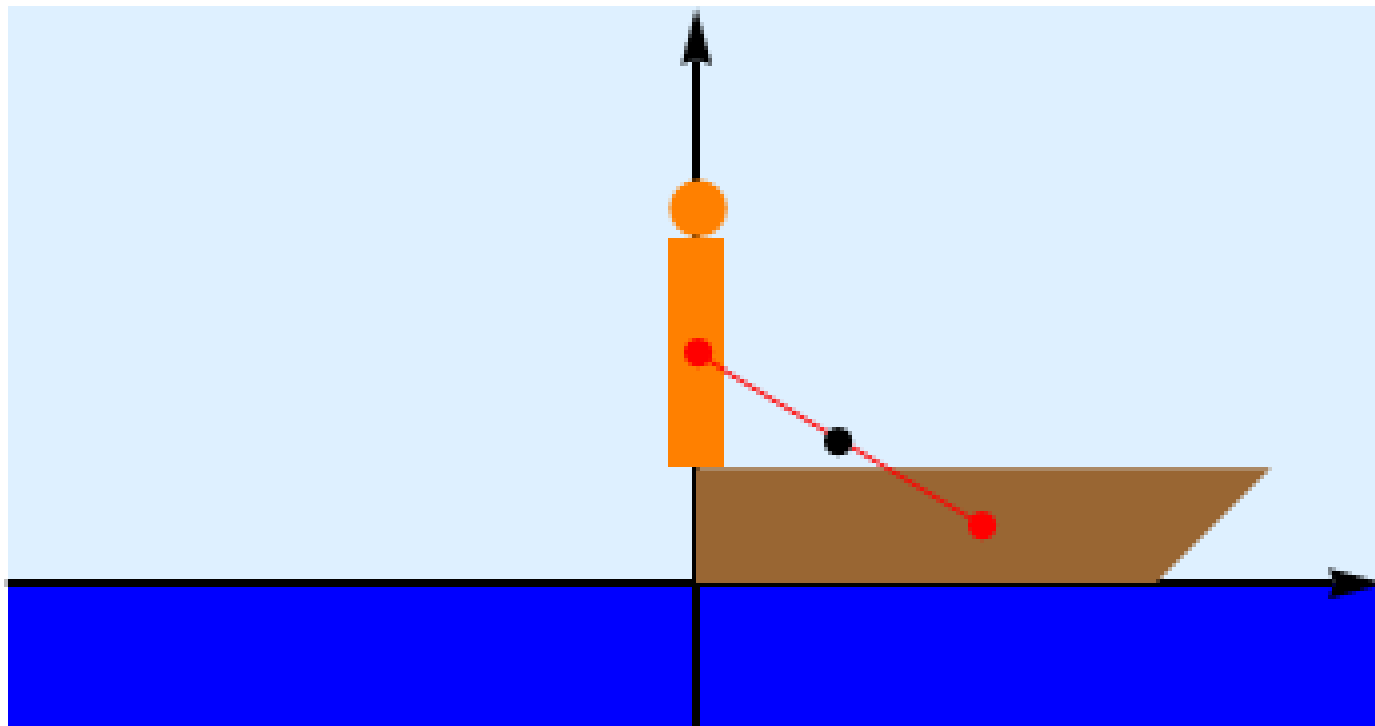


$$m_1 = 10m, m_2 = m$$

$$\Delta = (10/11)L$$



$$m_1 = m, m_2 = m$$
$$\Delta = (1/2)L$$



47. Кинетичка енергија система. Закон о промени и одржању енергије система

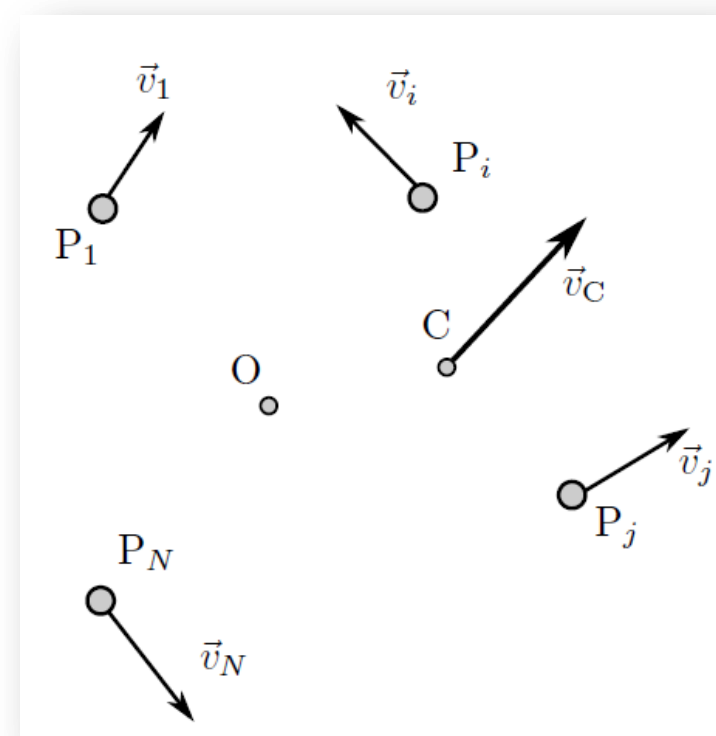
Кинетичка енергија система

- Кинетичка енергија материјалне тачке

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- Кинетичка енергија система

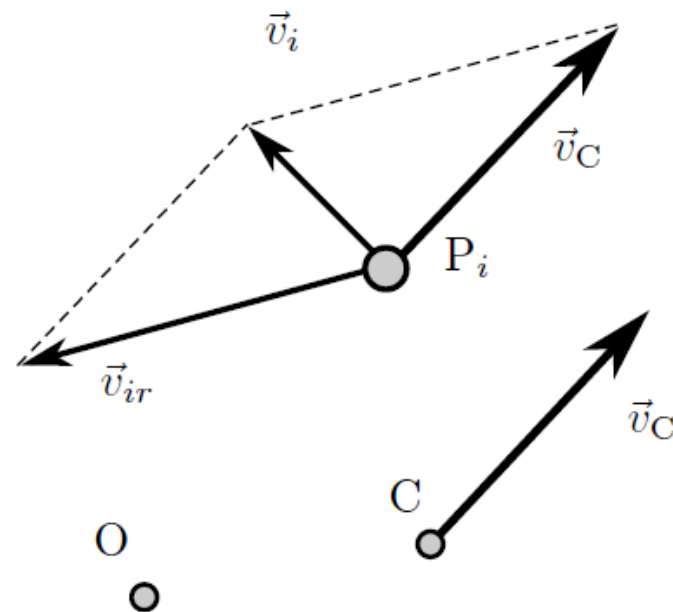
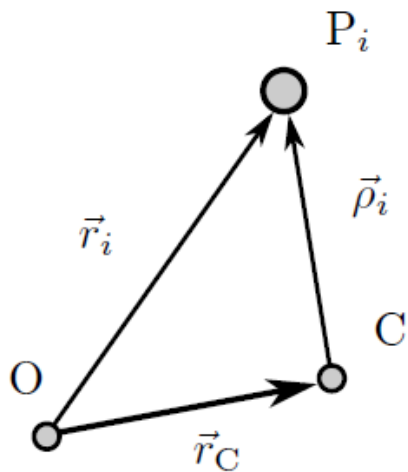
$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$



Кинетичка енергија система

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_C + \vec{\rho}_i \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_C + \vec{v}_{ir} \end{aligned}$$



Кинетичка енергија система

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{ir}) \cdot (\vec{v}_C + \vec{v}_{ir})$$

$$E_k = \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{i=1}^N m_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 + \frac{1}{2} \vec{v}_C \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{ir}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{ir} = 0$$

$$E_k = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2$$

Закон о промени кинетичке енергије

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$P^s = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^s \cdot \vec{v}_i \quad P^u = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^u \cdot \vec{v}_i$$

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^s \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^u \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{dE_k}{dt} = P^s + P^u$$

Закон о промени кинетичке енергије

$$\frac{dE_k}{dt} = P^s + P^u$$

$$dE_k = P^s dt + P^u dt$$

$$dE_k = dA^s + dA^u$$

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = A_{12}^s + A_{12}^u$$

Закон одржања механичке енергије

$$dA^s + dA^u = -d\Pi^s - d\Pi^u = -d\Pi$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(E_k + \Pi) = 0$$

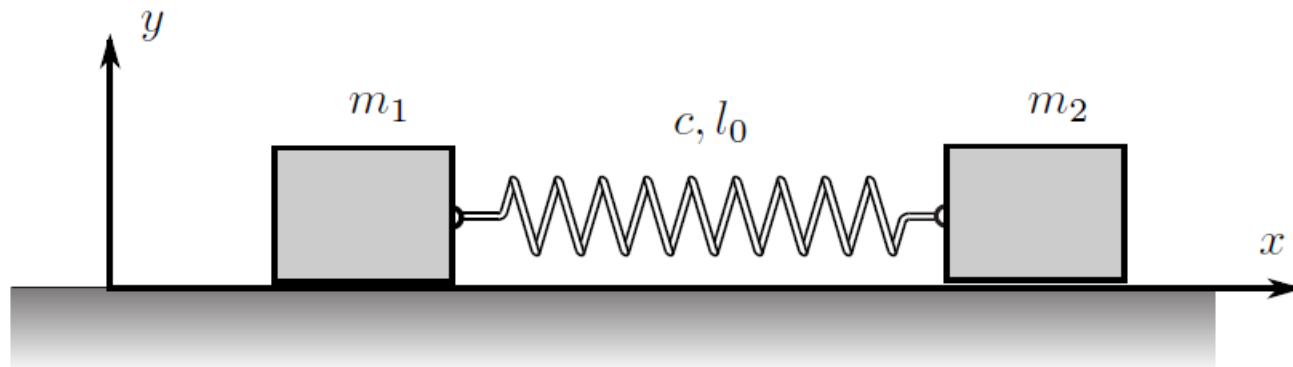
$$dE = d(E_k + \Pi) = 0$$

$$E = E_k + \Pi = \text{const}$$

$$E_{k2} + \Pi_2 = E_{k1} + \Pi_1$$

Пример

Пример 8.1. Две материјалне тачке P_1 и P_2 , маса m_1 и m_2 респективно, налазе се на глатком хоризонталном столу и међусобно су повезане опругом крутости c чија је дужина у ненапрегнутом стању l_0 . Претпостављајући да је сила у опрузи пропорционална њеном издужењу формирати диференцијалне једначине кретања овог система и анализирати кретање применом општих закона динамике система.



48. Момент количине кретања система и закон о његовој промени

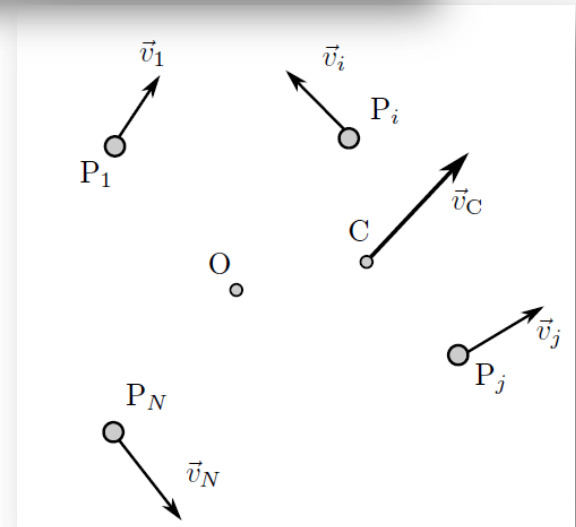
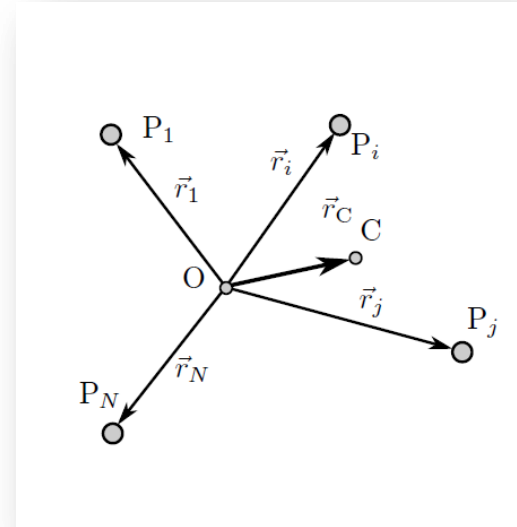
Момент количине кретања система

- Момент количине материјалне тачке

$$\vec{L}_{Oi} = \vec{r}_i \times \vec{K}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

- Момент количине кретања система

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$



Момент количине кретања система

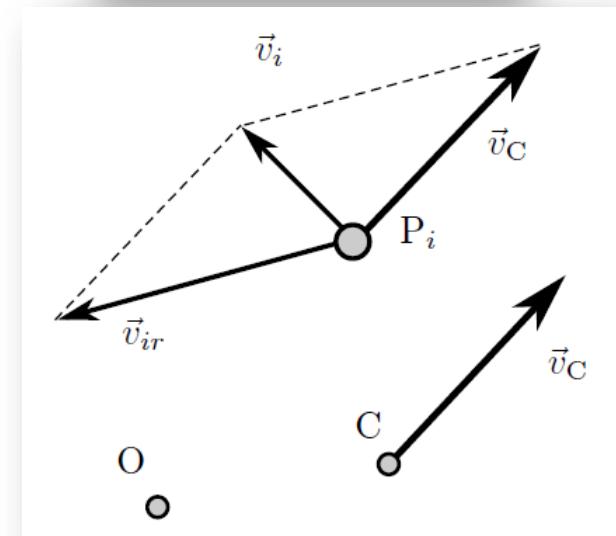
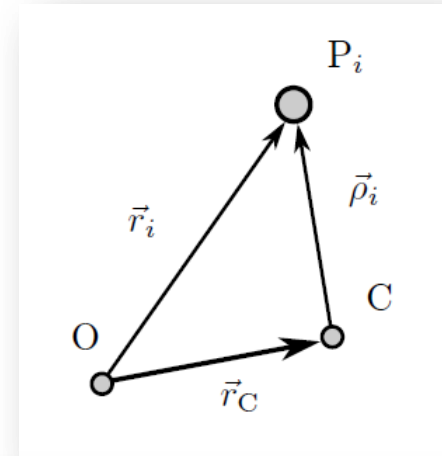
- Момент количине материјалне тачке

$$\vec{L}_{Ci} = \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_{ir}$$

- Момент количине кретања система

$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{Ci} = \sum_{i=1}^N \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_{ir}$$

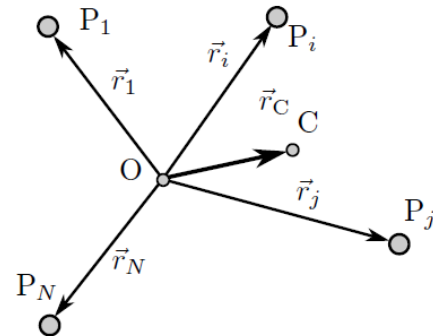
$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times M \vec{v}_C$$



Закон о промени момента количине кретања система

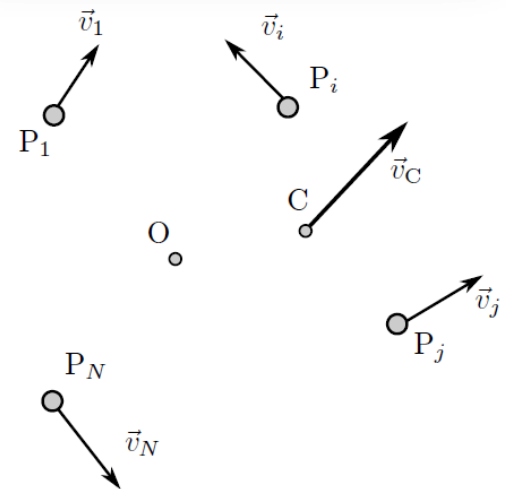
- За непокретну тачку O

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^s$$



- За центар масе

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^s$$



Шта смо научили?

- 45. Динамика система материјалних тачака – спољашње и унутрашње силе. Диференцијалне једначине кретања.
- 46. Маса и количина кретања система. Закон о кретању центра масе и промени количине кретања система.
- 47. Кинетичка енергија система. Закон о промени и одржању енергије система.
- 48. Момент количине кретања система и закон о његовој промени.

Динамика – II део

Динамика система материјалних тачака

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић