

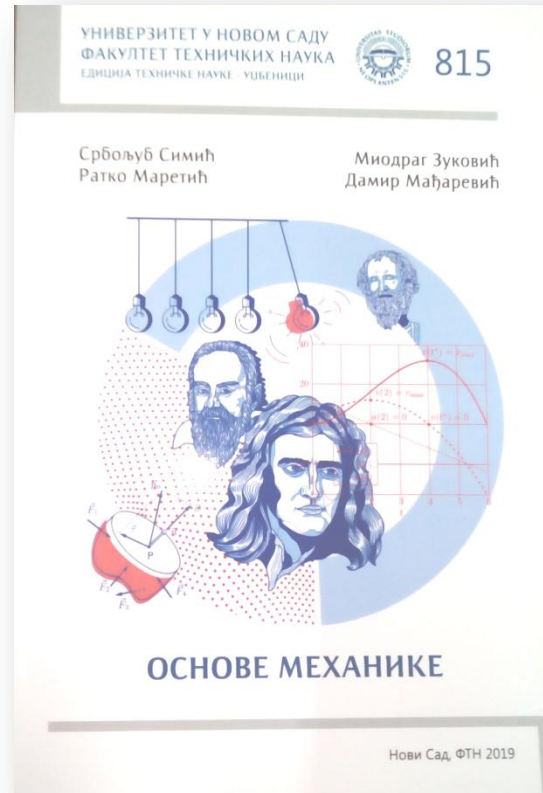
Динамика – 1. део

Динамика материјалне тачке – Врсте сила

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



Шта ћемо научити?

36. Силе у динамици (сила тежине, вискозног и сувог трења, универзалне гравитације, еластична сила)

- ПРИМЕРИ
- Даламберов принцип
- Инерцијални референтни системи
- О математичким моделима

Динамика

Део механике који се бави изучавањем кретања материјалних тела и дејствима која том приликом настају.

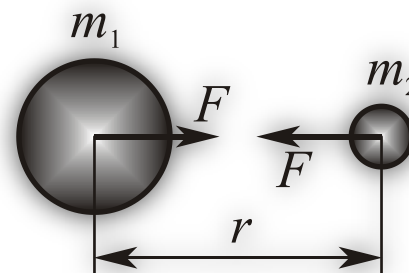
34. Силе у динамици (сила тежине, вискозног и сувог трења, универзалне гравитације, еластична сила)

Силе као функције положаја

- Њутнова гравитациона сила

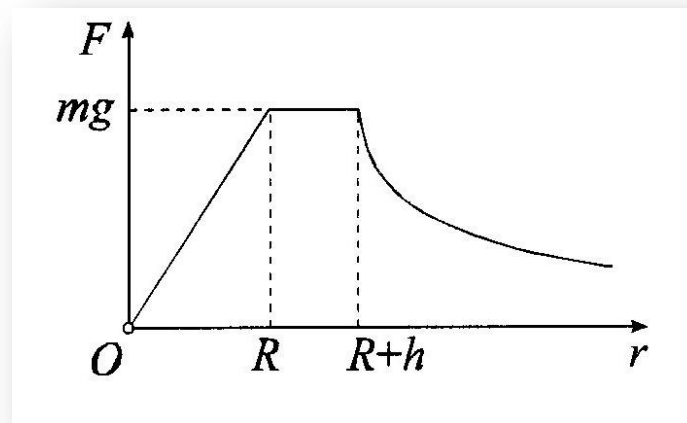
$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\gamma = 6,67 \times 10^{11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$



- Сила тежине

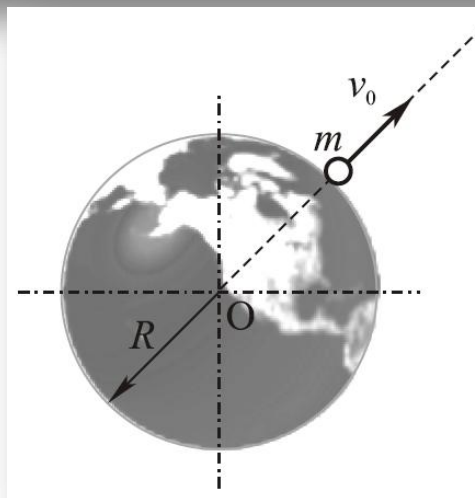
$$F = mg$$



Зависност силе Земљине тежине у зависности од растојања од средишта Земље.

Пример

5.7 Материјална тачка масе m креће се у пољу дејства Земљине гравитационе силе која се мења по следећем закону $F = k/r^2$, где је r растојање тачке од центра привлачења. На површини Земље ($r = R$, R - полупречник Земље $F = mg$). Одредити закон промене брзине у зависности од растојања тачке од центра привлачења, ако се зна да је тачка започела кретање са површине Земље почетном брзином v_0 која има правац који спаја центар Земље са почетним положајем тачке. Колику би почетну брзину требало саопштити тачки да би напустила поље дејства Земљине гравитационе силе (друга космичка брзина)?



3ag. 5.7

$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{k}{r^2} \\ r = R, F = mg \end{array} \right\} \rightarrow \frac{k}{R^2} = mg \rightarrow k = mgR^2 \rightarrow \underline{F = \frac{mgR^2}{r^2}}$$

II H. 3. $m\vec{a} = \vec{F}$

$$r = x \rightarrow F = \frac{mgR^2}{x^2}$$

$$m(\ddot{x}\vec{e}) = -\frac{mgR^2}{x^2}\vec{e}$$

$$\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2} \quad *$$

$$\text{пв } x(0) = R, \dot{x}(0) = v_0$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d\dot{x}}{dx} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} \quad **$$

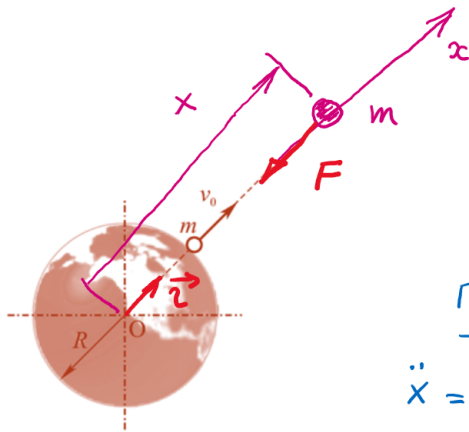
$$\left. \begin{array}{l} * \\ x \end{array} \right\} \rightarrow \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2} \quad | \cdot dx$$

$$\int_{\dot{x}(0)=v_0}^{\dot{x}} \dot{x} d\dot{x} = -gR^2 \int_{x(0)=R}^x \frac{dx}{x^2}$$

$$\left. \frac{\dot{x}^2}{2} \right|_{v_0}^{\dot{x}} = +gR^2 \left. \frac{1}{x} \right|_R^x$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)$$

$$\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x} \right)} \quad *$$



II Космичка Срзина

$$* \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \dot{x} = \sqrt{v_0^2 - 2gR} = 0 \rightarrow v_0 = v_{II} = \sqrt{2gR}$$

$$\left. \begin{array}{l} g = 9,81 \frac{m}{s^2} \\ R = 6370 km \end{array} \right\} \rightarrow v_{II} = 11179,4 \frac{m}{s} \approx 11,2 \frac{km}{s}$$

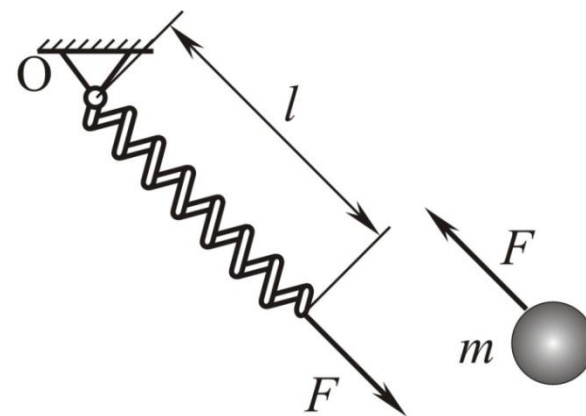
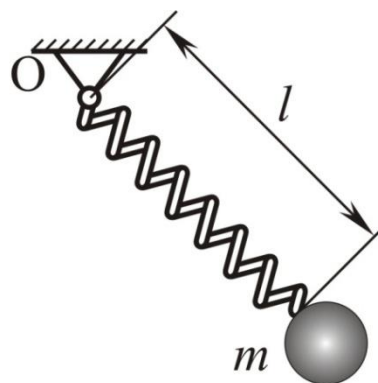
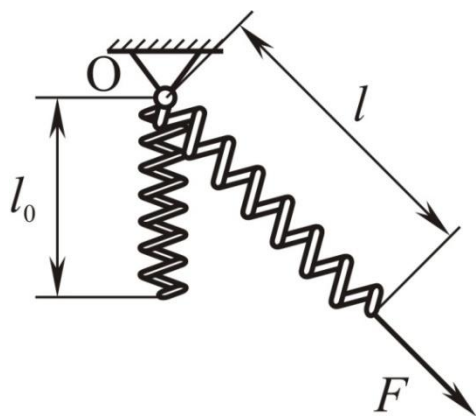
Силе као функције положаја

- Кулонова електрична сила

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Силе као функције положаја



$$F = c \Delta l$$

$$\Delta l = l - l_0$$

c - крутост опруге

Δl - издужење опруге

$$\Delta l = l - l_0$$

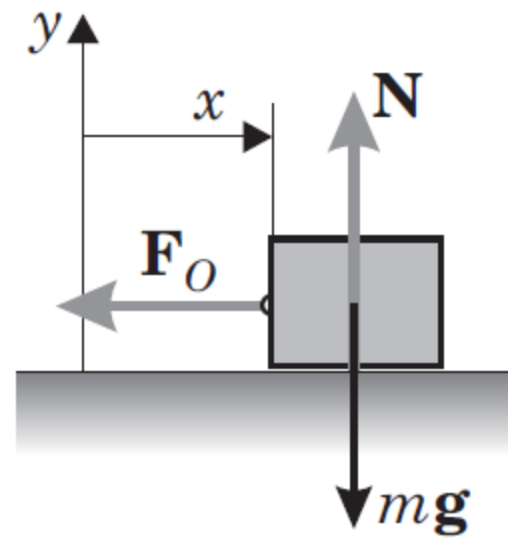
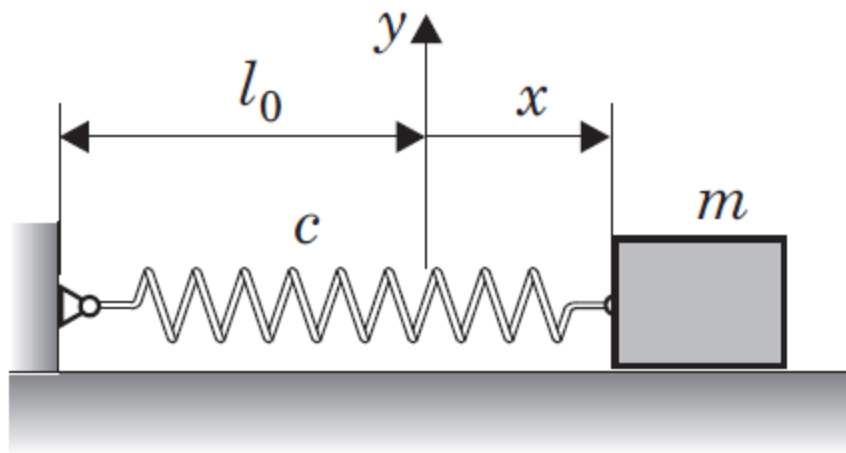
l_0 - дужина ненапрегнуте опруге

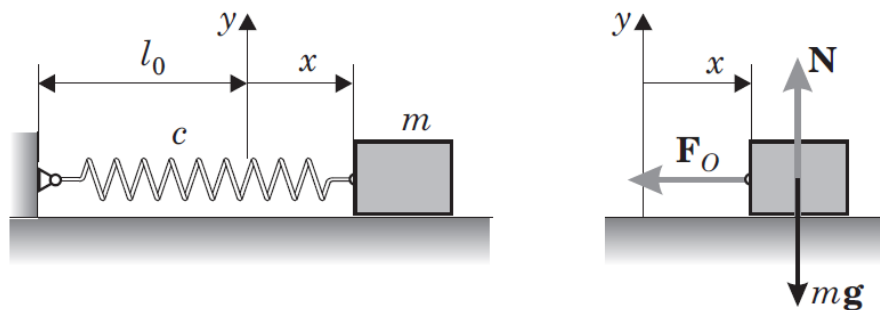
l - дужина опруге

Пример

Пример 6.7 Терет масе m може да се креће по глаткој хоризонталној подлози. За терет је закачена опруга крутости c и дужине l_0 у ненапрегнутом стању. Други крај опруге је фиксиран. У почетном тренутку терет се налазио у положају одређеном координатом x_0 и имао је брзину v_0 .

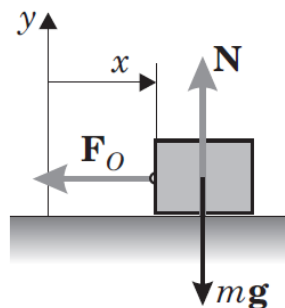
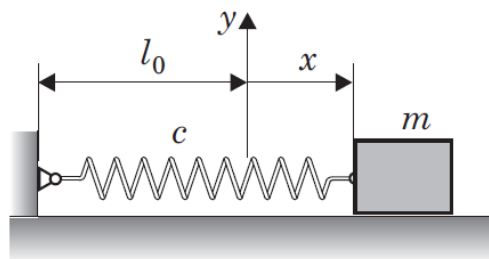
- а) Одредити кретање терета и показати да ће његов период осциловања бити $T = 2\pi/\omega$, где је $\omega = \sqrt{c/m}$.





► Пошто терет врши праволинијско кретање усвојићемо Декартов координатни систем чија се x -оса поклапа са правцем кретања, а координатни почетак одговара положају терета у ком је опруга ненапрегнута. На терет током током кретања дејствују две активне силе: сила тежине $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{j}$ и сила еластичне опруге $\mathbf{F}_O = -cx\mathbf{i}$. Будући да је кретање терета ограничено глатком хоризонталном подлогом, на терет ће дејствовати реакција подлоге, сила $\mathbf{N} = N\mathbf{j}$. Имајући ово у виду други Њутнов зако за кретање терета ће бити $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_O + \mathbf{N}$, а диференцијалне једначине кретања ће гласити:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -cx; \\ m\ddot{y} &= -mg + N. \end{aligned} \tag{a}$$



$$m\ddot{x} = -cx;$$

$$m\ddot{y} = -mg + N.$$

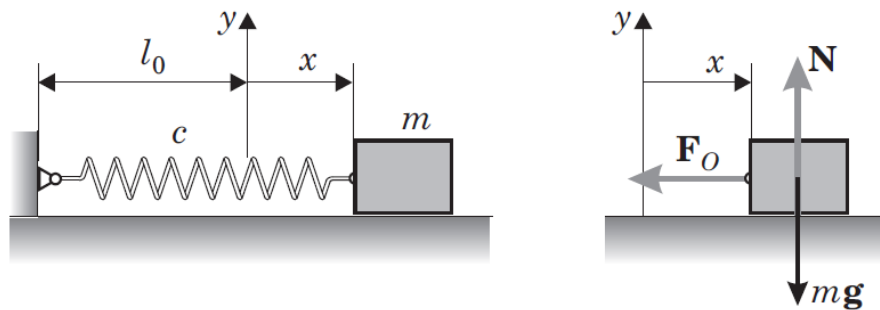
Пошто се терет креће праволинијски, у хоризонталном правцу, важиће $y(t) = 0 = \text{const.}$, одакле следи $\dot{y} \equiv 0$ и $\ddot{y} \equiv 0$. На тај начин једначина (a)₂ постаје обична статичка једначина из које се одређује реакција везе, $N = mg$. Приметимо да се из једначине (a)₁ могу одредити положаји равнотеже тачке. Наиме, у стању мировања важи $x(t) = \text{const.}$, одакле следи $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$. Тада у положају равнотеже важи $-cx = 0$, односно $x = 0$. Дакле, једини положај равнотеже терета је у координатном почетку.

Једначина (a)₁ је права диференцијална једначина кретања која се увођењем *кружне фреквенције* ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (\text{б})$$

може записати на следећи начин:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (\text{в})$$



Ово је обична диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима чије опште решење гласи:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (\text{г})$$

Да би оно било сагласно са почетним условима:

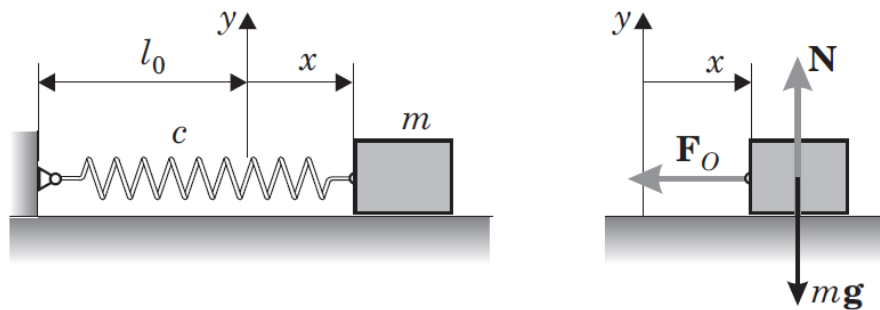
$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (\text{д})$$

интеграционе константе морају имати следеће вредности:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}. \quad (\text{ђ})$$

Решење једначине (в) се често приказује у једном другом облику, погоднијем за анализу. Уместо константи C_1 и C_2 уведу се константе A и α следећим релацијама:

$$\begin{aligned} C_1 &= A \sin \alpha \\ C_2 &= A \cos \alpha \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \tan \alpha &= \frac{C_1}{C_2}. \end{aligned}$$



На тај начин се, уз коришћење адиционе теореме, решење (г) може записати у облику:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (\text{е})$$

Као што се види, терет врши осцилаторно кретање у околини координатног почетка (положаја равнотеже), а константе A и α представљају *амплитуду* и *почетну фазу* осциловања које се могу одредити у зависности од почетних услова:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}; \quad \alpha = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right). \quad (\text{ж})$$

У исто време кружна фреквенција ω , одређена једначином (б), и *период осциловања* T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \quad (\text{з})$$

који је једнак периоду синусне функције, јесу величине које *не зависе* од почетних услова, него представљају карактеристике система.

Силе као функције брзине

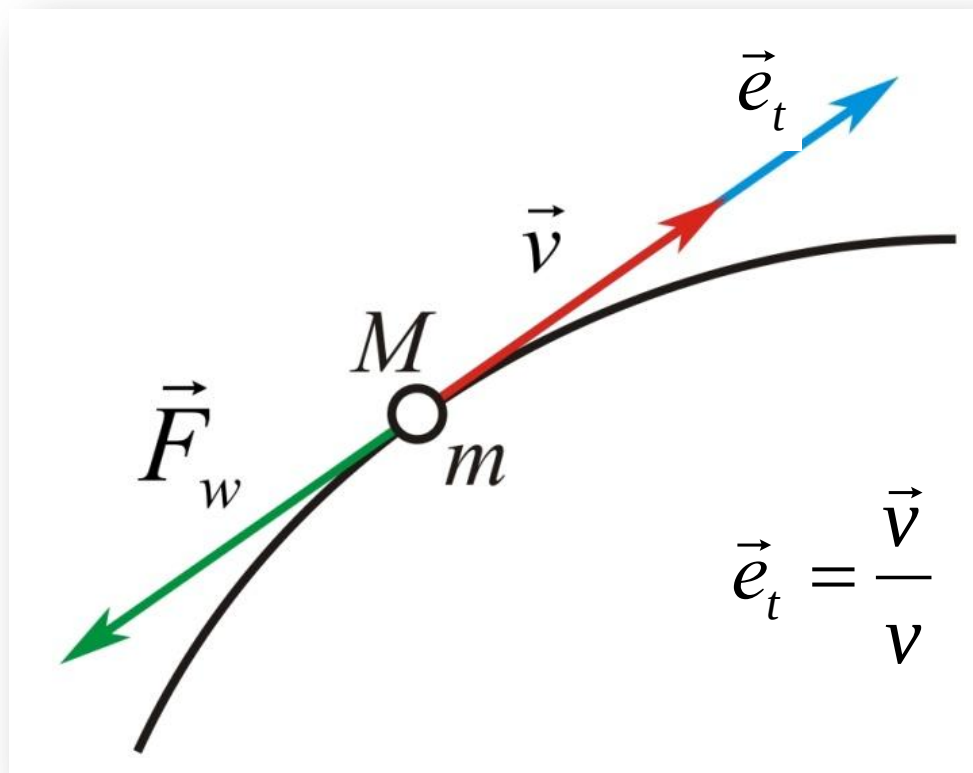
- Сила флуидног отпора – сила вискозног трења

$$\vec{F}_w = -\kappa f(v) \vec{e}_t$$

$$\vec{F}_w = -\kappa f(v) \frac{\vec{v}}{v}$$

$$f(v) = \alpha v \quad , \quad f(v) = \beta v^2$$

$$f(v) = \alpha v + \beta v^2 + \dots$$



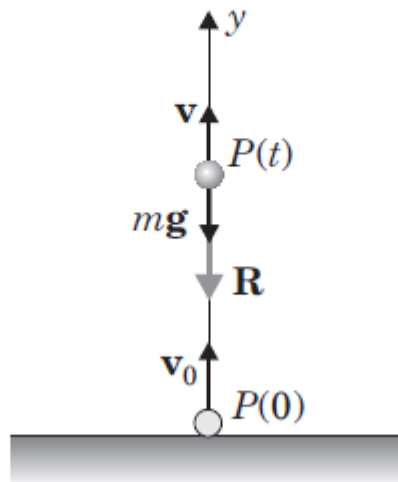
Пример

Пример 5.3 Материјална тачка масе m бачена је вертикално увис брзином v_0 . Током кретања на тачку осим силе сопствене тежине $m\mathbf{g}$, усмерене на доле, дејствује и сила отпора кретању пропорционална брзини тачке, $\mathbf{R} = -mk\mathbf{v}$, где је k коефицијент отпора.

- а) Одредити кретање тачке (параметарску једначину и брзину у функцији времена).
- б) Одредити висину лета H тачке и анализирати је њену зависност од параметара који фигуришу у решењу.
- в) Упоредити добијени резултат са висином лета тачке приликом кретања без отпора за различите нумеричке податке.

► Пошто је тачка бачена вертикално увис, а током кретања није претпостављено да постоје силе које би је скренуле са вертикалне путање, она ће се кретати само у вертикалном правцу²¹. Пошто је тада $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$, а $\mathbf{v} = \dot{y}\mathbf{j}$ и $\mathbf{a} = \ddot{y}\mathbf{j}$, други Њутнов закон (5.3):

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R},$$



Слика 5.11: Динамичка анализа хица у средини са отпором

ће нам дати следећу диференцијалну једначину кретања:

$$m\ddot{y} = -mg - mk\dot{y},$$

односно,

$$\ddot{y} = -g - k\dot{y}. \quad (\text{a})$$

Ова једначина је праћена почетним условима проблема, $\mathbf{r}(0) = 0\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{j}$, односно:

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad (\text{б})$$

где је без губитка општости претпостављено да тачка започиње кретање из координатног почетка.

Како је $\ddot{y} = d\dot{y}/dt$, у једначини (а) се могу раздвојити променљиве. Ако уведемо ознаку $v = \dot{y}$ имаћемо:

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{g + kv} = - \int dt.$$

Одатле се после интеграције добија:

$$\frac{1}{k} \ln(g + kv) = -t + \frac{1}{k} \ln C,$$

односно,

$$v(t) = -\frac{g}{k} - \frac{C}{k} e^{-kt}.$$

Увршатавањем почетног услова (б)₂ одређује се интеграциона константа C :

$$v(0) = -\frac{g + C}{k} = v_0 \quad \Rightarrow \quad C = -g - kv_0,$$

а зависност брзине од времена тада гласи:

$$v(t) = \dot{y}(t) = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} + v_0\right) e^{-kt} \quad (\text{в})$$

У другом кораку се непосредном интеграцијом долази до резултата:

$$y(t) = -\frac{g}{k}t - \frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \right) e^{-kt} + D.$$

Из почетног услова $(б)_1$ следи:

$$y(0) = -\frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \right) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \right),$$

одакле се добија параметарска једначина кретања:

$$y(t) = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k} \left(\frac{g}{k} + v_0 \right) (1 - e^{-kt}). \quad (г)$$

Највећа висина лета $H = y(T)$ достиже се у тренутку промене смера кретања, $v(T) = 0$. На тај се начин добија:

$$v(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{g} \right),$$

одакле следи,

$$H = y(T) = \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{g} \right). \quad (д)$$

Два карактеристична параметра која фигуришу у резултату су почетна брзина v_0 и коефицијент отпора k . Види се да се са повећањем почетне брзине повећава и висина лета. Са друге стране, повећање коефицијента отпора утиче на њено смањење.

Да бисмо упредили овде добијену висину лета са висином која се достиже приликом кретања кроз средину без отпора подсетимо се да је она за $h_0 = 0$ (једначина (ђ) из Примера 5.2):

$$H_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Ако се усвоји $v_0 = 5\text{m/s}$ и $k = 0.1\text{s}^{-1}$ ($g \approx 9.81\text{m/s}^2$) добиће се:

$$H_0 = 1.27\text{m}; \quad H = 1.23\text{m}.$$

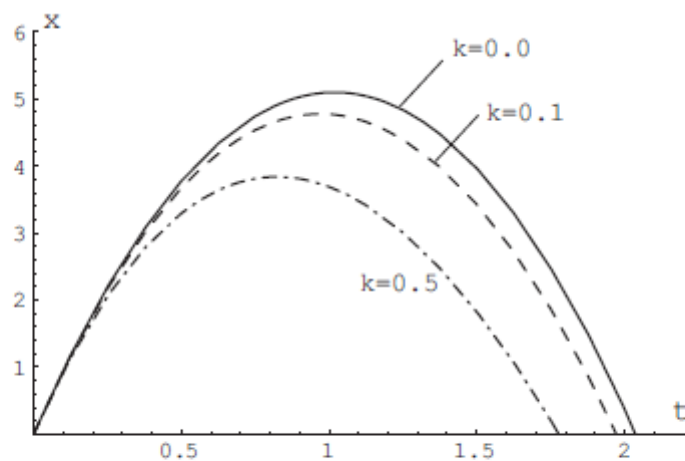
За други избор вредности параметара $v_0 = 10\text{m/s}$ и $k = 0.1\text{s}^{-1}$ добија се:

$$H_0 = 5.10\text{m}; \quad H = 4.77\text{m}.$$

Најзад, ако се усвоји $v_0 = 10\text{m/s}$ и $k = 0.5\text{s}^{-1}$ добиће се:

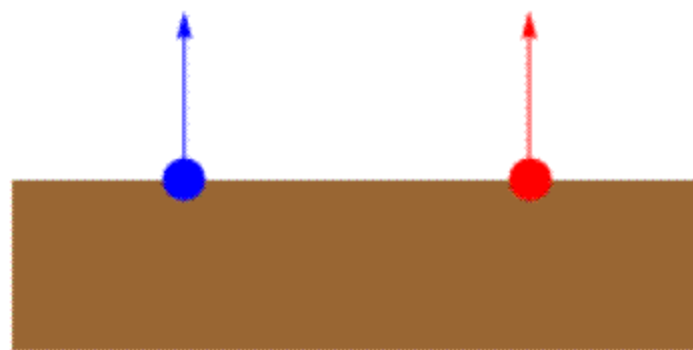
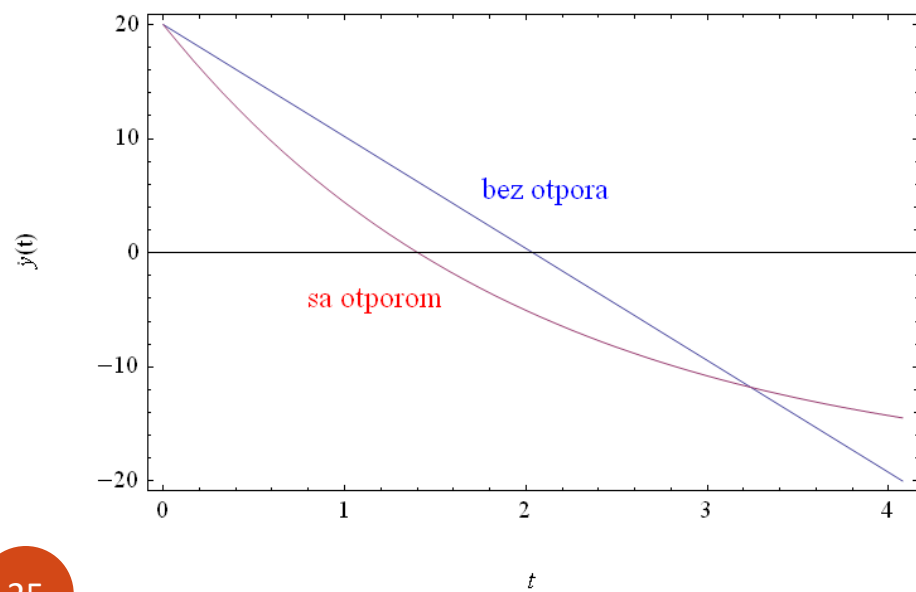
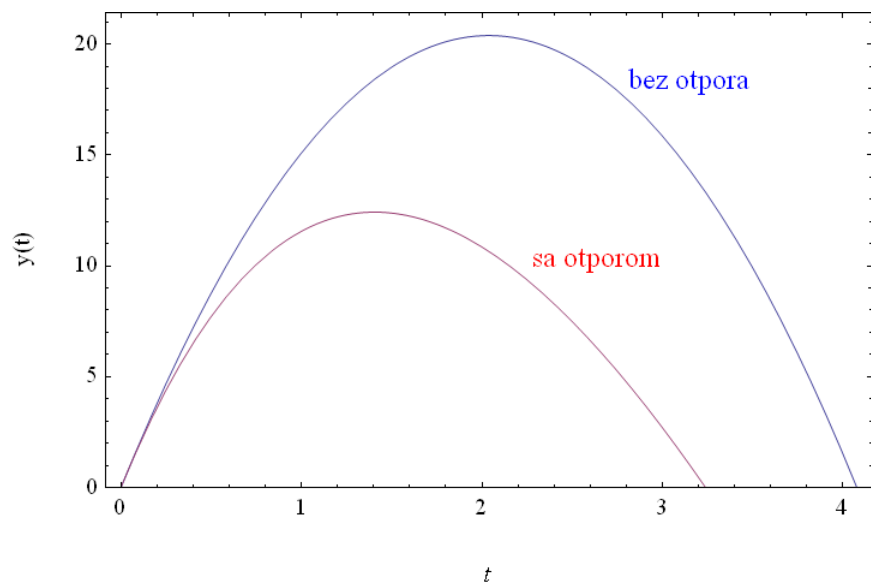
$$H_0 = 5.10\text{m}; \quad H = 3.84\text{m}.$$

Добијени резултати потврђују коментар о утицају почетне брзине и коефицијента отпора на висину лета. На Слици 5.12 приказани су (x, t) дијаграми вертикалних хитаца у вакууму ($k = 0.0$) и средини са отпором при почетној брзини $v_0 = 10\text{m/s}$. ◀



Слика 5.12: Дијаграми верикалних хитаца у вакууму и средини са отпором

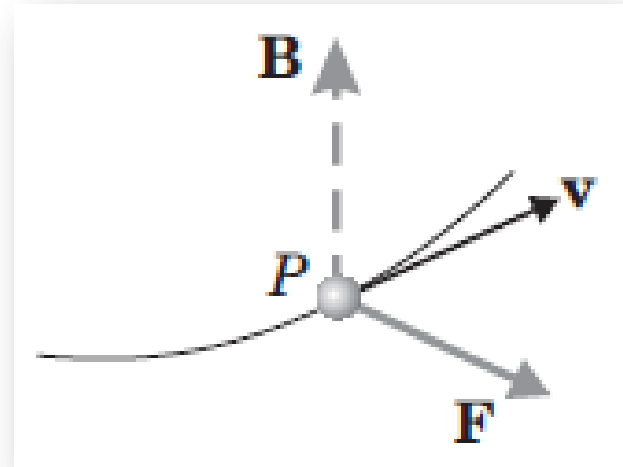
$$v_0 = 20 \text{ m/s}, k = 0.5 \text{ s}^{-1}$$



Силе као функције брзине

- Лоренцова магнетна сила

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



Силе као функције времена

- Нестационарно физичко поље

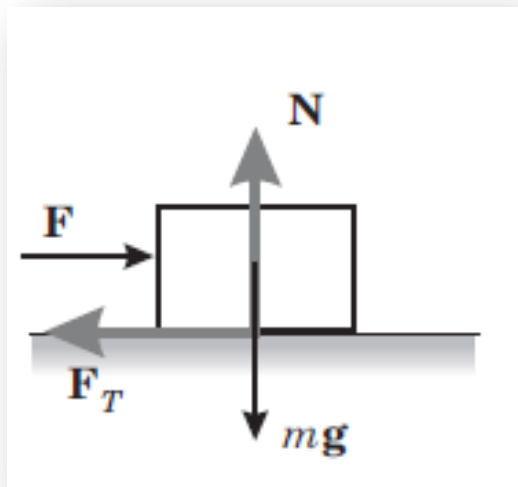
$$\vec{F} = q\vec{E}(t)$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(t)$$

- Управљачке силе

$$\vec{F} = \vec{F}(t)$$

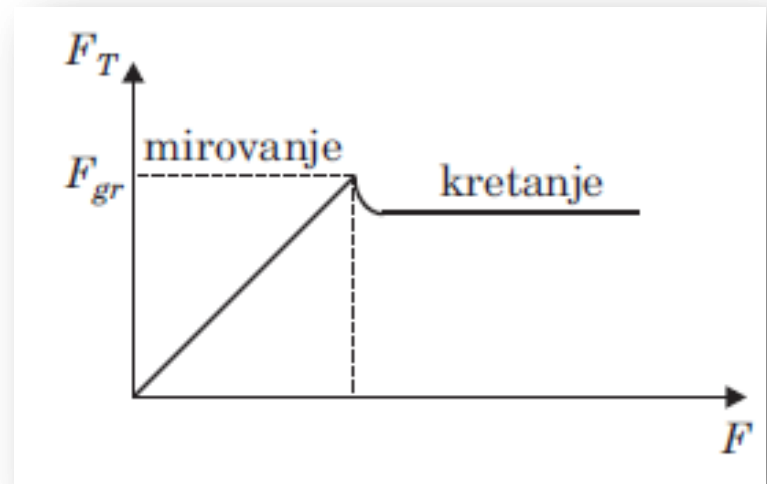
Сила Кулоновог трења



- Мировање (равнотежа)

$$0 \leq F_T \leq F_{gr}$$

$$F_{gr} = \mu_S N$$



- Кретање

$$F_T = \mu_D N$$

$$\mu_D < \mu_S$$

Сила Кулоновог трења

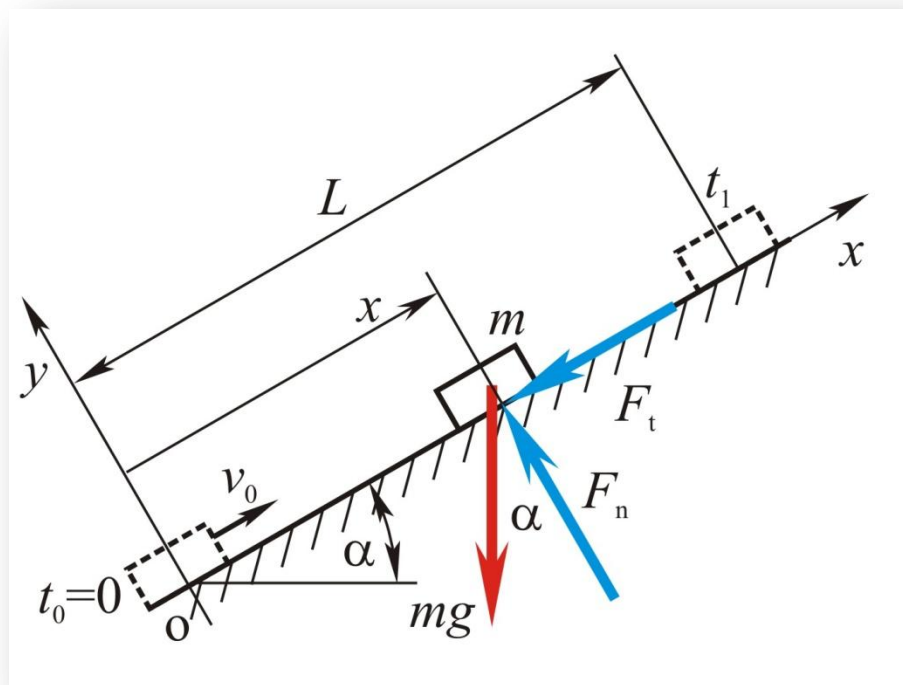
Materials	Coefficient of Static Friction, μ_s	Coefficient of Kinetic Friction, μ_k
Steel on steel	0.74	0.57
Aluminum on steel	0.61	0.47
Copper on steel	0.53	0.36
Brass on steel	0.51	0.44
Zinc on cast iron	0.85	0.21
Copper on cast iron	1.05	0.29
Glass on glass	0.94	0.40
Copper on glass	0.68	0.53
Teflon on Teflon	0.04	0.04
Teflon on steel	0.04	0.04
Rubber on concrete (dry)	1.0	0.8
Rubber on concrete (wet)	0.30	0.25

Пример

Материјална тачка, масе m , започиње кретање уз храпаву стрму раван, нагибног угла α , у хомогеном пољу силе земљине теже, почетном брзином v_0 . Коефицијент трења (динамички) између тачке и стрме равни је μ .

Одредити:

- а) диференцијалне једначине кретања тачке,
- б) параметарску једначину кретања тачке ($x(t)$),
- с) тренутак t_1 у ком се тачка зауставља,
- д) пут L који је тачка прешла до заустављања.



Силе – поређење

- гравитациона сила између Сунца и Земље $3,5 \times 10^{22} \text{ N}$
- погонска сила шатла при лансирању $3,1 \times 10^7 \text{ N}$
- вучна сила локомотиве $8,9 \times 10^5 \text{ N}$
- тежина јабуке средње величине 1 N
- најмање јаје инсекта $2 \times 10^{-6} \text{ N}$
- електрична сила између протона и електрона у атому водоника $8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$
- тежина бактерије $1 \times 10^{-18} \text{ N}$
- тежина атома водоника $1,6 \times 10^{-26} \text{ N}$
- тежина електрона $8,9 \times 10^{-30} \text{ N}$
- гравитациона сила између протона и електрона у атому водоника $3,6 \times 10^{-47} \text{ N}$

Даламберов принцип

- Једначине динамике се пишу у облику једначина статике.

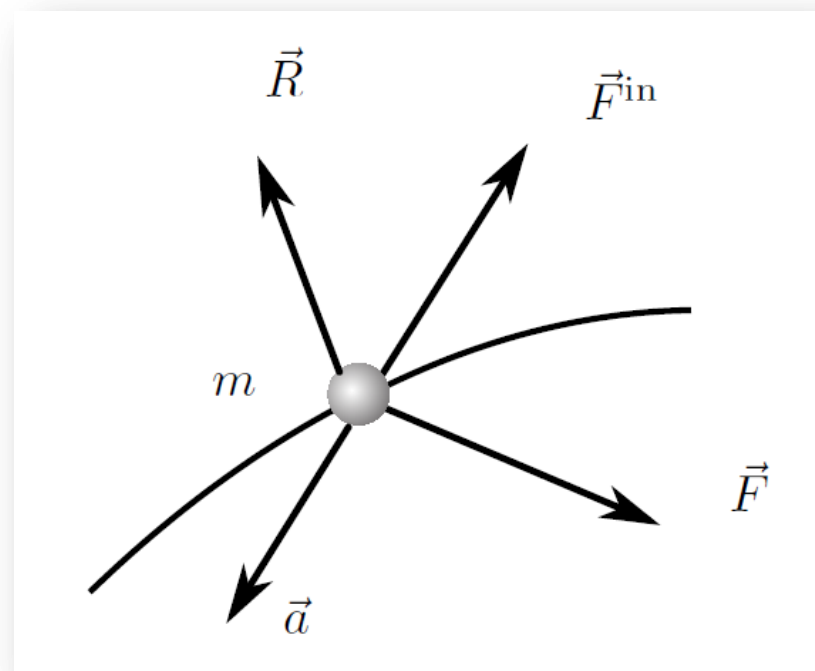
$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$

- Инерцијална сила

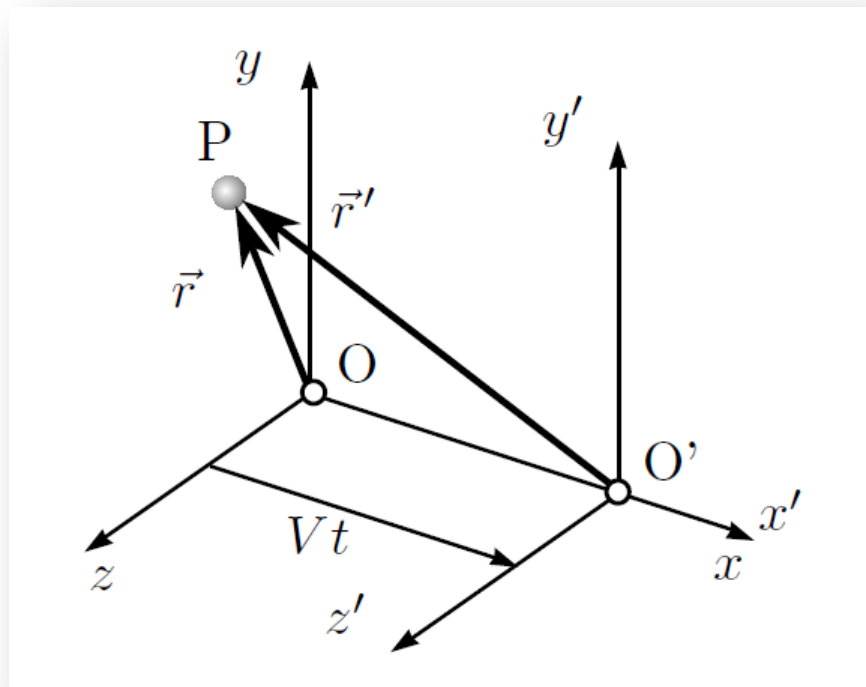
$$\vec{F}^{in} = -m \vec{a}$$

- Даламберов принцип

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^{in} = \vec{0}$$



Инерцијални референтни систем



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V} t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{const}}$$

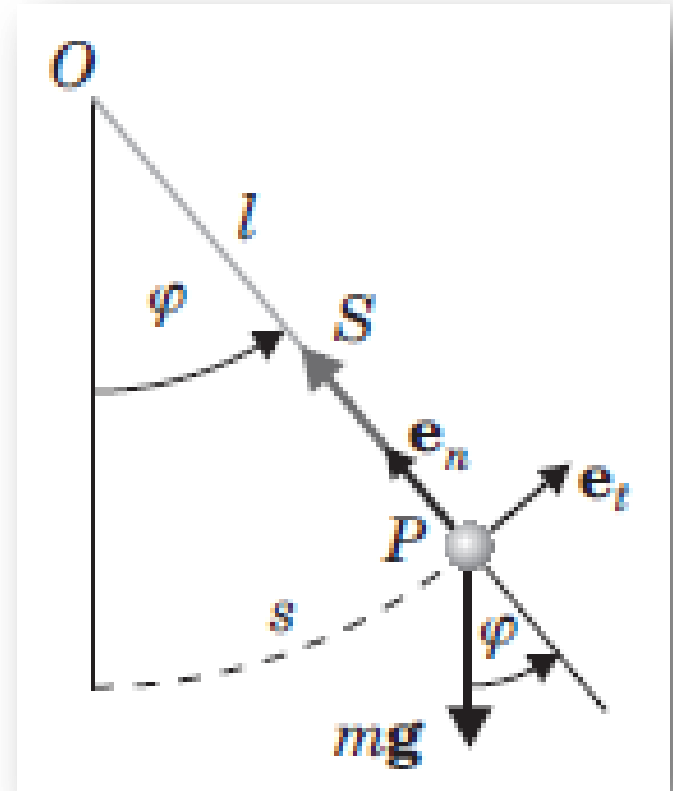
За два система референције кажемо да су инерцијални ако се један у односу на други крећу равномерно праволинијски.

О математичким моделима

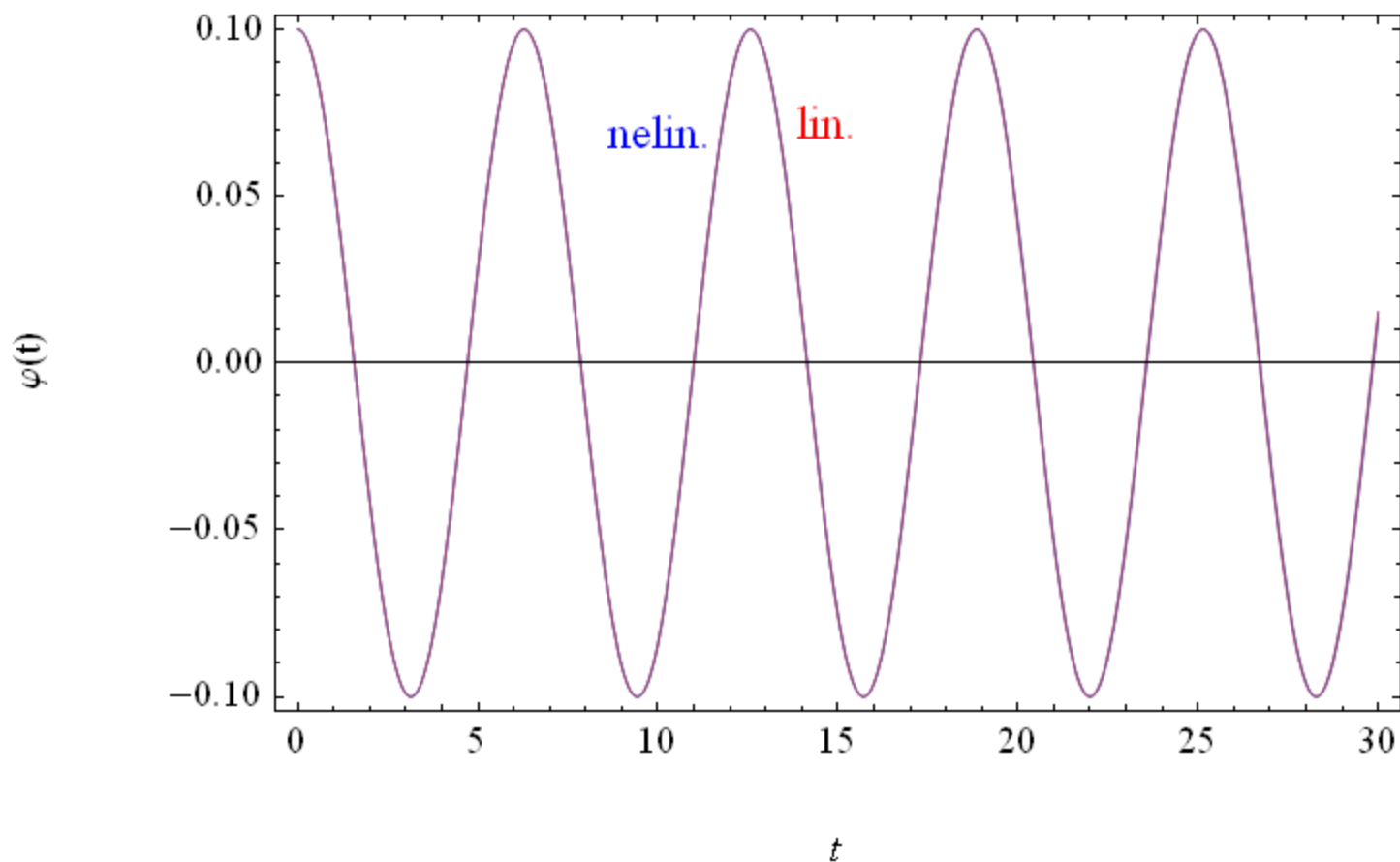
- Шта је математички модел?
- Какви су математички модели у динамици?
- Како се претпоставке одражавају на структуру модела?
- Линеарни и нелинеарни модели – када се може сматрати да је нека величина мала, а када не.
- Математичко клатно
- Модел раста популације

Математичко клатно

- Анализирати силе
- Формирати ДЈК
- Одредити брзину у зависности од положаја
- Одредити реакцију конца у зависности од положаја
- Одредити кретање у случају малих осцилација
- Упоредити решења тачне и линеаризоване једначине кретања

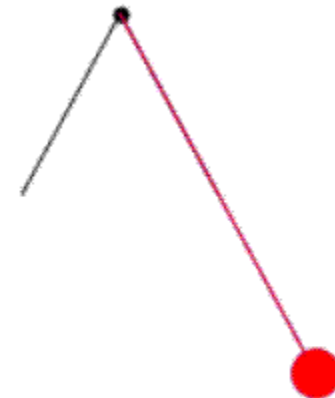
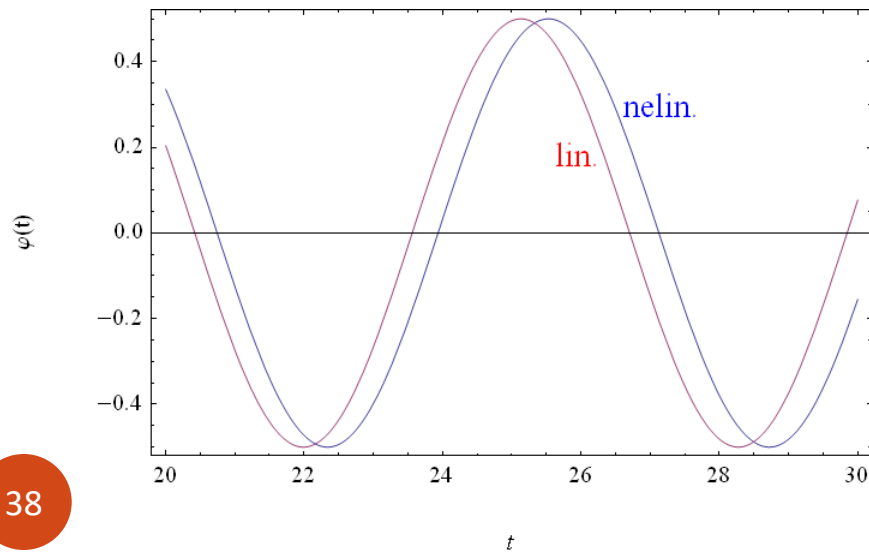
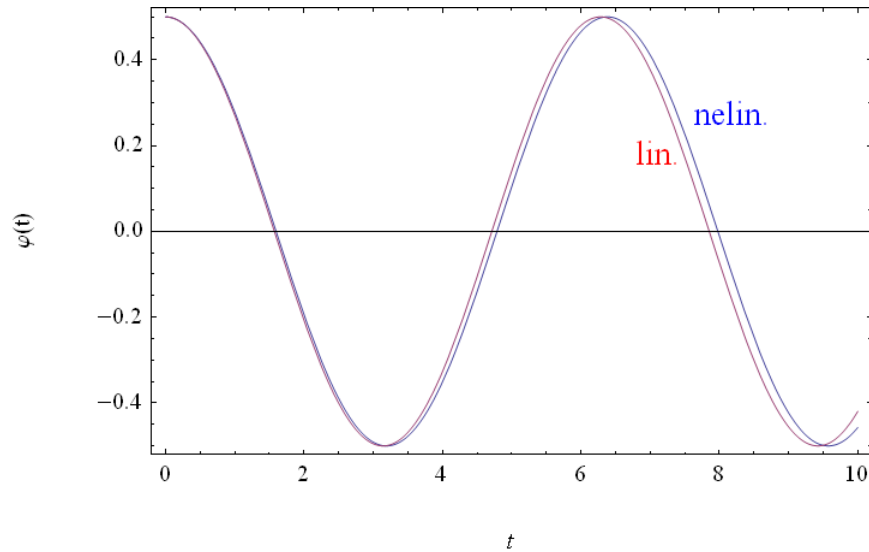


Математичко клатно-поређење



$$(\varphi_0 = 0.1 (= 5.73^\circ), v_0 = 0, \omega = 1\text{s}^{-1})$$

Математичко клатно-поређење



$$(\varphi_0 = 0.5 (= 28.65^\circ), v_0 = 0, \omega = 1\text{s}^{-1})$$

Модели раста популације

Нека је са y означен број јединки неке популације. Подпретпоставком да се ради о масовној популацији може се сматрати да се број јединки током времена мења непрекидно. Анализирати основни математички модел раста популације

$$\dot{y} = ay \quad a > 0$$

и упоредити га са нелинеарним математичким моделом (логистичком једначином)

$$\dot{y} = (a - by)y \quad a, b > 0.$$

- Линеарни модел:

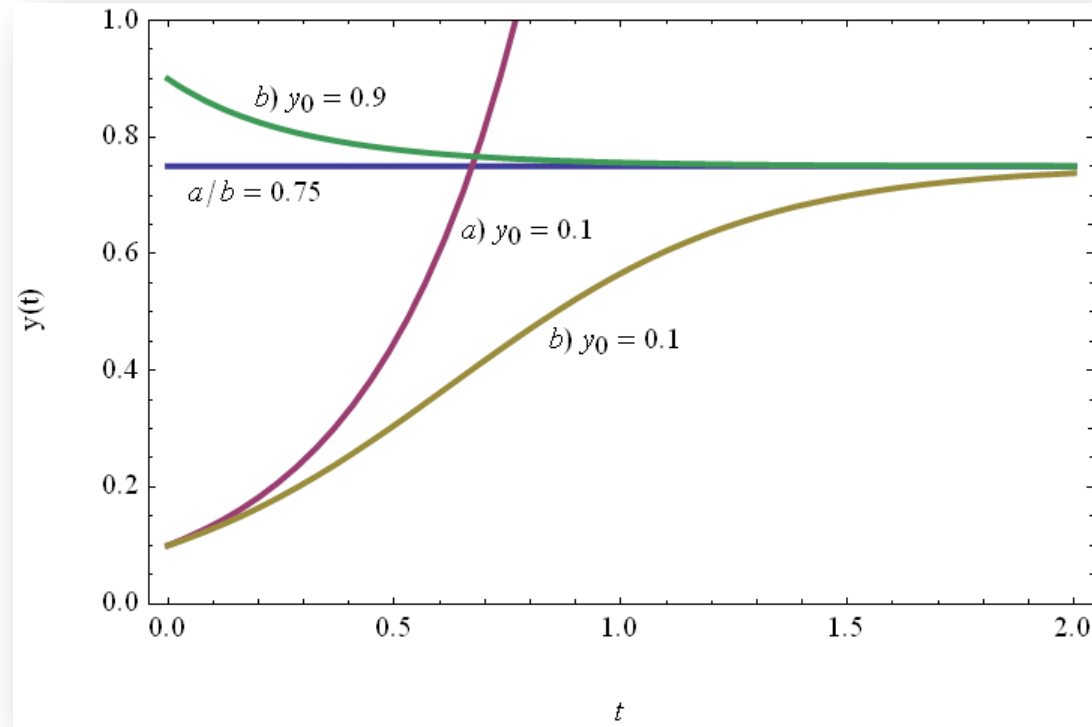
$$\dot{y} = ay, \quad y(0) = y_0$$

$$y(t) = y_0 e^{at}$$

- Нелинеарни модел:

$$\dot{y} = (a - by)y$$

$$y(0) = y_0$$



$$y(t) = \frac{a}{b} \frac{y_0}{y_0 + \left(\frac{a}{b} - y_0 \right) e^{-at}}$$

Шта смо научили?

36. Силе у динамици (сила тежине, вискозног и сувог трења, универзалне гравитације, еластична сила)

- ПРИМЕРИ
- Даламберов принцип
- Инерцијални референтни системи
- О математичким моделима

Динамика – 1. део

Динамика материјалне тачке – Врсте сила

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић