

Отпорност материјала

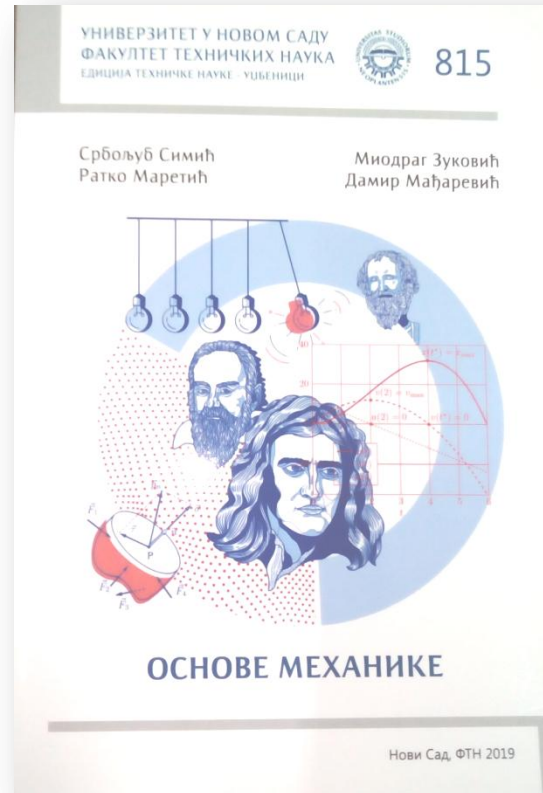
Савијање

Аксијално оптерећење - понављање

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



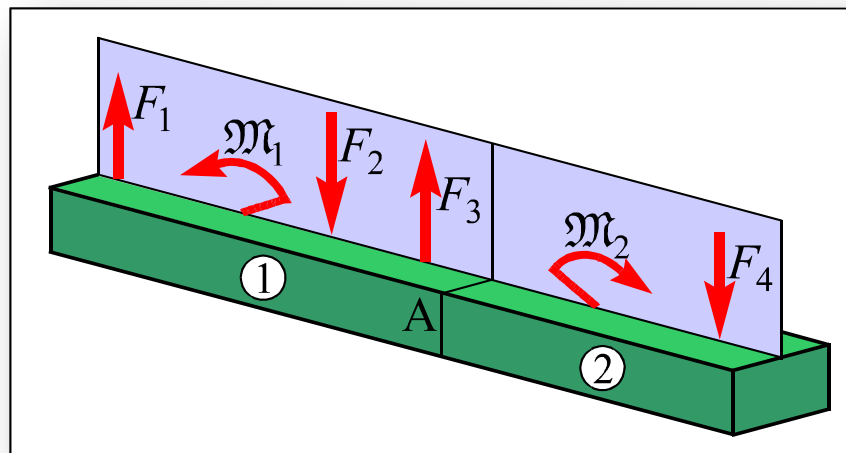
Шта ћемо научити?

- Савијање
- Аксијално оптерећење - понављање

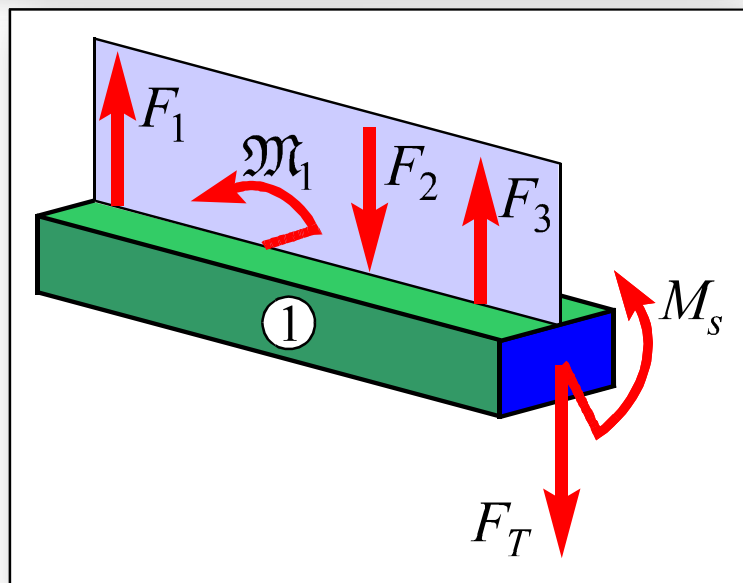
САВИЈАЊЕ



САВИЈАЊЕ – понављање



Штап је оптерећен на савијање уколико је изложен дејству сила и спрегова који се налазе у једној равни која садржи осу штапа

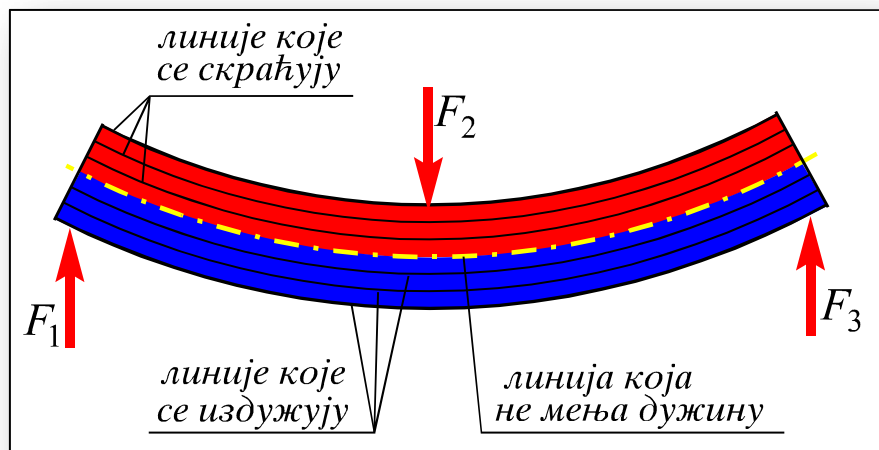


Момент савијања и трансверзална сила у пресеку А

$$M_s = \sum M_i^l \quad M_s = \sum M_i^d$$

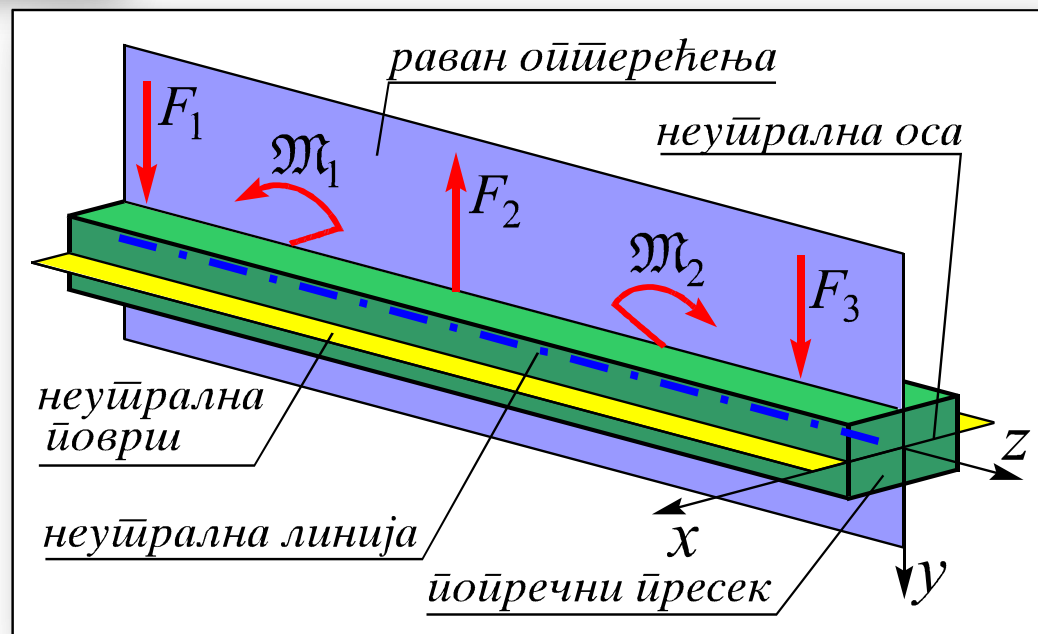
$$F_T = \sum F_i^l \quad F_T = \sum F_i^d$$

САВИЈАЊЕ – понављање



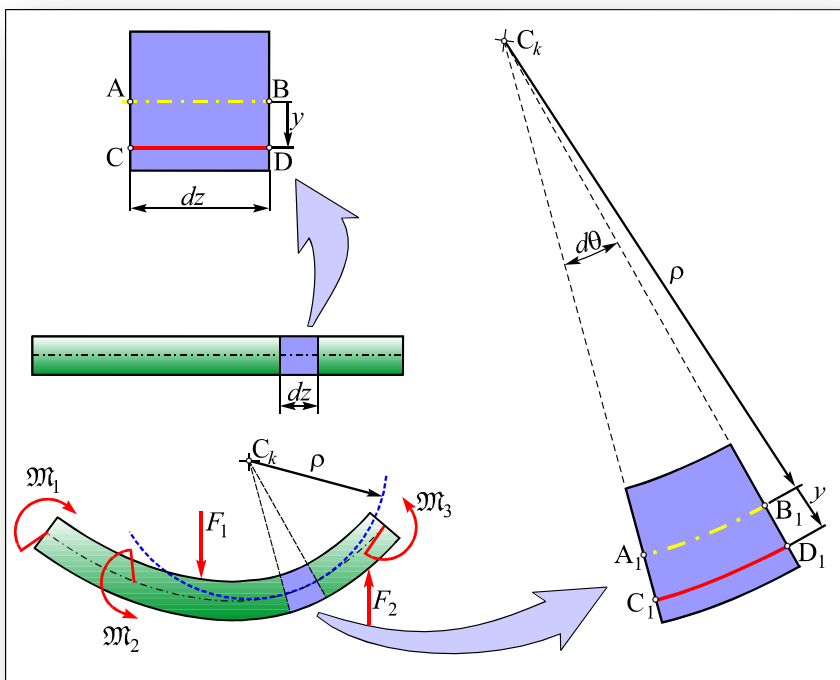
Основни геометријски појмови

Деформације при савијању

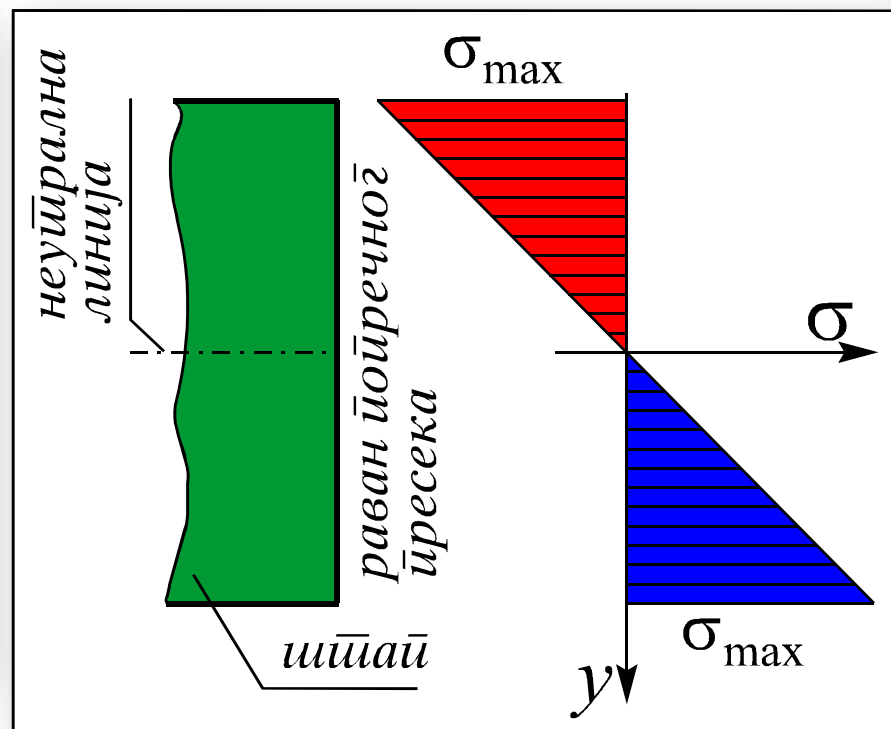


САВИЈАЊЕ – понављање

Распоред нормалних напона по попречном пресеку штапа при савијању.

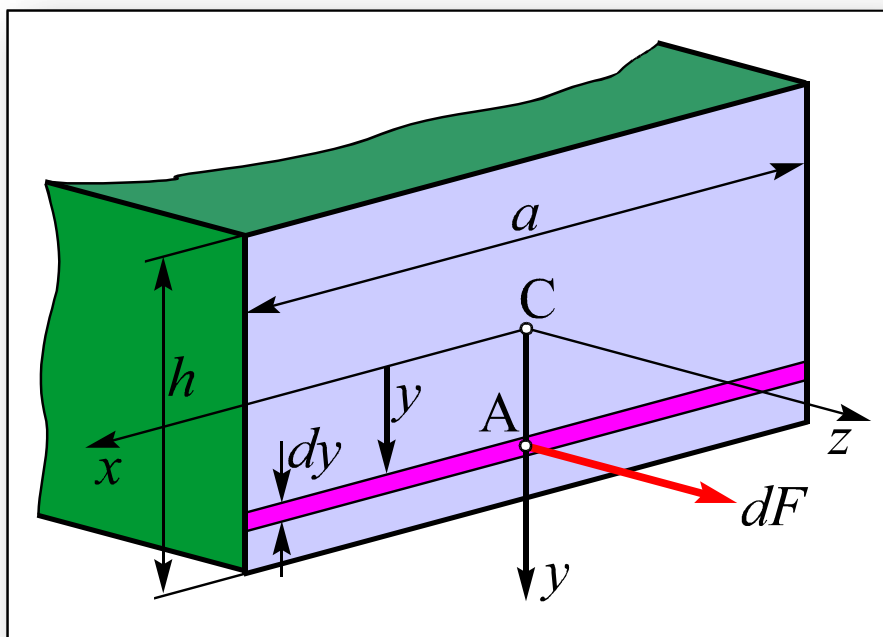


$$\sigma = \frac{E}{\rho} y$$



Највећи напони су у тачкама на горњој и доњој површи штапа

САВИЈАЊЕ – понављање



Нормални напон при савијању

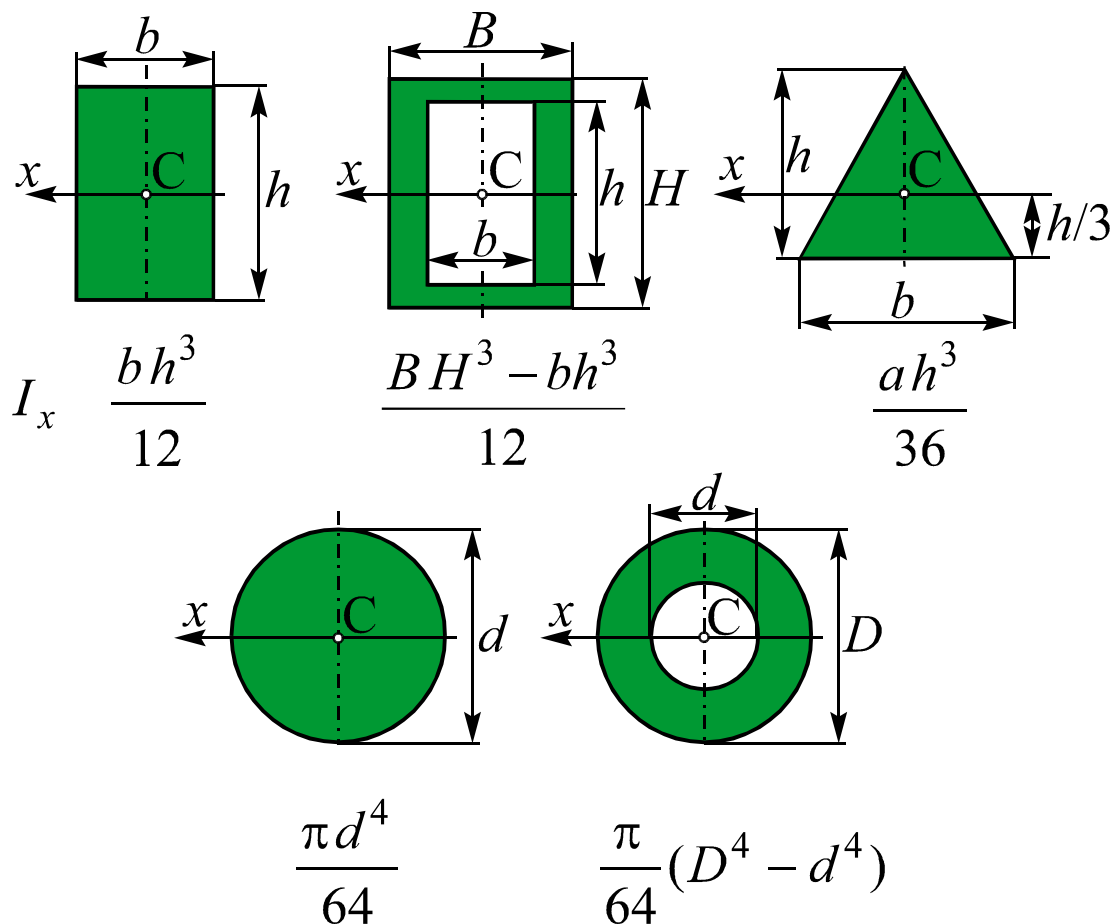
$$\sigma = \frac{M_s}{I_x} y$$

Највећи нормални напон

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{s \max}}{I_x} y_{\max}$$

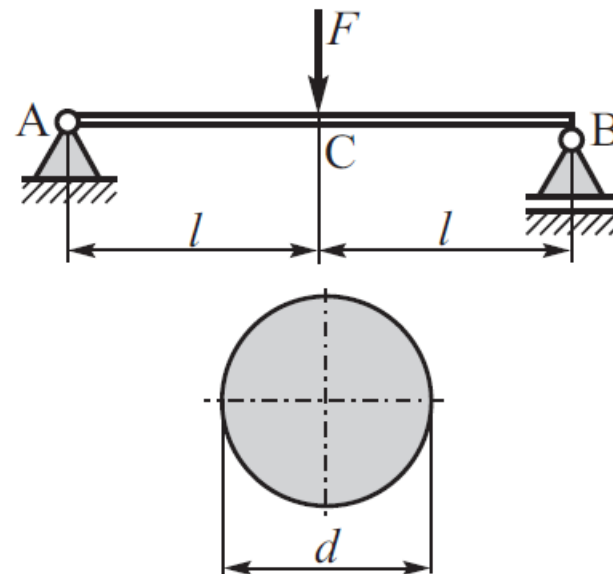
САВИЈАЊЕ – понављање

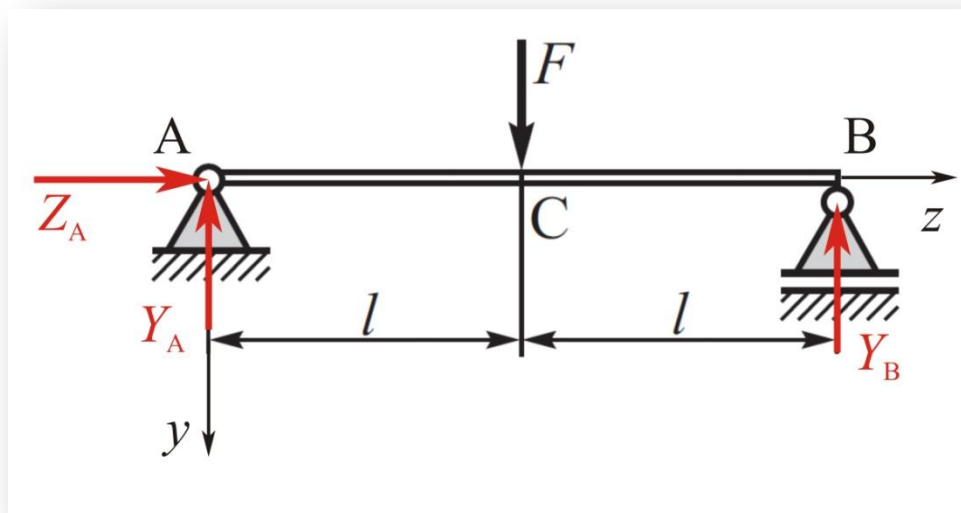
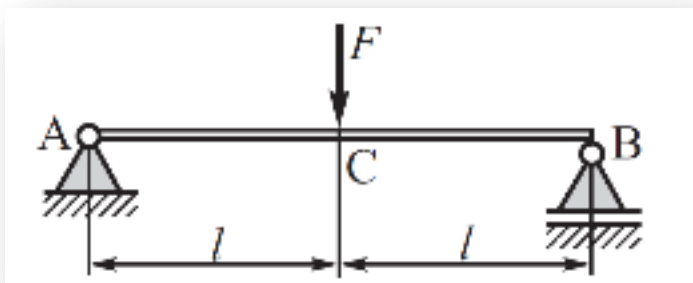
Аксијални моменти инерције



Савијање – Пример 1

3.24 Носач АВ приказан на слици, ослоњен је крајевима А и В на непокретни, односно покретни ослонац и оптерећен концентрисаном силом $F = 4 \text{ kN}$ у тачки С. Штап је кружног попречног пресека пречника $d = 5 \text{ cm}$ док је кота $l = 120 \text{ cm}$. Одредити максимални нормални напон.





Услови равнотеже:

$$\sum Z_i = Z_A = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A + Y_B - F = 0$$

$$\sum M_A = -F \cdot l + Y_B \cdot 2l = 0$$



$$Z_A = 0$$

$$Y_A = \frac{F}{2}$$

$$Y_B = \frac{F}{2}$$

Момент савијања:

$$M_{s1} = Y_A \cdot z = \frac{F}{2} \cdot z$$

$$M_{s2} = Y_A \cdot z - F \cdot (z - l) = F \cdot \left(l - \frac{z}{2} \right)$$



$$M_{sA} = M_{s1}(z = 0) = 0$$

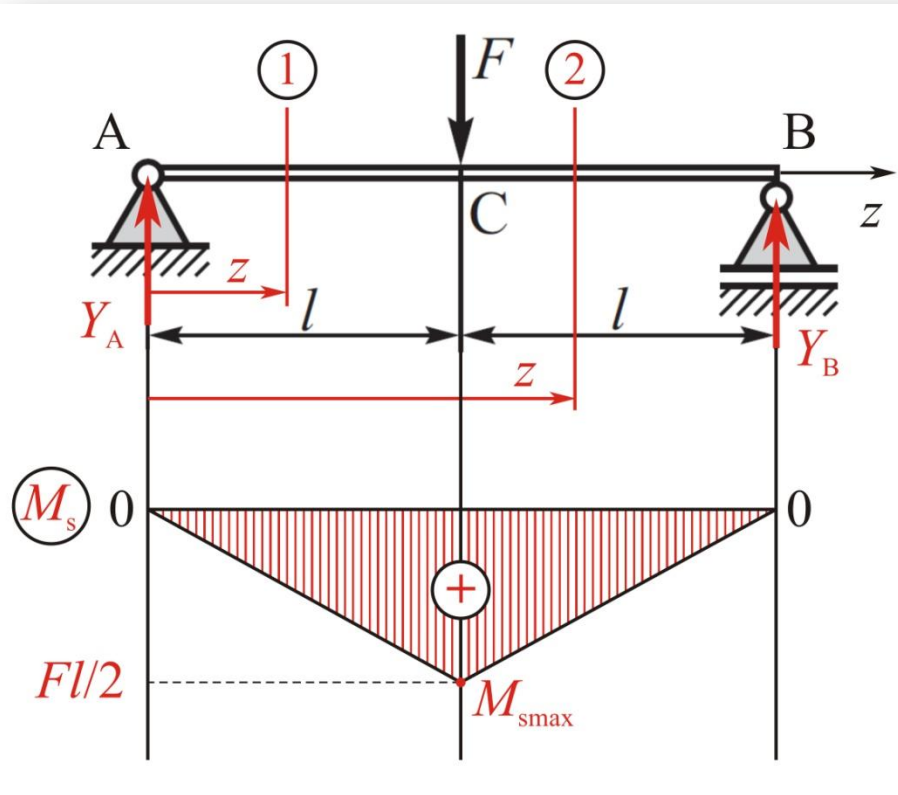
$$M_{sC} = M_{s1}(z = l) = \frac{Fl}{2}$$

$$M_{sC} = M_{s2}(z = l) = \frac{Fl}{2}$$

$$M_{sB} = M_{s2}(z = 2l) = 0$$

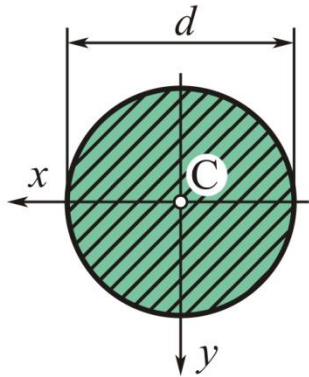


$$M_{s\max} = M_{sC} = \frac{Fl}{2}$$



Највећи нормални напон

Аксијални моменти
инерције



$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}, \quad y_{\max} = \frac{d}{2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{s\max}}{I_x} y_{\max}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\frac{Fl}{2}}{\frac{\pi d^4}{64}} \frac{d}{2} = \frac{64Fl}{\pi d^3}$$

$$F = 4000\text{N}$$

$$l = 1.2\text{m}$$

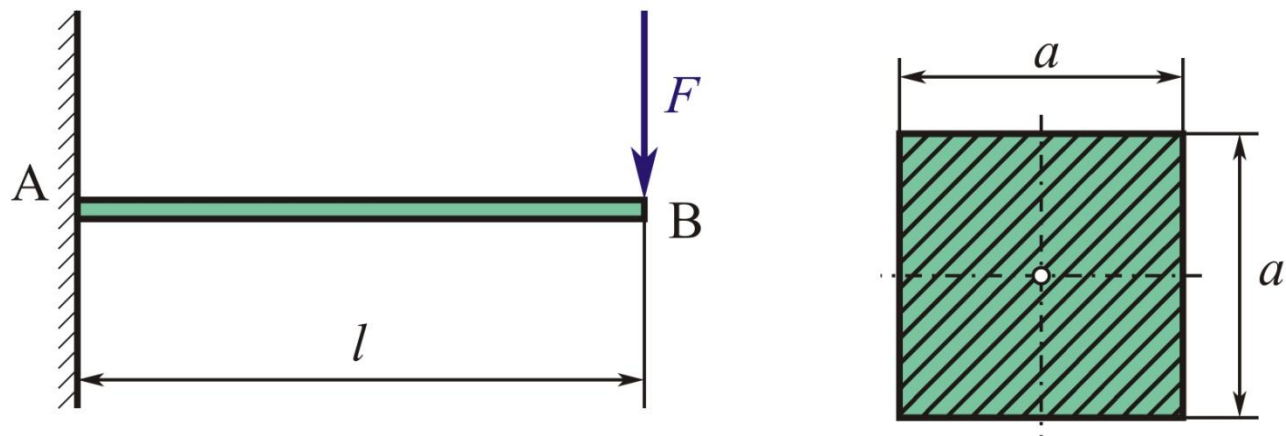
$$d = 0.04\text{m}$$

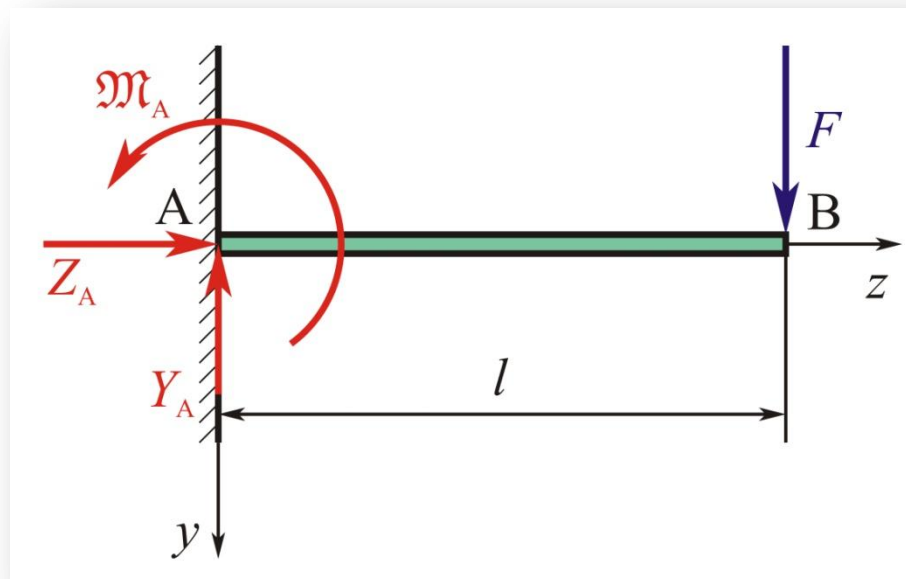
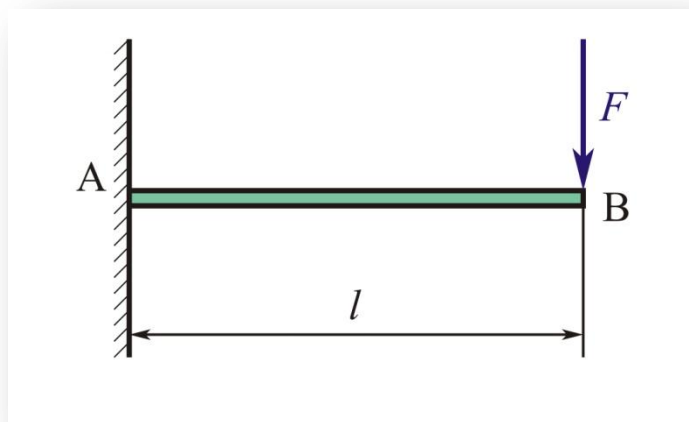


$$\sigma_{\max} = 1527.8910^6 \text{ Pa}$$

Савијање – Пример 2

Носач АВ (конзола), приказан на слици, дужине $l=1\text{m}$, укљештен на крају А, оптерећен је на слободном крају В силом $F=1\text{KN}$. Носач је квадратног попречног пресека, стране $a=20\text{mm}$. Одредити максимални нормални напон.





Услови равнотеже:

$$\sum Z_i = Z_A = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A - F = 0$$

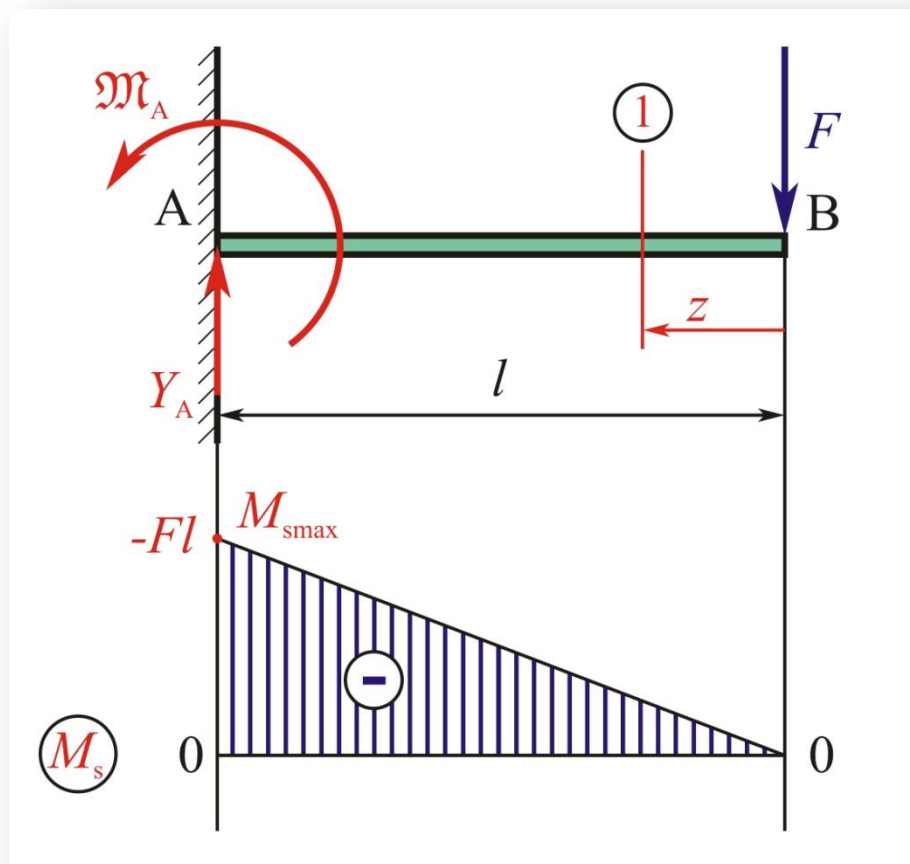
$$\sum M_A = \mathfrak{M}_A - F \cdot l = 0$$



$$Z_A = 0$$

$$Y_A = F$$

$$\mathfrak{M}_A = Fl$$



Момент савијања:

$$M_{s1} = -F \cdot z$$



$$M_{sA} = M_{s1}(z = l) = -Fl$$

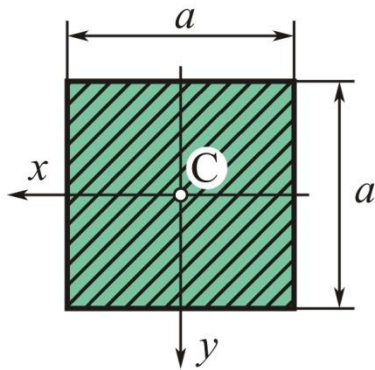
$$M_{sB} = M_{s1}(z = 0) = 0$$



$$M_{s\max} = |M_{sA}| = Fl$$

Највећи нормални напон

Аксијални моменти
инерције



$$I_x = \frac{a^4}{12}, \quad y_{\max} = \frac{a}{2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{s\max}}{I_x} y_{\max}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{\frac{a^4}{12}} \frac{a}{2} = \frac{6Fl}{a^3}$$

$$F = 1000\text{N}$$

$$l = 1\text{m}$$

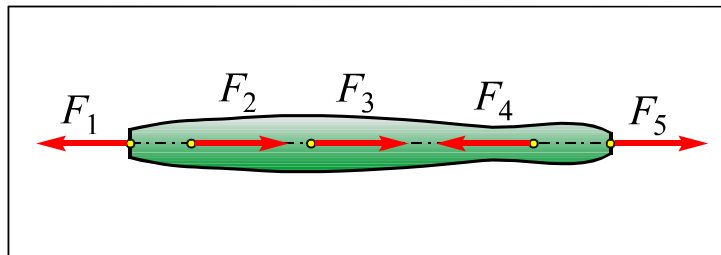
$$a = 0.02\text{m}$$



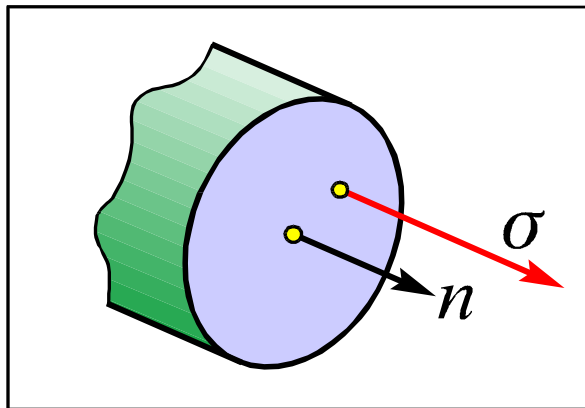
$$\sigma_{\max} = 750 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

АКСИЈАЛНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ

АКСИЈАЛНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ – понављање



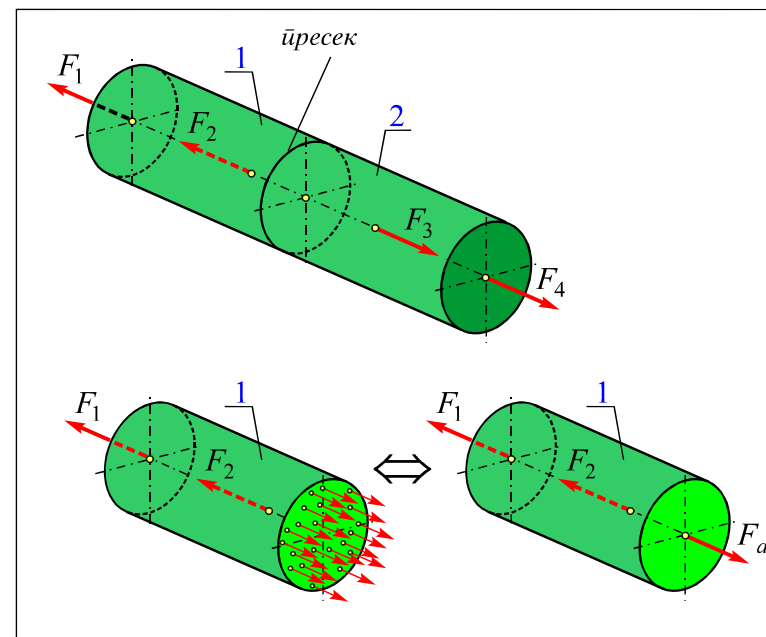
Штап је аксијално оптерећен уколико је изложен дејству сила чији се правци поклапају са осом штапа



Нормални
напон

$$\sigma = \frac{F_a}{A}$$

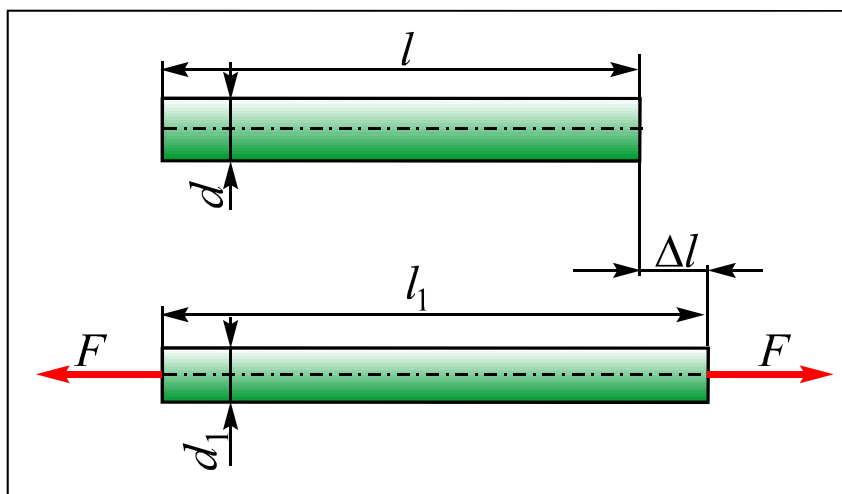
Аксијална сила



$$F_a = \sum F_i^l$$

$$F_a = \sum F_i^d$$

АКСИЈАЛНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ – понављање



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

уздужна дилатација
(епсилон)

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

попречна дилатација

промена дужине

$$\Delta l = l_1 - l$$

промена ширине

$$\Delta d = d_1 - d$$

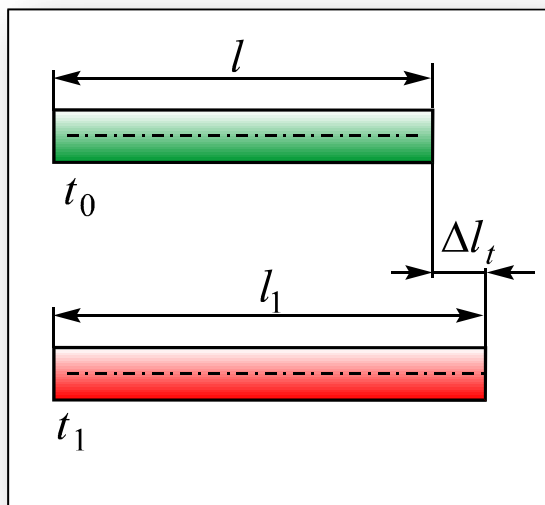
$$\varepsilon_q = -\nu \varepsilon$$

веза између уздужне и попречне дилатације

ν (ни) - Поасонов коефицијент

АКСИЈАЛНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ – понављање

Издужење при
загревању



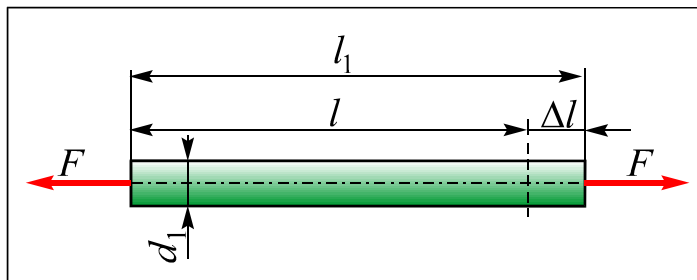
$$\Delta t = t_1 - t_0$$

$$\Delta l_t = l \alpha \Delta t$$

α – коефицијент
топлотног ширења

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{Хуков закон}$$

E – модул еластичности



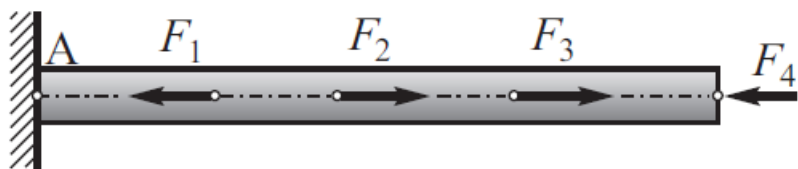
$$\sigma = \frac{F_a}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = E \varepsilon$$

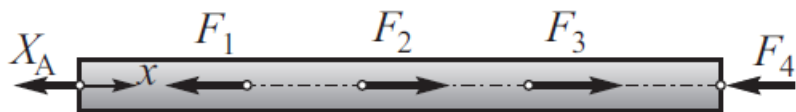
$$\frac{F_a}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{F_a l}{AE}$$

Издужење
аксијално
оптерећеног
штапа.

Аксијално оптерећење – Пример 1



Пример 3.1 Штап приказан на слици причвршћен је крајем A за подлогу и оптерећен силама $F_1 = 1 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$, $F_3 = 1 \text{ kN}$ и $F_4 = 2 \text{ kN}$. Одредити вредност аксијалне силе у појединим пресецима штапа.



► Уклониће се постојећа веза и увести реакција везе, а то је сила X_A која је у правцу осе штапа. Како су све силе које делују на штап у једном правцу, може се написати

једна једначина равнотеже и то:

$$\sum X_i = -X_A - F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = 0,$$

на основу које је $X_A = 2 \text{ kN}$.

Да би се одредила аксијална сила, на штапу ће се направити низ пресека који су означени бројевима и за сваки од њих извршити сумирање сила које су са леве стране пресека. При томе ће се поштовати конвенција о предзнаку, према којој ће силе усмерене у лево (од пресека) имати позитиван предзнак. Аксијалне силе у пресецима су:

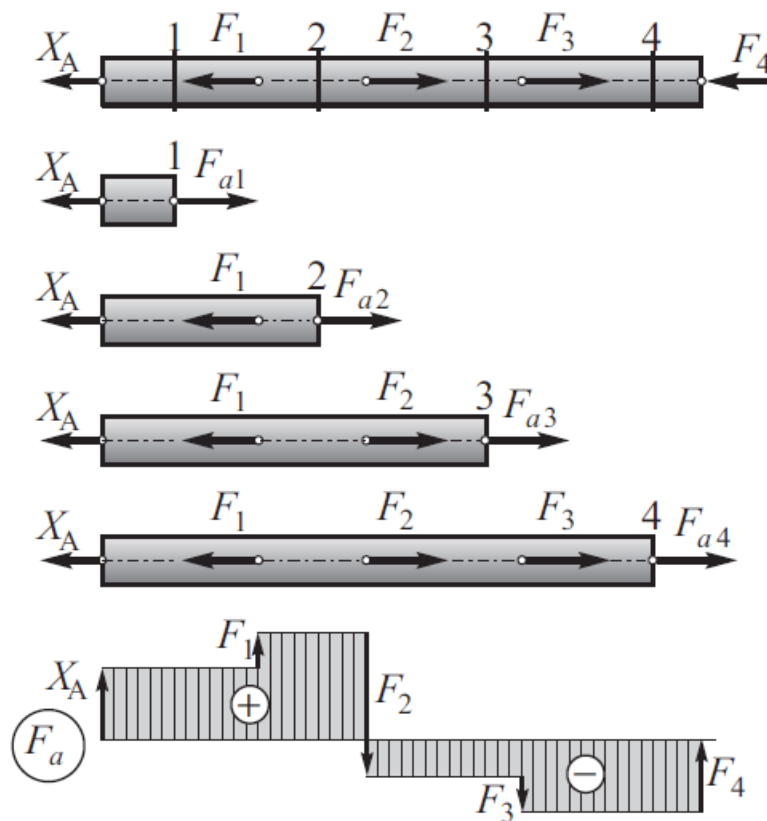
$$F_{a1} = X_A = 2kN;$$

$$F_{a2} = X_A + F_1 = 3kN;$$

$$F_{a3} = X_A + F_1 - F_2 = -1kN;$$

$$F_{a4} = X_A + F_1 - F_2 - F_3 = -2kN.$$

На Слици 3.14 је приказано и како се поједини делови штапа, који су добијени пресецима, налазе у равнотежи услед дејства аксијалних сила у пресецима. Смер аксијалне силе у пресецима 3 и 4 је супротан од уцртаног због негативног предзнака.



Слика 3.14: Анализа аксијалних сила

На крају је нацртан и дијаграм аксијалне силе, где је дат графички приказ вредности аксијалне силе. ◀

Аксијално оптерећење – Пример 2

Пример 3.2 *Одредити издужење челичног моста чија дужина на температури 10°C износи 210m , уколико се загреје на температуру од 36°C . Коефицијент тоplotног ширења за челик је $1.25 \times 10^{-5} 1/\text{K}$.*

► Промена температуре износи:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = (36 + 273)K - (10 + 273)K = 26K,$$

тако да је промена дужине:

$$\Delta l_t = l \alpha \Delta t = 210m \cdot 1.25 \times 10^{-5} \frac{1}{K} \cdot 26K = 0.0682m = 68.2mm.$$



Аксијално оптерећење – Пример 3

Пример 3.3 Штап од челика ($E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$) дужине $l = 1\text{m}$, чији је попречни пресек правоугаоног облика са димензијама $a = 2\text{mm}$, $b = 2.5\text{mm}$, оптерећен је на крајевима затезућим силама интензитета $F = 1 \text{ kN}$. Одредити напон у штапу и његово издужење.

► У сваком пресеку штапа аксијална сила износи $F_a = F = 1kN$, тако да напон у сваком пресеку штапа износи:

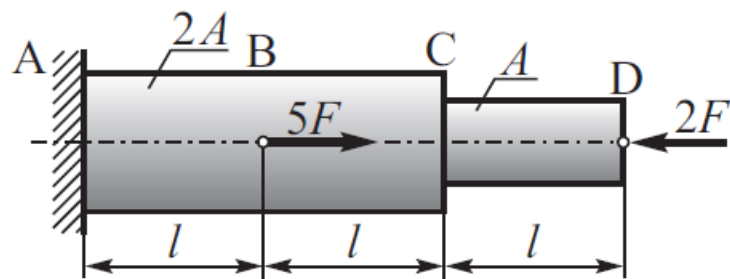
$$\sigma = \frac{F_a}{A} = \frac{F}{ab} = \frac{1000N}{2 \cdot 2.5mm^2} = 200 \frac{N}{mm^2} = 200MPa.$$

Ово је за уобичајене челике за конструкције значајно оптерећење, које за већину конструкција не треба прелазити. Издужење штапа износи:

$$\Delta l = \frac{F_a l}{AE} = \frac{Fl}{abE} = \frac{1000N \cdot 1000mm}{2 \cdot 2.5mm^2 \cdot 2 \times 10^5 \frac{N}{mm^2}} = 1mm.$$

Дакле, иако је штап оптерећен великим напонима, ипак је промена дужине хиљадити део дужине штапа, па уздужна дилатација износи $\varepsilon = 0.001$. Овај резултат потврђује исправност хипотезе о малим деформацијама. ◀

Аксијално оптерећење – Пример 4



Пример 3.4 За штап приказан на слици одредити максимални напон и промену дужине штапа. Модул еластичности материјала штапа је E .

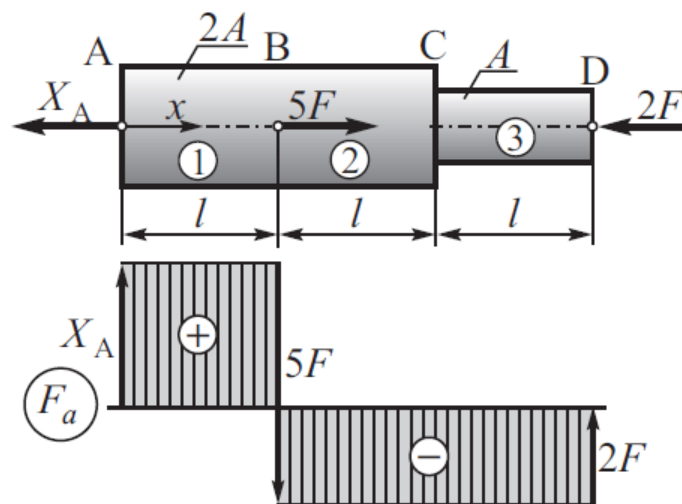
► Након замене утицаја уклештења реакцијом X_A може се написати једначина равнотеже:

$$\sum X_i = -X_A + 5F - 2F = 0,$$

па је $X_A = 3F$. На основу познатих оптерећења нацртан је и дијаграм аксијалних сила из кога се види да се аксијална сила мења у пресеку В. Будући да се попречни пресек мења у пресеку С штап ће се поделити на три дела (АВ, ВС и CD) за које ће се користити ознаке 1, 2 и 3. На тај начин је задовољен услов да је сваки од тих делова штапа константног попречног пресека и оптерећен константном аксијалном силом. Аксијалне силе у поменутим пресецима, гледано са леве стране пресека су:

$$F_{a1} = X_A = 3F; \quad F_{a2} = F_{a3} = X_A - 5F = -2F,$$

док су површине попречних пресека $A_1 = A_2 = 2A$ и $A_3 = A$. Напони у било ком пресеку поменутих делова штапа су:



$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{3F}{2A}; \quad \sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{-2F}{2A} = -\frac{F}{A}; \quad \sigma_3 = \frac{F_{a3}}{A_3} = -\frac{2F}{A}.$$

У првом делу штапа напон је позитиван што указује на то да је тај део штапа оптерећен на затезање. Други и трећи део штапа су оптерећени на притисак па је нормални напон негативан. При одређивању максималног напона упоредиће се интензитети напона (односно њихове апсолутне вредности) па се добија:

$$|\sigma_3| > \sigma_1 > |\sigma_2| \Rightarrow \sigma_{\max} = |\sigma_3| = 2\frac{Fl}{AE},$$

што значи да је максималани напон у пресеку трећег дела штапа.

Промена дужине појединих делова штапа је:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1}l}{A_1E} = \frac{3}{2} \frac{Fl}{AE}; \quad \Delta l_2 = \frac{F_{a2}l}{A_2E} = -\frac{Fl}{AE}; \quad \Delta l_3 = \frac{F_{a3}l}{A_3E} = -2\frac{Fl}{AE}.$$

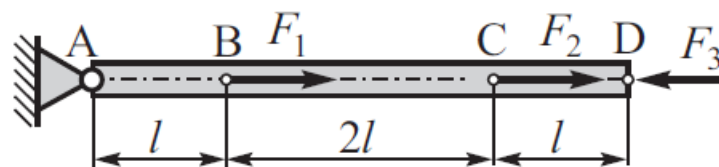
Код другог и трећег дела штапа је промена дужине негативна, јер се ти делови скраћују, а што је у складу са ранијом констатацијом да су они притиснути. Промена дужине целог штапа је:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -\frac{3}{2} \frac{Fl}{AE},$$

па се штап под дејством оптерећења скраћује. ◀

Аксијално оптерећење – Пример 5

Пример 3.5 Штап приказан на слици је крајем A зглобно причвршћен за подлогу и оптерећен силама $F_1 = 3F$, $F_2 = 2F$ и $F_3 = 3F$. Извршити димензионисање штапа, ако је познат дозвољени напон материјала штапа (σ_d) уз услов да је у сваком попречном пресеку штапа напон једнак дозвољеном напону.



► Будући да је штап крајем А зглобно везан за подлогу, уклањањем те везе би требало увести две реакције, једну силу у правцу осе штапа (X_A) и другу која је у правцу нормалном на осу штапа. Лако је показати да је ова друга реакција једнака нули и да зато није ни учртана на слици. Према томе, ситуација у погледу реакција везе је иста као у случају када је веза укљештење. На основу једначине равнотеже је:

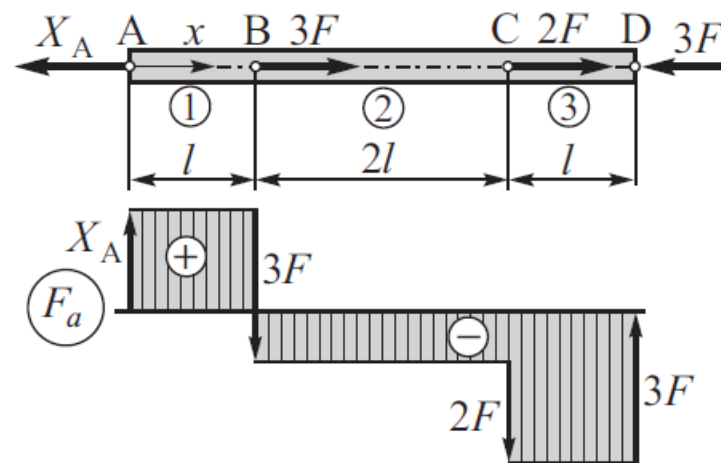
$$\sum X_i = -X_A + F_1 + F_2 - F_3 = 0 \Rightarrow X_A = F_1 + F_2 - F_3 = 2F,$$

па су аксијалне силе:

$$F_{a1} = X_A = 2F; \quad F_{a2} = X_A - 3F = -F; \quad F_{a3} = X_A - 3F - 2F = -3F.$$

Због променљиве аксијалне силе штап ће се поделити на три дела (AB, BC и CD) чије ће, за сада непознате, површине попречног пресека бити означене са A_1 , A_2 и A_3 . Напони у поменутим деловима штапа су:

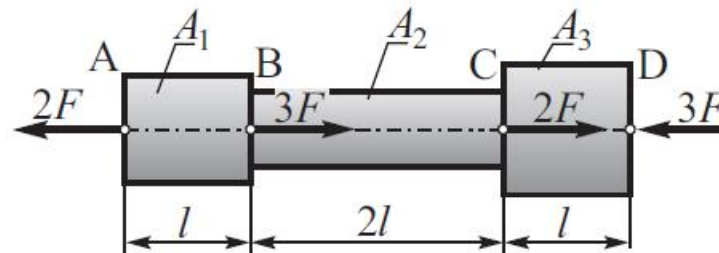
$$\sigma_1 = \frac{2F}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_2}; \quad \sigma_3 = \frac{3F}{A_3}.$$



Како треба задовољити услов:

$$|\sigma_i| = \sigma_d \Rightarrow \frac{|F_{ai}|}{A_i} = \sigma_d, \quad i = 1, 2, 3,$$

на основу њега су површине попречних пресека:



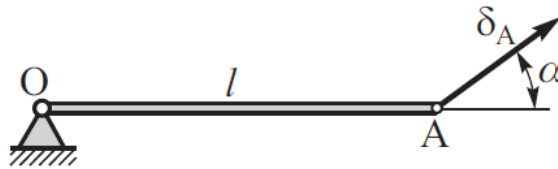
Слика 3.21: Изглед димензионисаног штапа

$$A_1 = 2 \frac{F}{\sigma_d}; \quad A_2 = \frac{F}{\sigma_d}; \quad A_3 = 3 \frac{F}{\sigma_d}.$$

Изглед штапа направљеног према задатом услову дат је на Слици 3.21. ◀

Став о издужењу штапа коме је један крај покретан, а други непокретан

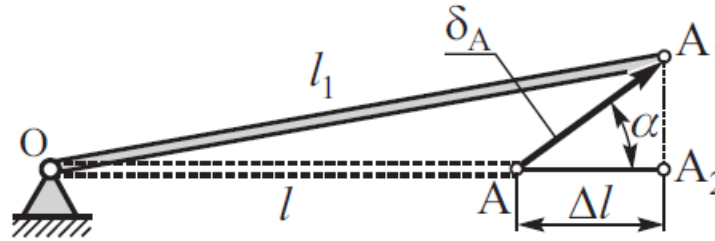
Посматраће се штап код кога је крај O зглобно везан за подлогу, тако да је омогућено обртање штапа око те тачке, док се други крај A може померати (Слика 3.22). Задатак је да се одреди како померање тачке A утиче на издужење штапа. При томе је са δ_A означено померање тачке A , а са α угао који вектор померања тачке заклапа са правцем осе недеформисаног штапа, који је дужине l .



Слика 3.22: Штап коме је један крај покретан, а други зглобно везан

Нека се тачка A преместила у положај A_1 , при чему је дошло до деформације штапа (Слика 3.23). Штап, чији је недеформисани положај приказан испрекиданим линијама, се издужио тако да је његова нова дужина l_1 . Уважавајући хипотезу о малим деформацијама, као и резултате добијене у Примеру 3.3, сматраће се да је δ_A много мање од дужине недеформисаног штапа, дакле да је $\delta_A \ll l$. На приложеним сликама је померање δ_A приказано карикирано, знатно веће него што је у стварности, да би се боље могли уочити извесни геометријски објекти. Дужина штапа у деформисаном стању се на основу правоуглог троугла OA_1A_2 може написати као:

$$l_1 = \overline{OA_1} = \sqrt{\overline{OA_2}^2 + \overline{A_2A_1}^2} = \sqrt{(l + \overline{AA_2})^2 + \overline{A_2A_1}^2}.$$



Слика 3.23: Одређивање издужења штапа

Како је на основу троугла AA_1A_2 :

$$\overline{AA_2} = \delta_A \cos \alpha; \quad \overline{A_2A_1} = \delta_A \sin \alpha,$$

заменом у претходни израз добија се:

$$l_1 = \sqrt{(l + \delta_A \cos \alpha)^2 + (\delta_A \sin \alpha)^2} = \sqrt{l^2 + 2l\delta_A \cos \alpha + \delta_A^2}.$$

Из математичке анализе је познато да се развојем у Мак-Лоренов ред за мале величине x може написати да је:

$$\sqrt{1+2x} \approx 1+x.$$

На пример ако је $x = 0.01$ и $x = 0.001$ тада се применом калкулатора добија:

$$\sqrt{1+2 \cdot 0.01} = 1.0099505; \quad \sqrt{1+2 \cdot 0.001} = 1.0009995,$$

па се види да су ове вредности веома блиске приближним које износе 1.01 и 1.001.

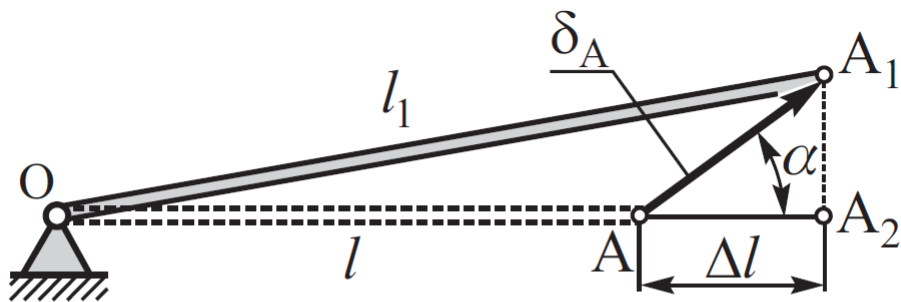
Користећи приказане могућности развоја у ред, као и имајућу у виду да је $\delta_A \cos \alpha / l$ мала величина, сада се израз (3.9) може приближно написати као:

$$l_1 \approx l \left(1 + \frac{\delta_A}{l} \cos \alpha \right) = l + \delta_A \cos \alpha. \quad (3.10)$$

Како се издужење штапа дефинише са $\Delta l = l_1 - l$ заменом израза (3.10) добија се:

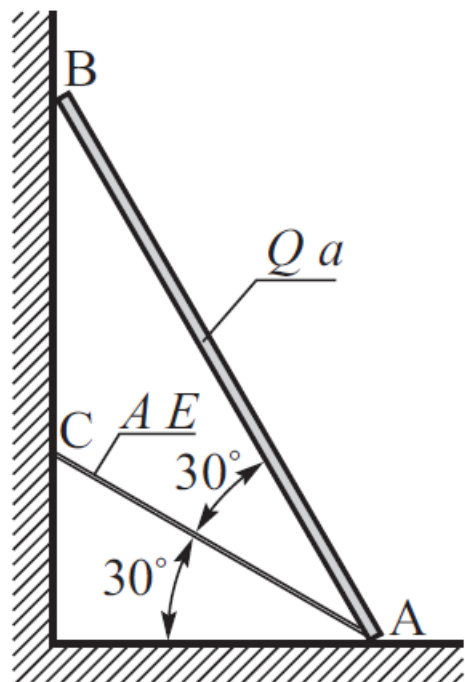
$$\Delta l = \delta_A \cos \alpha. \quad (3.11)$$

Овим је доказан став из наслова, према ком је издужење штапа једнако $\delta_A \cos \alpha$, што представља пројекцију вектора померања покретне тачке А на правац осе недеформисаног штапа. Поменута пројекција је нацртана и на Слици 3.23.



Слика 3.23: Одређивање издужења штапа

Аксијално оптерећење – Пример 6



Пример 3.6 Крути штап тежине Q и дужине a постављен је својим крајевима A и B на идеално глатки под односно зид. За штап је у тачки A везано еластично ужсе, које је другим крајем везано за зид у тачки C . Површина попречног пресека ужсета је A , док материјал од ког је ужсе направљено има модул еластичности E . Приликом везивања ужсета штап је придржаван неким спољним узроком (на пример руком) који је након везивања ужсета уклоњен. Одредити реакције везе и колико ће се због еластичности ужсета померити тачка A .

► Посматраће се равнотежа крутог штапа, који ће се учинити слободним, тако што ће се све везе уклонити и њихов утицај заменити са реакцијама веза. На тај начин ће штап, поред активне силе тежине Q , која делује у тежишту T (које је на средини штапа) бити оптерећен са три непознате реакције везе, силама N_A и N_B на местима додира крајева штапа са идеално глатком подлогом и силом S која је у правцу ужета. Уколико би наступиле велике деформације ужета, дошло би до великог померања крајева штапа, као што је то приказано на Слици 3.24 а). Писање једначина равнотеже за тај положај штапа би било врло компликовано. Међутим, у отпорности материјала се проучавају само мале деформације, што значи да ће у том случају померање тачака бити врло мало у односу на величину штапа. Ово нас наводи на фундаментално важан принцип који се користи у отпорности материјала:

Једначине равнотеже се пишу за положај тела који одговара недеформисаном систему.

Дакле, штап при ослобађању од веза треба нацртати у положају у ком је био пре деформације ужета, као што је приказано на Слици 3.24 б).

Како је под дејством овог равнотежног система сила штап у равнотежи могу се написати три једначине равнотеже које гласе:

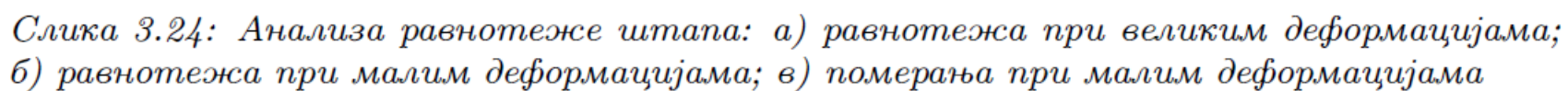
$$\begin{aligned}\sum X_i &= N_B - S \cos 30^\circ = 0; \\ \sum Y_i &= N_A + S \sin 30^\circ - Q = 0; \\ \sum M_A &= Q \cos 60^\circ \frac{a}{2} - N_B \cos 30^\circ a = 0.\end{aligned}$$

Из треће једначине се добија:

$$N_B = \frac{Q}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}Q,$$

а онда заменом ове вредности у прву једначину је:

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}}N_B = \frac{1}{3}Q.$$



Најзад сада се из друге једначине добија да је:

$$N_A = Q - S \sin 30^\circ = \frac{5}{6}Q.$$

Дужина ужета l пре деформације се одређује на основу једнакокраког троугла ABC па је:

$$2l \cos 30^\circ = a \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Како је позната сила S којом је уже оптерећено, може се одредити и његово издужење, тако да је:

$$\Delta l = \frac{Sl}{AE} = \frac{\sqrt{3}Qa}{9AE}.$$

Услед еластичности ужета, доћи ће до померања тачке А, а самим тим и читавог штапа. При том, због постојећих веза, тачка А се може померити само у хоризонталном правцу. Између померања тачке А (δ_A) и издужења ужета (Δl) постојаће према ставу о издужењу штапа следећа веза (погледати затамњен троугао на Слици 3.24 в)):

$$\Delta l = \delta_A \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta_A,$$

а одавде је померање тачке А:

$$\delta_A = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta l.$$

Заменом израза за Δl добија се:

$$\delta_A = \frac{2Qa}{9AE}.$$

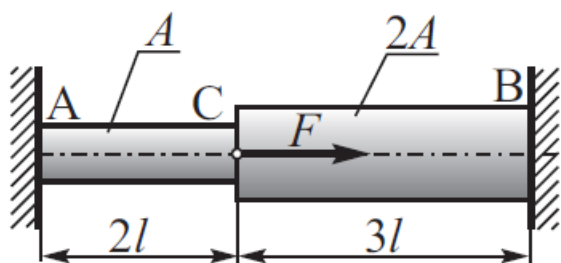


Статички неодређени аксијално оптерећени штапови

У досадашњем разматрању аксијално оптерећених штапова и при решавању задатака, могло се запазити да је број једначина равнотеже био једнак броју реакција везе. Због тога је систем једначина равнотеже био довољан да би се одредиле све реакције везе. Овакви проблеми се називају *статички одређени*. Међутим, постоје и проблеми код којих је број реакција везе већи од броја једначина равнотеже, што значи да ове једначине нису довољне за одређивање свих реакција везе. Проблеми овог типа се називају *статички неодређени*. Разлика између броја реакција везе и једначина равнотеже представља *степен статичке неодређености*. Очигледно да је за решавање оваквог проблема потребно написати додатне једначине, које се називају допунске и којих треба да буде онолико колики је степен статичке неодређености. Допунске једначине се формирају на основу услова који деформације морају задовољити и који су геометријске природе, па се називају *геометријски услови деформације*.

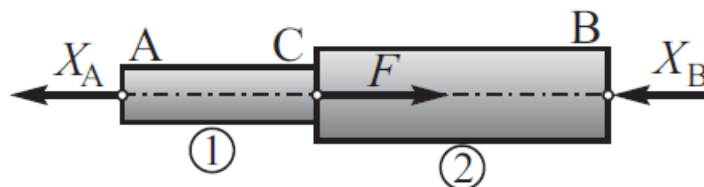
На следећим примерима ће се показати поступак решавања статички неодређених проблема.

Аксијално оптерећење – Пример 7



Пример 3.7 Нека је дат штап променљивог попречног пресека, приказан на слици, коме су оба краја причвршћена за зидове. Штап је у тачки C оптерећен силом F . Део AC је дужине $2l$ и површине попречног пресека A , док је део CB дужине $3l$ и површине попречног пресека $2A$. Одредити реакције везе и максимални напон.

► Штап је на оба краја причвршћен за зидове па ће се након уклањања ових веза увести две реакције везе, силе X_A и X_B . За дати систем сила може се написати само једна једначина равнотеже која гласи:



$$\sum X_i = -X_A + F - X_B = 0.$$

Имајући у виду да постоје две реакције везе, а само једна једначина равнотеже, дати проблем је једном статички неодређен, па је потребно написати једну допунску једначину. На основу анализе деформација штапа закључује се да, будући да су крајеви штапа причвршћени за подлогу те да се не могу померати, неће доћи до промене дужине штапа, то јест да је:

$$\Delta l = 0.$$

Овај израз је у датом задатку геометријски услов деформације. Штап ће се поделити на два дела, први од пресека А до пресека С, а други од С до В, тако да се промена дужине штапа може изразити и као:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F_{a1}l_1}{A_1E} + \frac{F_{a2}l_2}{A_2E}.$$

Како је:

$$F_{a1} = X_A; \quad F_{a2} = X_A - F; \quad l_1 = 2l; \quad l_2 = 3l; \quad A_1 = A; \quad A_2 = 2A,$$

заменом у претходни израз, као и имајући у виду геометријски услов деформације је:

$$\Delta l = 2\frac{X_A l}{AE} + \frac{3}{2}\frac{(X_A - F)l}{AE} = 0.$$

Ово је допунска једначина у овом задатку, која заједно са једначином равнотеже чини систем од две једначине са две непознате реакције везе. Решавањем ових једначина је:

$$X_A = \frac{3}{7}F; \quad X_B = F - X_A = \frac{4}{7}F.$$

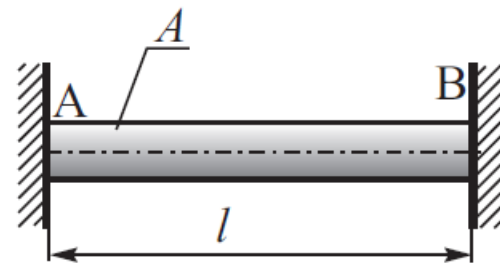
Најзад напони у првом и другом делу штапа су:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{X_A}{A} = \frac{3F}{7A}; \quad \sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{X_A - F}{2A} = -\frac{2F}{7A}.$$

Максимални напон је у првом делу штапа. ◀

Аксијално оптерећење – Пример 8

Пример 3.8 Штап од челика ($E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $\alpha = 1.25 \times 10^{-5} \text{ 1/K}$) има на температури $t_0 = 20^\circ\text{C}$ дужину $l = 1 \text{ m}$. Штап је својим крајевима причвршћен за зидове, између којих је растојање 1 m . Након тога, штап је изложен дејству Сунца услед чега се загрејао на температуру од 65°C . Одредити напон у штапу.



► Уколико се уклоне везе, штап ће на својим крајевима бити оптерећен реакцијама X_A и X_B . Претпоставиће се да су смерови ових реакција такви да оне затежу штап. Једначина равнотеже је:



$$\sum X_i = -X_A + X_B = 0,$$

па је проблем једном статички неодређен. Геометријски услов деформације је:

$$\Delta l = 0.$$

Штап је оптерећен силама и уз то је загрејан тако да за промену дужине важи:

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_t = \frac{X_A l}{AE} + l \alpha \Delta t = 0,$$

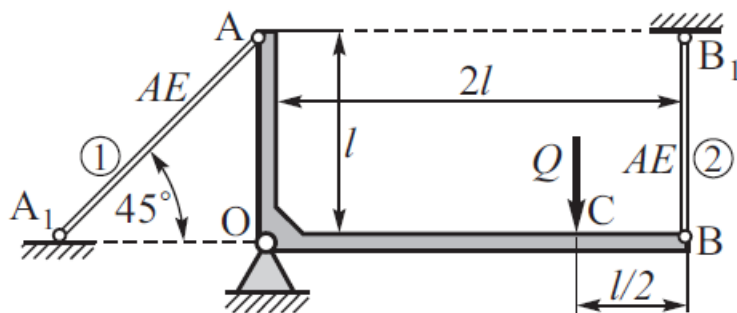
где је Δl_F промена дужине штапа када је незагрејан и оптерећен само силама, док је Δl_t промена дужине штапа уколико је загрејан и без дејства сила. Решењем ове допунске једначине се добија:

$$X_A = -AE \alpha \Delta t.$$

Предзнак минус указује на то да је смер реакција везе погрешно претпостављен. Одавде је напон у сваком пресеку штапа:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{X_A}{A} = -E \alpha \Delta t = -E \alpha (t_1 - t_0) \\ &= -2 \times 10^{11} 1.25 \times 10^{-5} (65 - 20) = -112,5 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Аксијално оптерећење – Пример 9



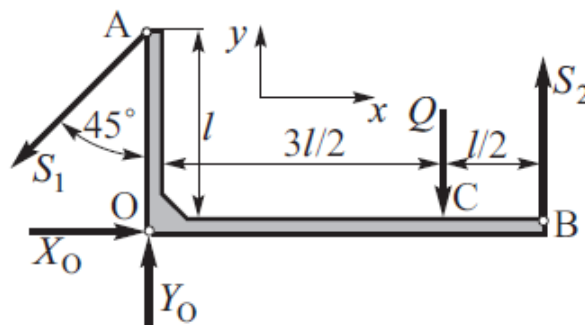
Пример 3.9 Крути и лаки угаоник AOB , везан је зглобно у тачки O за ослонац и у тачки C оптерећен силом Q . За угаоник су у тачкама A и B везани лаки еластични штапови AA_1 и BB_1 који имају исту површину попречног пресека и модул еластичности. Одредити напоне у еластичним штаповима.

► Након ослобађања угаоника од веза и увођења реакција везе може се констатовати да се за угаоник могу написати 3 једначине равнотеже, а да постоје 4 непознате реакције, па је дати проблем једном статички неодређен. Имајући у виду да треба одредити само напоне у штаповима, односно силе S_1 и S_2 написаће се само моментна једначина која гласи:

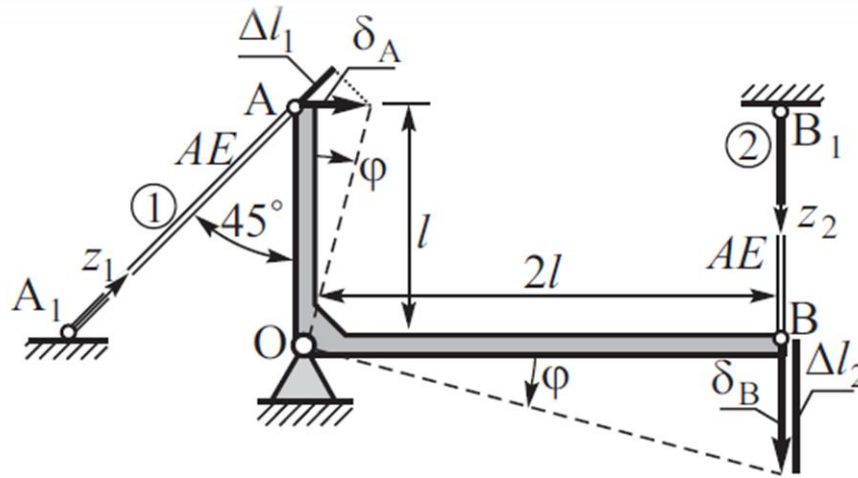
$$\sum M_O = S_1 l \sin 45^\circ + S_2 2l - Q \frac{3}{2}l = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 + 2S_2 = \frac{3}{2}Q. \quad (a)$$

Преостале две једначине равнотеже се користе за одређивање реакција у тачки О па се неће ни написати.

За одређивање допунске једначине извршиће се анализа померања тачака. Под дејством оптерећења ће доћи до обртања угаоника за извесни мали угао φ око тачке О (Слика 3.27). Претпоставиће се да је смер обртања исти као смер кретања казаљке на сату и у сагласности са тим увести померања тачака А и В. За мали угао φ та померања су приближно у правцу који је нормалан на правац који спаја тачке А и В (на које са та померања односе) са тачком О. Смер померања тачака А и В одговара смеру обртања угаоника, док су интензитети померања:



$$\delta_A = \overline{OA}\varphi = l\varphi; \quad \delta_B = \overline{OB}\varphi = 2l\varphi.$$



Слика 3.27: Анализа померања

Издужења штапова 1 и 2, према (3.11), износе:

$$\Delta l_1 = \delta_A \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} l \varphi; \quad \Delta l_2 = \delta_B = 2l \varphi.$$

Међусобним делењем претходне две једначине се добија геометријски услов деформације:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (6)$$

Везе између сила у штаповима и издужења штапова су:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} l_1}{AE} = \sqrt{2} \frac{S_1 l}{AE}; \quad (\text{в})$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_{a2} l_2}{AE} = \frac{S_2 l}{AE}, \quad (\text{г})$$

при чему су се дужине штапова одредиле на основу Слике 3.12.7 и износе $l_1 = \sqrt{2}l$ и $l_2 = l$. Заменом (в) и (г) у услов (б) је:

$$\frac{\sqrt{2}S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow S_2 = 4S_1. \quad (\text{д})$$

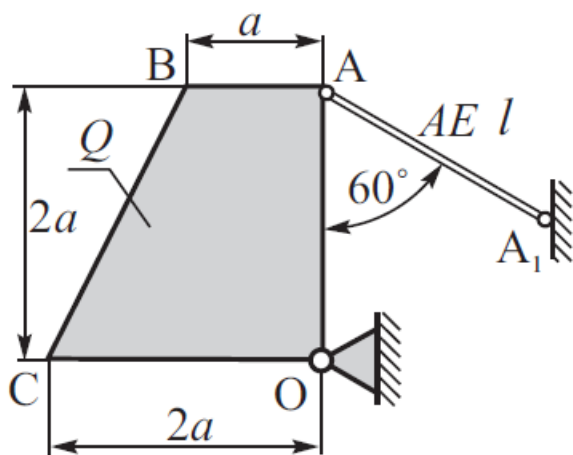
На основу допунске једначине (д) и једначине равнотеже (а) добија се:

$$S_1 = \frac{3Q}{16 + \sqrt{2}}; \quad S_2 = \frac{12Q}{16 + \sqrt{2}}.$$

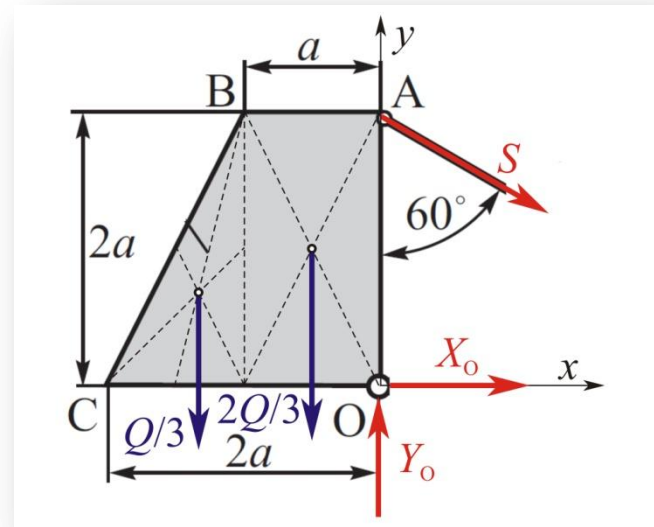
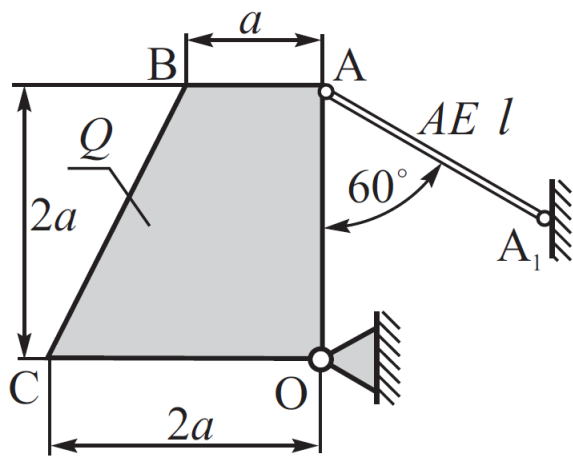
Позитивне вредности добијених сила указују на то да су штапови оптерећени на затезање. Напони у штаповима су:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A} = \frac{S_1}{A} = \frac{3Q}{(16 + \sqrt{2})A}; \quad \sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A} = \frac{S_2}{A} = \frac{12Q}{(16 + \sqrt{2})A}.$$

Аксијално оптерећење – Пример 10



3.6 Крута плоча тежине Q облика приказаног на слици, зглобно је везана у тачки O за подлогу. У тачки A је зглобно причвршћен лаки и еластични штап дужине l , површине попречног пресека A и модула еластичности E који је крајем A_1 причвршћен за подлогу. Одредити напон у штапу и померање тачке B .



Услови равнотеже:

$$\sum X_i = X_O + S \sin 60^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = Y_O - S \cos 60^\circ - \frac{1}{3}Q - \frac{2}{3}Q = 0$$

$$\sum M_O = \frac{2}{3}Q \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{3}Q \cdot \left(a + \frac{a}{3}\right) - S \sin 60^\circ \cdot a = 0$$



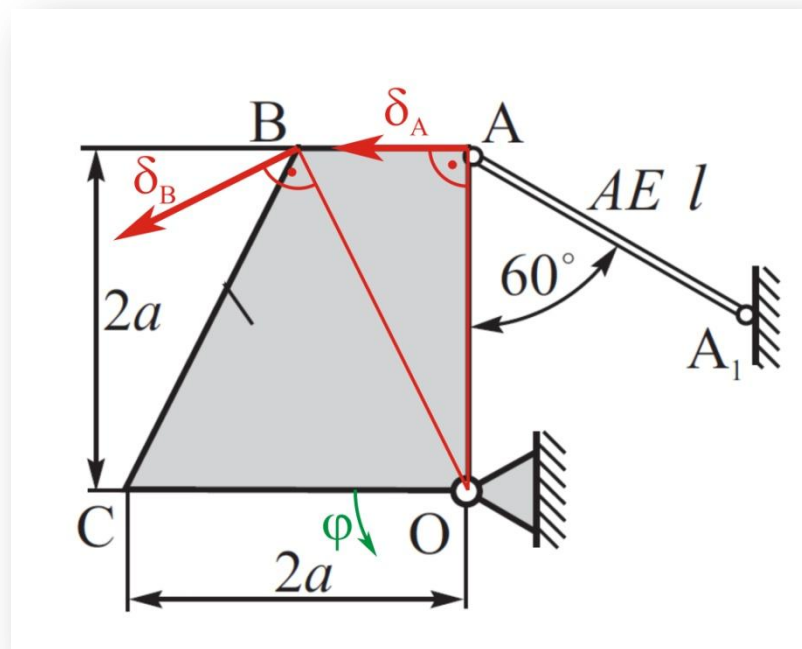
$$X_O = -\frac{7}{9}Q \quad , \quad Y_O = \left(1 + \frac{7\sqrt{3}}{27}\right)Q \quad , \quad S = \frac{14\sqrt{3}}{27}Q$$

Напон у еластичном
штапу

$$\sigma = \frac{F_a}{A} = \frac{S}{A} = \frac{14\sqrt{3}}{27} \frac{Q}{A}$$

Напон у еластичном
штапу

$$\Delta l = \frac{F_a l}{AE} = \frac{Sl}{AE} = \frac{14\sqrt{3}}{27} \frac{Ql}{AE}$$



Померања (мала) тачака А и В:

$$\delta_A = \overline{OA} \varphi = 2a \varphi \quad , \quad \delta_B = \overline{OB} \varphi = \sqrt{5}a \varphi$$

$$\delta_B = \frac{\sqrt{5}}{2} \delta_A$$

Веза између издужења еластичног штапа (Δl) и померања тачке А (δ_A):

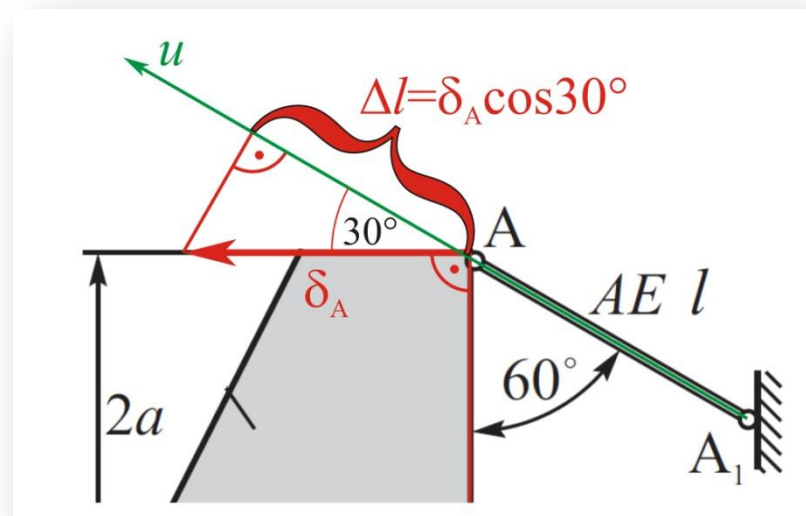
$$\Delta l = \delta_A \cos 30^\circ$$



$$\delta_A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Delta l$$



$$\delta_A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{14\sqrt{3}}{27} \frac{Ql}{AE} = \frac{28}{27} \frac{Ql}{AE} \quad \rightarrow$$



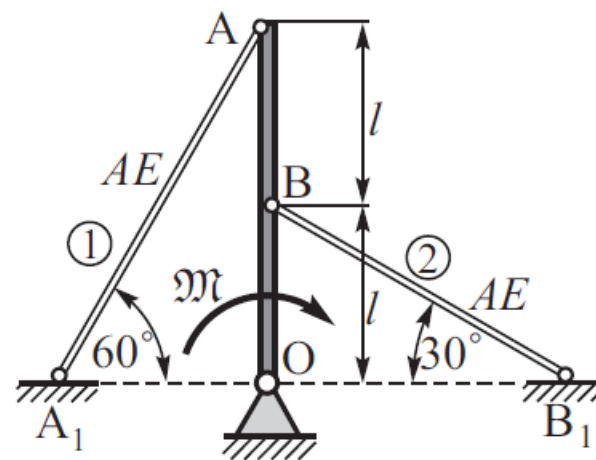
Померање тачке В (δ_B):

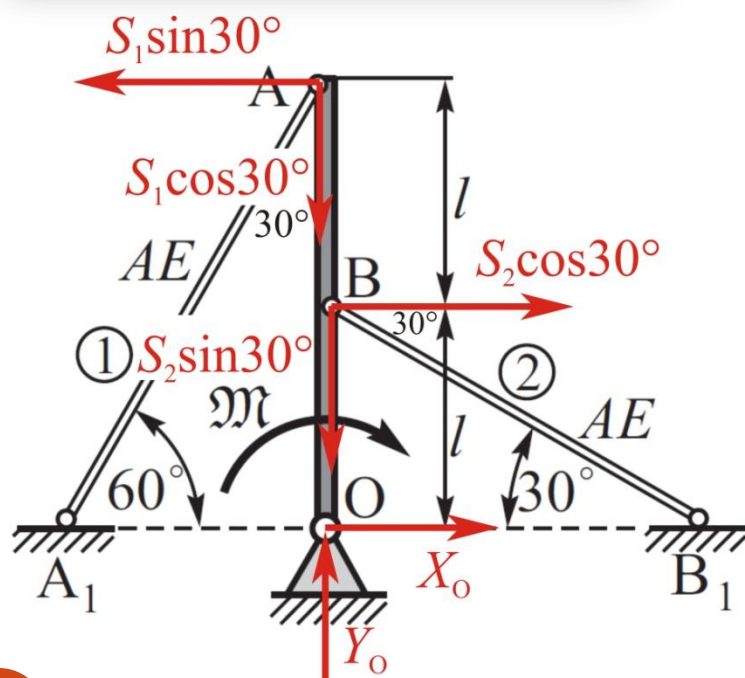
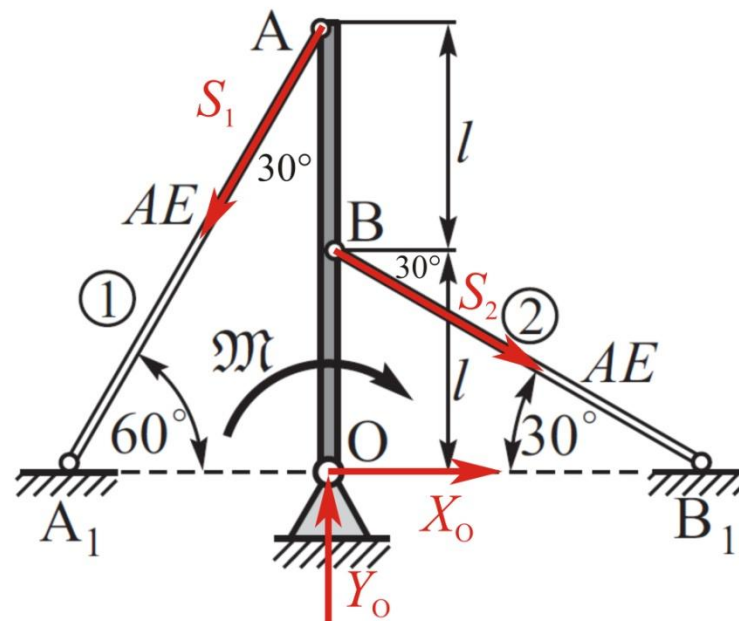
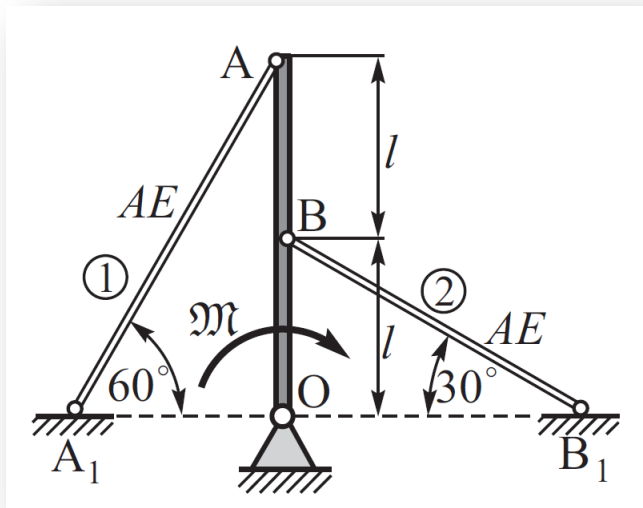
$$\delta_B = \frac{\sqrt{5}}{2} \delta_A$$

$$\delta_B = \frac{14\sqrt{5}}{27} \frac{Ql}{AE}$$

Аксијално оптерећење – Пример 11

3.7 Крут и лак штап OA дужине $2l$ зглобно је везан у тачки O за подлогу и оптерећен спрегом $\mathfrak{M}$. За овај штап су зглобно, у тачкама A и B , везана два лака еластична штапа, оба исте површине попречног пресека и модула еластичности E . Ови штапови су преосталим крајевима зглобно везани за подлогу. Одредити напоне у еластичним штаповима.





Услови равнотеже:

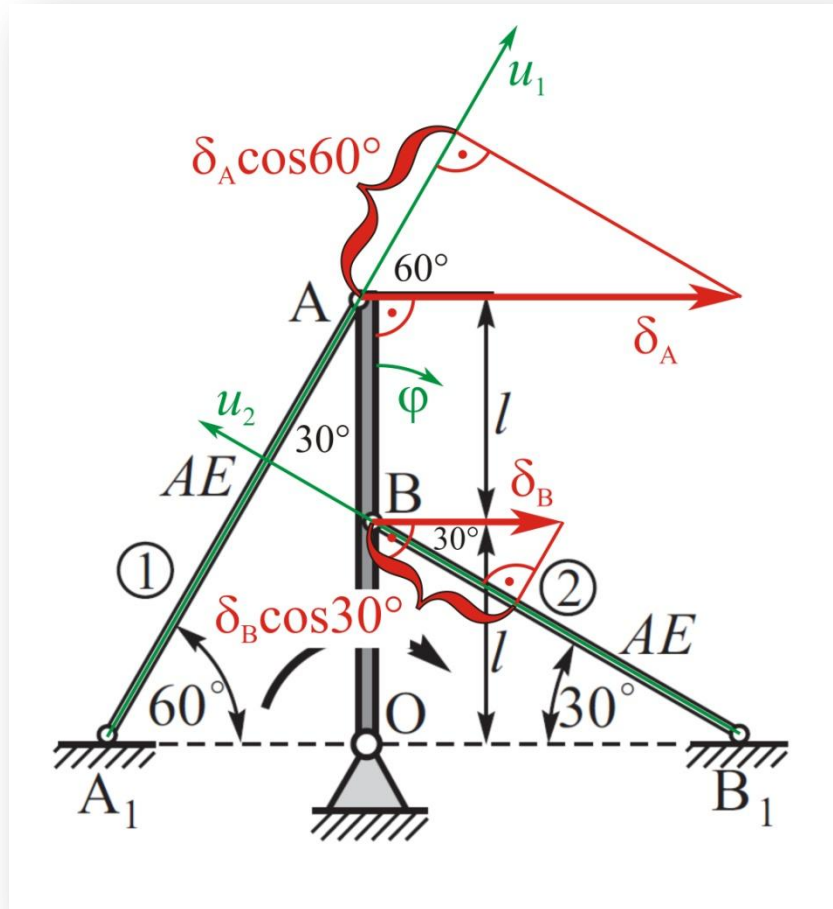
$$\sum X_i = X_O - S_1 \sin 30^\circ + S_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = Y_O - S_1 \cos 30^\circ - S_2 \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum M_O = -\mathfrak{M} + S_1 \sin 30^\circ \cdot 2l - S_2 \cos 30^\circ \cdot l = 0$$

Број услова равнотеже (3) је мањи од броја непознатих (4), па је задатак статички неодређен (1х).

Допунска једначина (геометријски услов деформације)



Померања (мала) тачака А и В:

$$\delta_A = \overline{OA} \varphi = 2l \varphi \quad , \quad \delta_B = \overline{OB} \varphi = l \varphi$$

$$\delta_A = 2\delta_B$$

Веза између издужења еластичних штапова (Δl_1 и Δl_2) и померања тачака А и В (δ_A и δ_B):

$$\Delta l_1 = \delta_A \cos 60^\circ$$

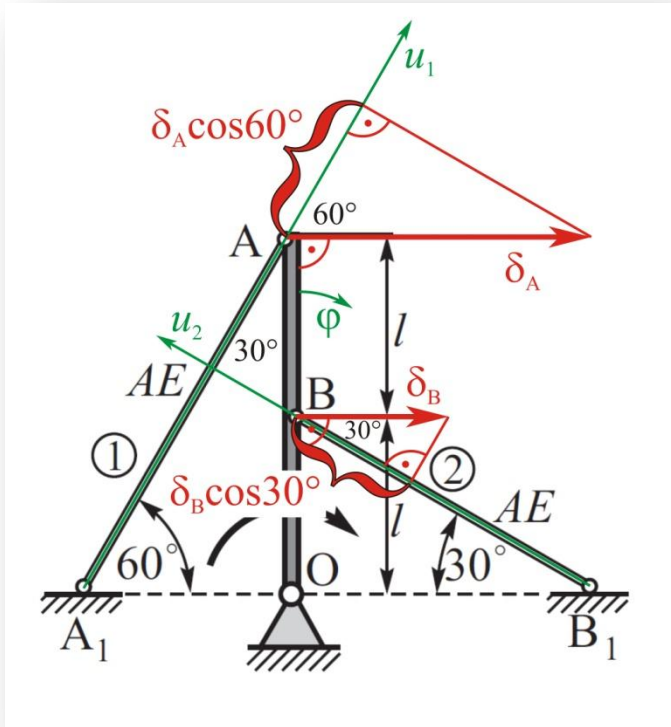
$$\Delta l_2 = -\delta_B \cos 30^\circ$$



Веза између издужења еластичних штапова:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\delta_A \cos 60^\circ}{-\delta_B \cos 30^\circ} = -\frac{2\delta_B \frac{1}{2}}{\delta_B \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Допунска једначина (ГУД)



$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} l_1}{A_1 E_1} = \frac{S_1 l_1}{AE}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{a2} l_2}{A_2 E_2} = \frac{S_2 l_2}{AE}$$



$$\Delta l_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{S_1 l}{AE}, \quad \Delta l_2 = 2 \frac{S_2 l}{AE}$$



$$\Delta OAA_1 \rightarrow l_1 = \overline{AA_1} = \frac{4\sqrt{3}}{3} l$$

$$\Delta OBB_1 \rightarrow l_2 = \overline{BB_1} = 2l$$

$$\Delta l_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Delta l_2 \rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{S_1 l}{AE} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} 2 \frac{S_2 l}{AE}$$



$$S_1 = -S_2 \quad (\text{ГУД})$$

Услови равнотеже:

$$\sum X_i = X_O - S_1 \sin 30^\circ + S_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = Y_O - S_1 \cos 30^\circ - S_2 \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum M_O = -\mathfrak{M} + S_1 \sin 30^\circ \cdot 2l - S_2 \cos 30^\circ \cdot l = 0$$

(ГУД)

$$S_1 = -S_2$$

Реакције веза:

$$X_O = (\sqrt{3} - 1) \frac{\mathfrak{M}}{l}$$

$$Y_O = (3\sqrt{3} - 5) \frac{\mathfrak{M}}{l}$$

$$S_1 = 2(2 - \sqrt{3}) \frac{\mathfrak{M}}{l}$$

$$S_2 = -2(2 - \sqrt{3}) \frac{\mathfrak{M}}{l}$$

Напони у еластичним штаповима:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{S_1}{A} = 2(2 - \sqrt{3}) \frac{\mathfrak{M}}{Al}$$

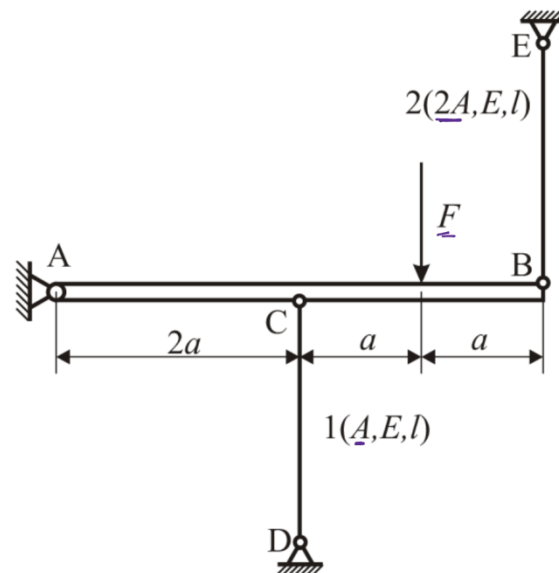
$$\sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_1} = \frac{S_2}{A} = -2(2 - \sqrt{3}) \frac{\mathfrak{M}}{Al}$$

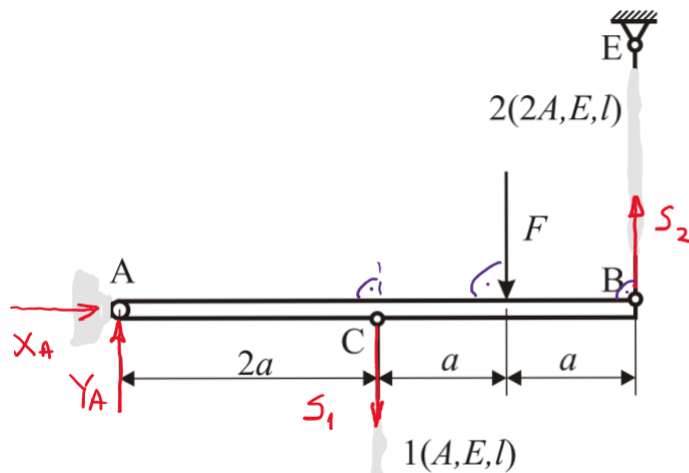
$\sigma_1 > 0 \rightarrow$ затезање

$\sigma_2 < 0 \rightarrow$ притисак

1. Laka kruta greda AB, dužine $4a$, vezana je u tački A nepokretnim zglobovom i opterećena vertikalnom silom intenziteta F . Za nju su vezani laki elastični štapovi CD (površina poprečnog preseka- A , modul elastičnosti- E , dužina- l) i BE (površina poprečnog preseka- $2A$, modul elastičnosti- E , dužina- l).

- Formirati uslove ravnoteže za gredu,
- formirati geometrijski uslov deformacije,
- odrediti reakciju zgloba i reakcije štapova,
- odrediti napone u elastičnim štapovima.





y. p.

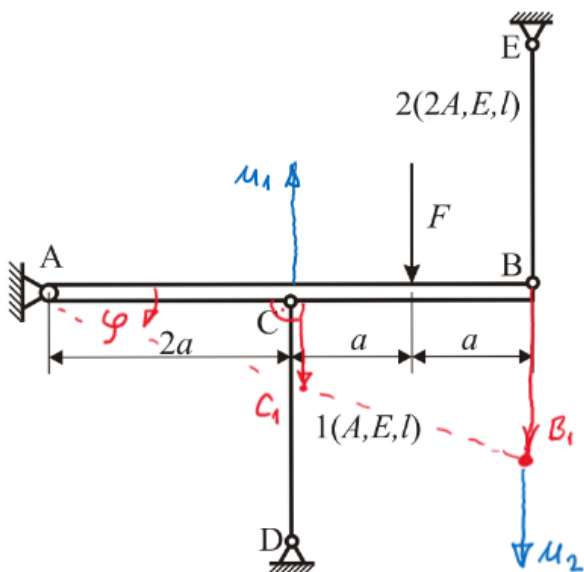
$$(1) \sum X_i = X_A = 0$$

$$(2) \sum Y_i = Y_A - S_1 - F + S_2 = 0$$

$$(3) \sum \overset{A}{M}_i = -S_1 \cdot 2a - F \cdot 3a + S_2 \cdot 4a = 0$$

1 x CH

$$(2) \rightarrow Y_A = S_1 + F - S_2 = \dots$$



ГУД

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} \cdot l_1}{A_1 E_1} = \frac{S_1 \cdot l}{A E}$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_{a2} \cdot l_2}{A_2 E_2} = \frac{S_2 \cdot l}{2A \cdot E}$$

$$\overline{CC_1} = \overline{CA} \cdot \varphi = 2a \cdot \varphi$$

$$\overline{BB_1} = \overline{BA} \cdot \varphi = 4a \cdot \varphi$$

$$\Delta l_1 = -\overline{CC_1} = -2a \cdot \varphi$$

$$\Delta l_2 = \overline{BB_1} = 4a \cdot \varphi$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{-\cancel{2a} \cdot \cancel{\varphi}}{\cancel{4a} \cdot \cancel{\varphi}} \rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta l_1 = -\frac{1}{2} \Delta l_2$$

$$\frac{S_1 \cdot \cancel{l}}{\cancel{A} \cdot \cancel{E}} = -\frac{1}{2} \frac{S_2 \cdot \cancel{l}}{\cancel{2A} \cdot \cancel{E}}$$

$$(4) \quad S_1 = -\frac{1}{4} S_2$$

$$(3) -2S_1 - 3F + 4S_2 = 0$$

(4)

$$S_1 = -\frac{1}{4} S_2$$

$$(3) -2 \cdot \left(-\frac{1}{4} S_2\right) - 3F + 4S_2 = 0$$

$$\frac{S_2}{2} + 4S_2 - 3F = 0$$

$$\frac{9}{2} S_2 = 3F$$

$$(4) S_1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} F$$

$$\boxed{S_2 = \frac{2}{3} F}$$

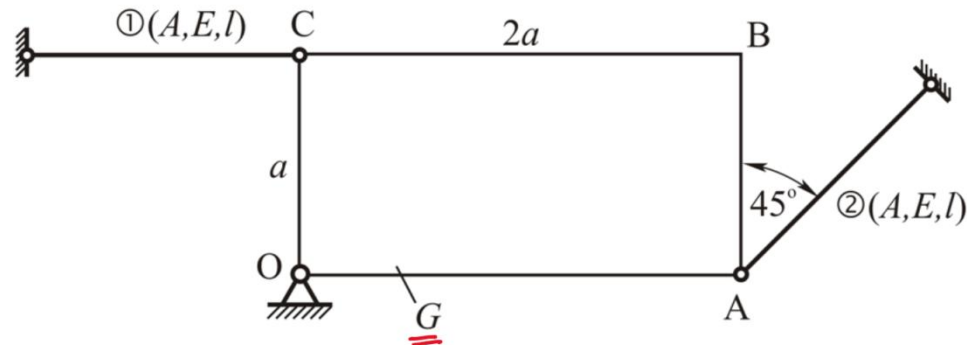
$$\boxed{S_1 = -\frac{1}{6} F}$$

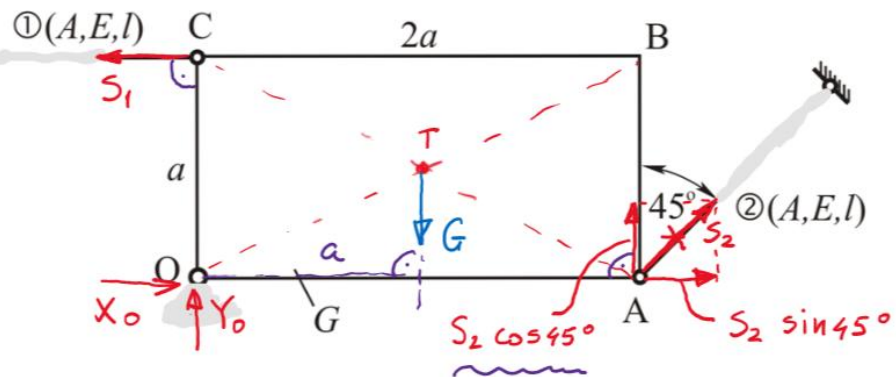
$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{S_1}{A} = -\frac{1}{6} \frac{F}{A} < 0, \text{ прит.}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{S_2}{2A} = \frac{1}{3} \frac{F}{A} > 0, \text{ затеж.}$$

1. Krutu, pravougaonu ploču, težine G i stranica dužine a i $2a$, u prikazanom ravnotežnom položaju, u vertikalnoj ravni, održavaju nepokretni zglob O i dva elastična štapa. Štapovi su iste dužine l , iste površine poprečnog preseka A i izrađeni su od istog materijala modula elastičnosti E . Položaj štapova prikazan je na slici.

- Formirati uslove ravnoteže za ploču,
- formirati geometrijski uslov deformacije,
- odrediti reakciju zgloba i reakcije štapova,
- odrediti napone u elastičnim štapovima.





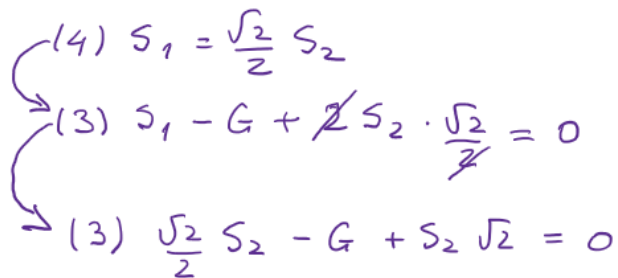
y. p.

$$(1) \sum X_i = X_0 - S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$(2) \sum Y_i = Y_0 - G + S_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$(3) \sum M_O = S_1 \cdot a - G \cdot a + S_2 \cos 45^\circ \cdot 2a = 0$$

1xCH



$$\frac{3}{2} S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} G$$

$$\boxed{S_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} G} \rightarrow (4) \left\{ S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} G = \frac{G}{3} \right\}$$

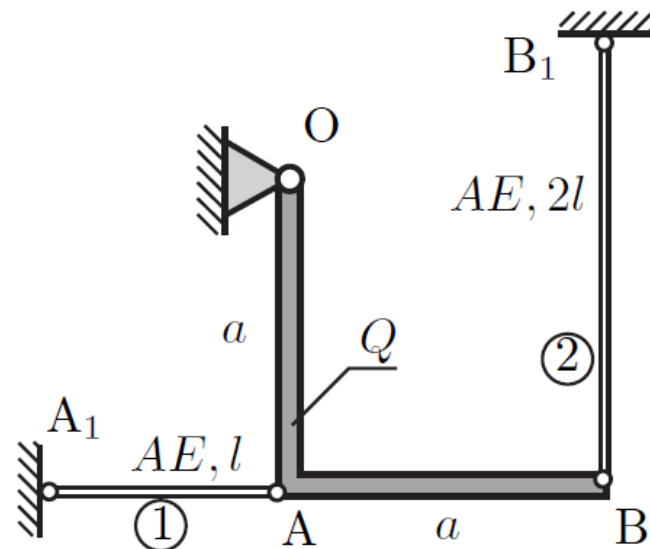
$$\sigma_1 = \frac{F_{q1}}{A_1} = \frac{S_1}{A} = \frac{1}{3} \frac{G}{A} > 0, \text{ ЗАТЕЖАЊЕ}$$

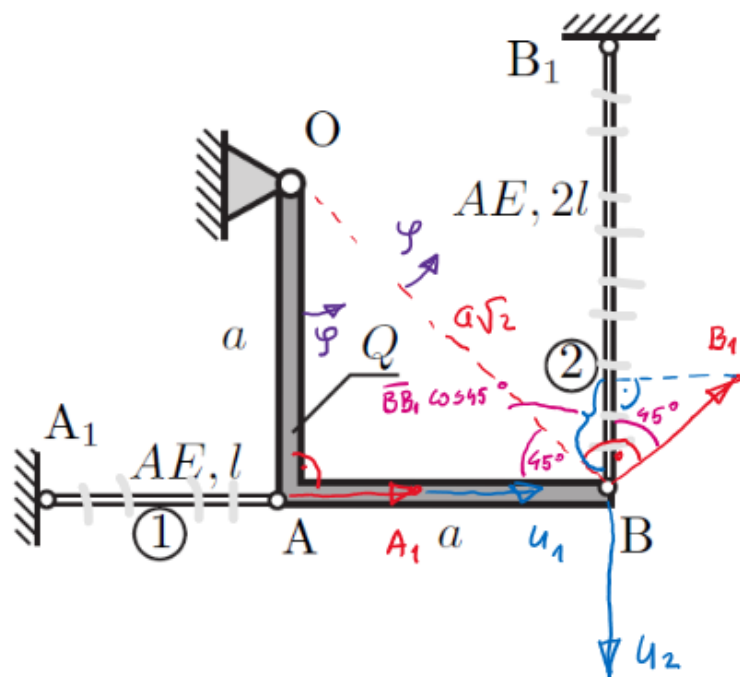
$$\sigma_2 = \frac{F_{q2}}{A_2} = \frac{S_2}{A} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{G}{A} > 0, \text{ ЗАТ.}$$

$$(1) \rightarrow X_0 = \dots$$

$$(2) \rightarrow Y_0 = \dots$$

3.9. Крут угаоник ОАВ тежине Q направљен је крутим спајањем два једнака штапа исте дужине. Угаоник је зглобно везан за подлогу у тачки О, док су у тачкама А односно В зглобно причвршћени лаки и еластични штапови који су крајевима A_1 односно B_1 причвршћени за подлогу. Штап AA_1 је дужине l , док је штап BB_1 дужине $2l$. Оба еластична штапа су исте површине попречног пресека и направљени су од материјала чији је модул еластичности E , док је дозвољени напон σ_d . Извршити димензионисање еластичних штапова.





$$\underline{\underline{\Gamma \gamma \Delta}}$$

$$\overline{AA_1} = \overline{OA} \cdot \varphi = a \cdot \varphi$$

$$\overline{BB_1} = \overline{OB} \cdot \varphi = a\sqrt{2} \cdot \varphi$$

$$\Delta l_1 = \overline{AA_1} = a \cdot \varphi$$

$$\Delta l_2 = -\overline{BB_1} \cdot \cos 45^\circ = -a\sqrt{2} \cdot \varphi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a \cdot \varphi}{-a \cdot \varphi} = -1$$

$$\Delta l_1 = -\Delta l_2$$

Шта смо научили?

- Савијање
- Аксијално оптерећење - понављање

Отпорност материјала

Савијање

Аксијално оптерећење - понављање

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић