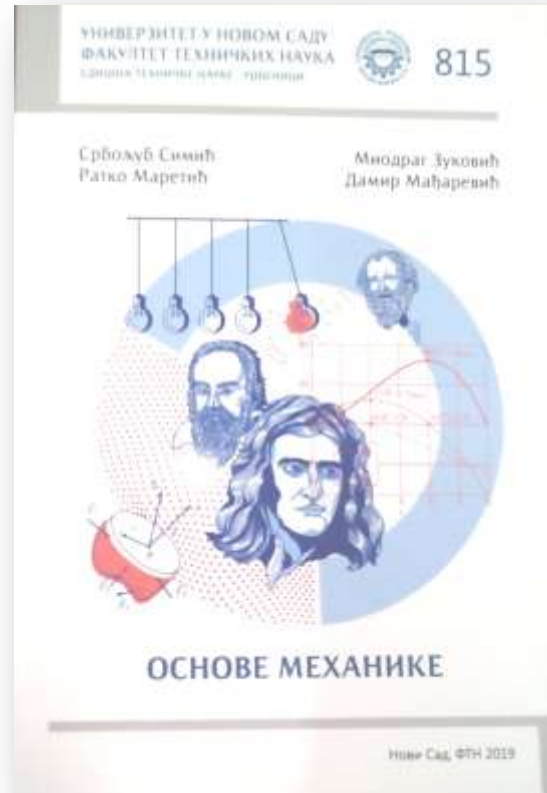


СТАТИКА

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



Шта ћемо научити?

4. Статика материјалне тачке и услови њене равнотеже.
5. Статика материјалног тела. Уравнотежени систем сила. Сила као клизећи вектор.
6. Момент силе за тачку.
7. Спрег сила.
8. Редукција силе на тачку.
9. Систем произвољних сила у равни и услови равнотеже тела.

СТАТИКА



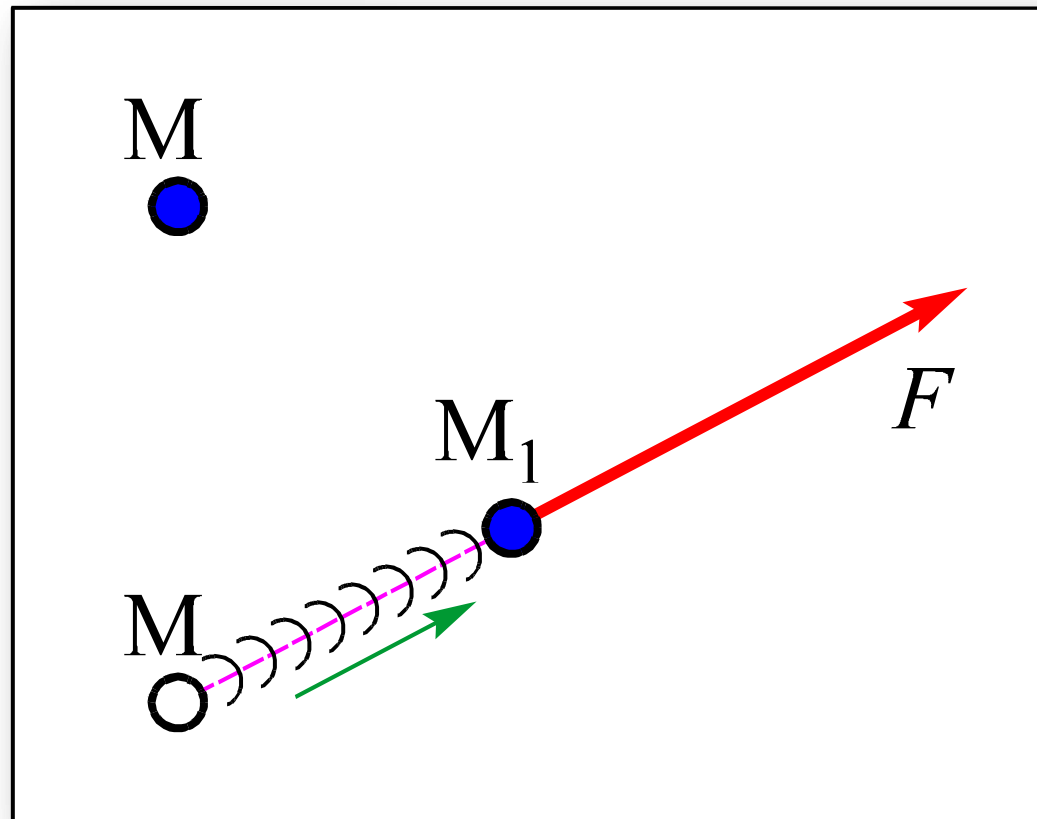
Статика проучава услове који морају бити испуњени да се неки објекат не би кретао, дакле да би остао статичан.

Статика проучава и могућност замене неког система оптерећења другим (еквивалентним) системом оптерећења који би имао исто механичко дејство.



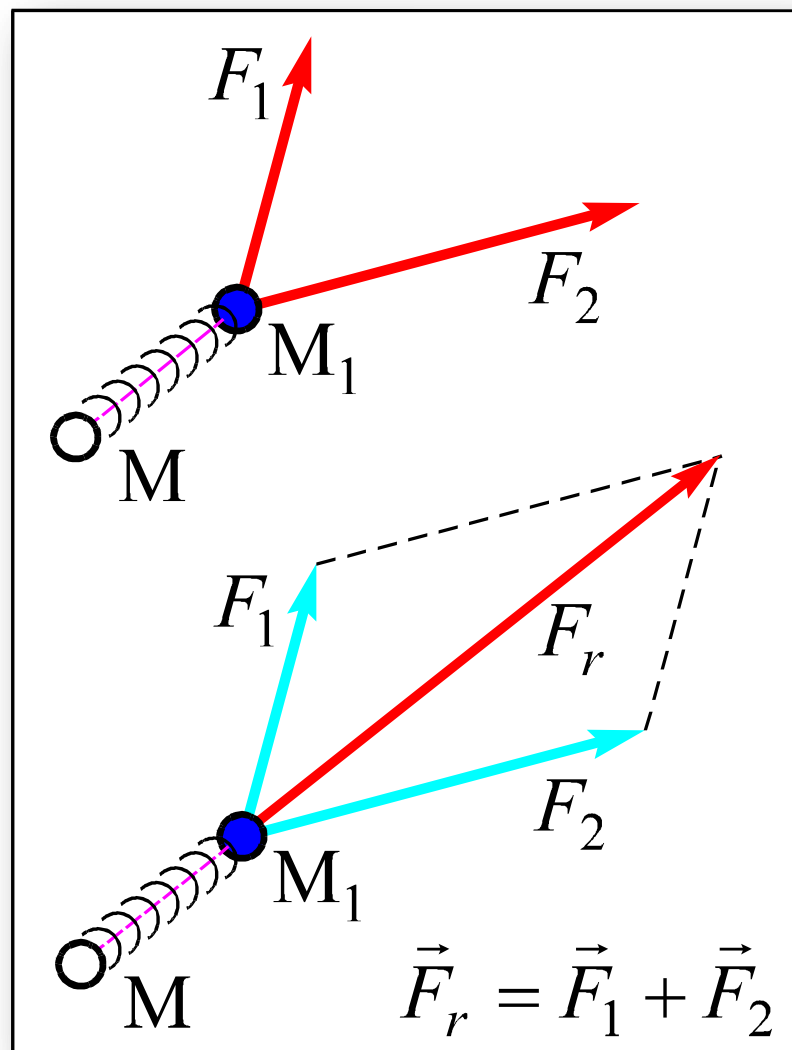
4. Статика материјалне тачке и услови њене равнотеже.

Статика материјалне тачке



Дејство само једне силе доводи до померања тачке

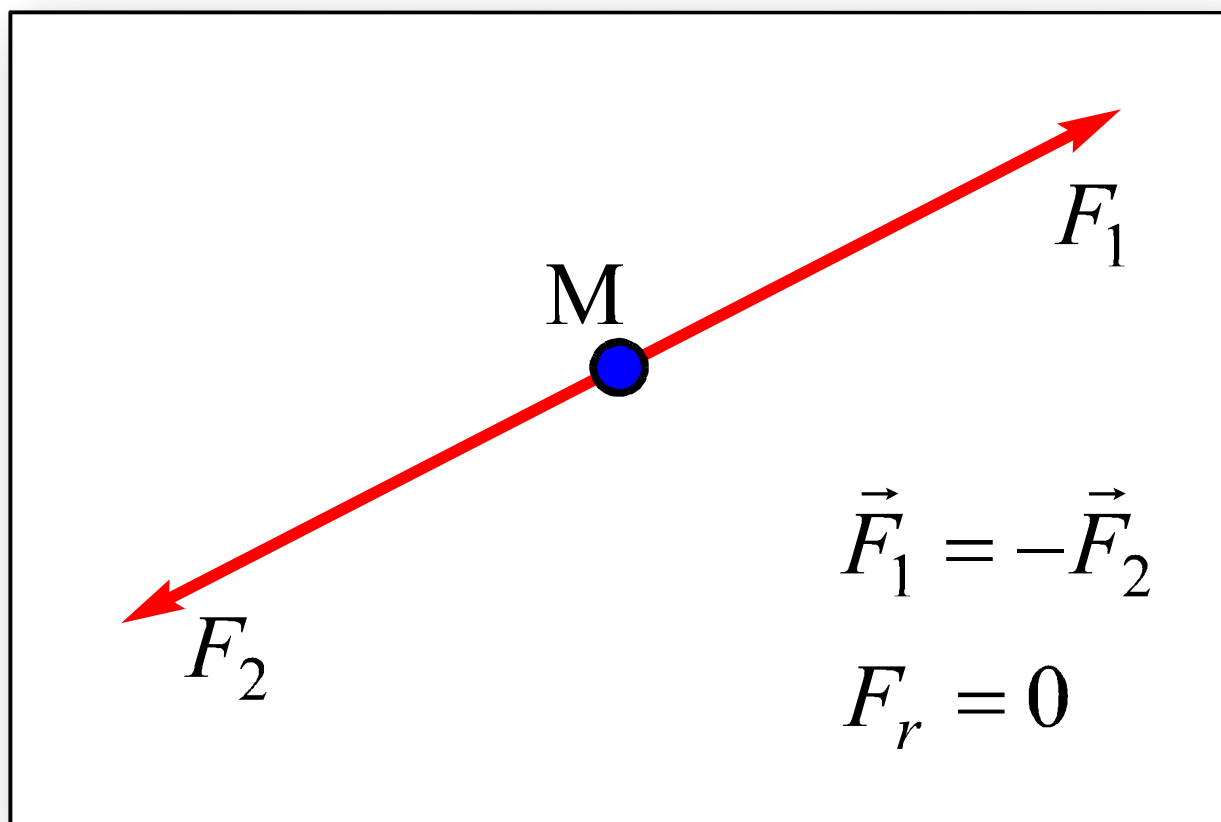
Сабирање две силе према правилу паралелограма



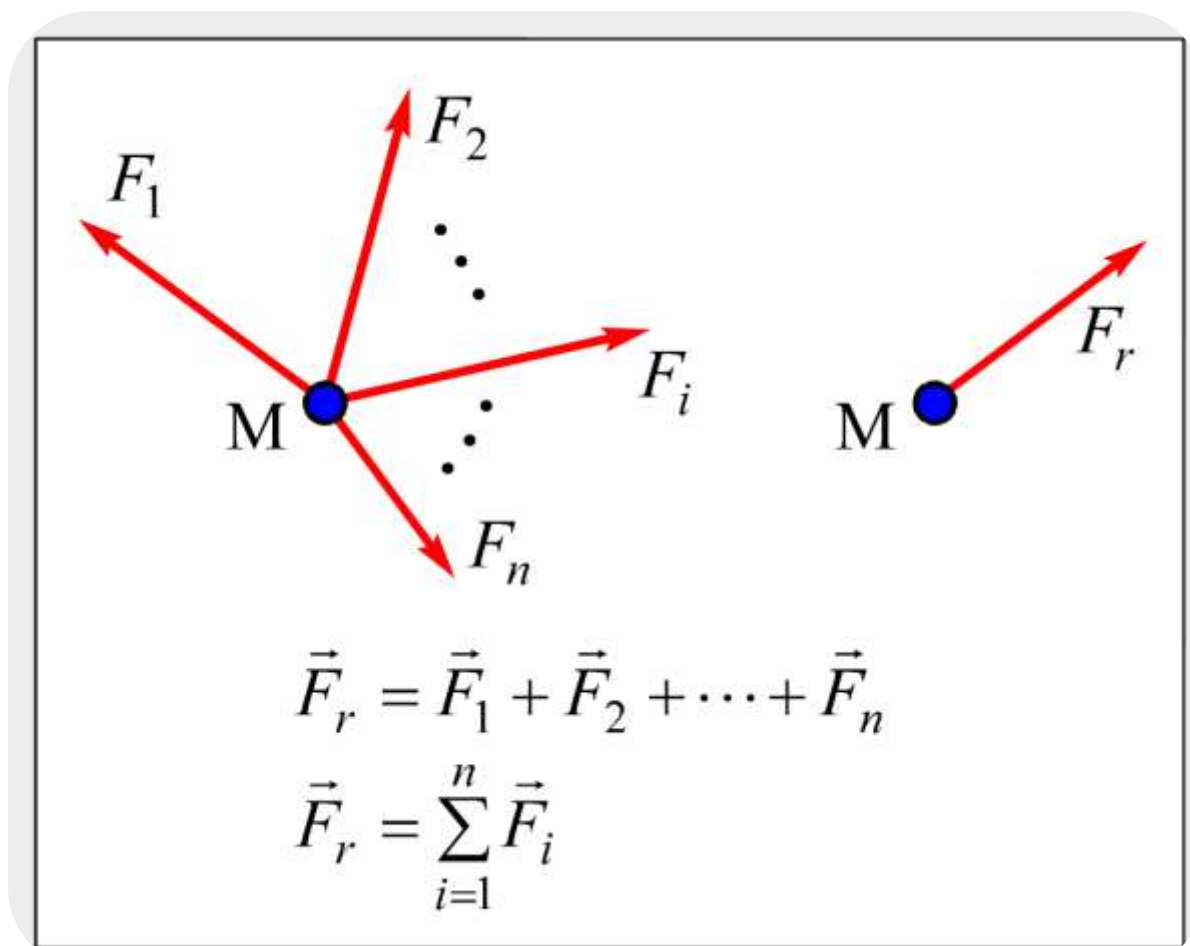
Резултанта је векторски збир сила

Резултанта је еквивалентна систему
сила и има исто механичко дејство

Резултанта је једнака нули па нема кретања. Тачка је у равнотежи



Одређивање резултанте при дејству више од две силе. Сучељни систем сила



Одређивање пројекција резултанте на осе Декартовог координатног система

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$X_r = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$Y_r = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$Z_r = \sum_{i=1}^n Z_i$$

Услови равнотеже материјалне тачке

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \text{векторски}$$

скаларне једначине

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0$$

Поједностављени запис аналитичких услова равнотеже материјалне тачке

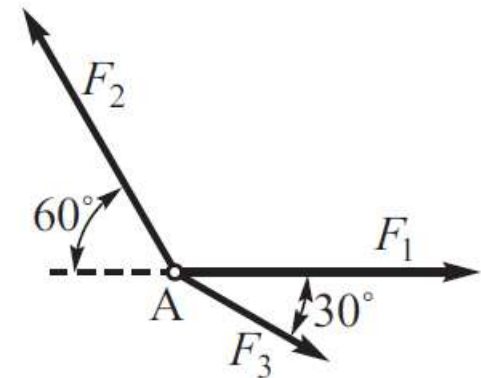
$$\sum X_i = 0$$

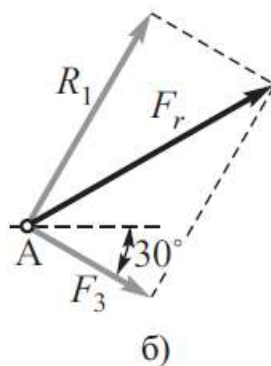
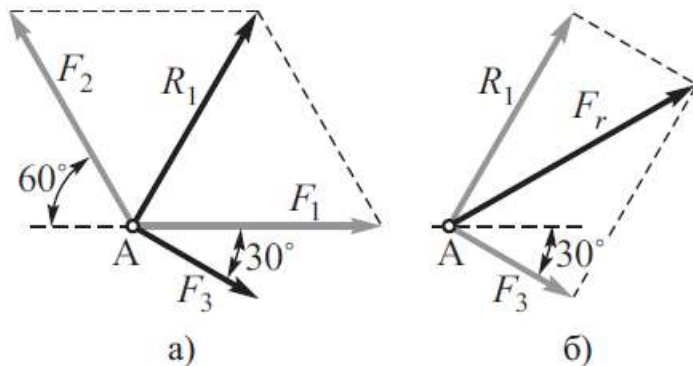
$$\sum Y_i = 0$$

$$\sum Z_i = 0$$

Пример

Пример 2.1 Материјална тачка A изложена је дејству сила чији је распоред у равни дат на слици. Интензитет ових сила је $F_1 = 300\text{ N}$, $F_2 = 300\text{ N}$ и $F_3 = 100\text{ N}$. Одредити резултанту датих сила. Хоће ли тачка тачка A бити у равнотежи?





результанта R_1 (слика а)). Затим треба сабрати силе R_1 и F_3 , на основу чега се добија коначна резултанта F_r (слика б)). Ова метода је геометријска па подразумева да се дужине вектора цртају у одређеној размери, а да се по добијању резултанте њена дужина измери и на основу размере прерачуна њен интензитет. Очигледно је да је ова метода незгодна за примену, поготово у случају већег броја сила.

► Резултанта задатих сила добија се њиховим векторским сабирањем. Једна од могућности одређивања резултанте је директна примена правила паралелограма. Према том правилу се сабирају по две силе, тако да ће се прво сабрати силе F_1 и F_2 чиме се добија њихова ре-

При решавању задатака је знатно ефикасније резултанту одредити аналитичким поступком. У том случају ће се према (2.1) написати векторски израз:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3,$$

који се, имајући у виду да је у питању равански проблем, може свести на два скаларна израза

$$X_r = X_1 + X_2 + X_3;$$

$$Y_r = Y_1 + Y_2 + Y_3,$$

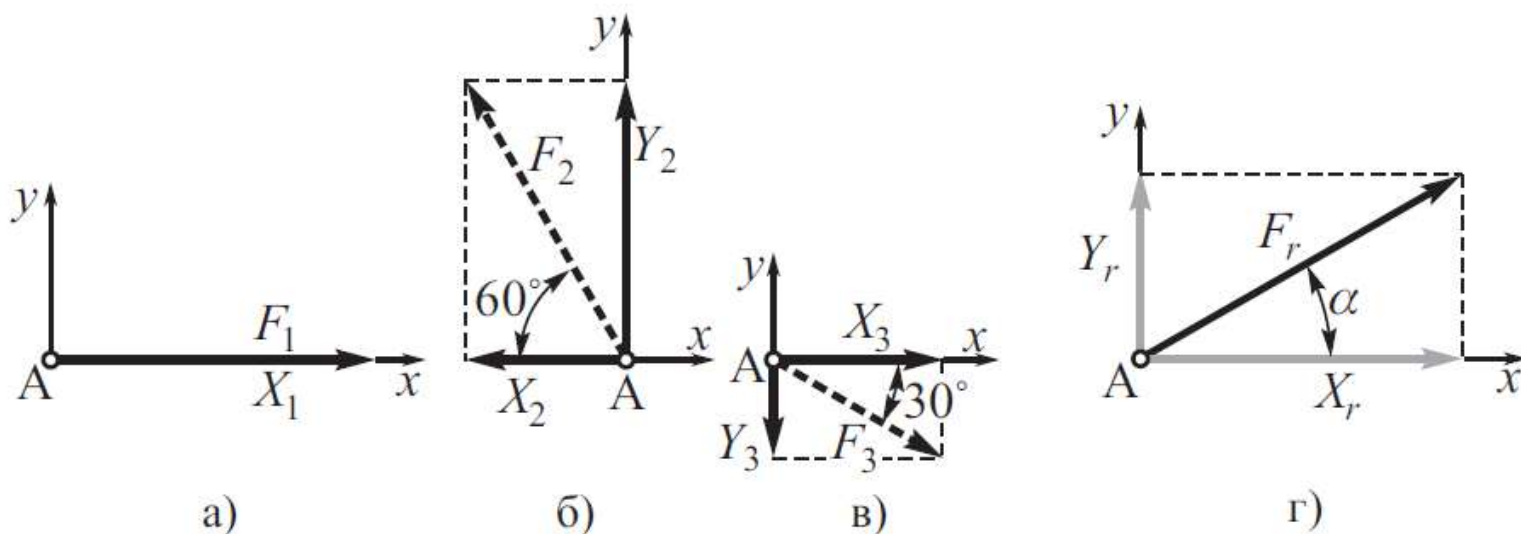
при чему је уведен координатни систем xAy . На Сликама 2.5 а), б) и в) је приказано како се за сваку од задатих сила могу одредити и њене пројекције. На тај начин се добија

$$X_1 = F_1 = 300N;$$

$$Y_1 = 0N;$$

$$X_2 = -F_2 \cos 60^\circ = -150N; \quad Y_2 = F_2 \sin 60^\circ = 150\sqrt{3}N;$$

$$X_3 = F_3 \cos 30^\circ = 150N; \quad Y_3 = -F_3 \sin 30^\circ = -50\sqrt{3}N.$$



Слика 2.5: Анализа сила

Сабирањем пројекција задатих сила добија се да су пројекције резултанте

$$X_r = 300N; \quad Y_r = 100\sqrt{3}N.$$

На основу пројекција резултанте се сада може нацртати и сама резултанта која је приказана на Слици 2.5 г). Интензитет резултанте је:

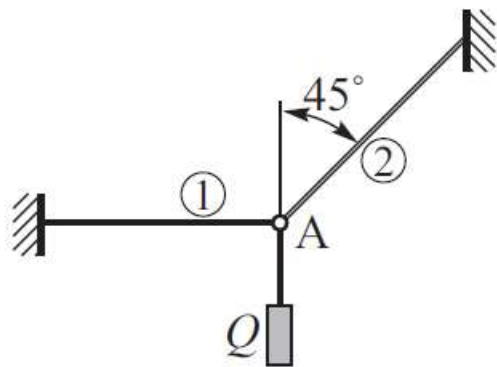
$$F_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2} = \sqrt{300^2 + (100\sqrt{3})^2} = 200\sqrt{3}N,$$

док се угао α одређује на основу:

$$\tan \alpha = \frac{Y_r}{X_r} = \frac{100\sqrt{3}}{300} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ.$$

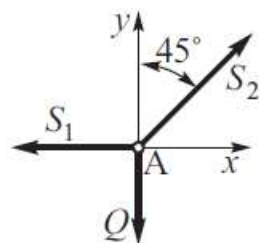
Једначине равнотеже (2.4) нису задовољене тако да нема говора о равнотежи тачке А, односно ова тачка ће се под дејством проученог система сила кретати. ◀

Пример



Пример 2.2 Два ужета означена на слици са 1 и 2 су међусобно својим крајевима везана у тачки А док су им преостали крајеви везани за зидове. У тачки А је везано и уже за које је везан терет тежине Q . Одредити реакције везе.

► Када би уклонили ужад 1 и 2, тачка А би се под дејством активне силе тежине Q кретала. Међутим, како ова ужад постоје, она потпуно онемогућавају кретање тачке А, што значи да за њу представљају везу. Према томе, тачка А је везана тачка. Сада ће се замислити да су ужад 1 и 2 уклоњена, али да је њихово дејство на тачку А замењено одговарајућим утицајима које ужад врше на тачку А. То су реакције везе које су у случају ужета силе S_1 и S_2 , чији је интензитет непознат, које су у правцу ужета и чији је смер је од тачке А (слика 2.11.2). На тај начин на тачку А делују три силе чији се правци секу у тачки А, што значи да се ради о систему раванских сучељних сила. Под дејством ових сила, од којих су две непознате, тачка А ће бити у равнотежи. У случају да се изабере приказани координатни систем, две једначине равнотеже ће гласити:



$$\sum X_i = -S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -S_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 = 0;$$

$$\sum Y_i = S_2 \cos 45^\circ - Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - Q = 0.$$

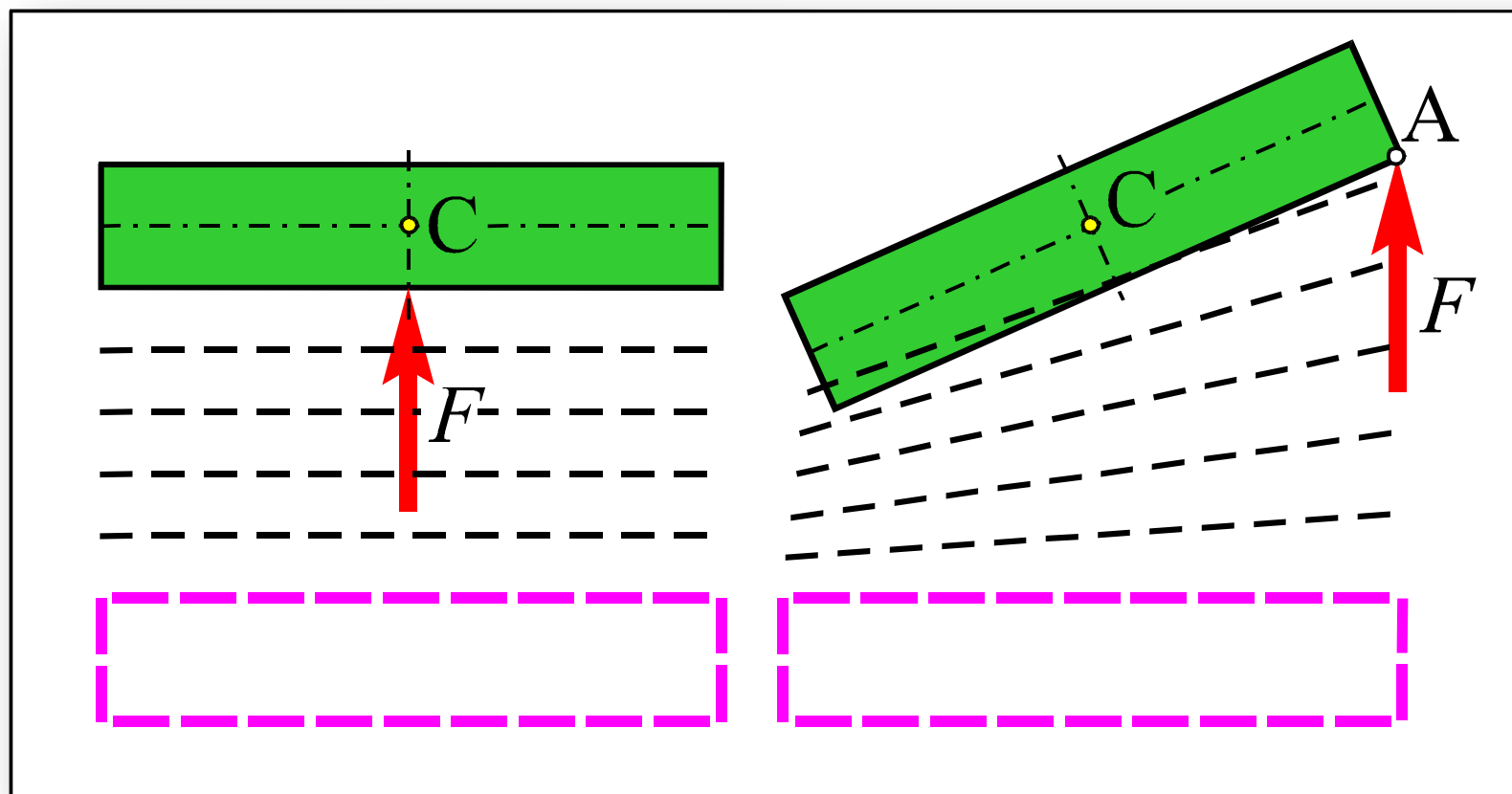
Решење овог система од две једначине са две непознате је

$$S_1 = Q; \quad S_2 = \sqrt{2}q.$$

Треба уочити да смер сила S_1 и S_2 , обавезно мора бити у приказаном смеру, јер је уже способно само да “повуче” тачку А, а не и да је “гурне”. ◀

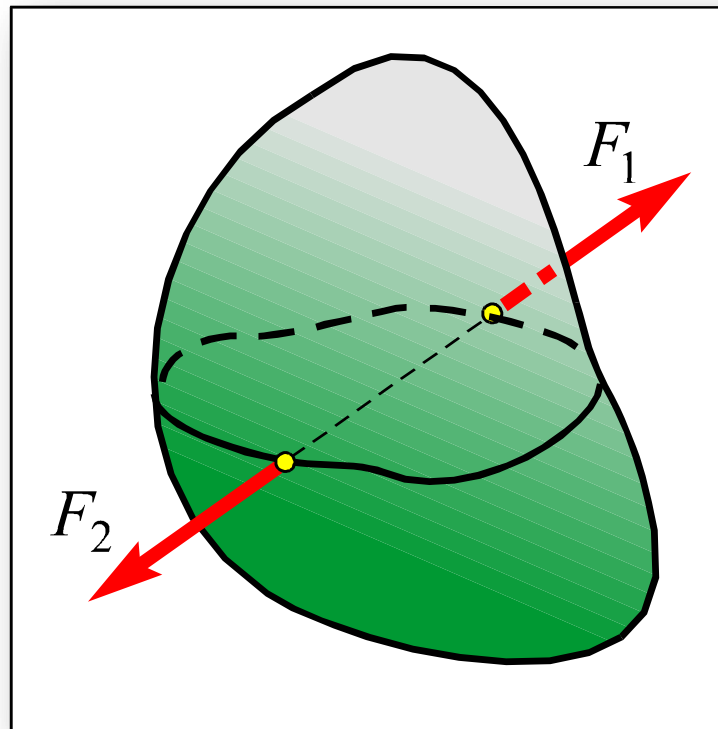
5. Статика материјалног тела.
Уравнотежени систем сила. Сила као
клизећи вектор.

Кретање тела при дејству једне силе зависи од нападне тачке силе



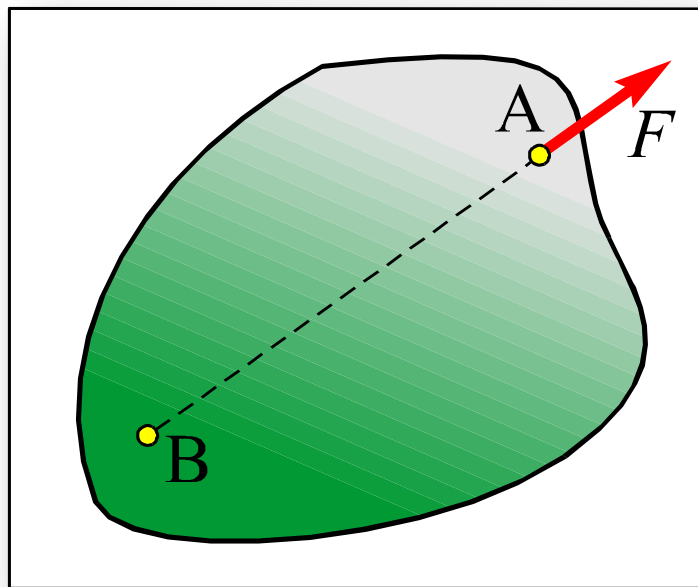
Уравнотежени систем сила

Две силе истог интензитета и правца, а
супротног смера

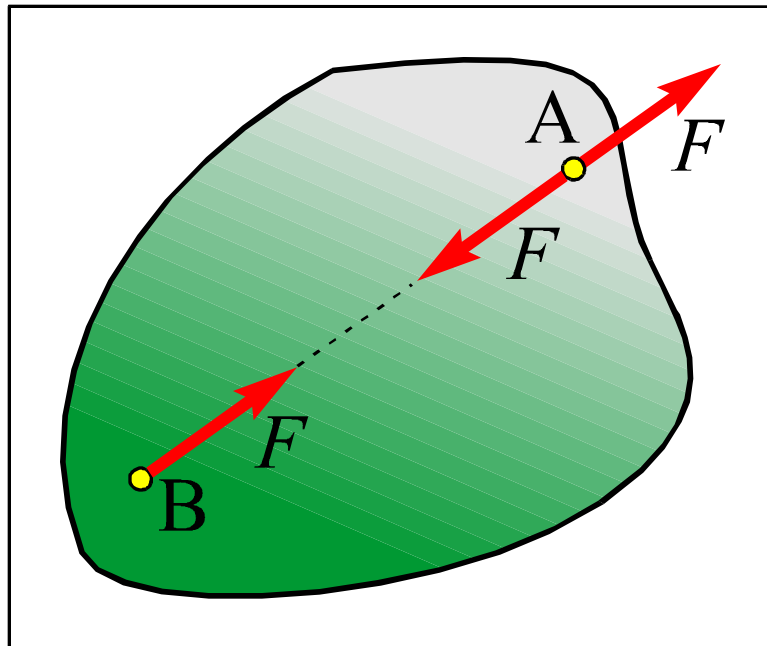


Сила као клизећи вектор

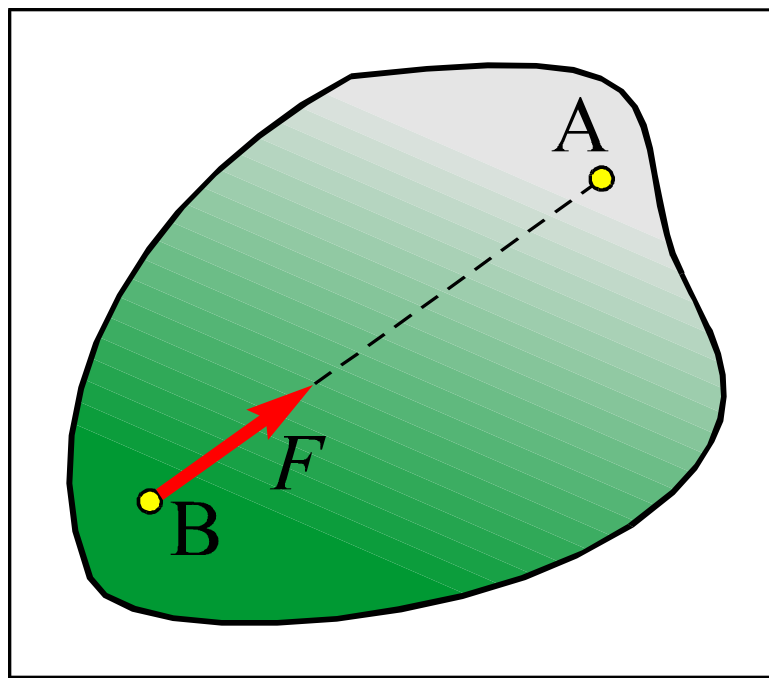
Почетно стање - нападна тачка је А



Додавање уравнотеженог система сила не доводи до промене механичког дејства

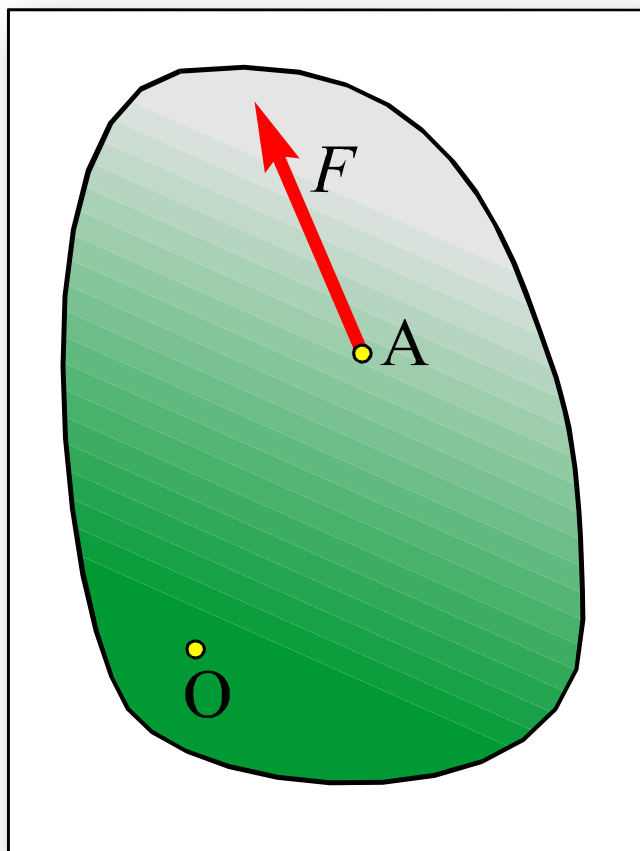


Уклањање уравнотеженог система сила не
доводи до промене механичког дејства
Крајње стање – нападна тачка је В

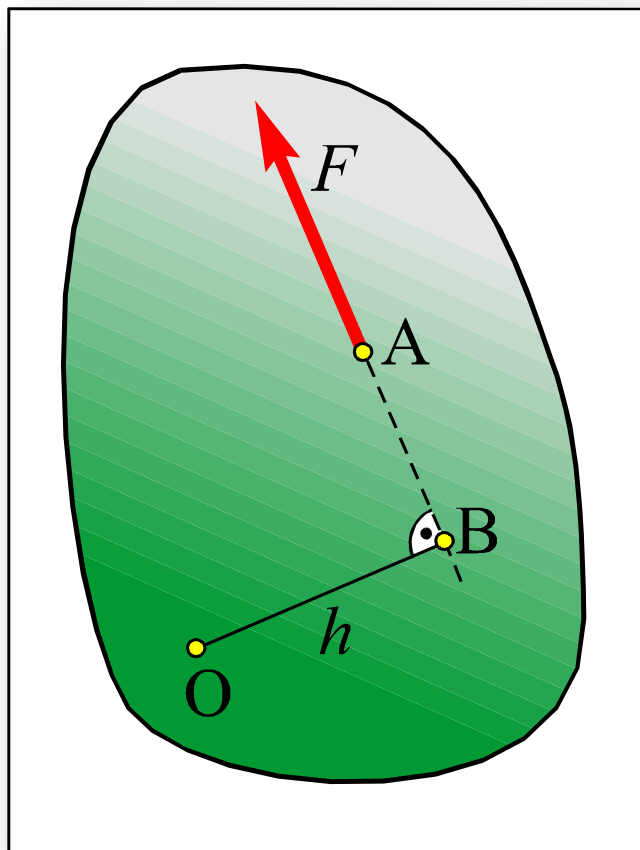


6. Момент силе за тачку.

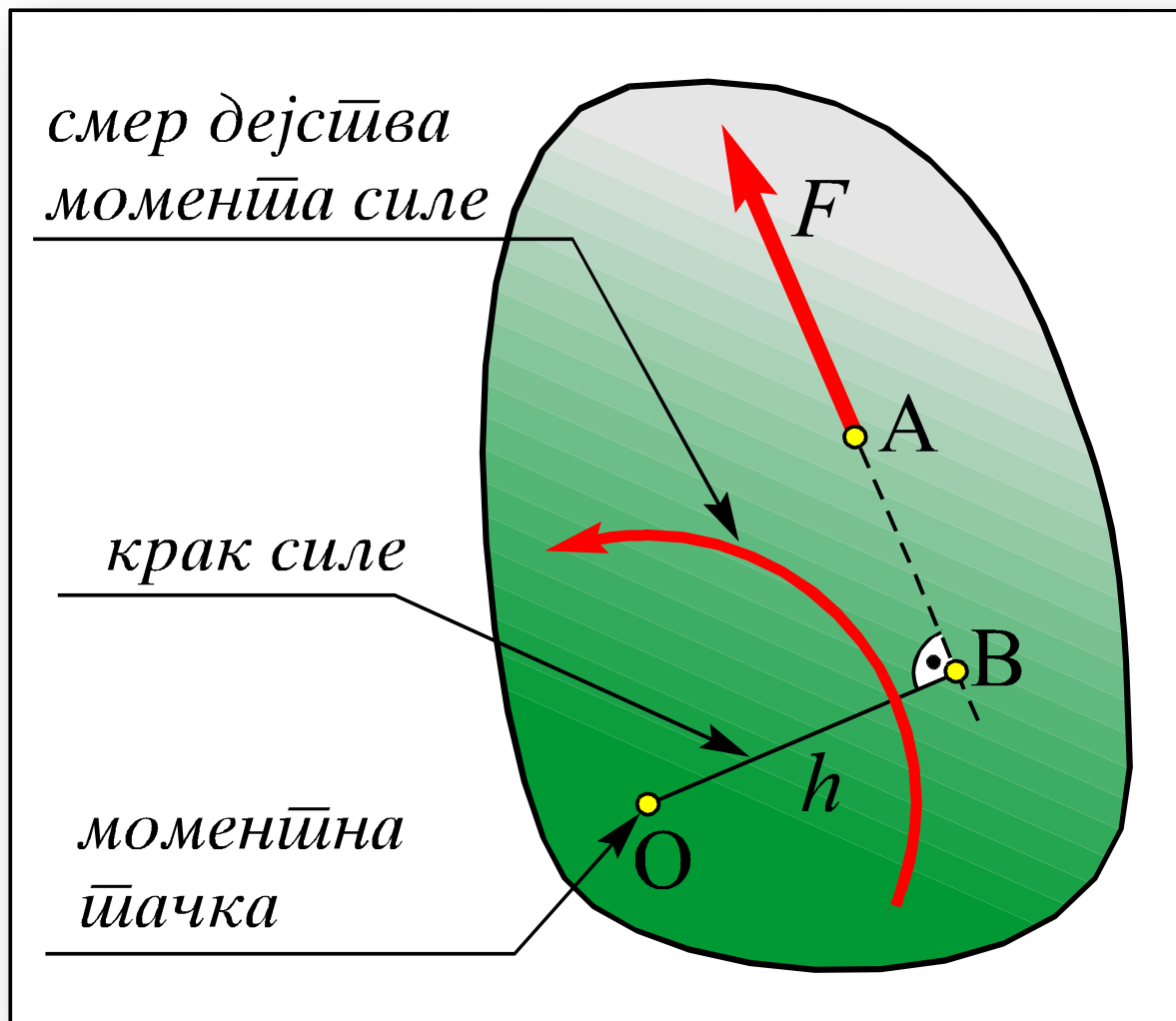
Проблем: одредити момент силе F за тачку O



Графичка конструкција за одређивање крака момента силе

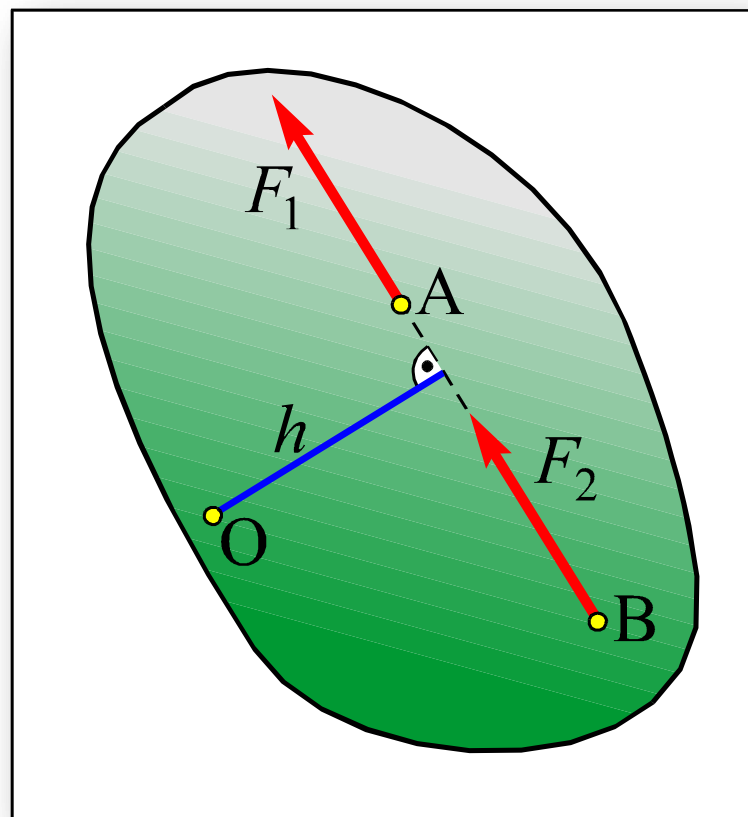
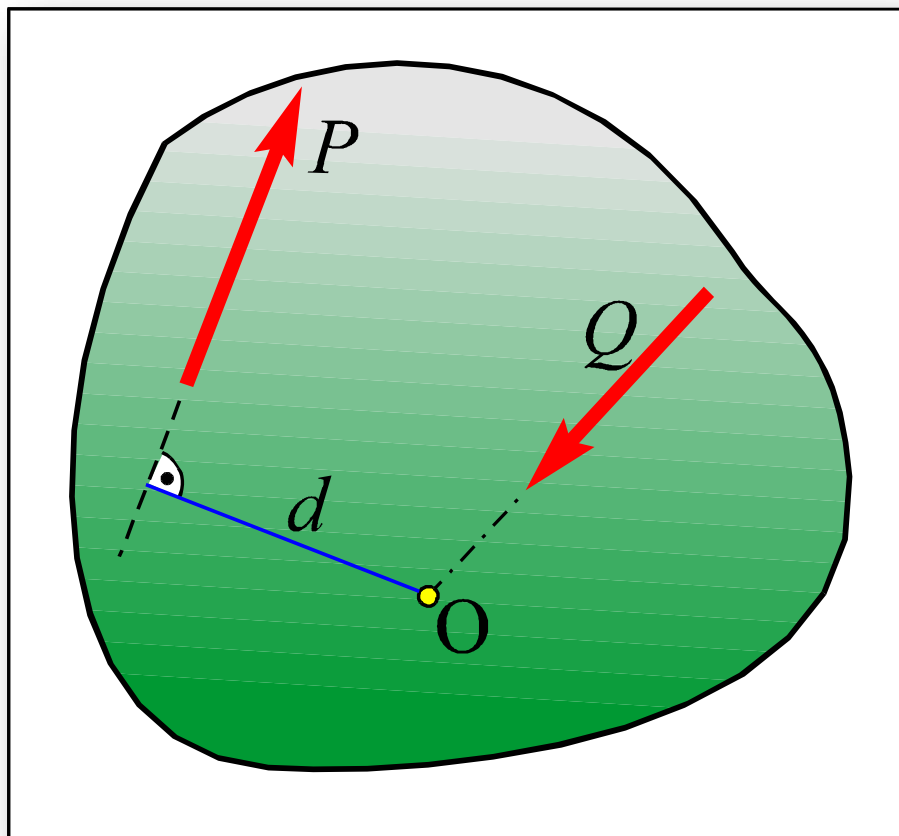


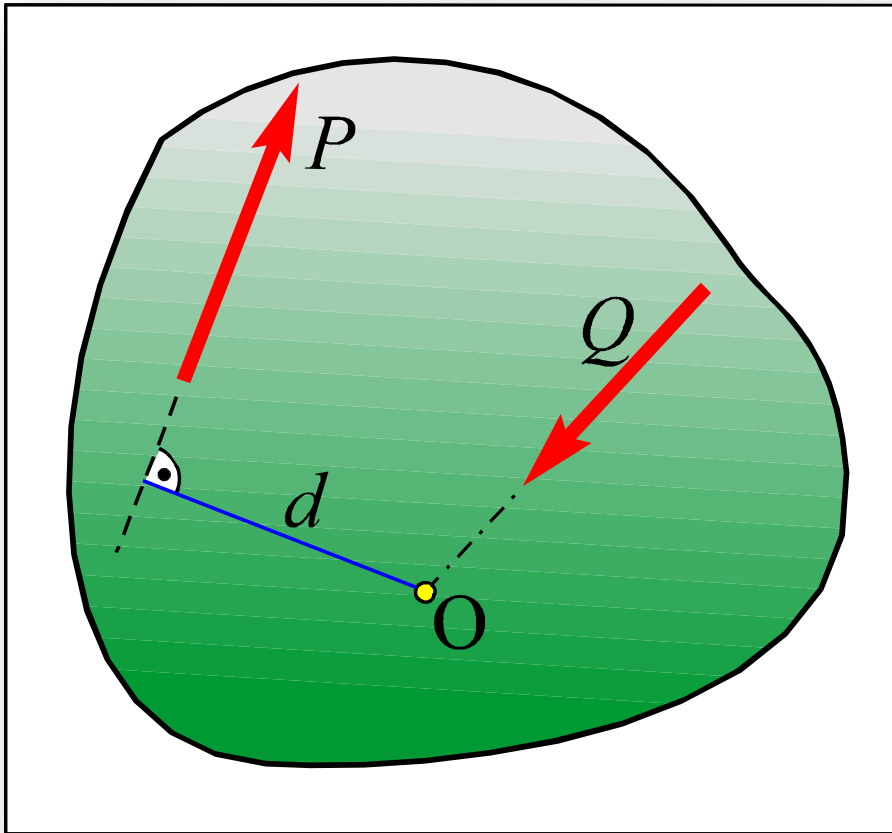
Елементи момента силе за тачку



$$M_O^F = F h$$

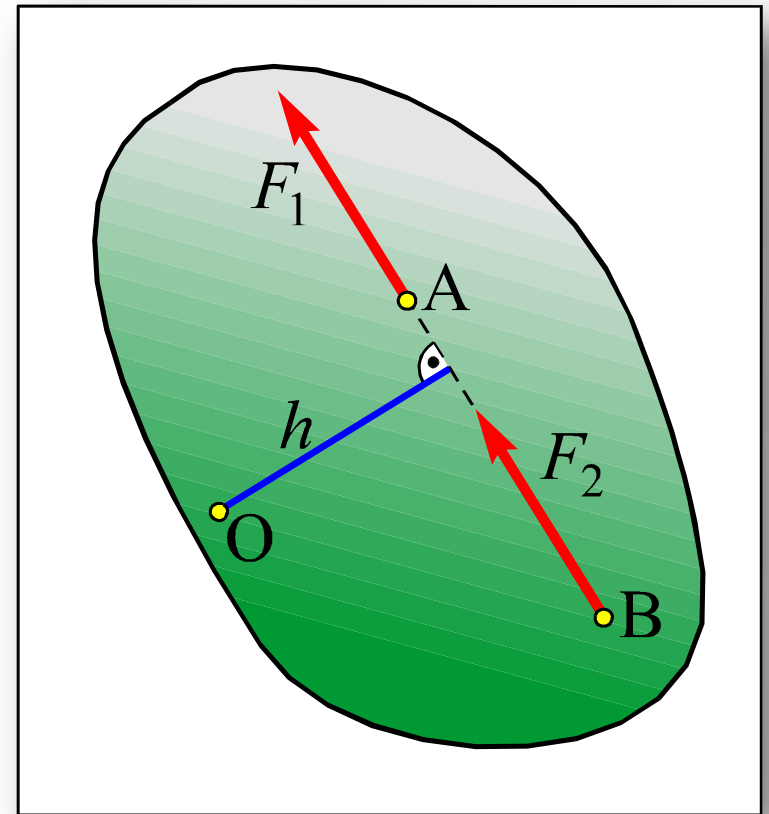
Примери одређивања момента силе за тачку





$$M_0^{\vec{P}} = -P \cdot d$$

$$M_0^{\vec{Q}} = 0$$

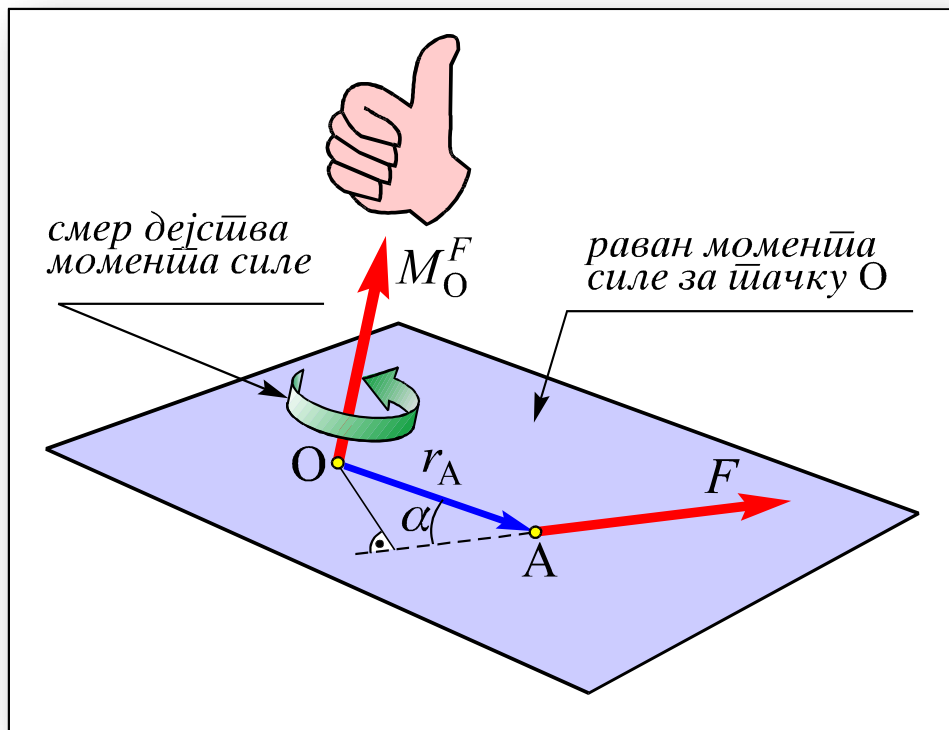


$$M_0^{\vec{F}_1} = F_1 \cdot d$$

$$M_0^{\vec{F}_2} = F_2 \cdot d$$

$$F_1 = F_2 = F \rightarrow M_0^{\vec{F}_1} = M_0^{\vec{F}_2} = F \cdot d$$

Момент силе за тачку је вектор који зависи од избора моментне тачке



$$\vec{M}_O^F = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

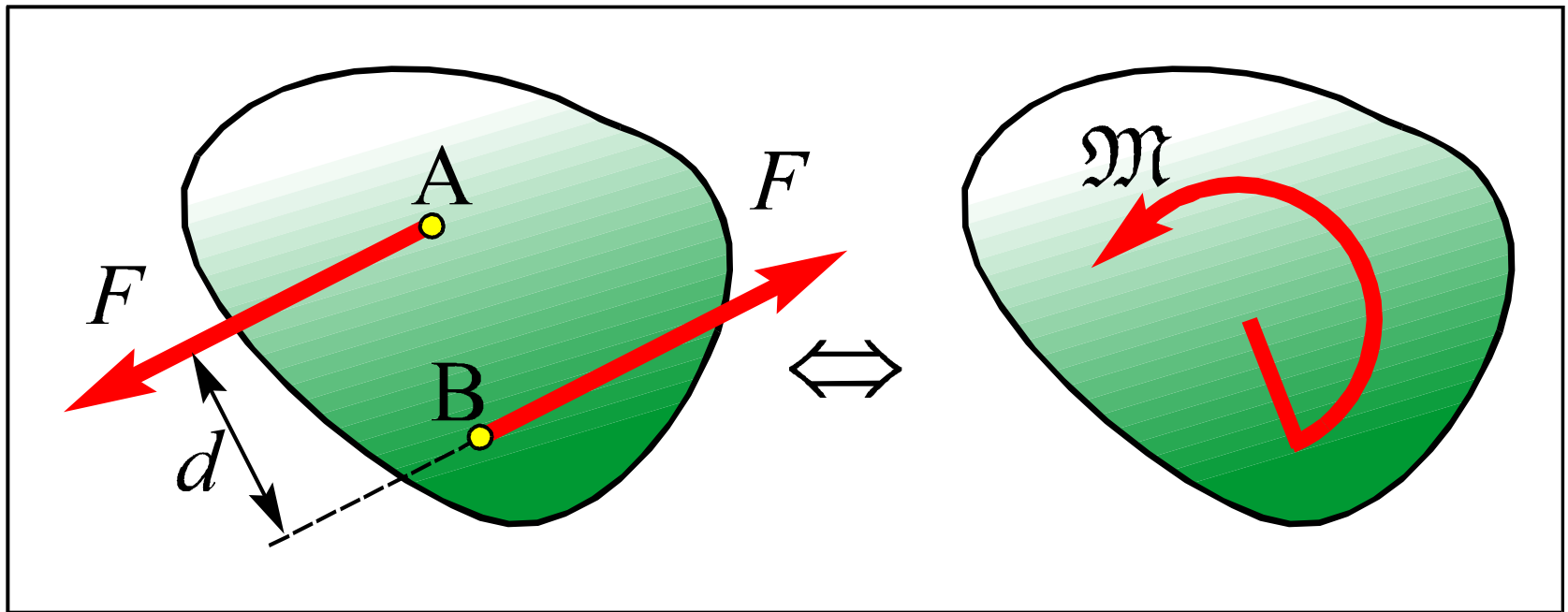
$$M_O^F = |\vec{M}_O^F| = r_A \sin \alpha F$$

$$r_A \sin \alpha = h$$

$$M_O^F = F h$$

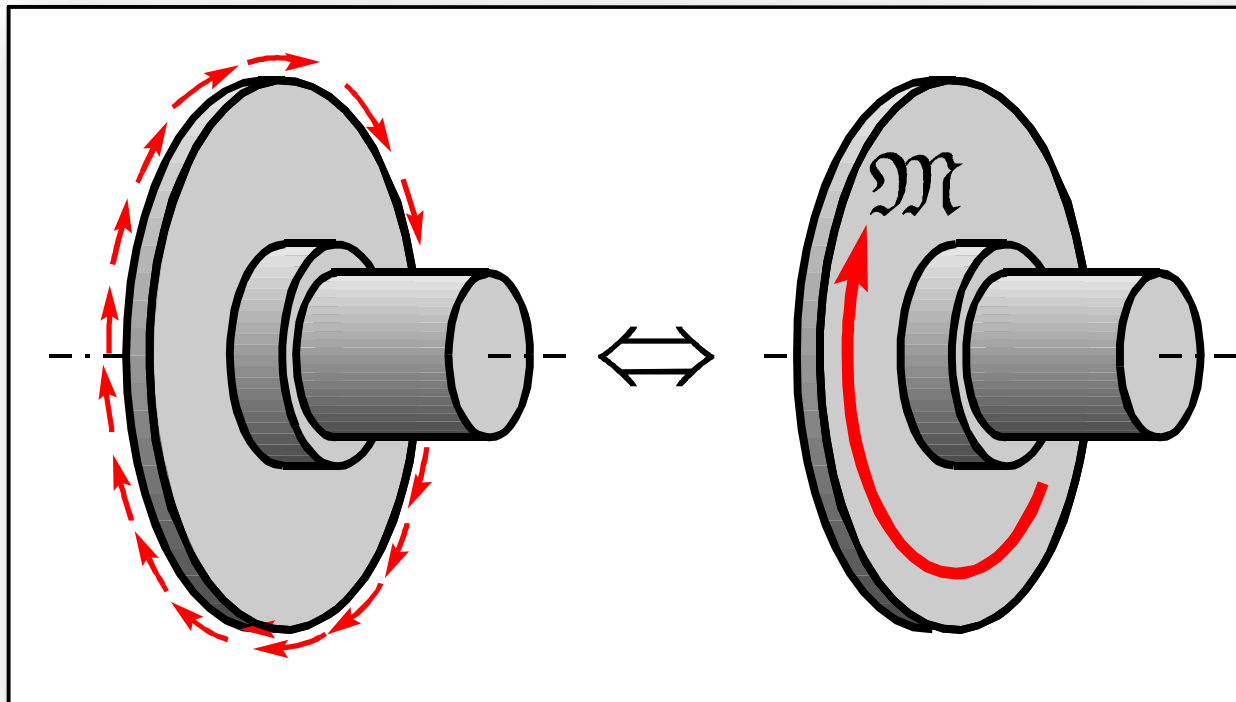
7. Спрег сила.

Дефинисање спрега сила и његова еквивалентност са спрегом

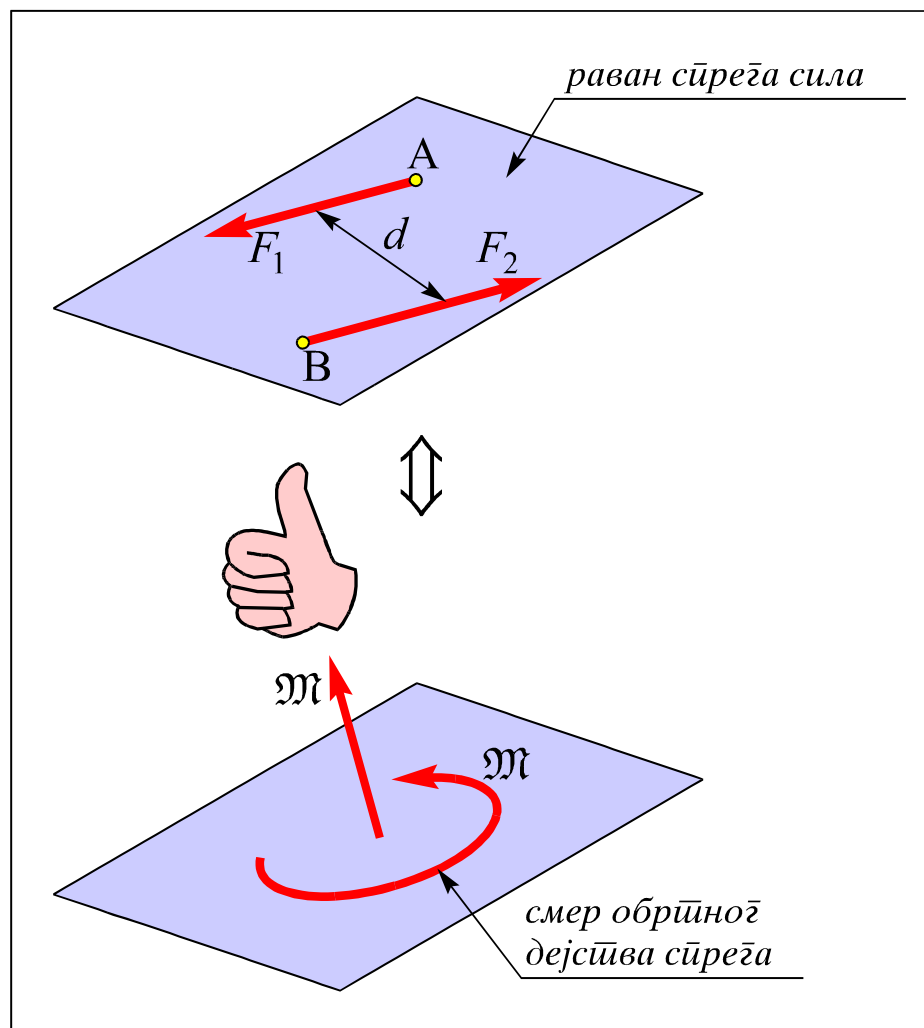


$$\mathfrak{M} = F \cdot d$$

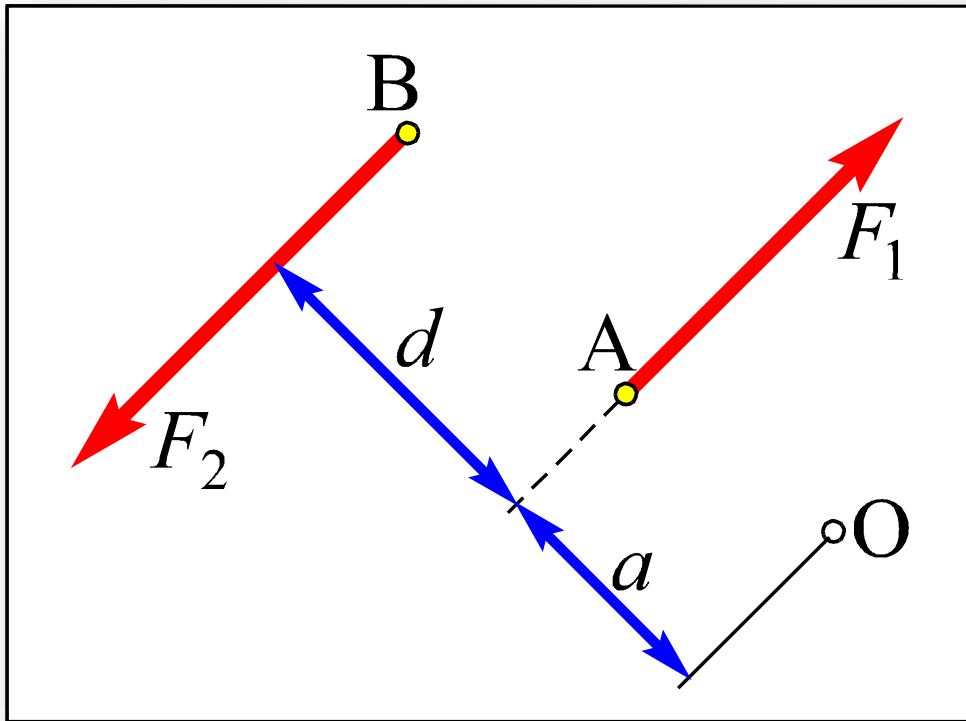
Заједничко дејство обимних сила се своди на спрег



Спрег сила и спрег се могу приказати и као вектори



Момент спрега сила не зависи од избора моментне тачке



$$F_1 = F_2 = F$$

$$M_O^{F_1} + M_O^{F_2} = -F_1 a + F_2 (a + d) = F d$$

Сабирање спрегова резултујући спрег

$$\vec{\mathfrak{M}}_r = \sum \vec{\mathfrak{M}}_i$$

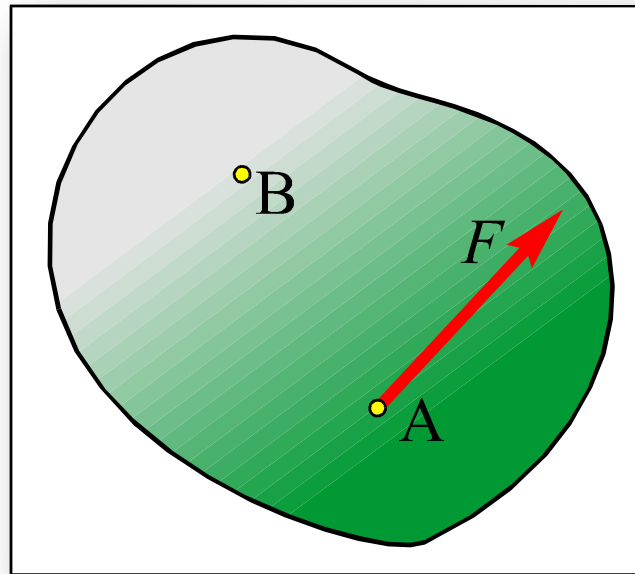
векторски збир

$$\mathfrak{M}_r = \sum \mathfrak{M}_i$$

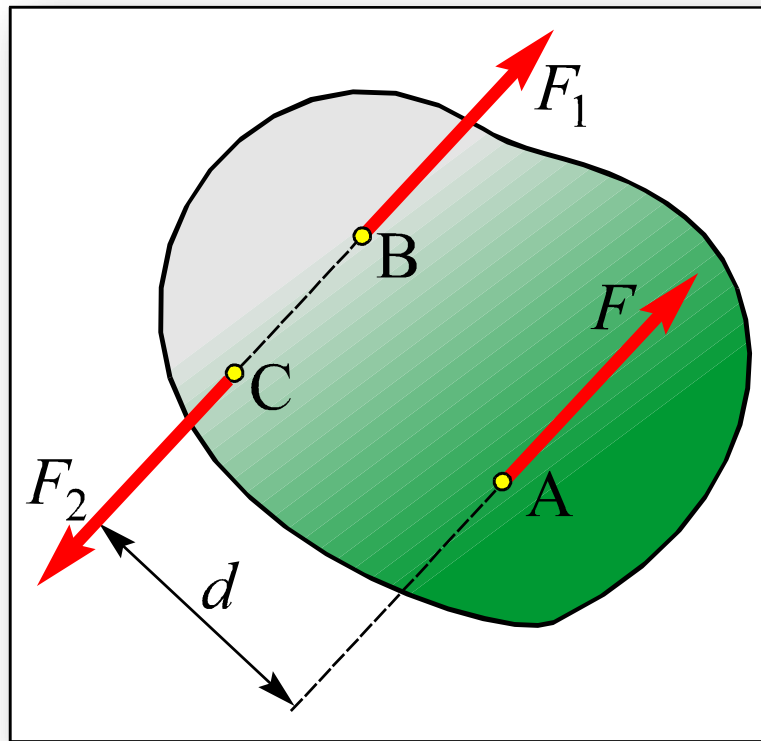
Специјалан случај
паралелни вектори

8. Редукција силе на тачку.

Да ли ће се при паралелном преношењу
силе F из тачке A у тачку B променити и
њено механичко дејство?

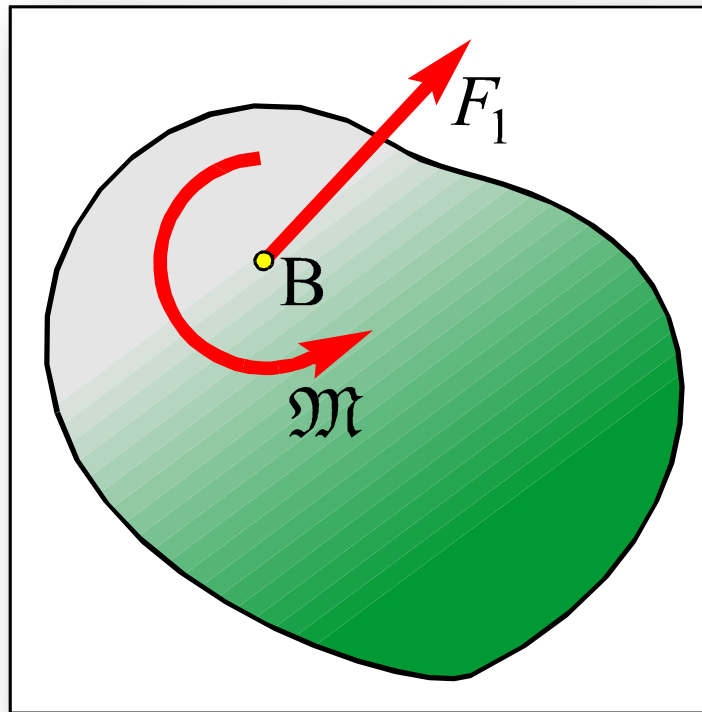


Додавање уравнотеженог система сила не доводи до промене механичког дејства



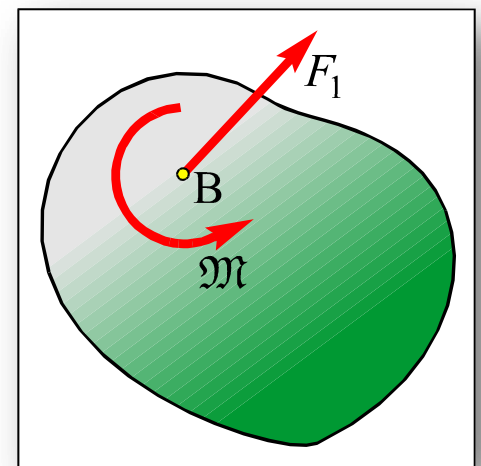
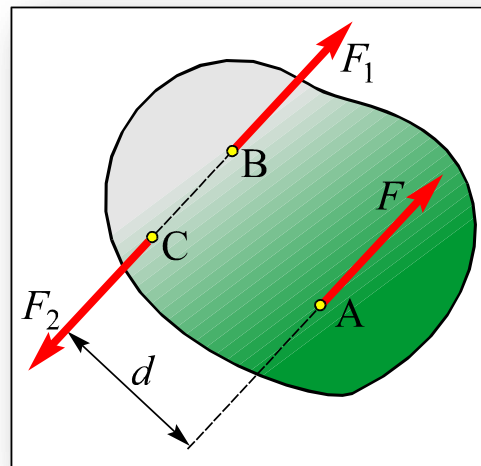
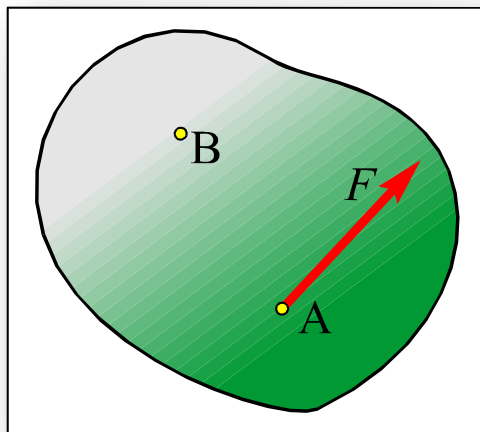
$$F_1 = F_2 = F$$

Да би при паралелном преношењу силе
било исто механичко дејство сили се мора
додати и спрег



$$\mathfrak{M} = M_B^{\vec{F}}$$

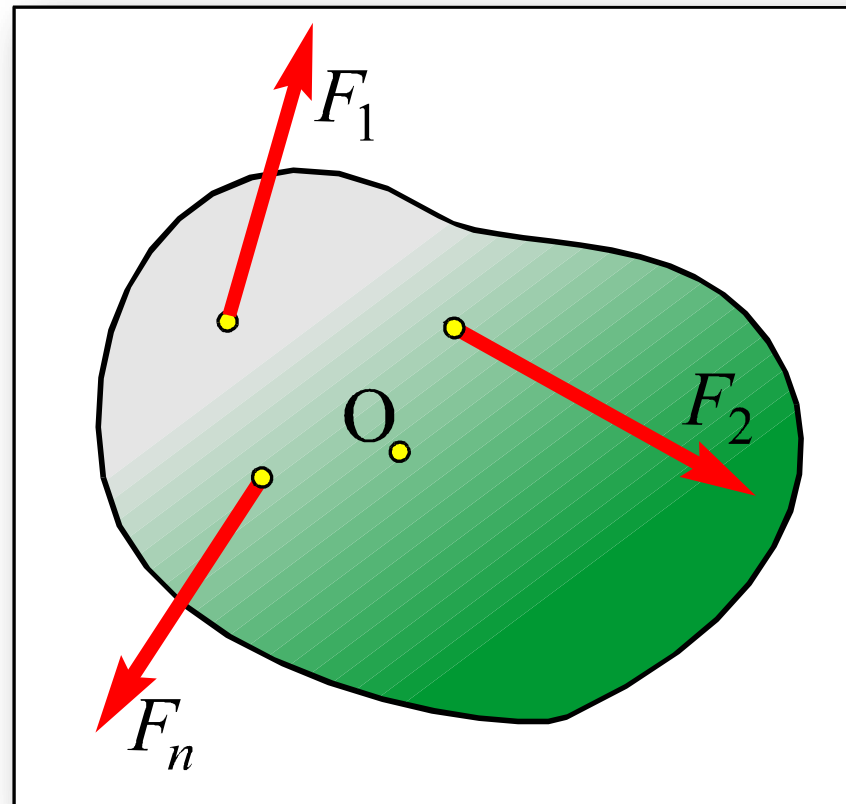
$$F_1 = F_2 = F$$



$$\mathfrak{M} = M_B^{\vec{F}}$$

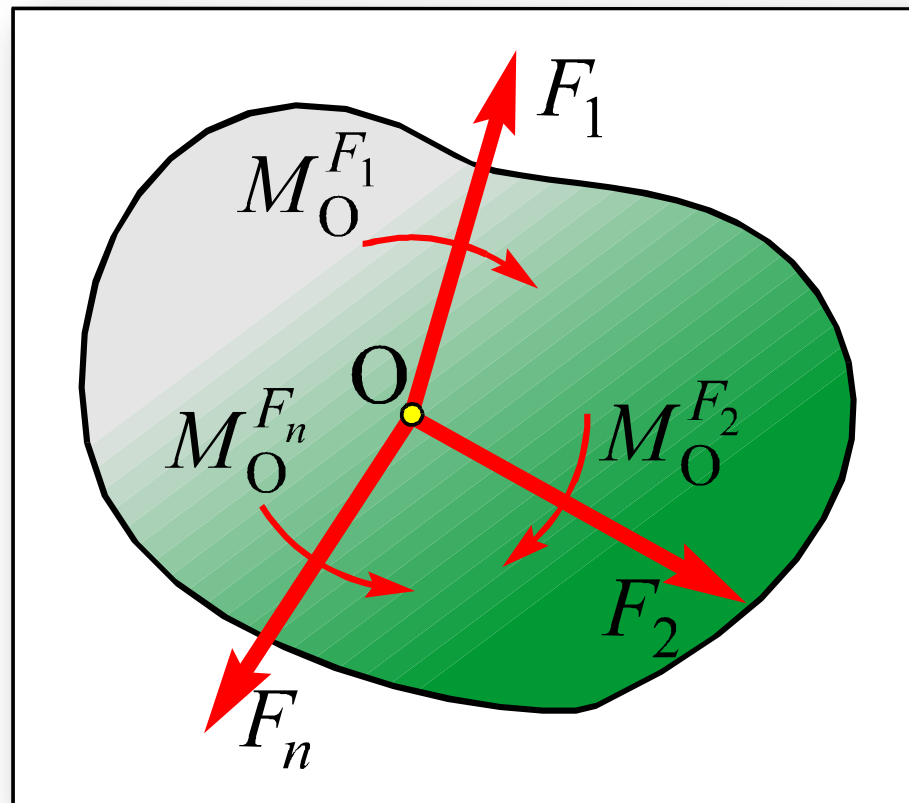
9. Систем произвољних сила у равни и услови равнотеже тела.

Може ли се приказани систем од n сила у равни свести на једноставнију форму?

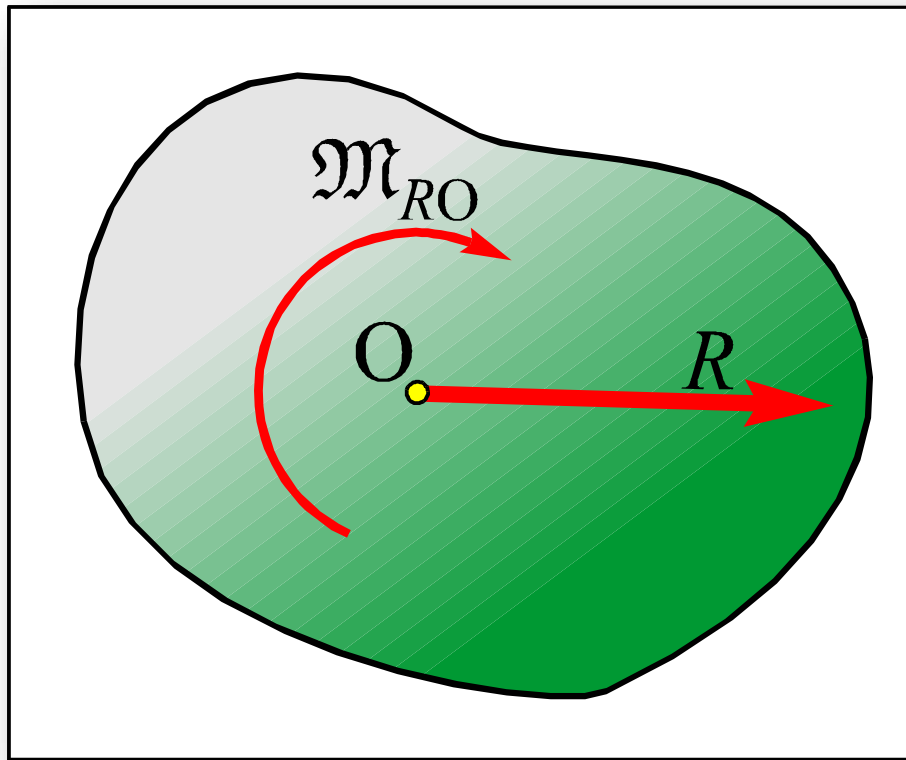


Све силе треба редуковати на произвољно
одабрану тачку O .

Добија се систем сучењних сила и спрегова
у равни



Сабирањем сила добијамо резултујућу
силу, а сабирањем спрегова резултујући
спрег



$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

$$\mathfrak{M}_{RO} = \sum M_O^{\vec{F}_i}$$

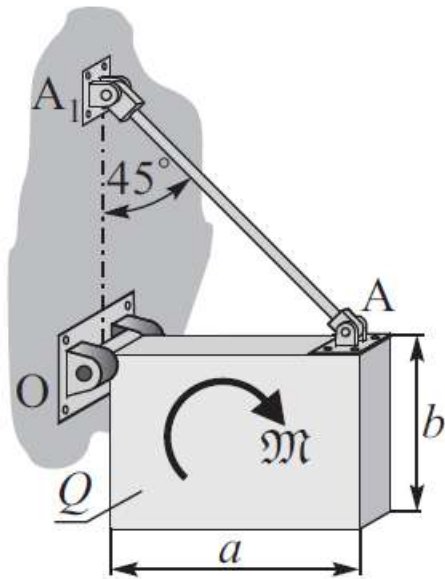
Услови равнотеже система произвољних сила у равни

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0 \qquad M_{RO} = \sum M_O^{F_i} = 0$$

$$\sum X_i = 0 \qquad \sum Y_i = 0 \qquad \sum M_O^{F_i} = 0$$

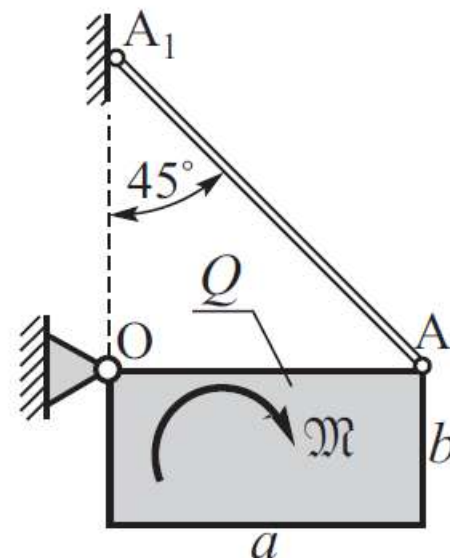
$$\sum M_O = 0$$

Пример

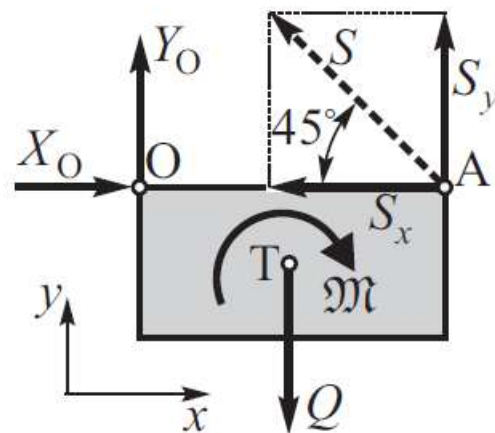


Пример 2.7 Тело тежине Q које има облик квадра за задатим страницама a и b везано је непокретним зглобним ослоном у тачки O за зид и оптерећено спрегом M . За тело је у тачки A зглобно везан лаки штап који је другим крајем зглобно везан за зид. Одредити реакције везе.

► Уобичајено је да се при решавању задатака, због уштеде у времену, приступа упрошћеном приказу и скицирању конкретних објеката. У овом случају ће се уместо детаљног приказа зглобних веза са осовиницама и другим деловима, на слици дати само скица конкретног проблема. Треба запазити да су зглобна веза тела са подлогом у тачки O и зглобне везе на крајевима штапа у тачкама A и A_1 технички изведене на готово истоветан начин. Ипак, при скицирању зглобне везе тела које има тежину, или је оптерећено, најчешће се зглобна веза приказује са стилизованим троугластим ослонцем.



Дато тело треба ослободити веза и уместо њих увести реакције везе. Непокретни зглобни ослонац не дозвољава померање тачке O ни у хоризонталном ни у вертикалном правцу. Због тога ће реакције везе бити две силе које ће се означити са X_O и Y_O . Уклањањем везе лаки штап AA_1 као реакција везе се уводи и сила S која је у правцу осе штапа. Тело ће под дејством ове три непознате реакције везе и активне силе тежине Q која напада средишњу тачку T , бити у равнотежи. За приказани систем произвољних сила у равни могу се написати три једначине равнотеже (2.12). Прве две једначине равнотеже се односе на пројекције сила на осе координатног система и гласе:



$$\sum X_i = X_O - S \cos 45^\circ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_O - \frac{\sqrt{2}}{2} S = 0; \quad (a)$$

$$\sum Y_i = Y_O + S \sin 45^\circ - Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_O + \frac{\sqrt{2}}{2} S - Q = 0. \quad (b)$$

Трећа једначина равнотеже је моментна једначина у односу на произвољно одабрану тачку. Изабраће се да је то тачка O , а приликом одређивања момента силе S , уместо саме силе S посматраће се силе S_x и S_y које су заједно еквивалентне сили S . Тако ће и збир момената сила S_x и S_y бити једнак моменту силе S . Момент силе S_x је једнак нули, док крак силе S_y износи a . Како је:

$$S_y = S \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} S,$$

моментна једначина је

$$\sum M_O = S_y a - Q \frac{a}{2} - \mathfrak{M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S a - \frac{1}{2} Q a - \mathfrak{M} = 0. \quad (\text{в})$$

Дакле, задати проблем се свео на решавање система једначина (а), (б) и (в). Из једначине (в) је:

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2} Q + \sqrt{2} \frac{\mathfrak{M}}{a}.$$

Заменом ове вредности за S у једначине (а) и (б) добија се:

$$X_O = \frac{\sqrt{2}}{2} S = \frac{Q}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{a}; \quad Y_O = Q - \frac{\sqrt{2}}{2} S = \frac{Q}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{a}.$$

Шта смо научили?

4. Статика материјалне тачке и услови њене равнотеже.
5. Статика материјалног тела. Уравнотежени систем сила. Сила као клизећи вектор.
6. Момент силе за тачку.
7. Спрег сила.
8. Редукција силе на тачку.
9. Систем произвољних сила у равни и услови равнотеже тела.