

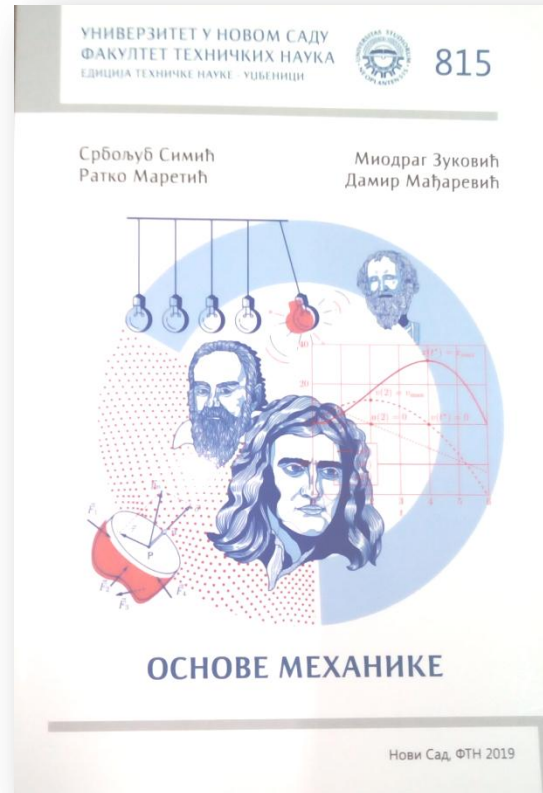
Динамика – 1. део

Кинематика тачке – 2. део – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



Шта ћемо научити?

- 30. Криволинијско кретање материјалне тачке. Брзина и убрзање тачке.
- 31. Брзина и убрзање тачке у Декартовом координатном систему.
- 32. Природне компоненте брзине и убрзања тачке. Полупречник кривине трајекторије.

Кинематика

Део механике који се бави изучавањем кретања материјалних тала не узимајући у обзир дејства која утичу на њега.

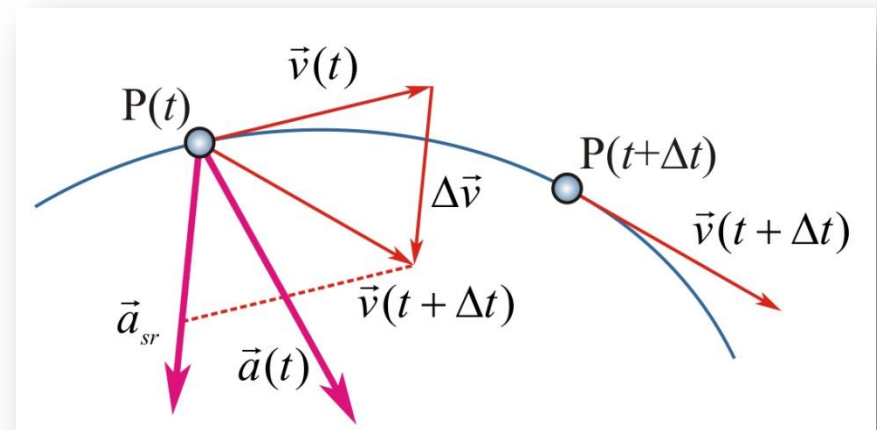
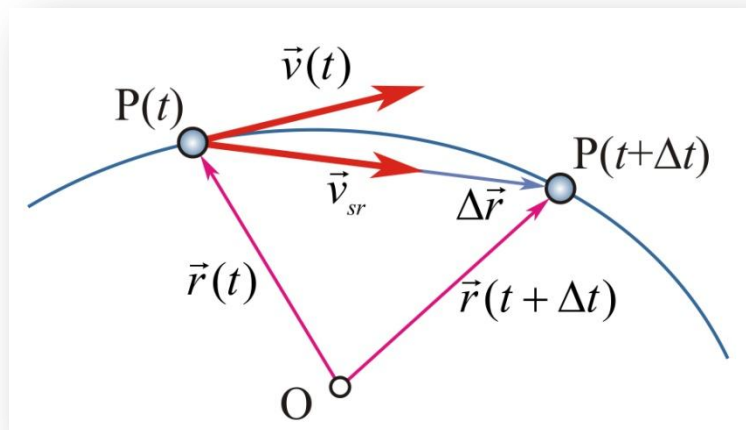
Криволинијско кретање

- Брзина

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

- Убрзање

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$



Декартов координатни систем

- Положај

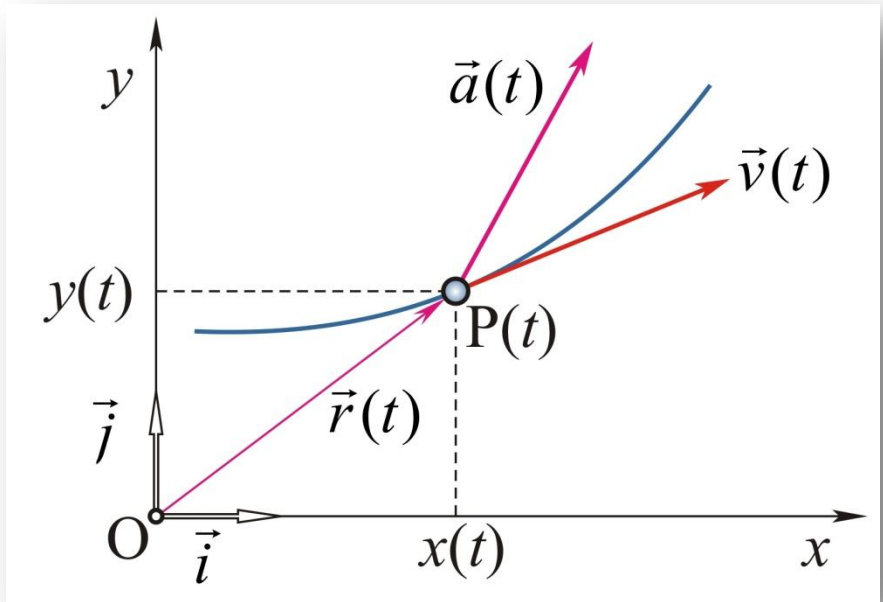
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

- Брзина

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

- Убрзање

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$



Природни координатни систем

- Параметарска једначина кретања

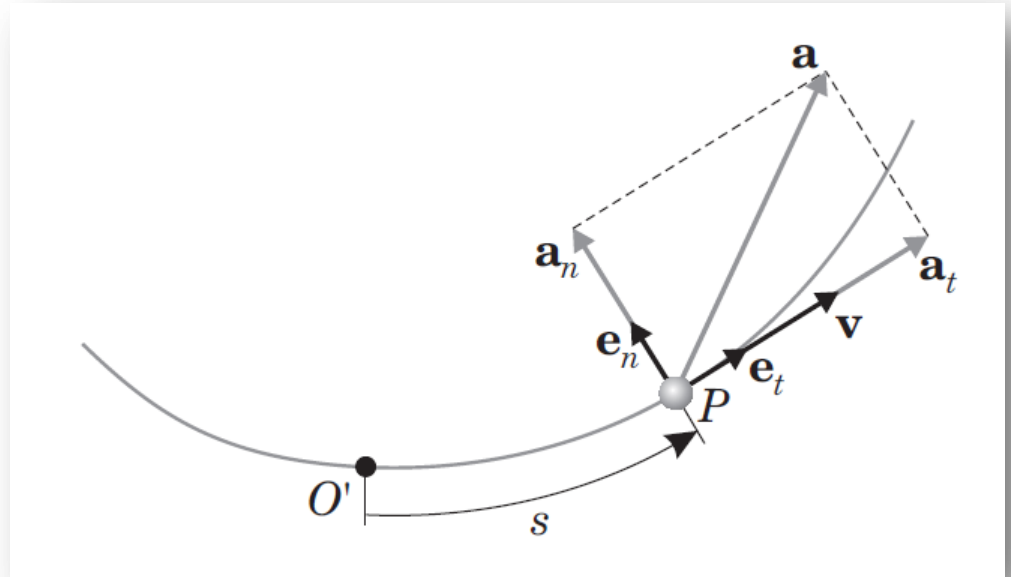
$$s = s(t)$$

- Брзина

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \vec{e}_t$$

$$\vec{v}(t) = v_t(t) \cdot \vec{e}_t$$

$$v_t(t) = \dot{s}(t)$$



Природни координатни систем

- Убрзање – тангентно и нормално убрзање

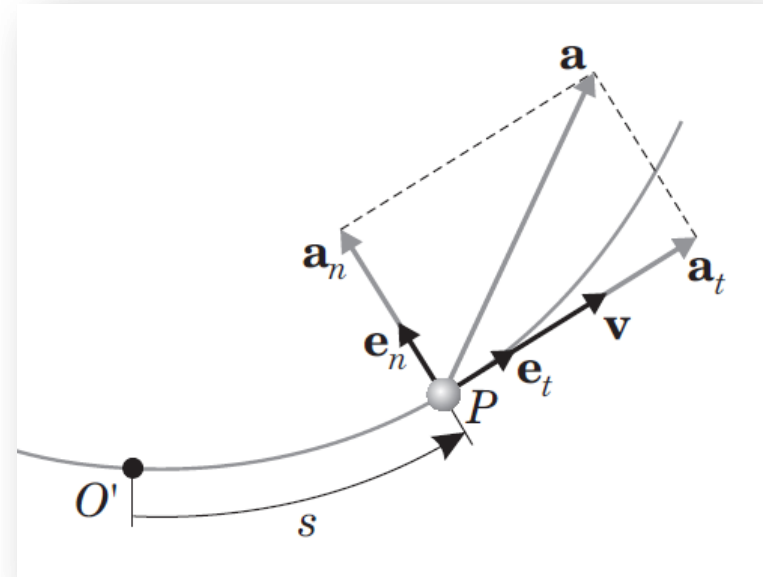
$$\vec{a}(t) = (\ddot{s}(t)) \cdot \vec{e}_t(t) + \left(\frac{\dot{s}^2(t)}{R_K} \right) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$\vec{a}(t) = a_t(t) \cdot \vec{e}_t(t) + a_n(t) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$a_t(t) = \ddot{s}(t)$$

$$a_n(t) = \frac{\dot{s}^2(t)}{R_K} = \frac{v^2(t)}{R_K}$$

$$|\vec{a}(t)| = a(t) = \sqrt{(a_t(t))^2 + (a_n(t))^2}$$



Природни координатни систем

- Полупречник кривине трајекторије

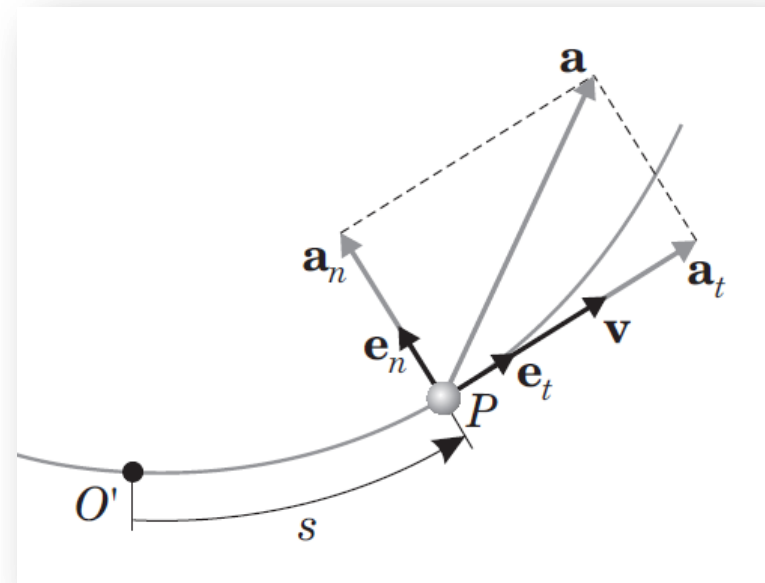
$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a_t = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R_k} \Rightarrow R_k = \frac{v^2}{a_n}$$



Пример

4.10 Кретање тачке описано је параметарским једначинама кретања:

$$x(t) = 4t - 2t^2; \quad y(t) = 3t - 1.5t^2.$$

Одредити област кретања и трајекторију материјалне тачке. Одредити положај, брзину и убрзање тачке у тренутцима $t_0 = 0$, $t_1 = 1s$ и $t_2 = 2s$.

Трајекторија

Параметарске једначине кретања:

$$\begin{aligned}x(t) &= 4t - 2t^2 \\ y(t) &= 3t - \frac{3}{2}t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= 2t(2 - t) \\ y(t) &= \frac{3}{2}t(2 - t)\end{aligned}$$

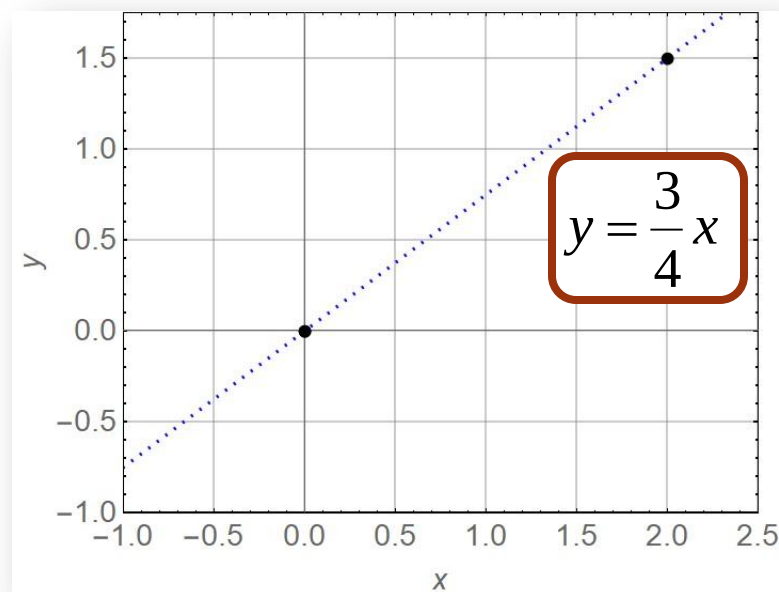
Елиминација параметра t :

$$\left. \begin{aligned}x &= 2t(2 - t) \\ y &= \frac{3}{2}t(2 - t)\end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned}t(2 - t) &= \frac{x}{2} \\ y &= \frac{3}{2}t(2 - t)\end{aligned} \right\} \rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

Линија путање:

$$y = \frac{3}{4}x$$

Прав



Трајекторија

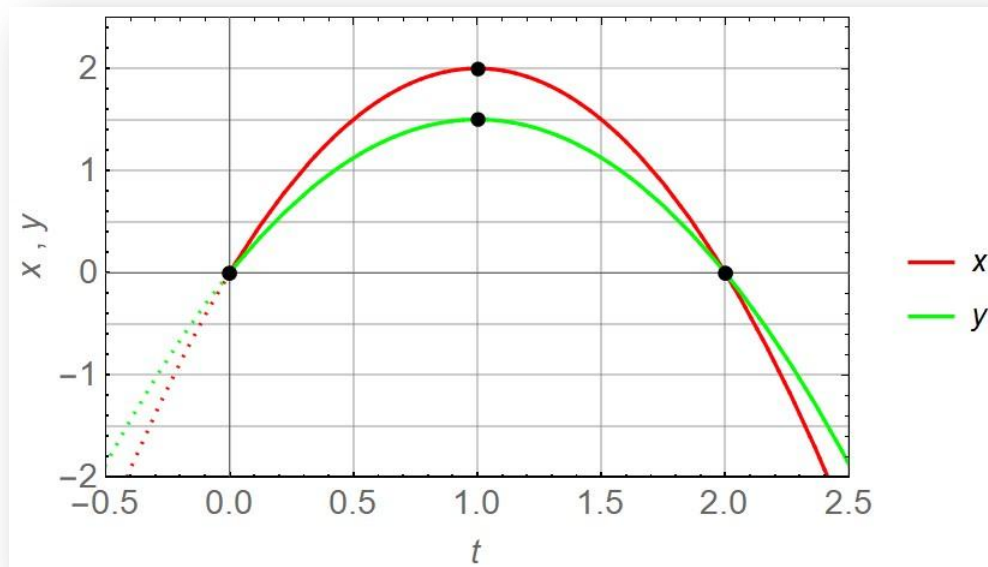
Параметарске једначине кретања:

$$\begin{aligned}x(t) &= 4t - 2t^2 \\ y(t) &= 3t - \frac{3}{2}t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= 2t(2 - t) \\ y(t) &= \frac{3}{2}t(2 - t)\end{aligned}$$

Област кретања:

$$\left. \begin{aligned}x(t) &= 4t - 2t^2 \\ y(t) &= 3t - \frac{3}{2}t^2\end{aligned} \right\} \xrightarrow{t \geq 0} \begin{aligned}x(t) &\leq 2 \\ y(t) &\leq \frac{3}{2}\end{aligned}$$

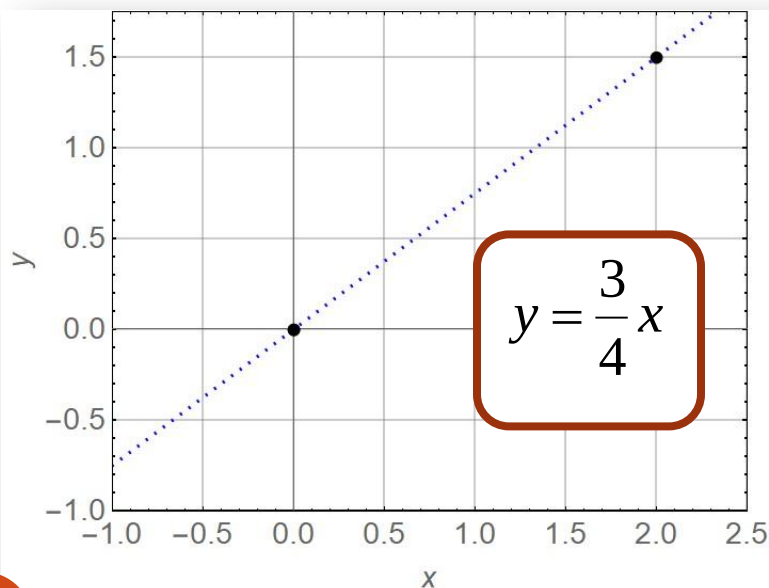


Трајекторија

Линија путање:

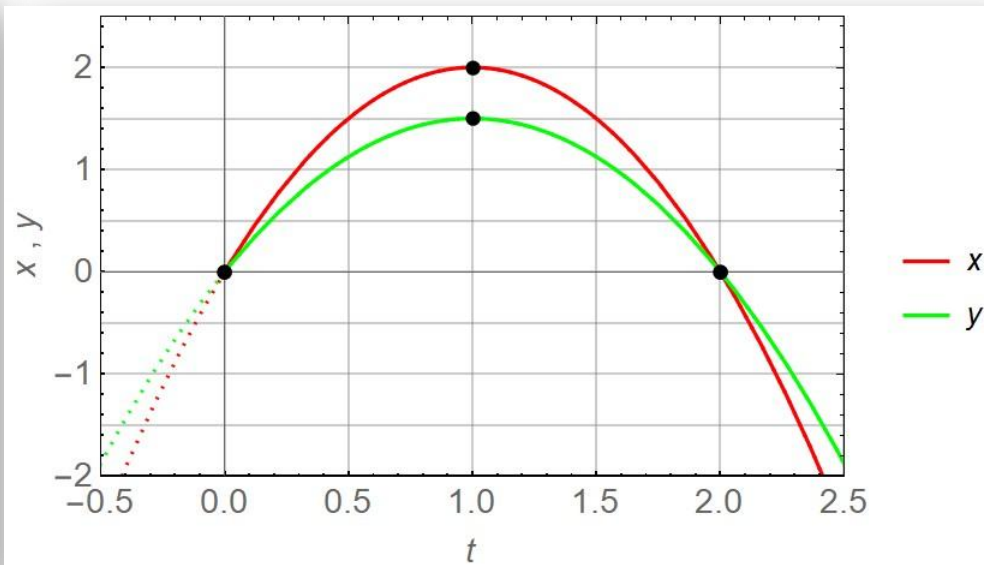
$$y = \frac{3}{4}x$$

Права



Област кратања:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 4t - 2t^2 \\ y(t) &= 3t - \frac{3}{2}t^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{t \geq 0} \begin{aligned} x(t) &\leq 2 \\ y(t) &\leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Трајекторија

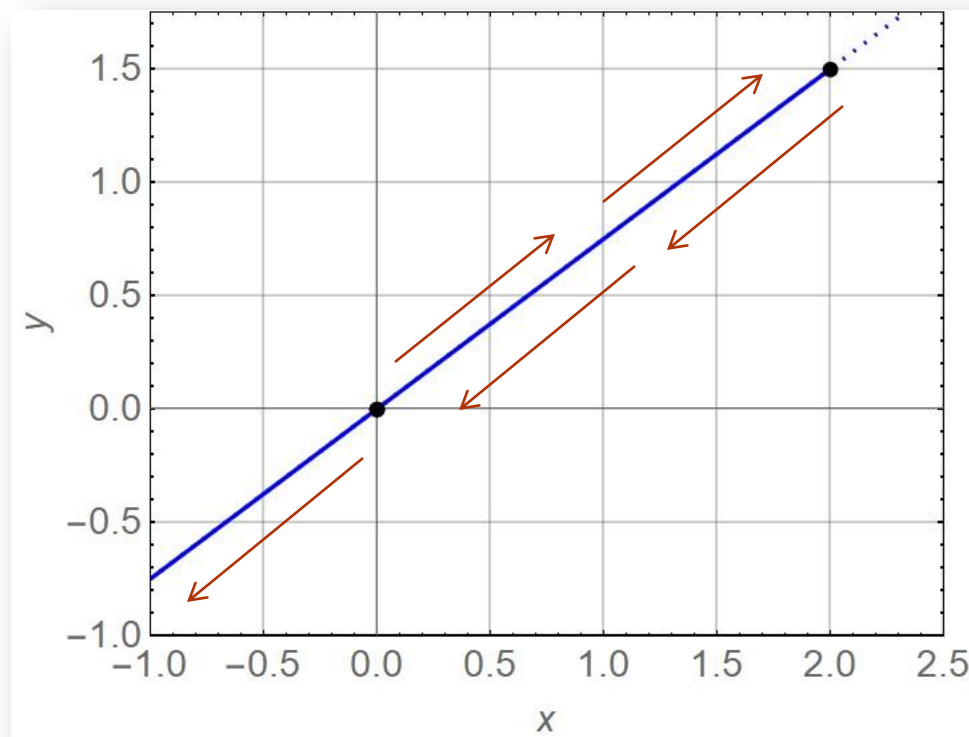
Линија путање:

$$y = \frac{3}{4}x$$

Права

Област кратања:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 4t - 2t^2 \\ y(t) = 3t - \frac{3}{2}t^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{t \geq 0} \begin{array}{l} x(t) \leq 2 \\ y(t) \leq \frac{3}{2} \end{array}$$



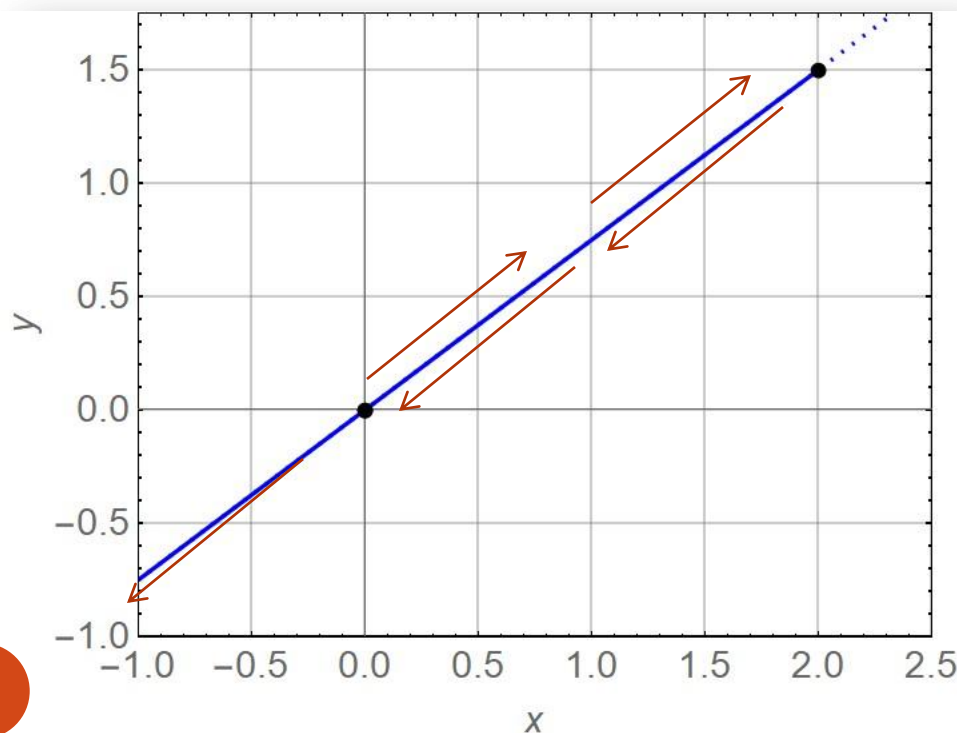
$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 4t - 2t^2 \\ y(t) = 3t - \frac{3}{2}t^2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x(0) = 0, x(1) = 2, x(2) = 0, x(3) = -6 \\ y(0) = 0, y(1) = \frac{3}{2}, y(2) = 0, y(3) = -\frac{9}{2} \end{array}$$

Положај, брзина и убрзање

$$\underbrace{x(t) = 4t - 2t^2 \quad y(t) = 3t - \frac{3}{2}t^2}_{\downarrow}$$

$$\dot{x}(t) = 4 - 4t \quad \dot{y}(t) = 3 - 3t$$

$$\ddot{x}(t) = -4 \quad \ddot{y}(t) = -3$$



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = (4t - 2t^2)\vec{i} + \left(3t - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (4 - 4t)\vec{i} + (3 - 3t)\vec{j}$$

$$v(t) = \sqrt{(4 - 4t)^2 + (3 - 3t)^2}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = -4\vec{i} + -3\vec{j}$$

$$a(t) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

Положај, брзина и убрзање

$$\vec{r}(t) = (4t - 2t^2)\vec{i} + \left(3t - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (4 - 4t)\vec{i} + (3 - 3t)\vec{j}$$

$$v(t) = \sqrt{(4 - 4t)^2 + (3 - 3t)^2}$$

$$\vec{a}(t) = -4\vec{i} + -3\vec{j}$$

$$a(t) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\vec{r}(0) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

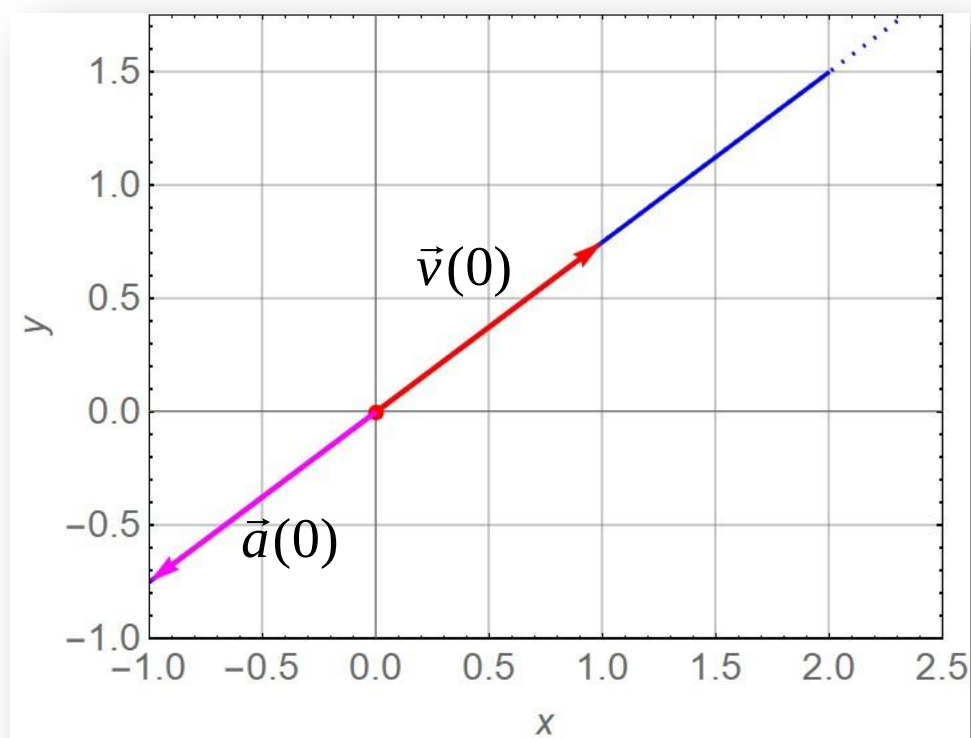
$$\vec{v}(0) = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$v(0) = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$$

$$\vec{a}(0) = -4\vec{i} + -3\vec{j}$$

$$a(0) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$t = 0$



У овом тренутку тачка успорава.

Положај, брзина и убрзање

$$\vec{r}(t) = (4t - 2t^2)\vec{i} + \left(3t - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (4 - 4t)\vec{i} + (3 - 3t)\vec{j}$$

$$v(t) = \sqrt{(4 - 4t)^2 + (3 - 3t)^2}$$

$$\vec{a}(t) = -4\vec{i} + -3\vec{j}$$

$$a(t) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\vec{r}(1) = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$$

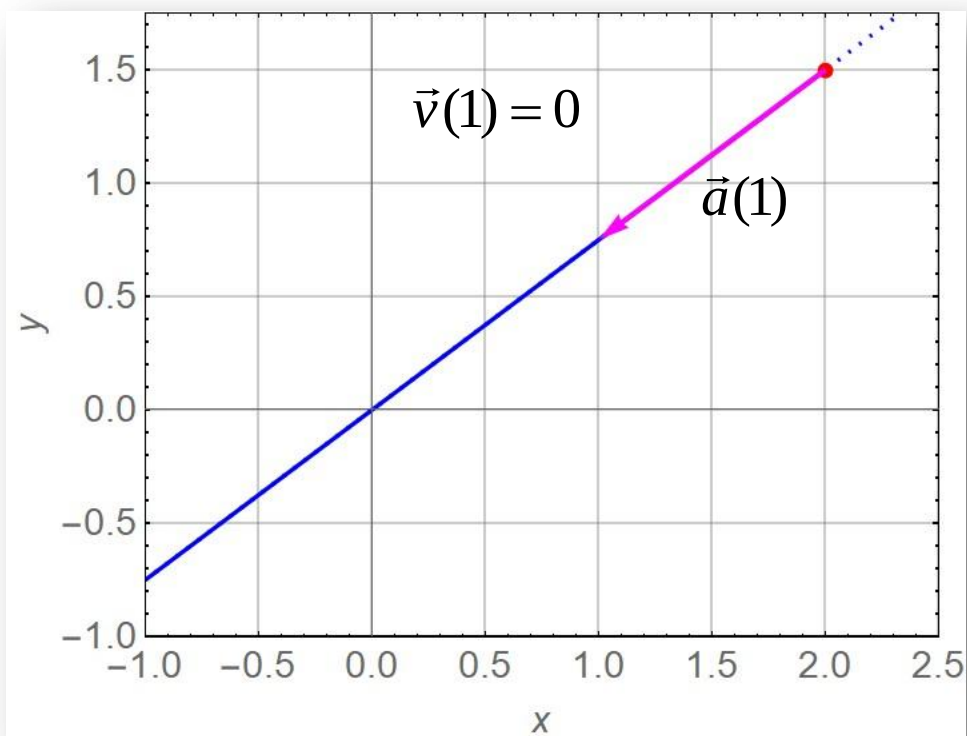
$$\vec{v}(1) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$v(1) = 0$$

$$\vec{a}(1) = -4\vec{i} + -3\vec{j}$$

$$a(1) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$t = 1$



Положај, брзина и убрзање

$$\vec{r}(t) = (4t - 2t^2)\vec{i} + \left(3t - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (4 - 4t)\vec{i} + (3 - 3t)\vec{j}$$

$$v(t) = \sqrt{(4 - 4t)^2 + (3 - 3t)^2}$$

$$\vec{a}(t) = -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$a(t) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\vec{r}(2) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

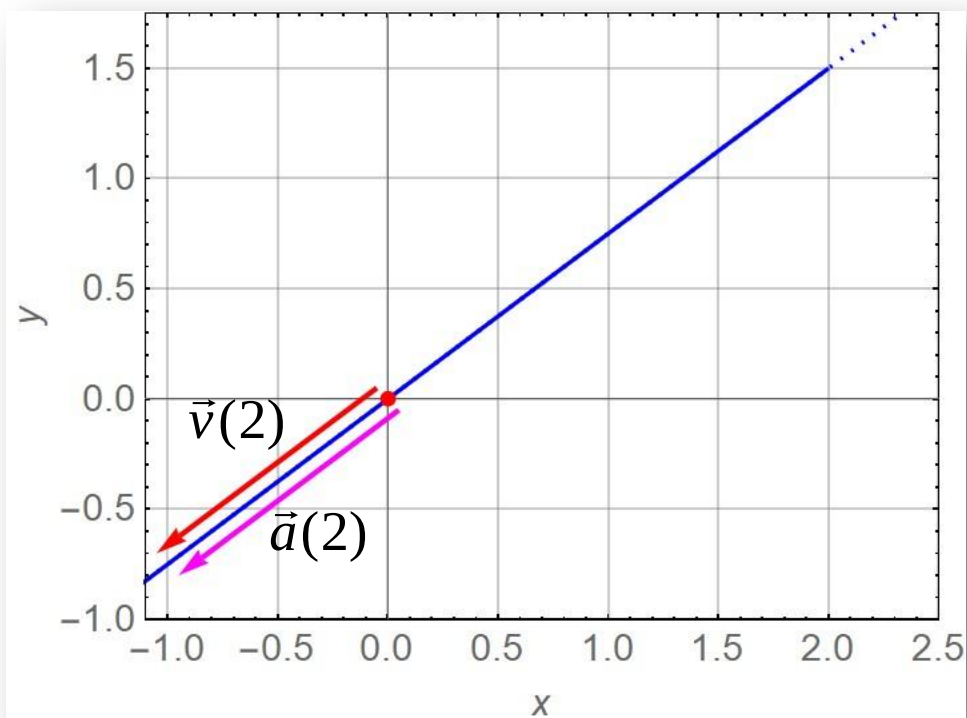
$$\vec{v}(2) = -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$v(2) = 5$$

$$\vec{a}(2) = -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$a(2) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$t = 2$



У овом тренутку тачка убрзава.

Пример

4.11 За кретање тачке описано параметарским једначинама:

$$x(t) = at; \quad y(t) = bt^2,$$

одредити трајекторију тачке, векторе брзине и убрзања и њихове интензитета у произвољном тренутку времена. Одредити тангентно и нормално убрзање и полупречник кривине трајекторије у тренутку $t_1 = 1\text{ s}$ од почетка кретања.

Задача 4.11

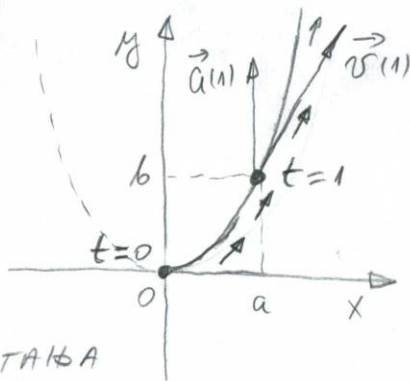
$$\left. \begin{array}{l} (1) x(t) = at \\ (2) y(t) = bt^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array}$$

- ТРАЈЕКТОРИЈА

$$(1) x = at \rightarrow t = \frac{x}{a}$$

$$(2) y = bt^2 \rightarrow y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$y = \frac{b}{a^2} x^2$$



ОБЛАСТ КРЕТАЊА

$$(1) x(t) = at \xrightarrow{t \geq 0} x(t) \geq 0$$

$$(2) y(t) = bt^2 \xrightarrow{t \geq 0} y(t) \geq 0$$

- БРЗИНА И УБРЗАЊЕ:

$$\left. \begin{array}{l} (1) x(t) = at \\ (2) y(t) = bt^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = a \\ \dot{y}(t) = 2bt \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 2b \end{array} \right\}$$

$$v(t) = \sqrt{a^2 + 4b^2 t^2} \quad a(t) = \sqrt{0^2 + (2b)^2} = 2b$$

- ТРЕЊИТАК $t=1$

$$\left. \begin{array}{l} x(1) = a \\ y(1) = b \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \dot{x}(1) = a \\ \dot{y}(1) = 2b \end{array} \right| v(1) = \sqrt{a^2 + 4b^2} \quad \left. \begin{array}{l} \ddot{x}(1) = 0 \\ \ddot{y}(1) = 2b \end{array} \right| a(1) = 2b$$

- ПОДУПРЕЧНИК КРИВУНЕ ТРАЈЕКТОРИЈЕ:

$$a_T(1) = \frac{\dot{x}(1)\ddot{x}(1) + \dot{y}(1)\ddot{y}(1)}{v(1)} = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$$

$$\begin{aligned} a_N^2(1) &= a^2(1) - a_T^2(1) \\ &= 4b^2 - \frac{16b^4}{a^2 + 4b^2} = \frac{4a^2b^2 + 16b^4 - 16b^4}{a^2 + 4b^2} \\ &= \frac{4a^2b^2}{a^2 + 4b^2} \end{aligned}$$

$$R_K(1) = \frac{v^2(1)}{a_N(1)} = \frac{a^2 + 4b^2}{\sqrt{\frac{4a^2b^2}{a^2 + 4b^2}}} = \frac{(a^2 + 4b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab}$$

Пример

4.12 Кретање тачке је описано параметарским једначинама:

$$x(t) = 5 \cos t; \quad y(t) = 3 - 5 \sin t.$$

Одредити:

- а) трајекторију тачке;
- б) положај, брзину и убрзање тачке у тренуцима $t_1 = \pi/2s$ и $t_2 = \pi s$;
- в) тангентно и нормално убрзање и полупречник кривине трајекторије у произвољном тренутку времена t .

Задаток 4.12

$$(1) x(t) = 5 \cos t$$

$$(2) y(t) = 3 - 5 \sin t$$

- ТРАЈЕКТОРИЈА

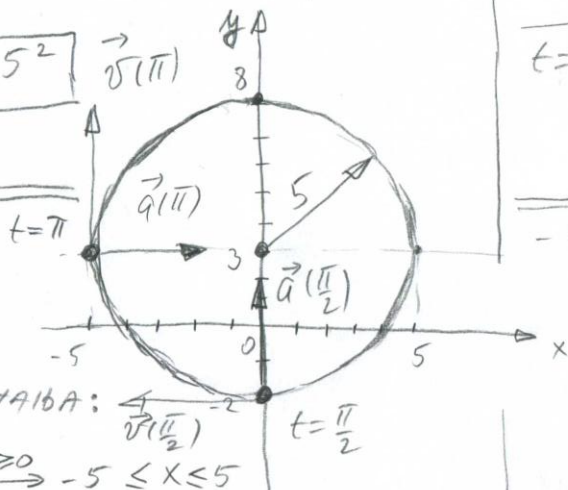
$$(1) x = 5 \cos t \quad |^2$$

$$(2) y - 3 = -5 \sin t \quad |^2 \quad +$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 5^2 \cos^2 t + 5^2 \sin^2 t$$

$$\boxed{x^2 + (y-3)^2 = 5^2}$$

КРУЖНИЦА



ОБЛАСТ КРЕТАЊА:

$$(1) x(t) = 5 \cos t \xrightarrow{t \geq 0} -5 \leq x \leq 5$$

$$(2) y(t) = 3 - 5 \sin t \xrightarrow{t \geq 0} -2 \leq y \leq 8$$

- ПОЛОЖАЈ, БРЗИНА и УСБРАЊЕ:

$$\left. \begin{aligned} (1) x(t) &= 5 \cos t \\ (2) y(t) &= 3 - 5 \sin t \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -5 \sin t \\ \dot{y}(t) &= -5 \cos t \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -5 \cos t \\ \ddot{y}(t) &= 5 \sin t \end{aligned} \right\}$$

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{25 \sin^2 t + 25 \cos^2 t} = \sqrt{25} = 5 = \text{const}$$

$$a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t)} = \sqrt{25 \cos^2 t + 25 \sin^2 t} = \sqrt{25} = 5 = \text{const}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{array}{l|l|l} x(\frac{\pi}{2}) = 0 & \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = -5 & \ddot{x}(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = -2 & \dot{y}(\frac{\pi}{2}) = 0 & \ddot{y}(\frac{\pi}{2}) = 5 \end{array}$$

$$v(\frac{\pi}{2}) = 5 \quad a(\frac{\pi}{2}) = 5$$

$$t = \pi \rightarrow \begin{array}{l|l|l} x(\pi) = -5 & \dot{x}(\pi) = 0 & \ddot{x}(\pi) = 5 \\ y(\pi) = 3 & \dot{y}(\pi) = 5 & \ddot{y}(\pi) = 0 \end{array}$$

$$v(\pi) = 5 \quad a(\pi) = 5$$

- ПОЛУПРЕЧНИК КРУЖНЕ ТРАЈЕКТОРИЈЕ:

$$a_T(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \dot{y}(t)\ddot{y}(t)}{v(t)} = \frac{25 \sin t \cos t - 25 \sin t \cos t}{5}$$

$$a_T(t) = 0$$

$$a_N(t) = \sqrt{a^2(t) - a_T^2(t)} = \sqrt{5^2 - 0^2} = 5 = \text{const}$$

$$R_K(t) = \frac{v^2(t)}{a_N(t)} = \frac{5^2}{5} = 5$$

Пример

4.13 За кретање тачке описано параметарским једначинама:

$$x(t) = 3 + 4 \sin t; \quad y(t) = 2 + 5 \cos t,$$

одредити трајекторију, а затим одредити положај, брзину и убрзање, као и тангентно и нормално убрзање и полупречник кривине трајекторије у пошетном тренутку $t_0 = 0$.

Задача 4.13

$$(1) x(t) = 3 + 4 \sin t$$

$$(2) y(t) = 2 + 5 \cos t$$

- трајекторија:

$$(1) x = 3 + 4 \sin t$$

$$(2) y = 2 + 5 \cos t$$

$$(1) \frac{x-3}{4} = \sin t \quad |^2$$

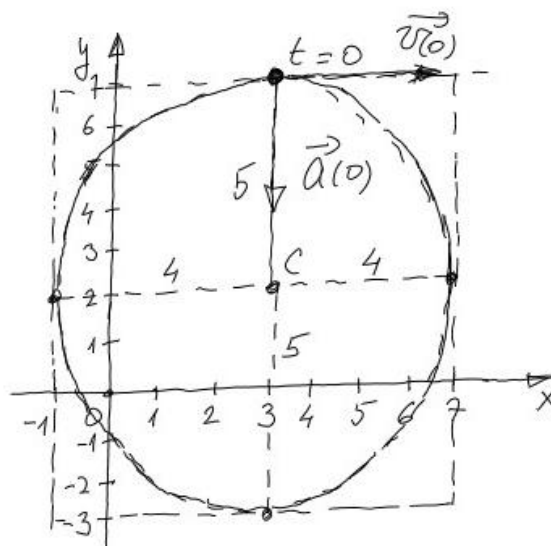
$$(2) \frac{y-2}{5} = \cos t \quad |^2$$

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$$

ЕЛИПСА

- област кретања:

$$(1) \rightarrow -1 \leq x \leq 7, (2) \rightarrow -3 \leq y \leq 7$$



$t=0$

$$x(0) = 3 + 4 \sin 0 = 3 \quad \parallel \quad \dot{x}(0) = 4$$

$$y(0) = 2 + 5 \cos 0 = 7 \quad \parallel \quad \dot{y}(0) = 0$$

$$v(0) = 4$$

$$a_t(0) = \frac{\dot{x}(0)\ddot{x}(0) + \dot{y}(0)\ddot{y}(0)}{v(0)} = 0$$

$$a_n(0) = \sqrt{a^2(0) - a_t^2(0)} = 5$$

1 - положнај, брзина,
убрзање:

$$(1) x(t) = 3 + 4 \sin t$$

$$(2) y(t) = 2 + 5 \cos t$$

$$\dot{x}(t) = 4 \cos t$$

$$\dot{y}(t) = -5 \sin t$$

$$\ddot{x}(t) = -4 \sin t$$

$$\ddot{y}(t) = -5 \cos t$$

$$\parallel \quad \ddot{x}(0) = 0$$

$$\parallel \quad \ddot{y}(0) = -5$$

$$a(0) = 5$$

$$R_k(0) = \frac{v^2(0)}{a_n(0)}$$

$$R_k(0) = \frac{16}{5}$$

Пример

4.14 Кретање тачке је описано параметарским једначинама:

$$x(t) = t^2 - 1; \quad y(t) = t.$$

Одредити:

- а) трајекторију тачке;
- б) тренутак t^* у ком ће се тачка наћи на y —оси;
- в) векторе брзине и убрзања у тренутку t^* ;
- г) тангентно и нормално убрзање и полупречник кривине трајекторије у тренутку t^* .

$$(1) x(t) = t^2 - 1$$

$$(2) y(t) = t$$

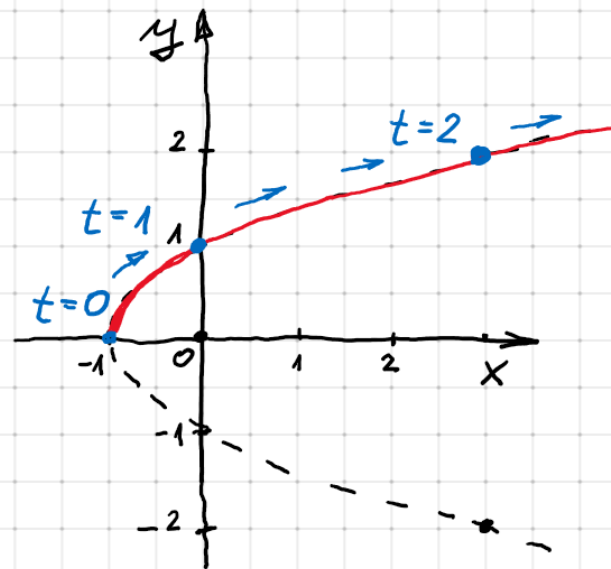
- трајекторија:

$$x = t^2 - 1 \rightarrow x = y^2 - 1$$

$$y = t$$

- OK

$$(2) y(t) = t \xrightarrow{t \geq 0} y \geq 0$$



$$t = 0$$

$$x(0) = -1$$

$$y(0) = 0$$

$$t = 1$$

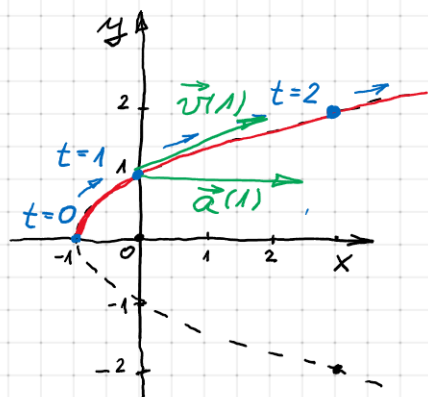
$$x(1) = 0$$

$$y(1) = 1$$

$$t = 2$$

$$x(2) = 3$$

$$y(2) = 2$$



$$t^* = ?$$

$$x(t^*) = 0$$

$$t^{*2} - 1 = 0$$

$$t^* = -1 \quad \boxed{t^* = 1}$$

$$t = t^* = 1$$

$$x(1) = 0, \quad y(1) = 1$$

$$\dot{x}(1) = 2, \quad \dot{y}(1) = 1, \quad v(1) = \sqrt{5}$$

$$\ddot{x}(1) = 2, \quad \ddot{y}(1) = 0, \quad a(1) = 2$$

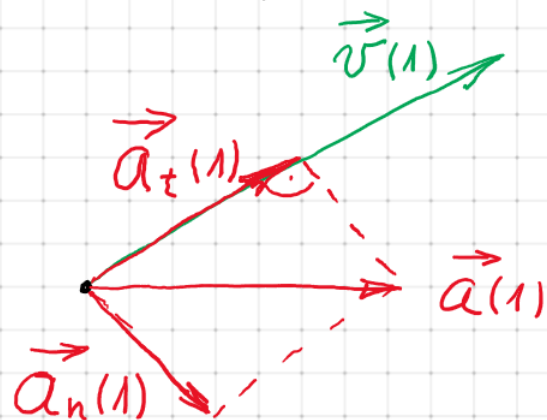
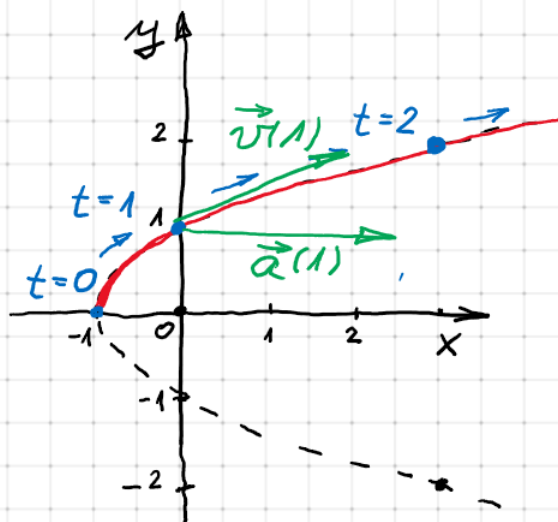
$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad x(t) = t^2 - 1 \\ (2) \quad y(t) = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}(t) = 2t \\ \dot{y}(t) = 1 \end{array}$$

$$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\ddot{x}(t) = 2$$

$$\ddot{y}(t) = 0$$

$$a(t) = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$



$$t = t^* = 1$$

$$x(1) = 0, \quad y(1) = 1$$

$$\dot{x}(1) = 2, \quad \dot{y}(1) = 1, \quad v(1) = \sqrt{5}$$

$$\ddot{x}(1) = 2, \quad \ddot{y}(1) = 0, \quad a(1) = 2$$

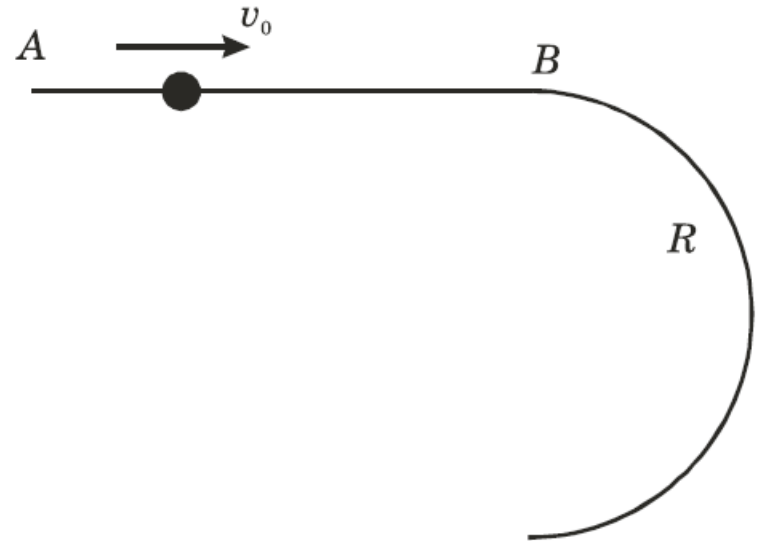
$$a_t(1) = \frac{\dot{x}(1)\ddot{x}(1) + \dot{y}(1)\ddot{y}(1)}{v(1)} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$a_n(1) = \sqrt{a^2(1) - a_t^2(1)} = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

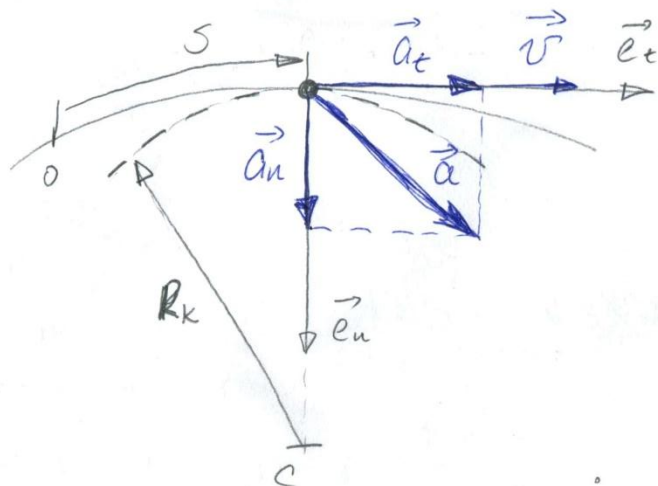
$$R_K(1) = \frac{v^2(1)}{a_n(1)} = \frac{5}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Пример

4.15 Воз се креће дуж правлинијског дела пруге AB једнолико брзином $v_0 = 65 \text{ km/h}$. У положају B прелази на криволинијски део пруге који је кружног облика полупречника $R = 1250 \text{ m}$. Колико је убрзање воза на криволинијском делу трајекторије ако се зна да је наставио да се креће без промене интензитета брзине v_0 ? Колико би било његово убрзање да је полупречник круга $R = 800 \text{ m}$? На коју вредност v_1 би требало смањити интензитет брзине да убрзање воза дуж кружне трајекторије полупречника $R = 800 \text{ m}$ буде истог интензитета као при кретању брзином v_0 по трајекторији полупречника $R = 1250 \text{ m}$?



Задаток 4.15



$$\vec{v} = v_t \vec{e}_t = \dot{s} \vec{e}_t \quad \left\{ \begin{array}{l} v_t = \dot{s} \\ v = |\vec{v}| = |v_t| = |\dot{s}| \end{array} \right.$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}_t$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{R_k} = \frac{v^2}{R_k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = a_t^2 + a_n^2 \\ a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \end{array} \right.$$

ПРАБА



$$R_k = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} a_n = 0 \\ a_t = \ddot{s} \end{array} \right\} \rightarrow a = a_t = \ddot{s}$$

$$v_t = \dot{s}$$

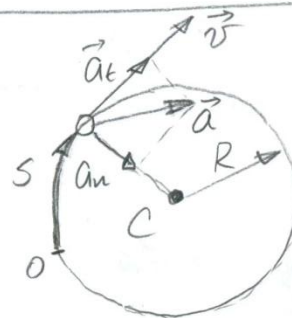
КРПЖННЧА

$$R_k = R = \text{const}$$

$$v_t = \dot{s}$$

$$a_t = \ddot{s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$



Задача 4.15

"B-D" - КРУГОВА

$$v = v_t = \dot{s} = v_0 = \text{const} \rightarrow$$

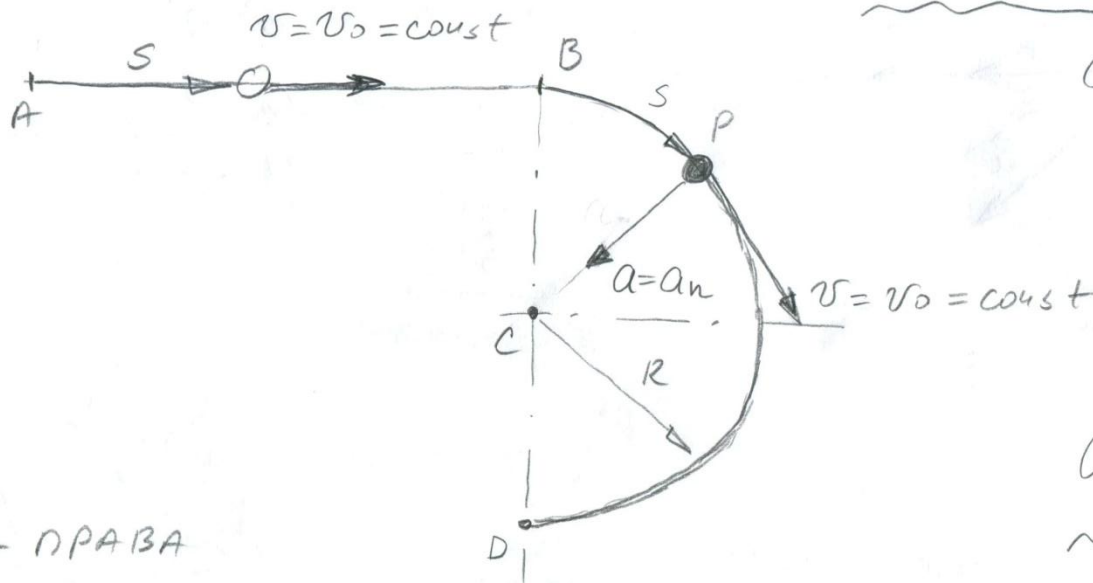
$$\ddot{s} = 0 \rightarrow a_t = 0$$

$$a = a_n = \frac{v_0^2}{R}$$

$$v_0 = 65 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 18,056 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$R = 1250 \text{ m}$$

$$a = a_n = 0,261 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



"A-B" - ПРЯМА

$$R_k = \infty \rightarrow a_n = 0$$

$$a = a_t = \ddot{s}$$

$$v_t = \dot{s}$$

$$v = v_t = \dot{s} = v_0 = \text{const} \rightarrow \ddot{s} = 0$$

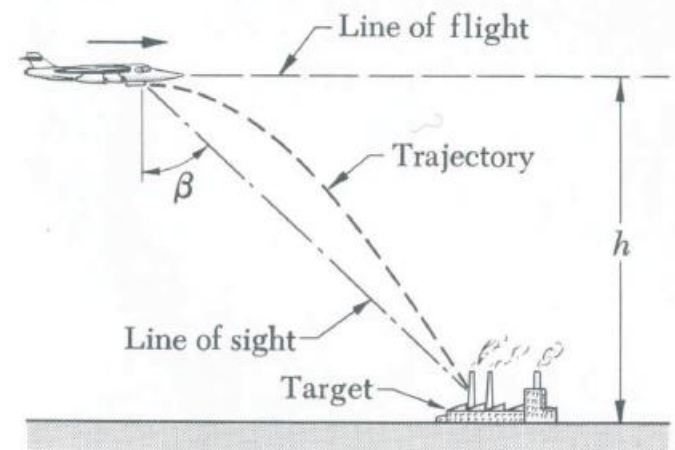
$$a_t = 0 \rightarrow \boxed{a = 0}$$

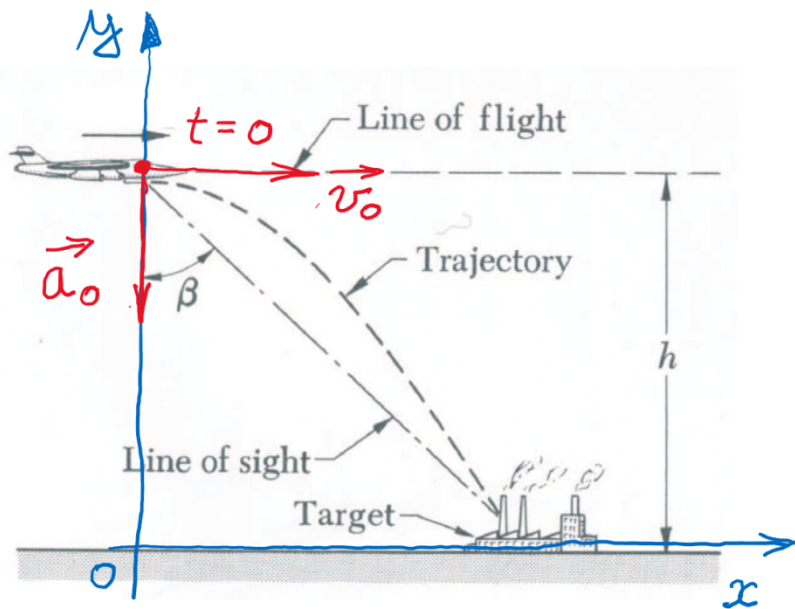
Пример

4.16 Пројектил избачен из авиона креће се сагласно следећим параметарским једначинама:

$$x(t) = v_0 t; \quad y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Одредити брзину, убрзање, природне компоненте убрзања и полупречник кривине трајекторије у почетном тренутку $t_0 = 0$. Претпоставити да је x -оса везана за тло, а y -оса усмерена навише.





$$x(t) = v_0 t; \quad y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\dot{x}(t) = v_0 \quad \dot{y}(t) = -g t$$

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad \ddot{y}(t) = -g$$

$$a(t) = \sqrt{0^2 + g^2} = g$$

$$t = 0$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = h$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad v(0) = v_0$$

$$\ddot{x}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = -g \quad a(0) = g$$

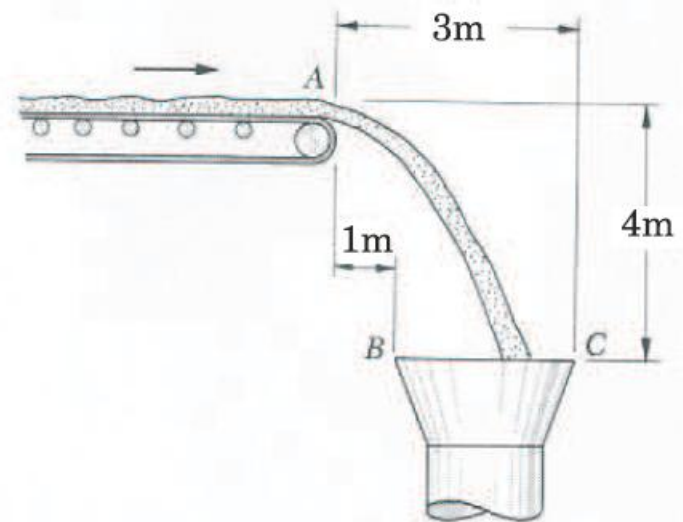
$$a_t(0) = \frac{\dot{x}(0)\ddot{x}(0) + \dot{y}(0)\ddot{y}(0)}{v(0)} = 0$$

$$a_n(0) = \sqrt{a^2(0) - a_t^2(0)} = g$$

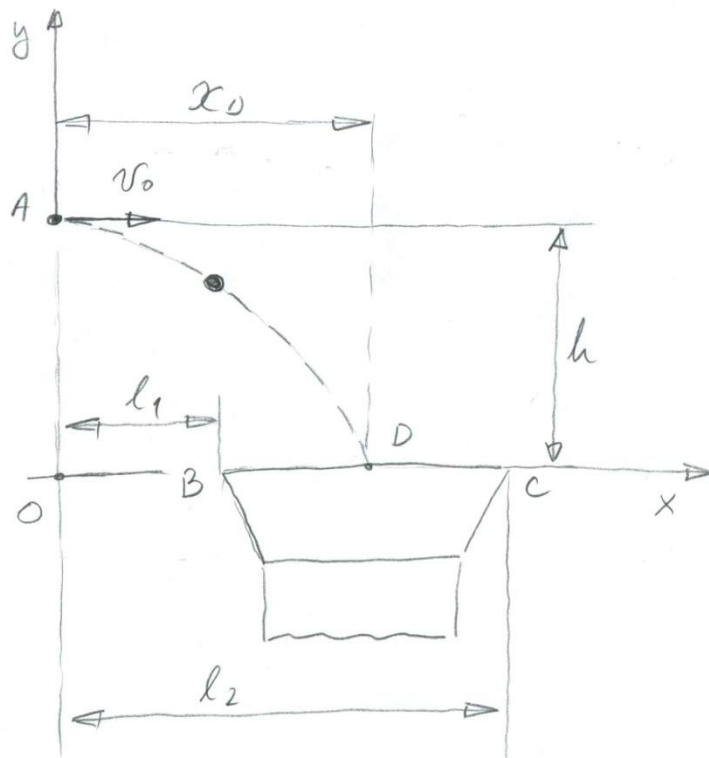
$$R_K(0) = \frac{v^2(0)}{a_n(0)} = \frac{v_0^2}{g}$$

Пример

4.17 Песак се са тракастог транспортера избацује у левкасту посуду повезану са вертикалном цеви. Ако се зрнца песка крећу дуж трајекторија описаних у задатку 4.16, одредити у којим се границама може мењати брзина v_0 тракастог транспортера да би песак сигурно упао у посуду.



Задаток 4.17



$$(1) x(t) = v_0 \cdot t$$

$$(2) y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$„D” \rightarrow t = t_D, y(t_D) = 0$$

$$x(t_D) = x_D$$

$$y(t_D) = h - \frac{1}{2} g t_D^2 = 0 \rightarrow t_D = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$x_D = x(t_D) = v_0 t_D = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$l_1 < x_D < l_2$$

$$l_1 < v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} < l_2$$

$$l_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} < v_0 < l_2 \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = 1 \text{ m}, l_2 = 3 \text{ m} \\ h = 4 \text{ m}, g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array} \right\} \rightarrow 1,107 \frac{\text{m}}{\text{s}} < v_0 < 3,322 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Пример

4.18 Материјална тачка се креће сагласно следећим параметарским једначинама:

$$x(t) = a \cos kt; \quad y(t) = \frac{g}{k^2} (1 - \cos kt).$$

Пример

4.19 *Коси хитац - основни балистички проблем.* Пројектил избачен са површине земље се креће сагласно следећим параметарским једначинама:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha; \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

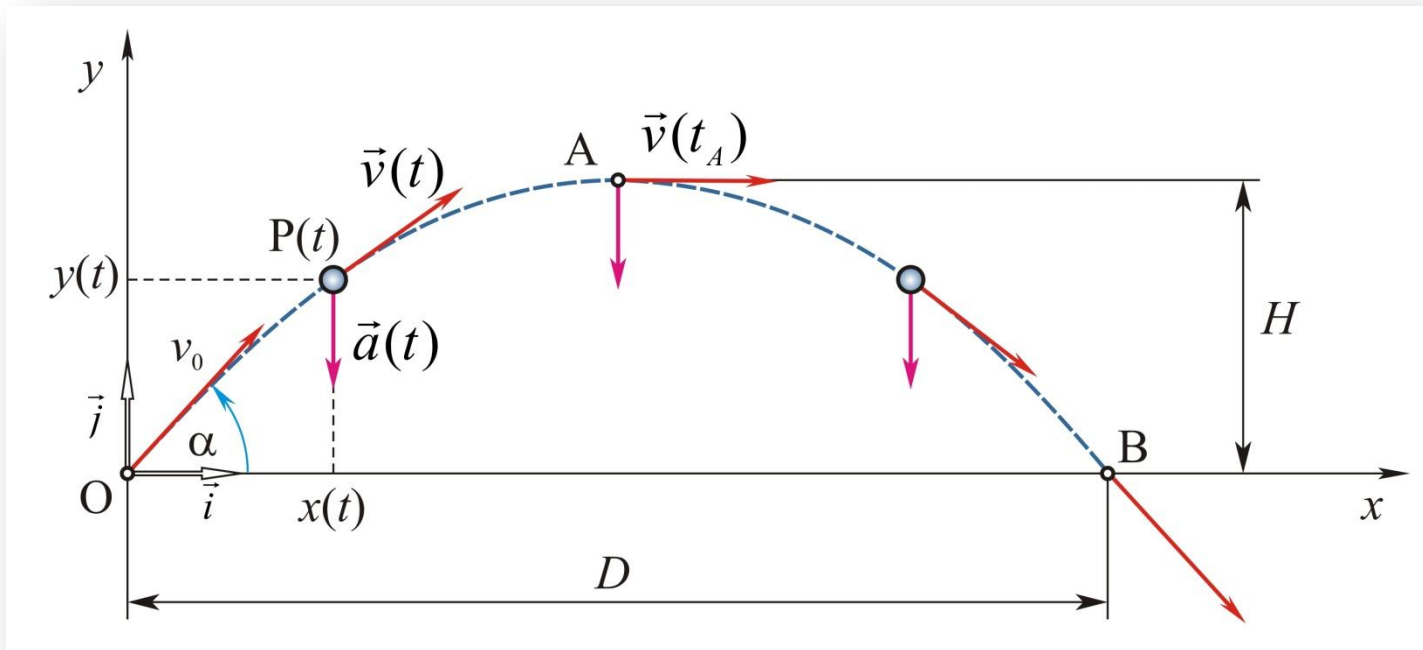
где је v_0 почетна брзина, α угао елевације, а g гравитационо убрзање.

а) Показати да је трајекторија тачка парабола чија је једначина:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

б) Одредити навјећу висину лета тачке - $y_{\max}$.

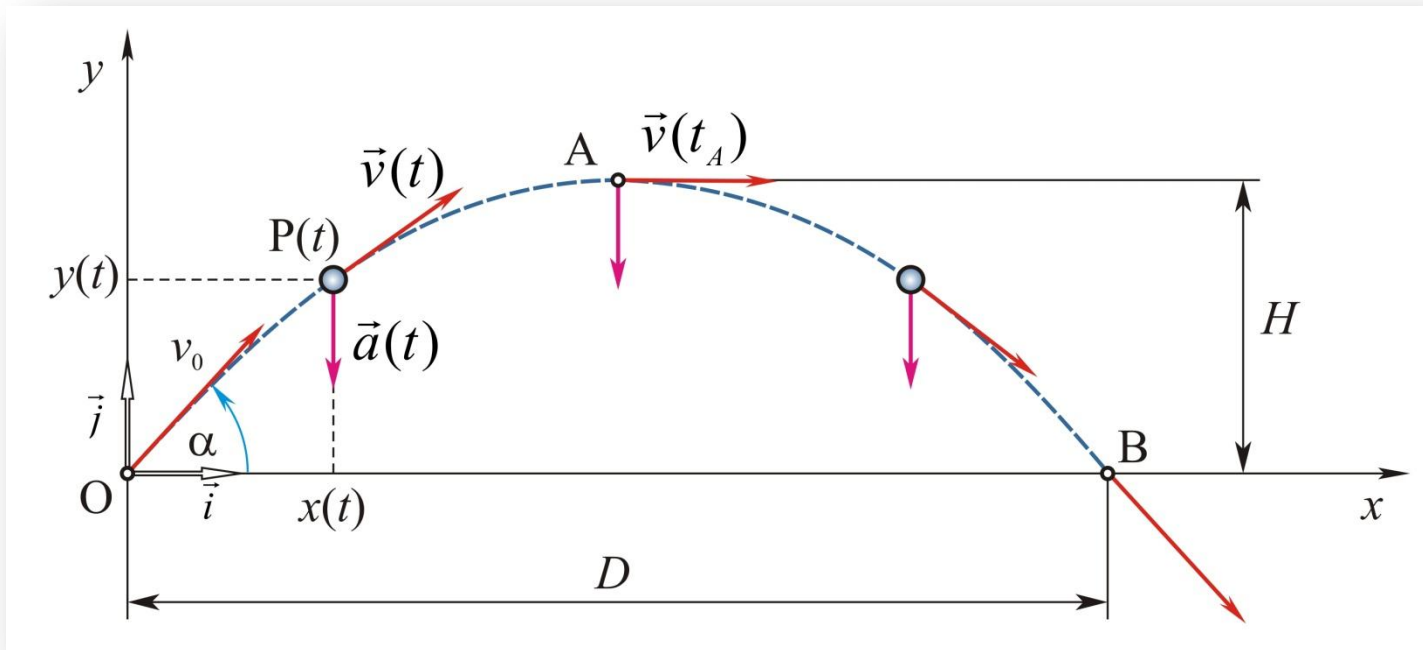
в) Одредити место на ком ће пројектил поново ударити у земљу (домет хица). Колики треба да буде угао елевације да би домет хица био максималан?



$$\underbrace{x(t) = v_0 t \cos \alpha \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2}_{\downarrow}$$

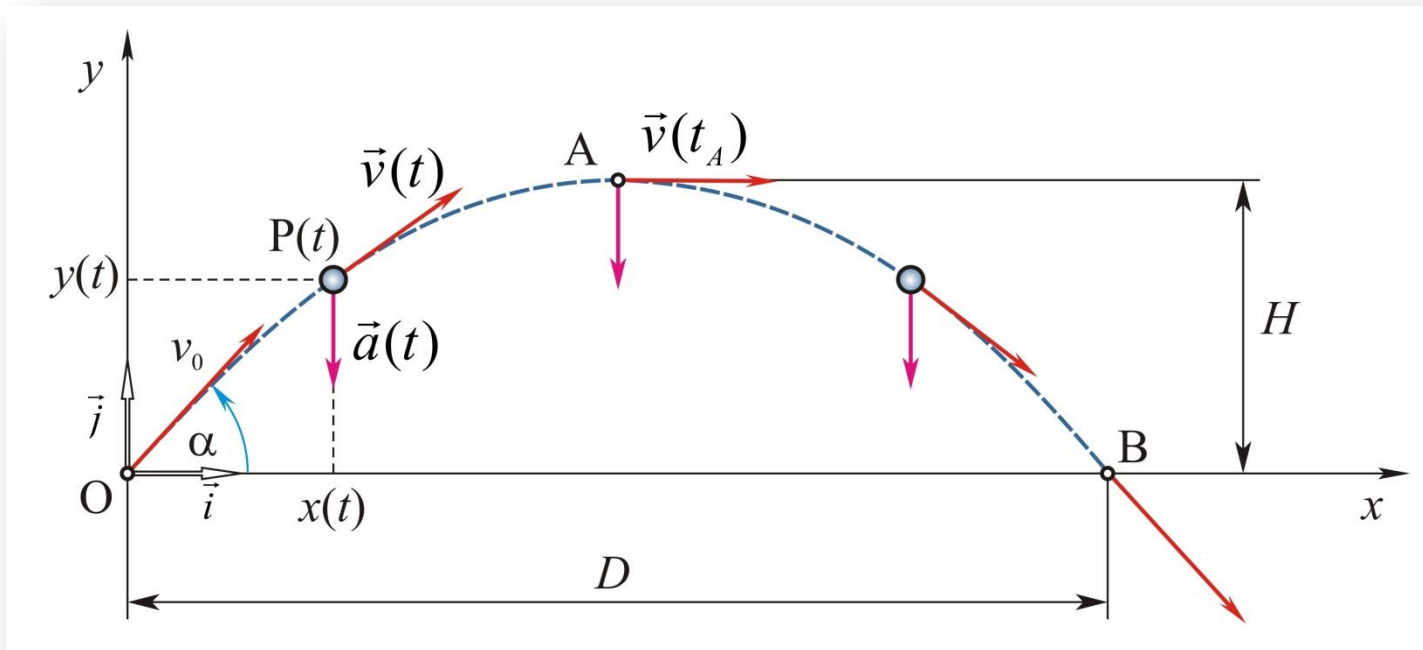
$$\dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha \quad \dot{y}(t) = v_0 \sin \alpha - g t$$

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad \ddot{y}(t) = -g$$



$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

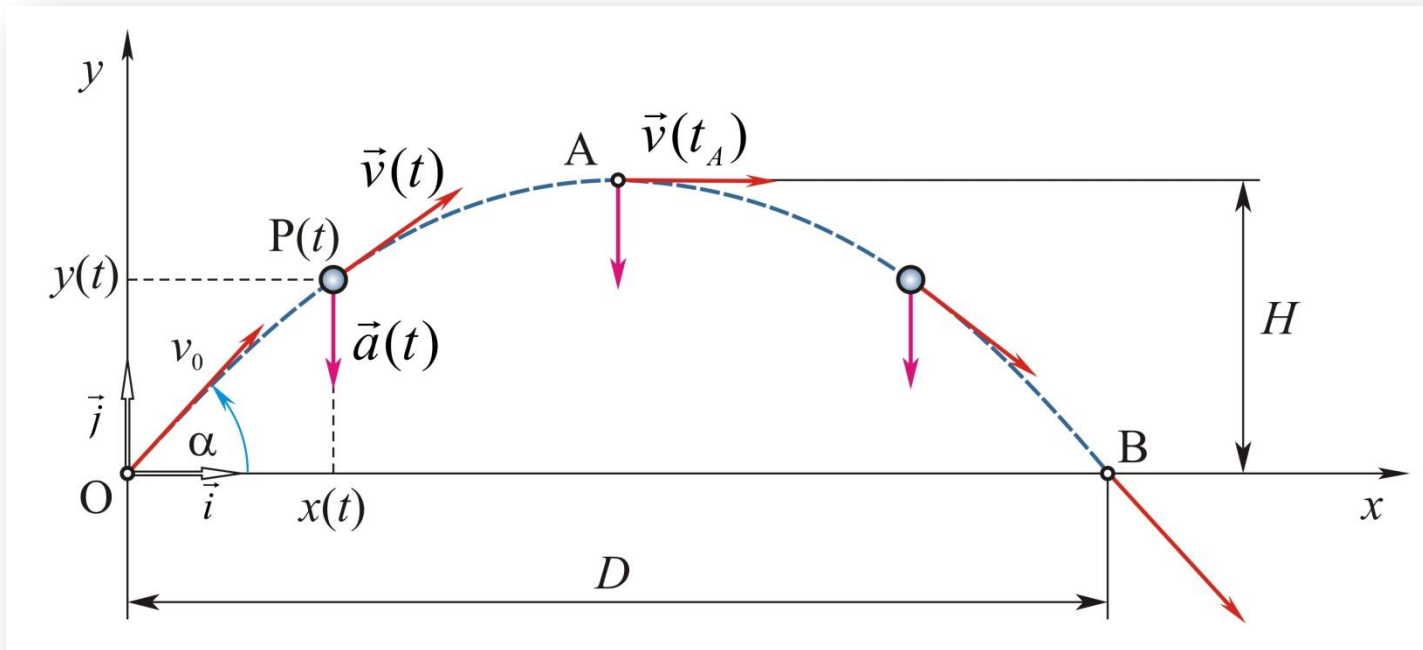
$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$



$$t = t_A \rightarrow \dot{y}(t_A) = 0 \rightarrow v_0 \sin \alpha - gt_A = 0 \rightarrow t_A = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$t = t_A \rightarrow y(t_A) = H \rightarrow H = v_0 t_A \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_A^2 = v_0 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

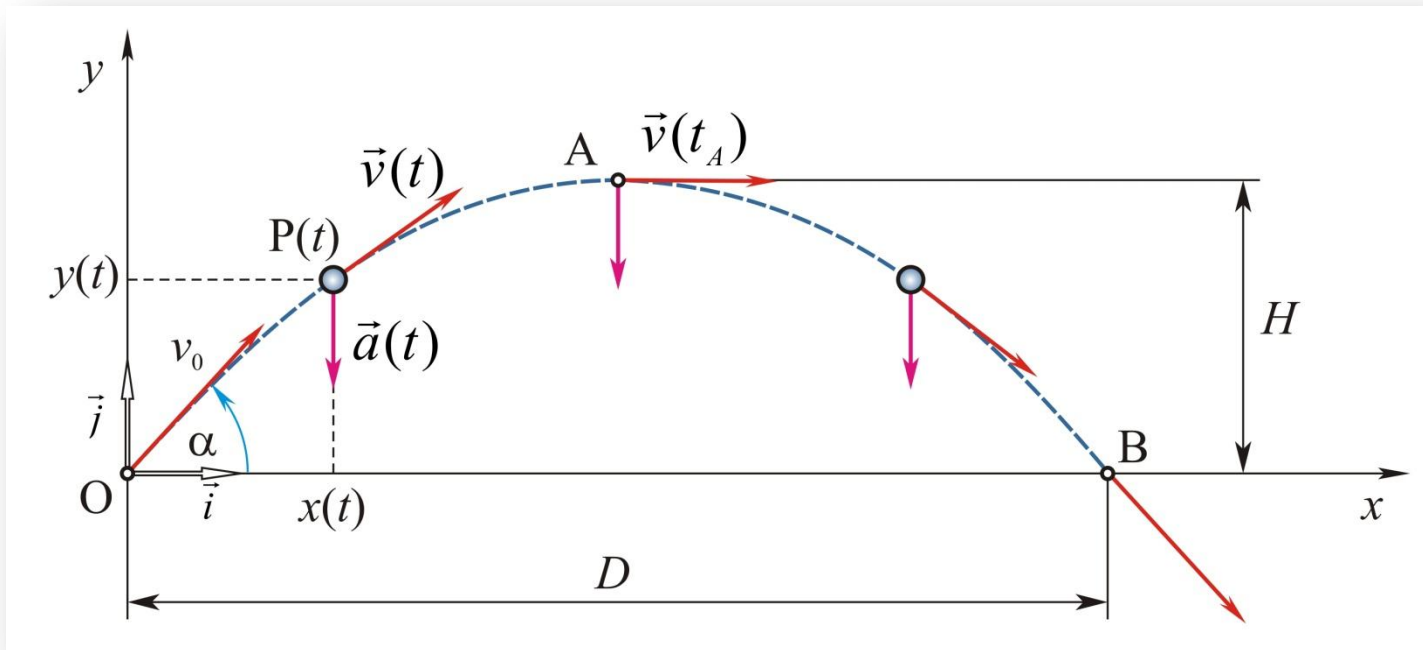


$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$



$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

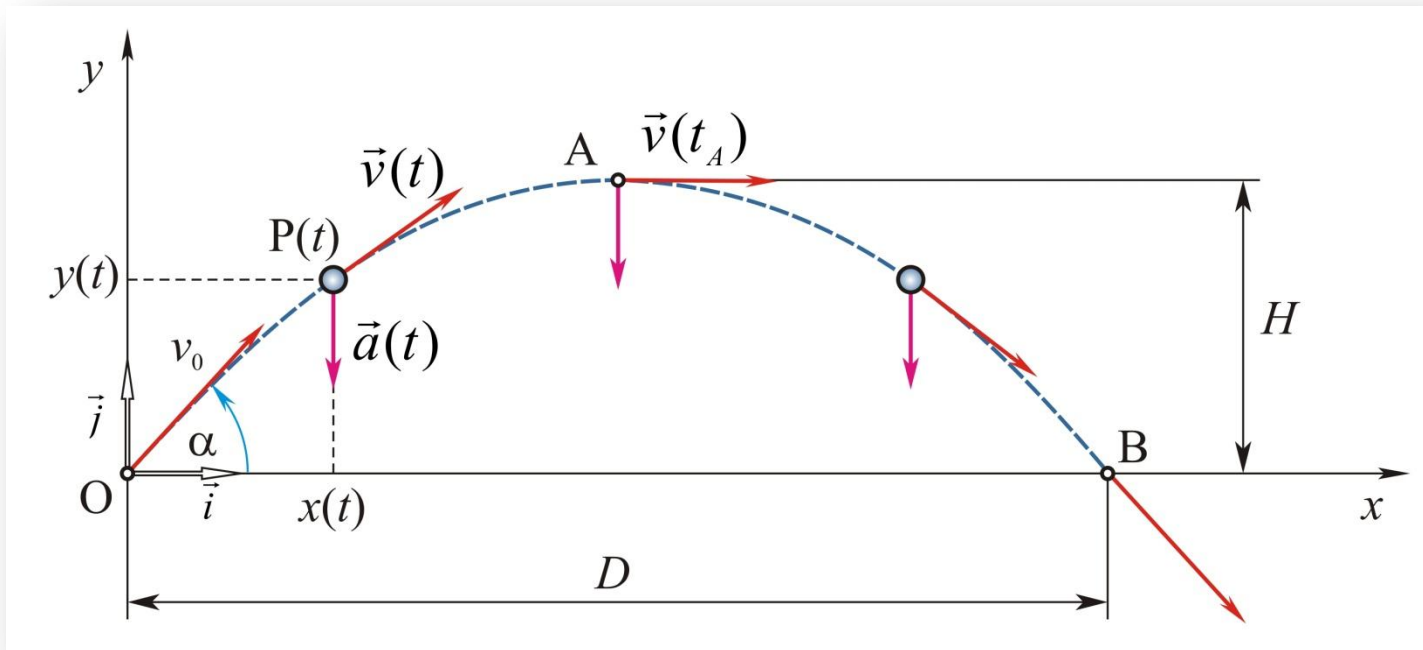
za $\alpha = \alpha_m = 90^\circ$



$$t = t_B \rightarrow y(t_B) = 0 \rightarrow v_0 t_B \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_B^2 = 0 \rightarrow t_B = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$t = t_B \rightarrow x(t_B) = D \rightarrow D = v_0 t_B \cos \alpha = v_0 \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \cos \alpha$$

$$D = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

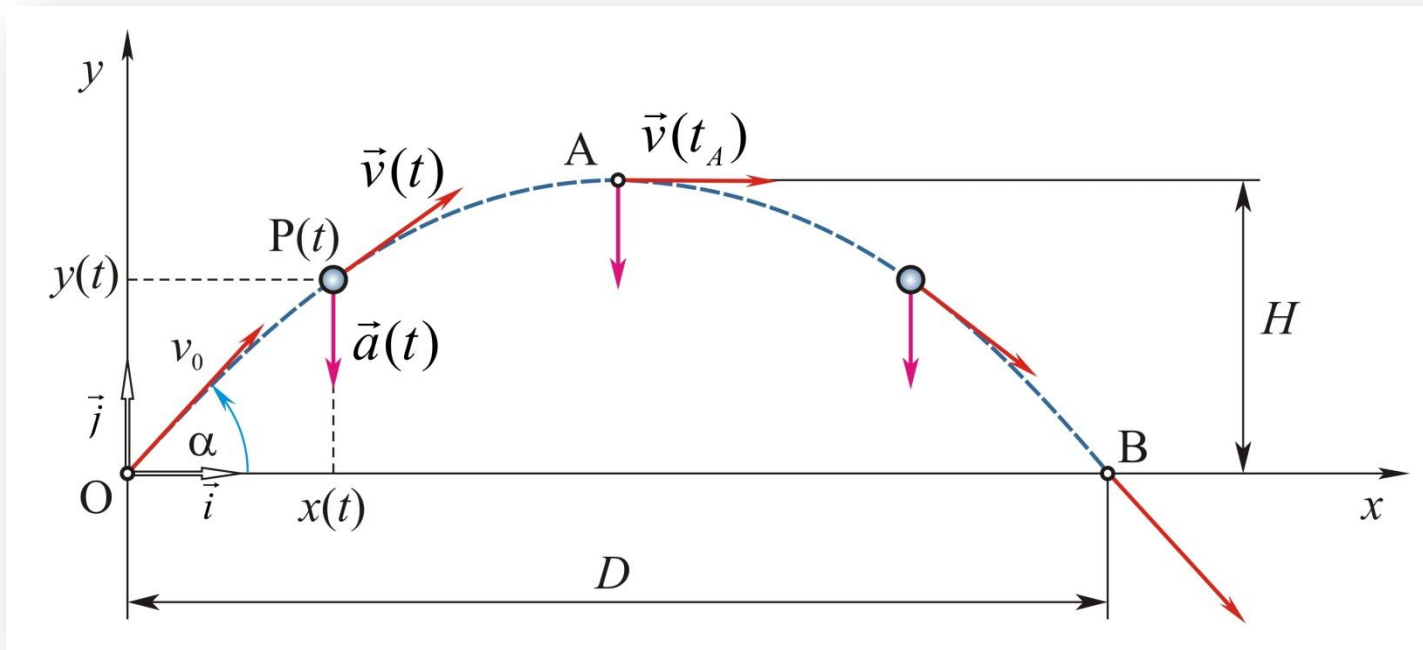


$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$



$$D_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

za $\alpha = \alpha_m = 45^\circ$

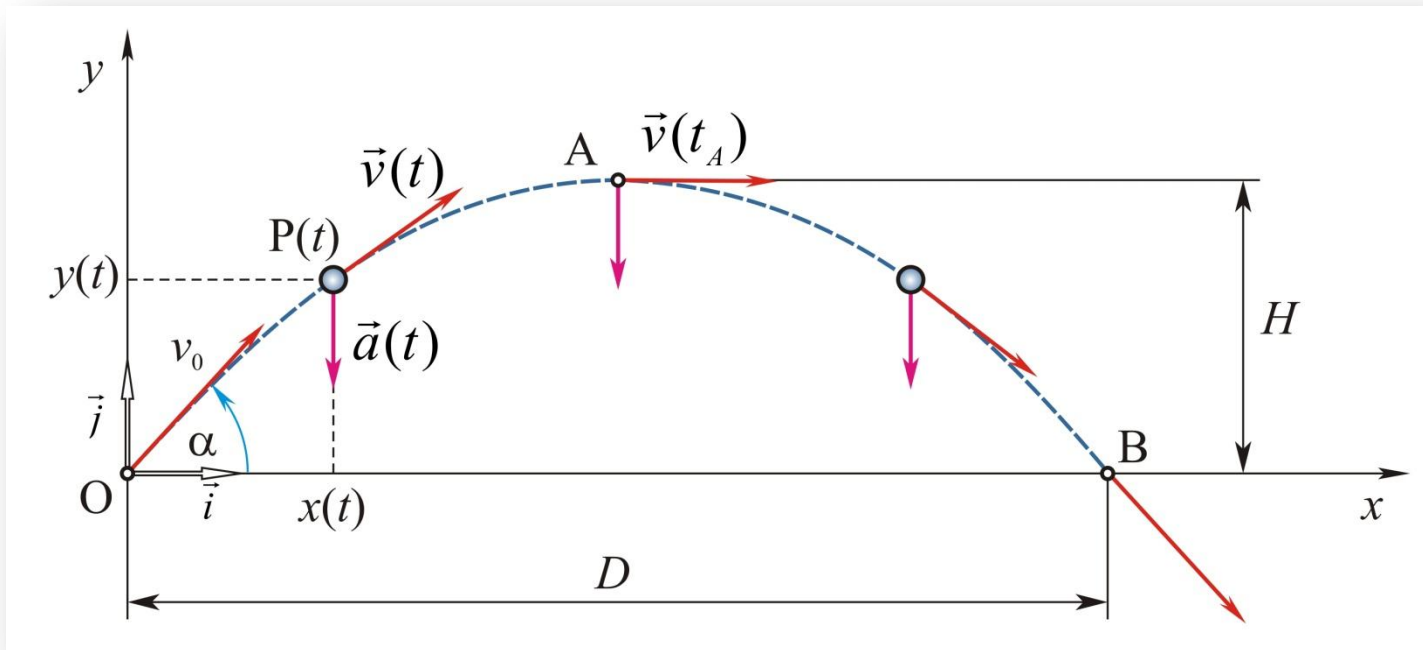


$$t = t_A = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$x(t_A) = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha) \quad y(t_A) = H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

$$\dot{x}(t_A) = v_0 \cos \alpha \quad \dot{y}(t_A) = 0$$

$$\ddot{x}(t_A) = 0 \quad \ddot{y}(t_A) = -g$$



$$t = t_B = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$x(t_B) = D = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \quad y(t_B) = 0$$

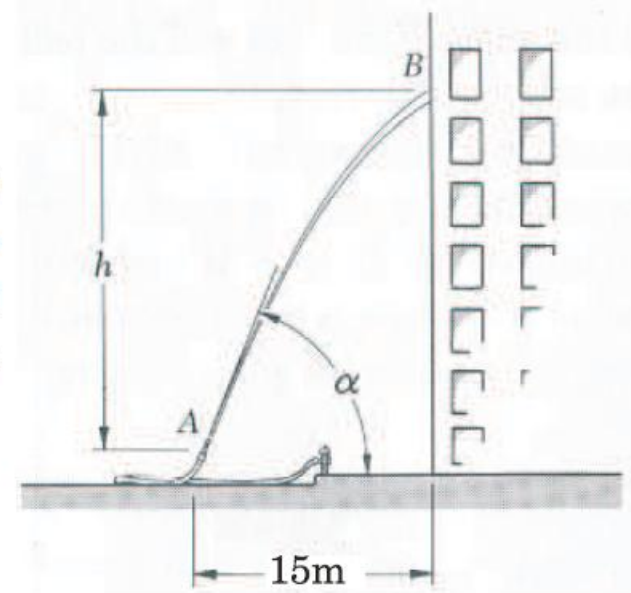
$$\dot{x}(t_B) = v_0 \cos \alpha \quad \dot{y}(t_B) = -v_0 \sin \alpha$$

$$v(t_B) = \sqrt{\dot{x}^2(t_B) + \dot{y}^2(t_B)} = v_0$$

$$\ddot{x}(t_B) = 0 \quad \ddot{y}(t_B) = -g$$

Пример

4.20 Ватрогасно црево избацује млаз воде брзином $v_0 = 25\text{ m/s}$. Ако се зна да је црево од запаљене зграде удаљено 15 m , одредити максималну висину коју може да досегне млаз воде, као и одговарајући угао α .



$$x(t) = v_0 t \cos \alpha$$

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = t_B \rightarrow x(t_B) = v_0 t_B \cos \alpha = l \rightarrow t_B = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}$$

$$t = t_B \rightarrow y(t_B) = v_0 t_B \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_B^2 = h \rightarrow h = v_0 \frac{l}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{l}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

$$h = l \tan \alpha - \frac{g l^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$h = h(\alpha) = l \tan \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\alpha} &= \frac{l}{\cos^2 \alpha} - \frac{gl^2}{v_0^2} \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{l}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{gl}{v_0^2} \tan \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dh}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_m} = 0 \rightarrow \tan \alpha_m = \frac{v_0^2}{gl}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_m} = 1 + \tan^2 \alpha_m = 1 + \frac{v_0^4}{g^2 l^2}$$

$$h_{\max} = h(\alpha_m) = l \tan \alpha_m - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_m} = l \frac{v_0^2}{gl} - \frac{gl^2}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 l^2} \right)$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gl^2}{2v_0^2}$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gl^2}{2v_0^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ l = 15 \text{ m} \\ g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} h_{\max} = 30.0894 \text{ m} \\ \alpha_m = 1.34 \text{ rad} = 76.75^\circ \end{array}$$

Шта смо научили?

- 30. Криволинијско кретање материјалне тачке. Брзина и убрзање тачке.
- 31. Брзина и убрзање тачке у Декартовом координатном систему.
- 32. Природне компоненте брзине и убрзања тачке. Полупречник кривине трајекторије.

Динамика – 1. део

Кинематика тачке – 2. део – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић