

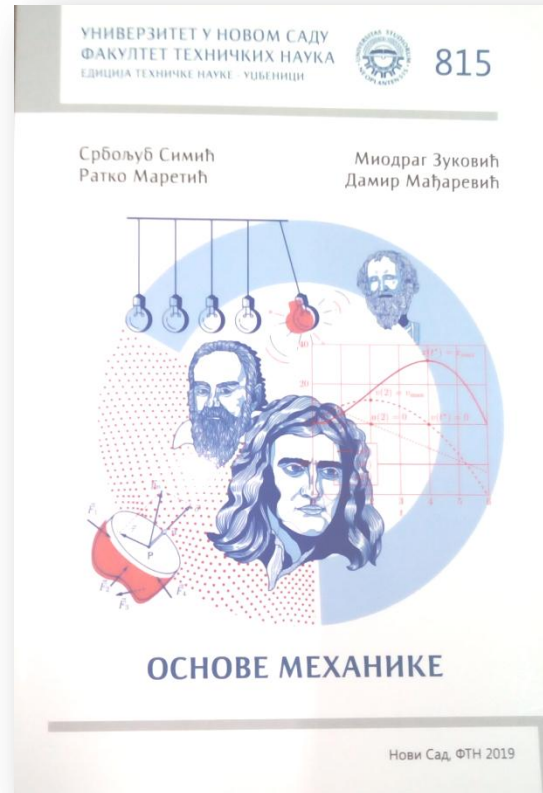
Динамика – II део

Енергија, рад, снага,... – 1. део

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



Шта ћемо научити?

- 37. Кинетичка енергија материјалне тачке.
Структура израза за кинетичку енергију.
- 38. Рад и снага силе на праволинијском и криволинијском кретању.
- 39. Закон о промени кинетичке енергије.



$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{dE_K}{dt} = ?$$

37. Кинетичка енергија материјалне тачке. Структура израза за кинетичку енергију

Кинетичка енергија материјалне тачке

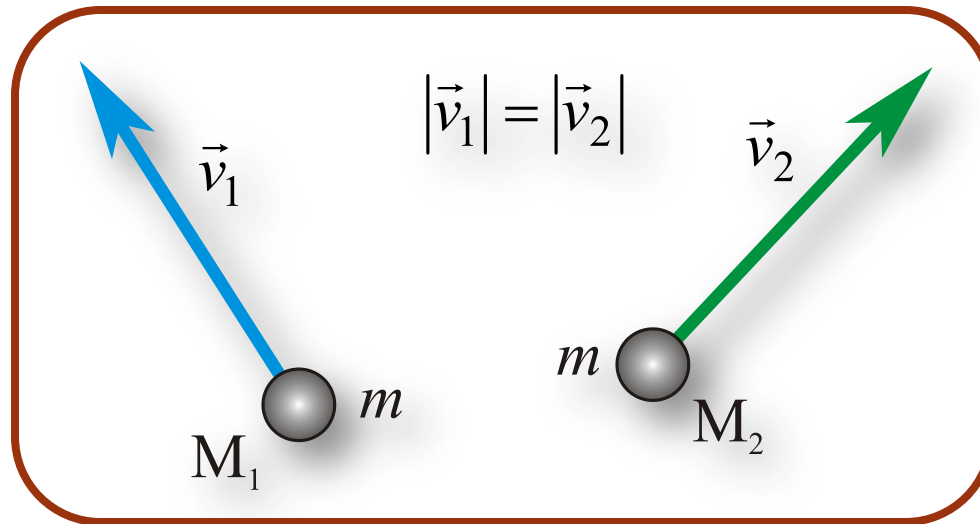
- Дефиниција

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Јединица:

$$kg \frac{m^2}{s^2} = kg \frac{m}{s^2} m = Nm = J$$

Кинетичка енергија материјалне тачке



$$\begin{aligned} |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \quad \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 &\Rightarrow E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = E_{k2} \\ &\quad \vec{K}_1 = m \vec{v}_1 \neq m \vec{v}_2 = \vec{K}_2 \end{aligned}$$

Структура израза за кинетичку енергију

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{v} \cdot \vec{a}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = m \vec{v} \cdot \vec{a}$$



Структура израза за кинетичку енергију

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} (d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v}) = \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$dE_k = m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$



Кинетичка енергија – праволинијско кретање

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{i} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \dot{x} \ddot{x} \\ d \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \dot{x} d\dot{x} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ \frac{dE_k}{dt} &= m \dot{x} \ddot{x} \\ dE_k &= m \dot{x} d\dot{x} \end{aligned}$$

Кинетичка енергија – криволинијско кретање – Декартов коо. систем

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} \\ \vec{a} &= \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} \\ d \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \dot{x} d\dot{x} + \dot{y} d\dot{y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ \frac{dE_k}{dt} &= m (\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y}) \\ dE_k &= m (\dot{x} d\dot{x} + \dot{y} d\dot{y}) \end{aligned}$$

Кинетичка енергија – криволинијско кретање – Природни коо. систем

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{e}_t \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \dot{s}^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \dot{s} \ddot{s} \\ d \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \dot{s} d\dot{s} \end{cases}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

$$\frac{dE_k}{dt} = m \dot{s} \ddot{s}$$

$$dE_k = m \dot{s} d\dot{s}$$

38. Рад и снага силе на праволинијском и криволинијском кретању.



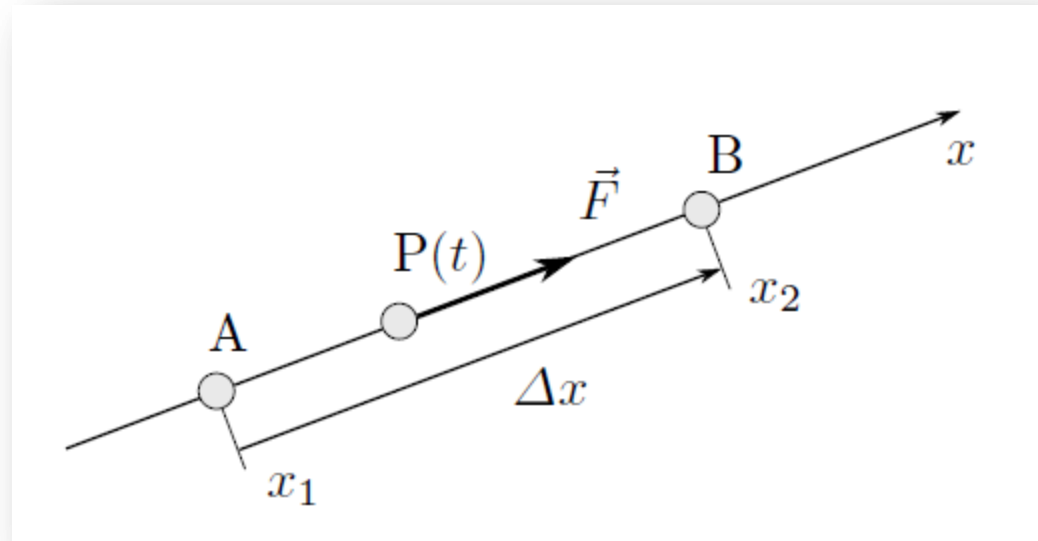
Рад силе (праволинијско кретање)

- Рад константне силе

$$\vec{F} = F_x \vec{i}$$

$$F_x = \text{const.}$$

$$A_{12} = F_x \Delta x$$



- Јединица мере

$$1\text{Nm} = 1\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1\text{J}$$

Рад силе (праволинијско кретање)

- Рад константне силе

$$A_{12} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_x \Delta x = F \cos \theta \Delta x$$

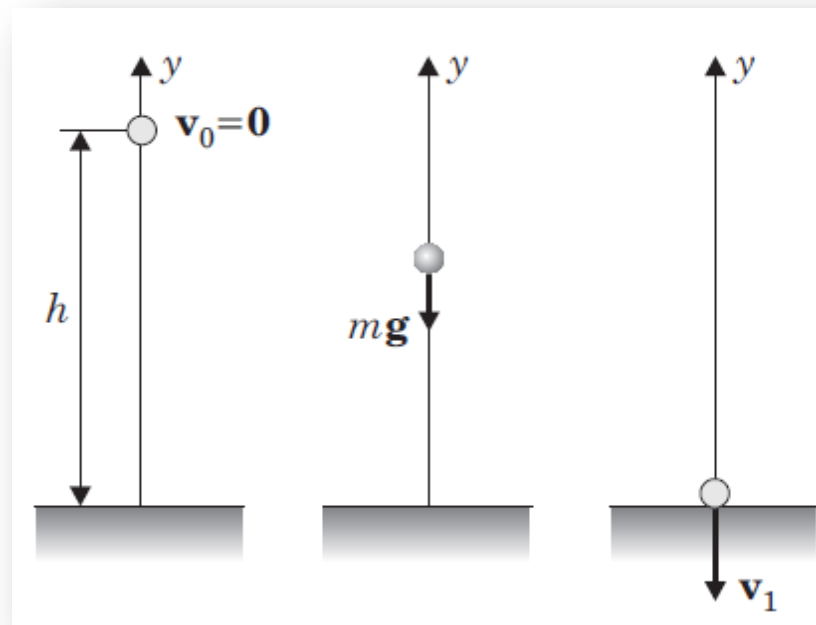
$$\Delta\vec{r} = \Delta x \vec{i}$$



Пример

- Пример 6.1

Изračунати рад силе теже током пада материјалне тачке масе m са висине h . Показати да ће извршени рад бити једнак прираштају кинетичке енергије тачке.

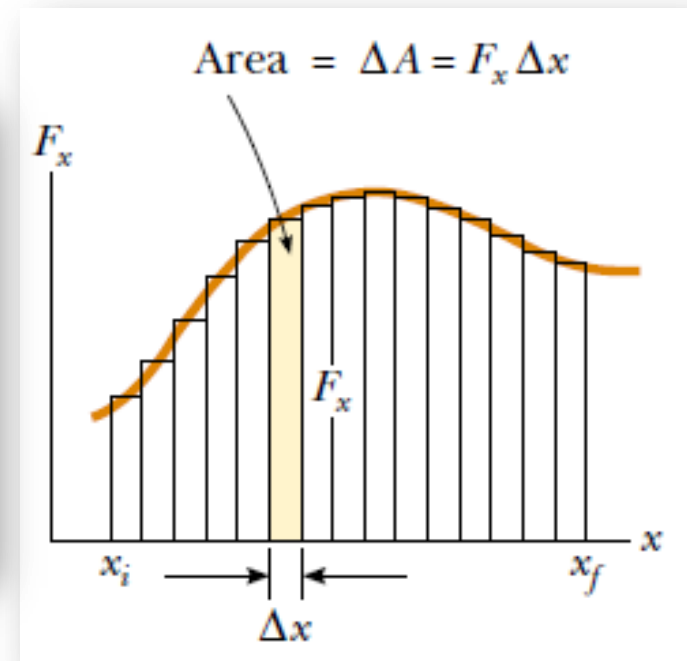
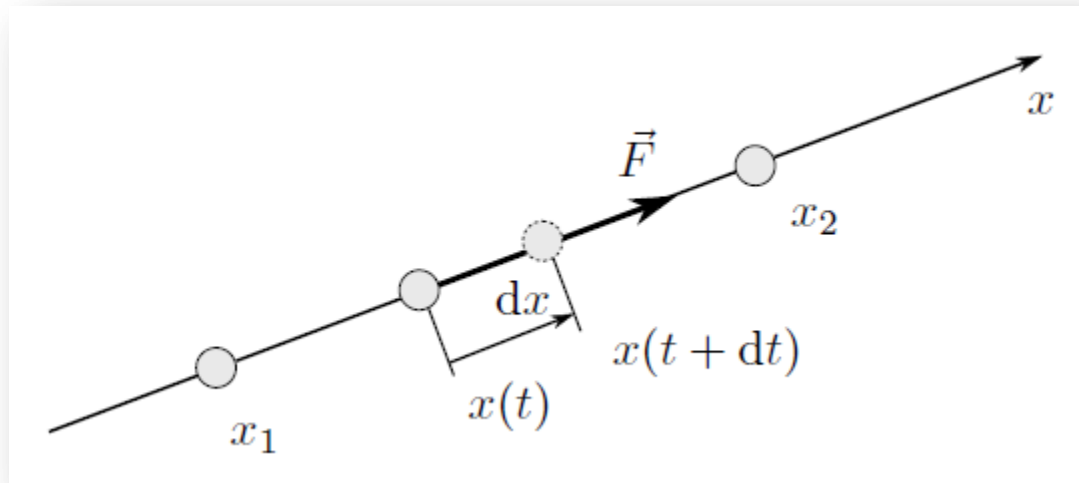


Рад силе (праволинијско кретање)

- Рад променљиве силе
 - Елементарни рад

$$dA = F_x dx$$

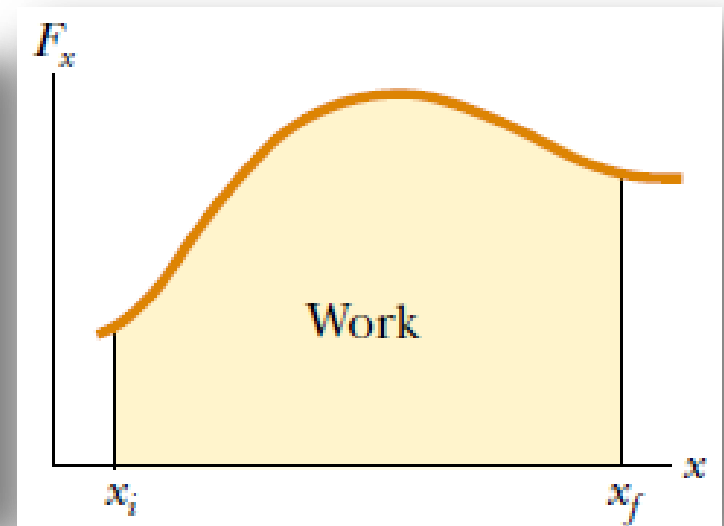
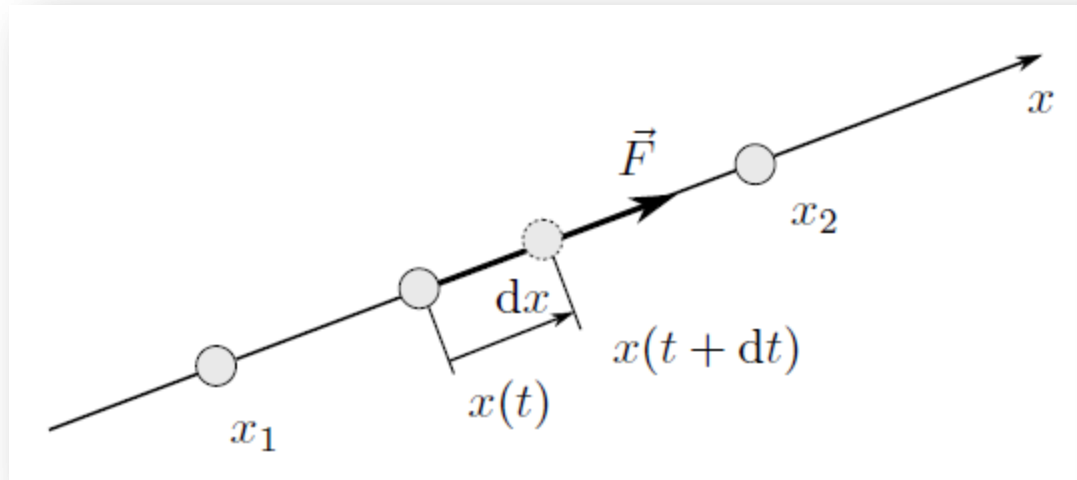
$$F_x = F_x(t, x, \dot{x})$$



Рад силе (праволинијско кретање)

- Рад променљиве силе
 - Укупан рад

$$A_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} dA = \int_{(P_1)}^{(P_2)} F_x(t, x, \dot{x}) dx$$



Пример

Пример 6.2. Материјална тачка масе $m = 1\text{ kg}$ креће се праволинијски под дејством силе $\vec{F} = F(t) = 10(1 - t) \vec{i} \text{ N}$ (Задатак 5.2). Тачка је започела кретање из координатног почетка брзином $\dot{x}(0) = v_0 = 20 \text{ m/s}$.

- а) Одредити рад силе $\vec{F}$ од почетка кретања до тренутка t_1 у ком сила мења смер свог дејства,
- б) Одредити рад силе $\vec{F}$ од почетка кретања до тренутка t_2 у ком тачка мења смер кретања,
- в) Показати да ће рад силе бити једнак прираштају кинетичке енергије материјалне тачке.

► Решавањем диференцијалне једначине кретања $m\ddot{x} = F(t) = 10(1 - t)$ може се показати да ће брзина тачке и параметарска једначина кретања бити:

$$\dot{x}(t) = 20 + 10t - 5t^2, \quad (\text{a})$$

$$x(t) = 20t + 5t^2 - \frac{5}{3}t^3. \quad (\text{б})$$

Одавде се лако показује да сила мења смер дејства у тренутку $t_1 = 1$ s, док тачка мења смер кретања у тренутку $t_2 = 1 + \sqrt{5}$ s. Елементарно померање материјалне тачке је:

$$dx(t) = \dot{x}(t) dt = (20 + 10t - 5t^2) dt.$$

На основу тога ће рад силе $F(t)$ од почетка кретања до тренутка промене смера дејства t_1 бити:

$$\begin{aligned} A_{01} &= \int_0^{t_1} F(t) dx(t) = \int_0^1 10(1 - t)(20 + 10t - 5t^2) dt \\ &= 10 \left(20t - 5t^2 - 5t^3 + \frac{5}{4}t^4 \right) \Big|_0^{t_1} = 112,5 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{в})$$

На исти начин се одређује и рад силе од почетка кретања до тренутка промене смера кретања тачке t_2 :

$$A_{02} = \int_0^{t_2} F(t) dx(t) = -200 \text{ J}. \quad (\text{г})$$

Брзина тачке у тренутку промене смера дејства силе се одређује помоћу једначине (а):

$$v_1 = \dot{x}(t_1) = 25 \text{ m/s},$$

а у тренутку промене смера кретања је $v_2 = \dot{x}(t_2) = 0$. Одавде следи да је у првом случају прираштај кинетичке енергије:

$$\Delta E_{k1} = E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 112,5 \text{ J}, \quad (\text{д})$$

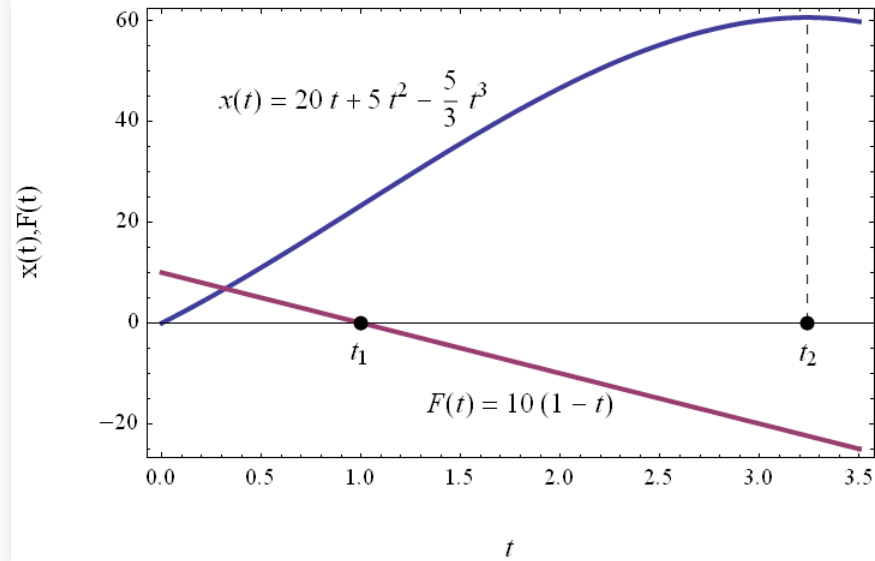
док је у другом,

$$\Delta E_{k2} = E_{k2} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -200 \text{ J}. \quad (\text{ђ})$$

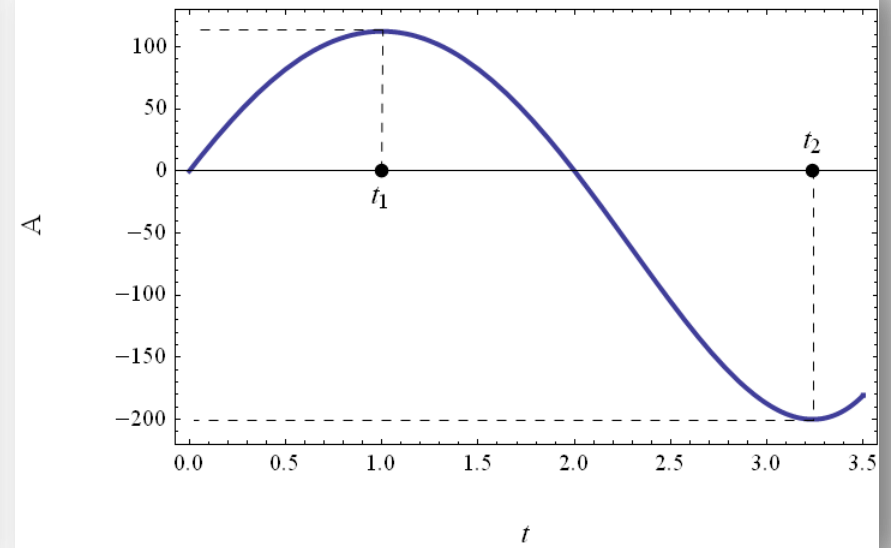
Поређењем једначина (в) и (г) са једначинама (д) и (ђ) добијају се жељени резултати:

$$\Delta E_{k1} = A_{01} \quad \text{и} \quad \Delta E_{k2} = A_{02} \blacktriangleleft .$$

Kretanje, sila



Rad



$t=0$ s

$x=0$ m

$F=0$ N

$A=0$ J

Рад силе (праволинијско кретање)

- Када се рад силе може израчунати унапред (без претходног познавања кретања)?

- $F_x = F = \text{const.} \Rightarrow A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = F(x_2 - x_1) = F \Delta x$

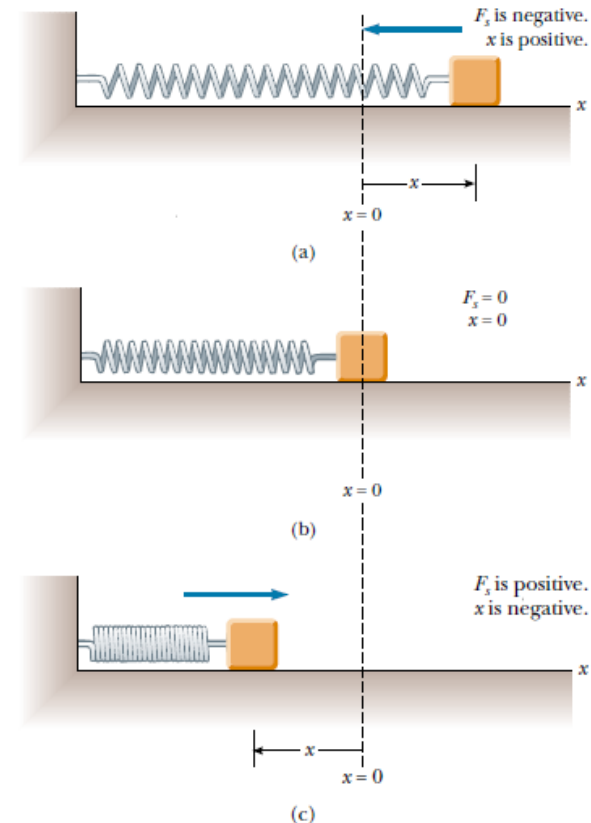
- $F_x = F(x) \Rightarrow A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = U(x_2) - U(x_1)$

Рад силе (праволинијско кретање)

- Одредити елементарни и укупни рад силе у еластичној опрузи

$$F_x = -c x$$

$$A_{12} = -\left(\frac{1}{2} c x_2^2 - \frac{1}{2} c x_1^2\right)$$



Рад силе (криволинијско кретање)

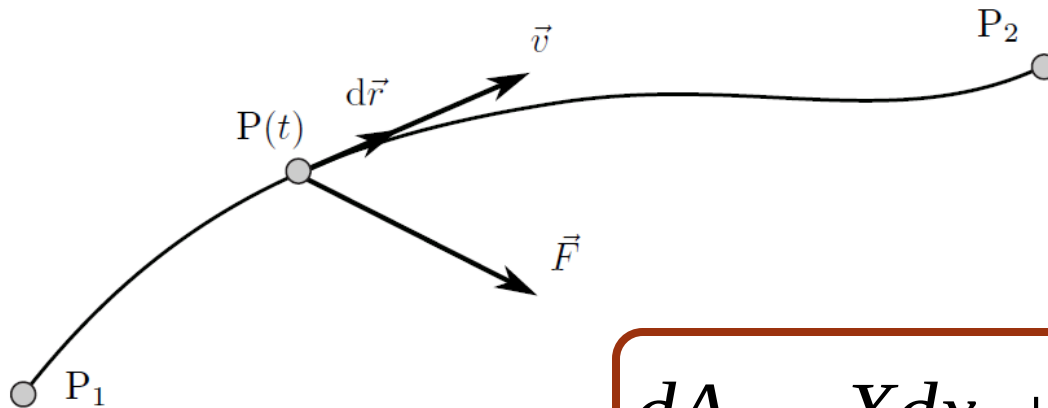
- Елементарни рад

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

$$dA = F_x dx$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$



$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} = F_t\vec{e}_t + F_n\vec{e}_n$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} = ds\vec{e}_t$$

$$dA = Xdx + Ydy = F_t ds$$

Рад силе (криволинијско кретање)

- Елементарни рад

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

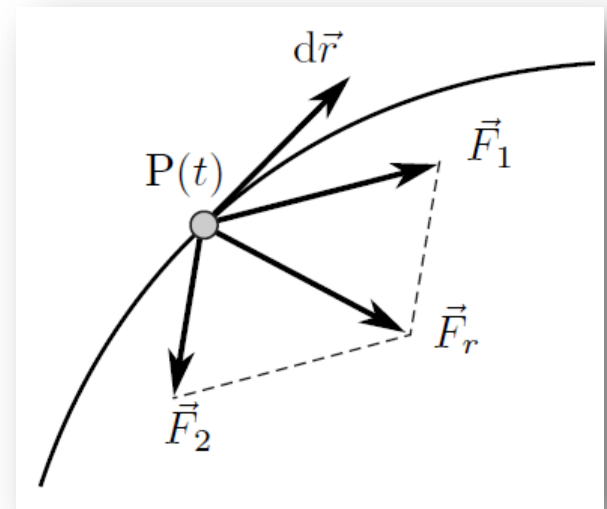
- Укупни рад (криволинијски интеграл)

$$A_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} dA = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \cdot d\vec{r}$$

Рад силе (криволинијско кретање)

- Рад резултанте

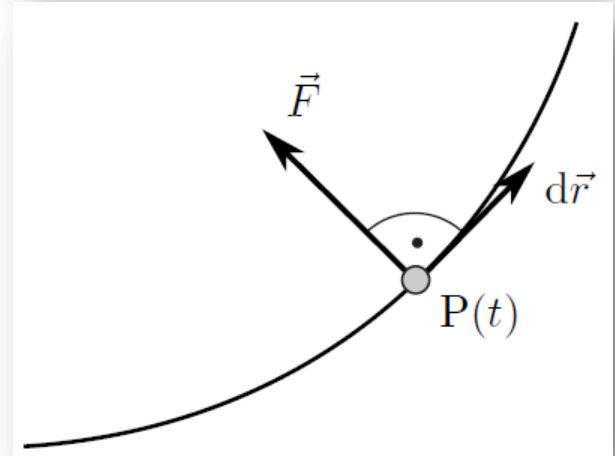
$$\begin{aligned} dA &= \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} \\ &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = dA_1 + dA_2 \end{aligned}$$



- Када је рад силе једнак нули?

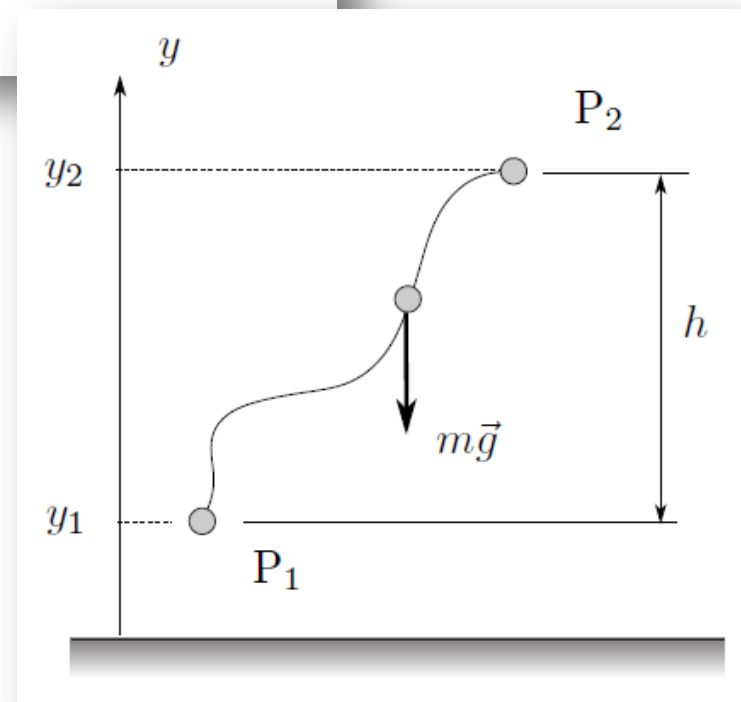
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{F} \perp d\vec{r}$$



Пример

Пример 6.3. Одредити рад силе теже на померању материјалне тачке масе m из положаја $P_1(x_1, y_1)$ у положај $P_2(x_2, y_2)$. Да ли рад силе теже зависи од облика трајекторије?



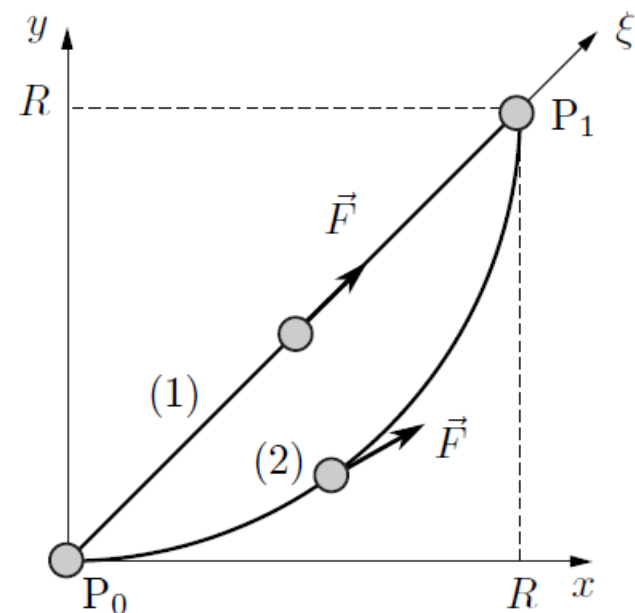
Рад силе (криволинијско кретање)

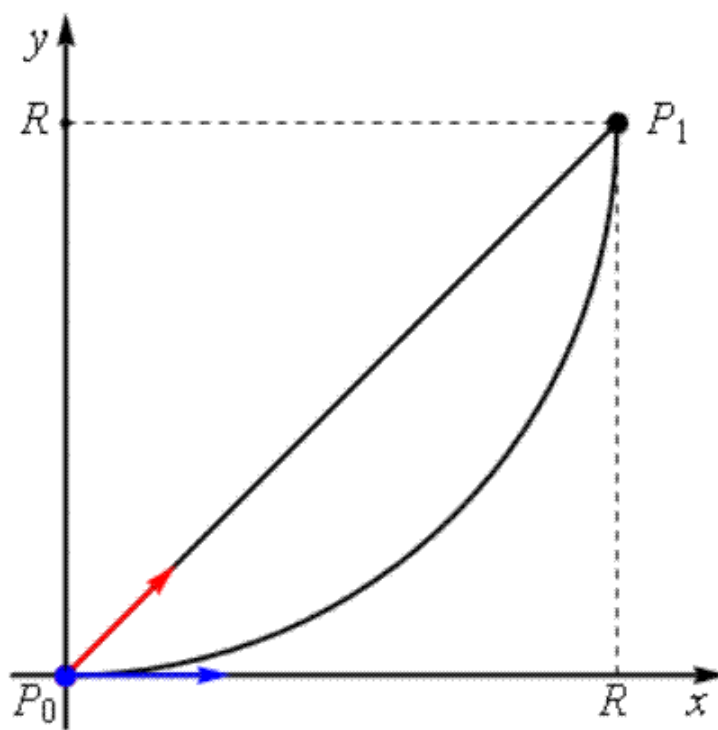
- Важно својство

- Рад силе на криволинијском кретању у општем случају **зависи од облика путање** тачке

Пример

Пример 6.4. Материјална тачка се креће од координатног почетка $P_0(0,0)$ до тачке $P_1(R,R)$ на два начина: први пут дуж праволинијске трајекторије, а други пут дуж трајекторије облика четвртине круга са центром у тачки $C(0,R)$. Током кретања на тачку десјтвује „пратећа” сила чији је интензитет константан, $F = \text{const.}$, и која увек има правац тангенте на трајекторију $\vec{F} = F \vec{e}_t$. Одредити рад ове силе током кретања тачке дуж сваке од ових трајекторија.





Снага

- Дефиниција

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W}$$

- Систем система сила
(резултанте)

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i$$



$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 0.746 \text{ kW}$$

Пример

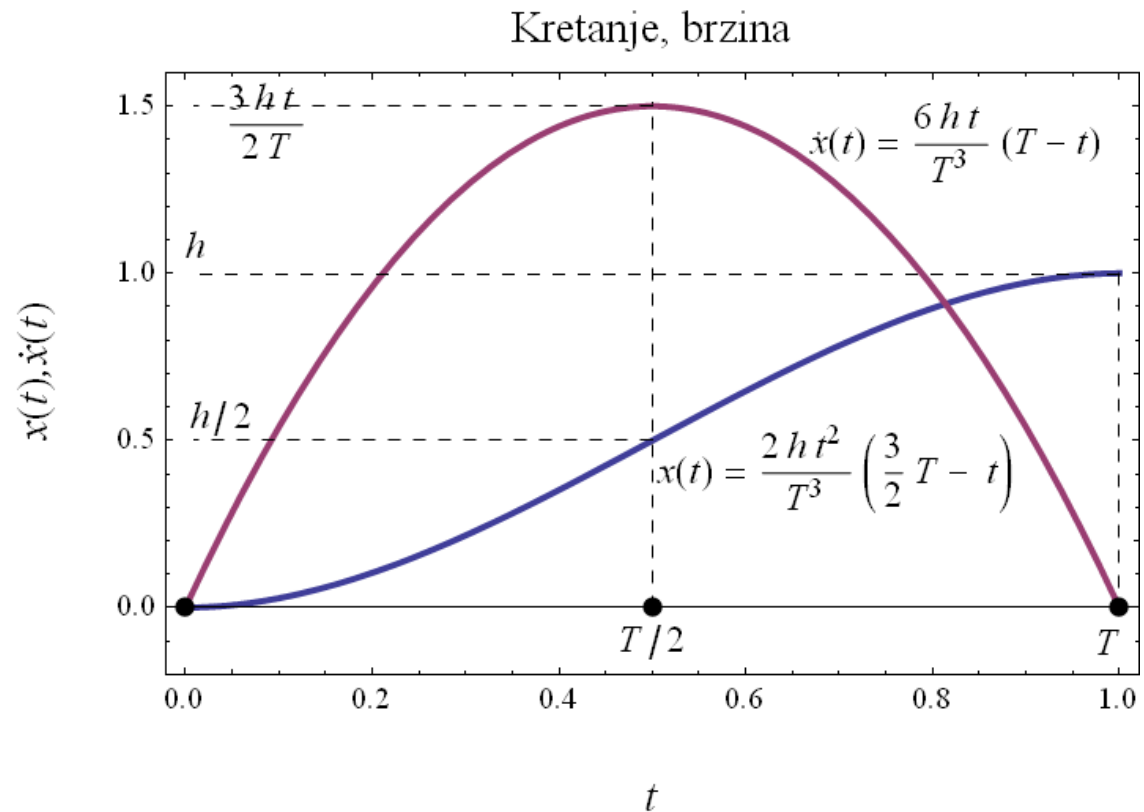
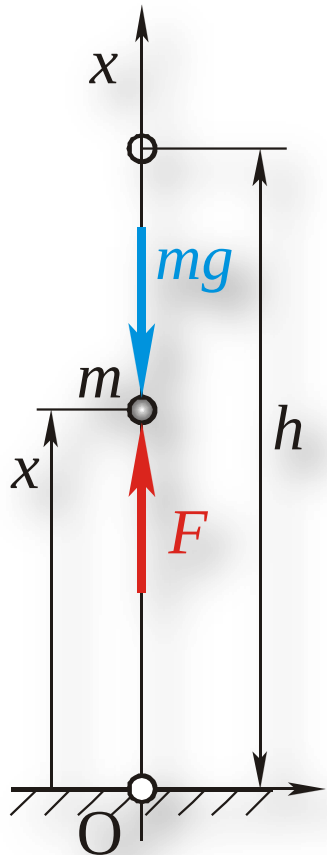
Дизач подиже тег, масе m , са пода ($x(0)=0$) на висину h .
Ако се тег кретао по закону

$$x(t) = \frac{2ht^2}{T^3} \left(\frac{3}{2}T - t \right)$$

одредити рад силе дизања на померању тега из почетног у крајњи положај и промену снаге ове силе при датом кретању.



$$x(t) = \frac{2h}{T^3} t^2 \left(\frac{3}{2} T - t \right) \rightarrow \dot{x}(t) = \frac{6h}{T^3} t (T - t) \rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{12h}{T^3} \left(\frac{T}{2} - t \right)$$



$$x(0) = 0, x(T/2) = h/2, x(T) = h, \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(T/2) = \frac{3h}{2T}, \dot{x}(T) = 0, \ddot{x}(0) = \frac{6h}{T^2}, \ddot{x}(T/2) = 0, \ddot{x}(T) = -\frac{6h}{T^2}.$$

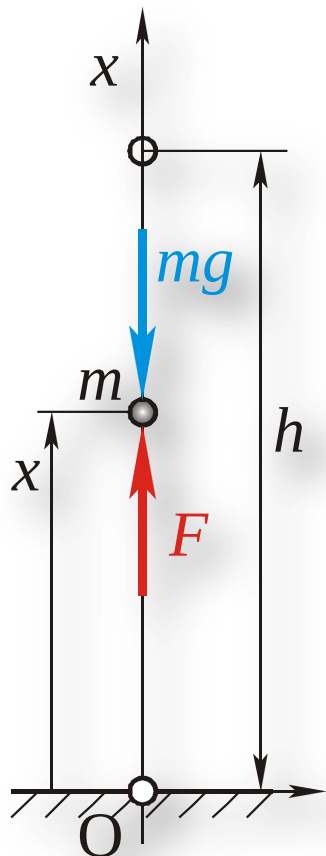
$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m(\ddot{x}\vec{i}) = F\vec{i} + (-mg\vec{i}) \rightarrow F = mg + m\ddot{x}$$

$$F = mg + m\frac{12h}{T^3}\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

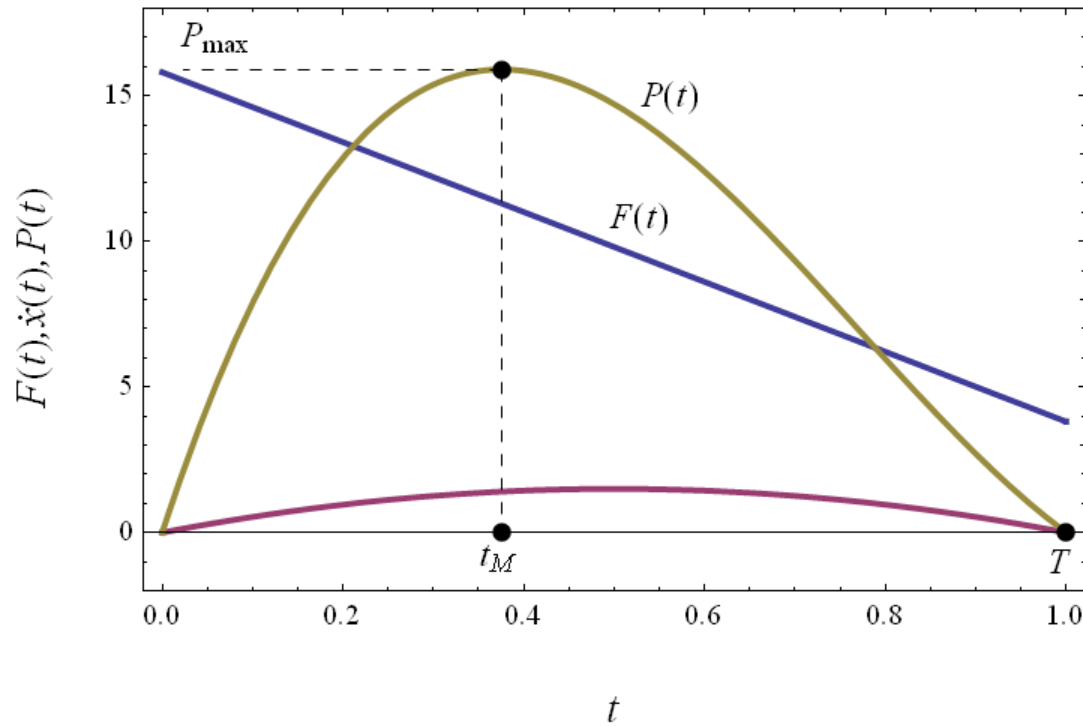
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F\dot{x} = \left(mg + m\frac{12h}{T^3}\left(\frac{T}{2} - t\right) \right) \frac{6h}{T^3}t(T - t)$$

$$dA = Pdt = \left(mg + m\frac{12h}{T^3}\left(\frac{T}{2} - t\right) \right) \frac{6h}{T^3}t(T - t)dt$$

$$A_{01} = \int_{t_0=0}^{t_1=T} \left(mg + m\frac{12h}{T^3}\left(\frac{T}{2} - t\right) \right) \frac{6h}{T^3}t(T - t)dt = mgh$$



Sila, brzina i snaga



$$\{g = 9.81, m = 1, h = 1, T = 1\}$$

39. Закон о промени кинетичке енергије

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{dE_K}{dt} = ?$$

Закон о промени кинетичке енергије

- Први облик

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = P$$

$$\frac{dE_k}{dt} = m\vec{v} \cdot \vec{a}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Закон о промени кинетичке енергије

- Други облик (диференцијални)

$$\frac{dE_k}{dt} = P \Rightarrow dE_k = P dt$$

$$dE_k = dA$$

$$dE_k = m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$P = \frac{dA}{dt}$$



Закон о промени кинетичке енергије

- Трећи облик (интегрални)

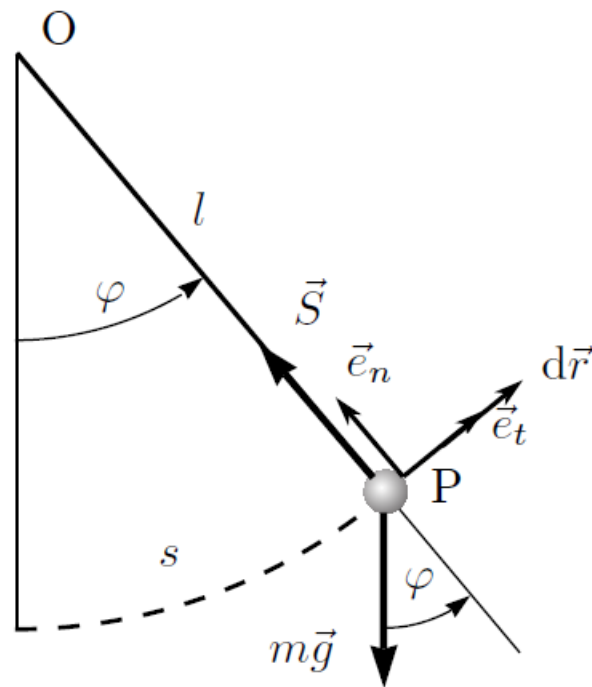
$$dE_k = dA \Rightarrow \int_1^2 dE_k = \int_1^2 dA$$

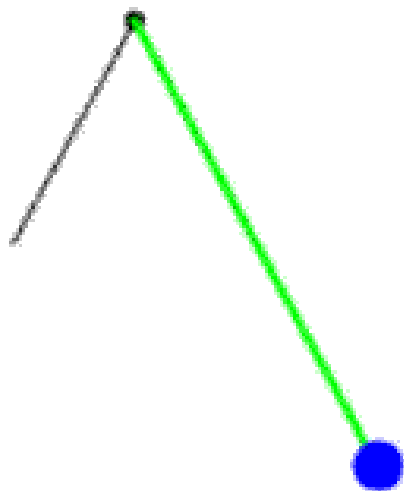
$$E_{k2} - E_{k1} = A_{12}$$

$$\Delta E_k = A_{12}$$

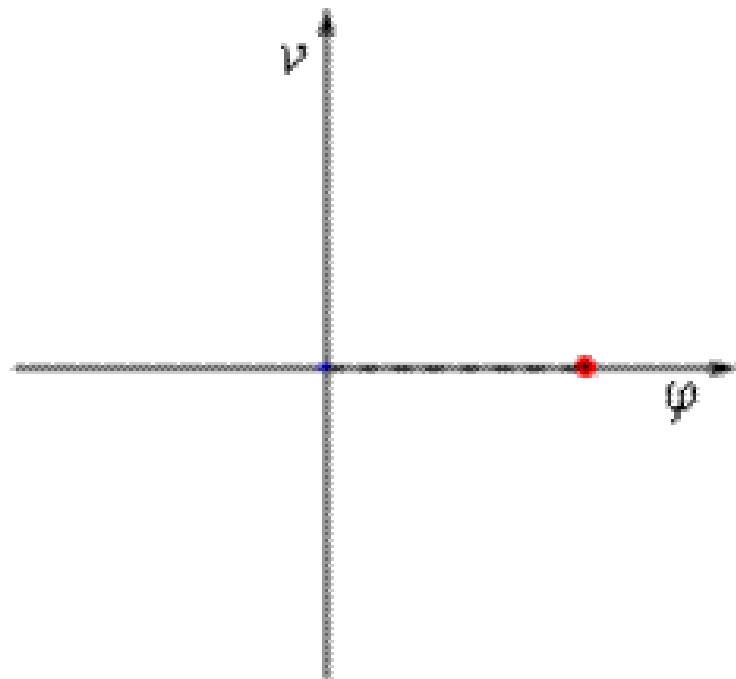
Пример

Пример 6.5. За математичко клатно, анализирано у Примеру 5.8, применом закона о промени енергије одредити брзину тачке у функцији положаја, угла φ , као и брзину промене кинетичке енергије.





$$\varphi = 0.5 \text{ rad}$$
$$v = 0 \text{ m/s}$$



Шта смо научили?

- 37. Кинетичка енергија материјалне тачке.
Структура израза за кинетичку енергију.
- 38. Рад и снага силе на праволинијском и криволинијском кретању.
- 39. Закон о промени кинетичке енергије.

Динамика – II део

Енергија, рад, снага,... – 1. део

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић