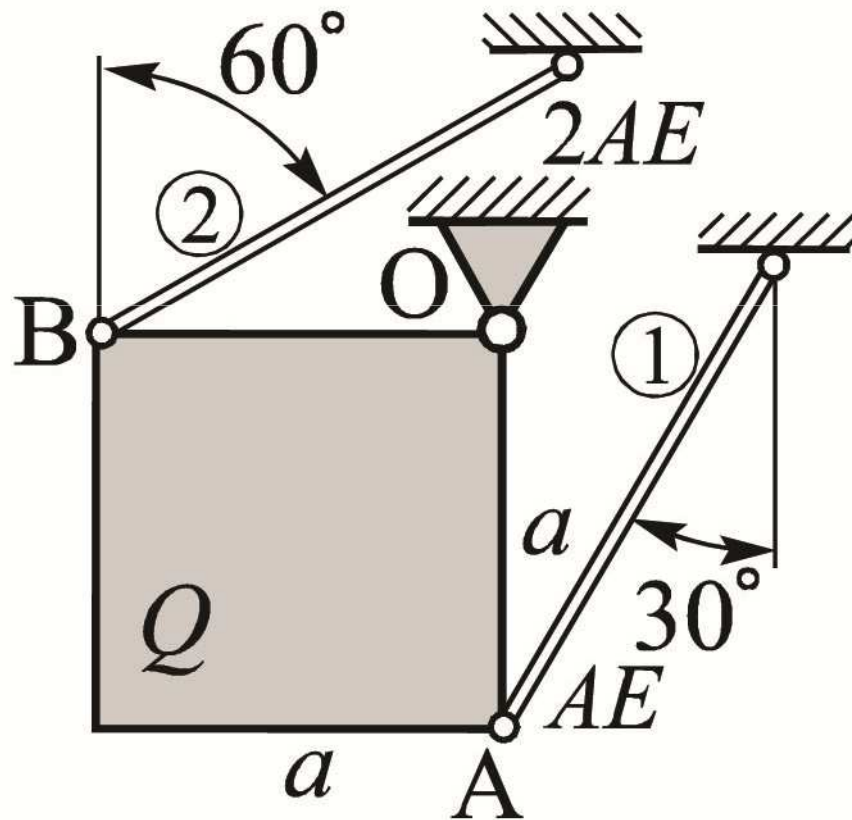
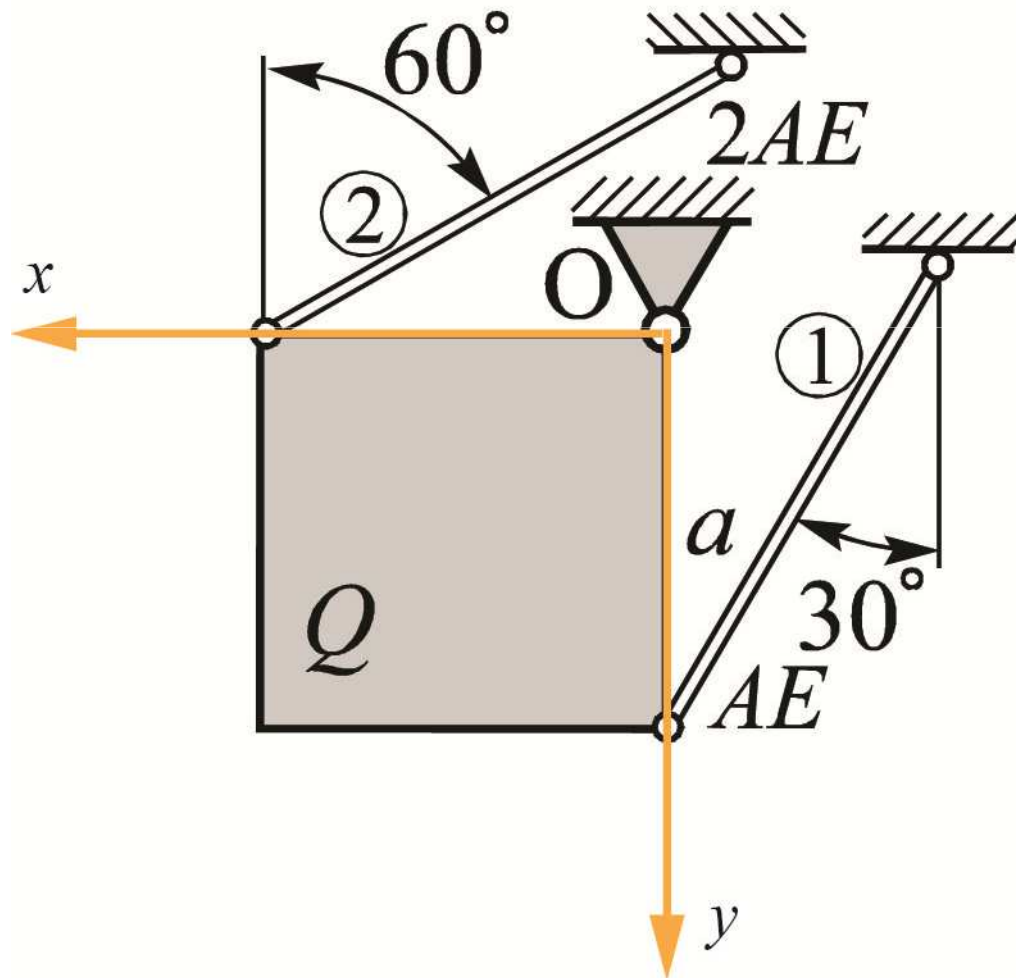


Задатак 1



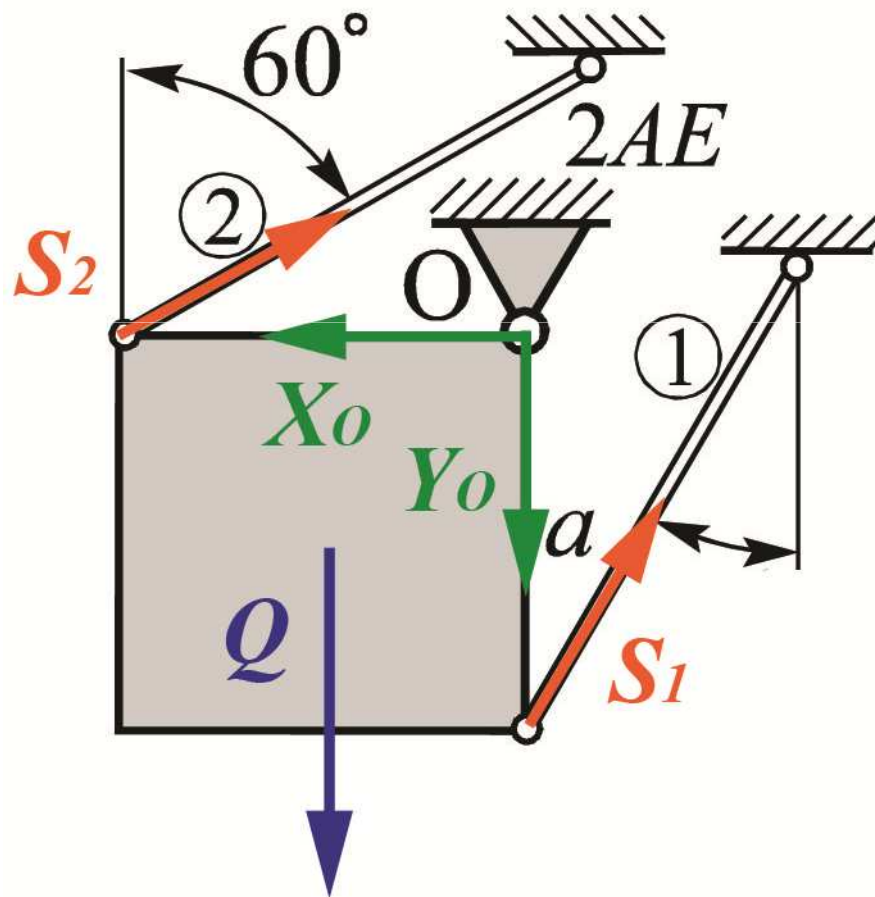
Крута плоча тежине Q , квадратног облика са страницама дужине a зглобно је везана у тачки O за подлогу. За њу су везана два лака еластична штапа, оба дужине l и површине попречног пресека које су задате на слици. Одредити напоне у еластичним штаповима.

Координатни систем



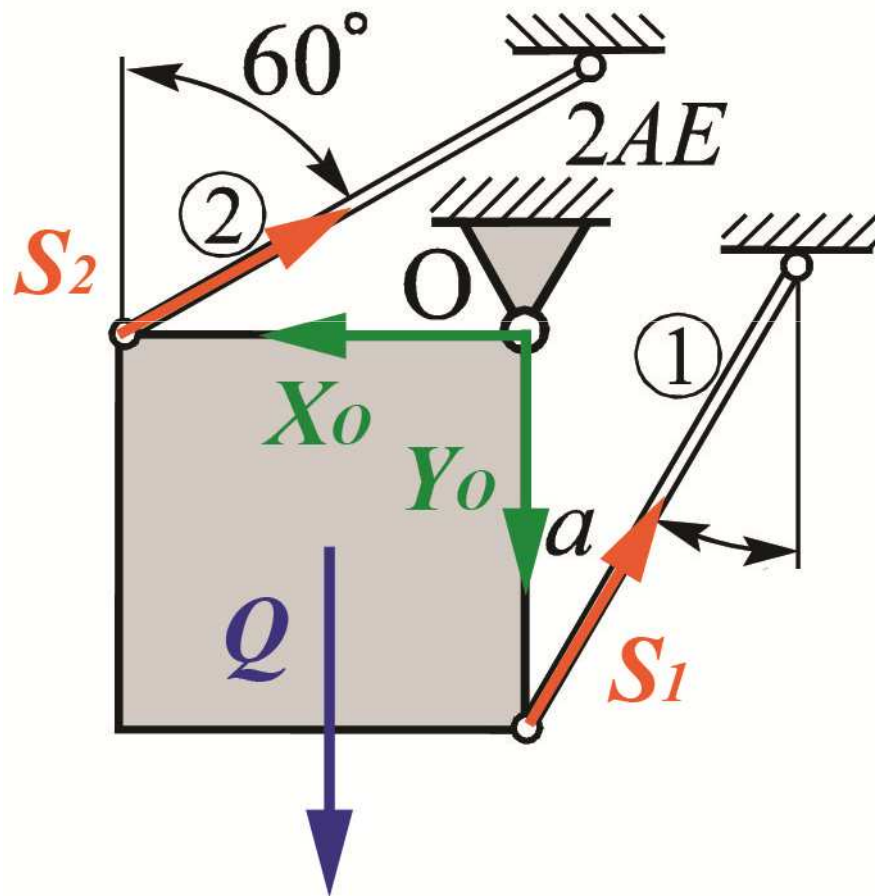
Увођење координатног система у тачки O .
Смерови координатних оса су производни.

Реакције везе



Ослобађање од веза и увођење реакција веза. Смерови реакција у тачки O су произвољни. Сила тежине Q дејствује у тежишту тела. Реакције у штаповима падају на правац осе штапа

Једначине равнотеже



Услови равнотеже за тело у равни:

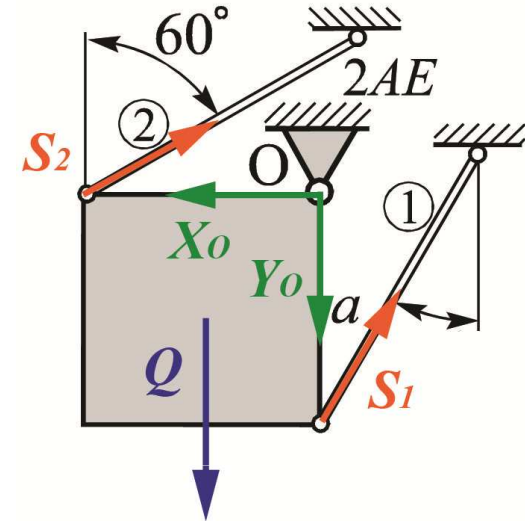
$$\sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

Једначине равнотеже

Једначине равнотеже:

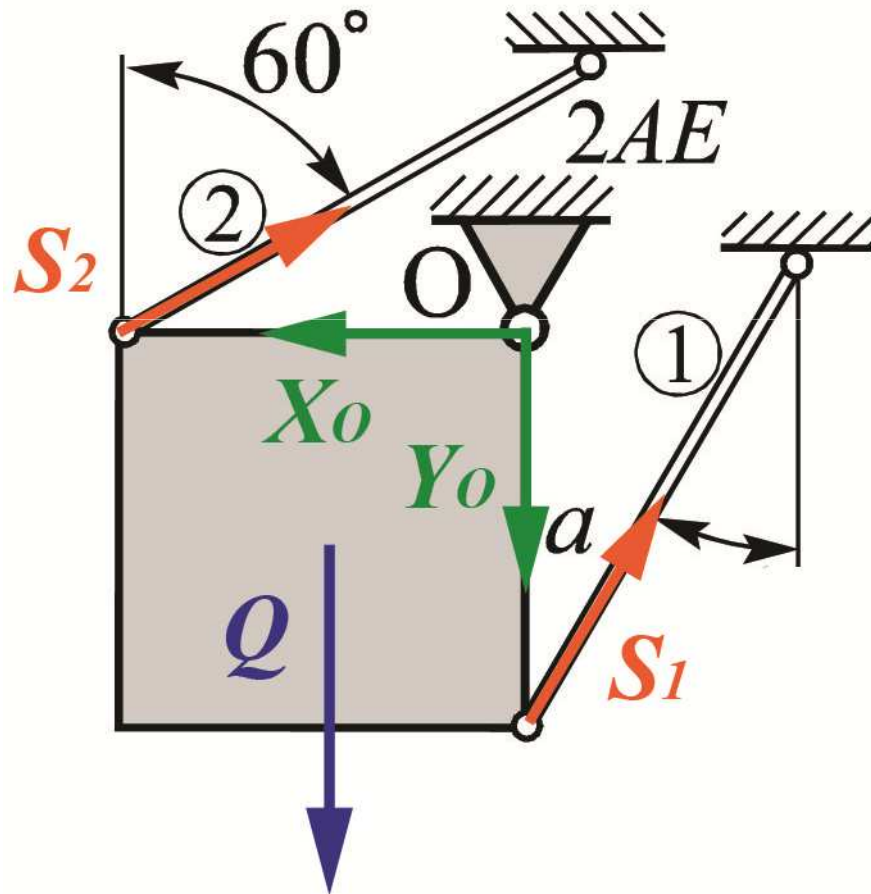


$$(1) \sum X_i = 0 \quad X_o - S_1 \sin 30^\circ - S_2 \sin 60^\circ = 0$$

$$(2) \sum Y_i = 0 \quad Q + Y_o - S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$(3) \sum M_o = 0 \quad S_1 \cos 60^\circ a + Q \frac{a}{2} - S_2 a \cos 60^\circ = 0$$

Статички неодређен проблем

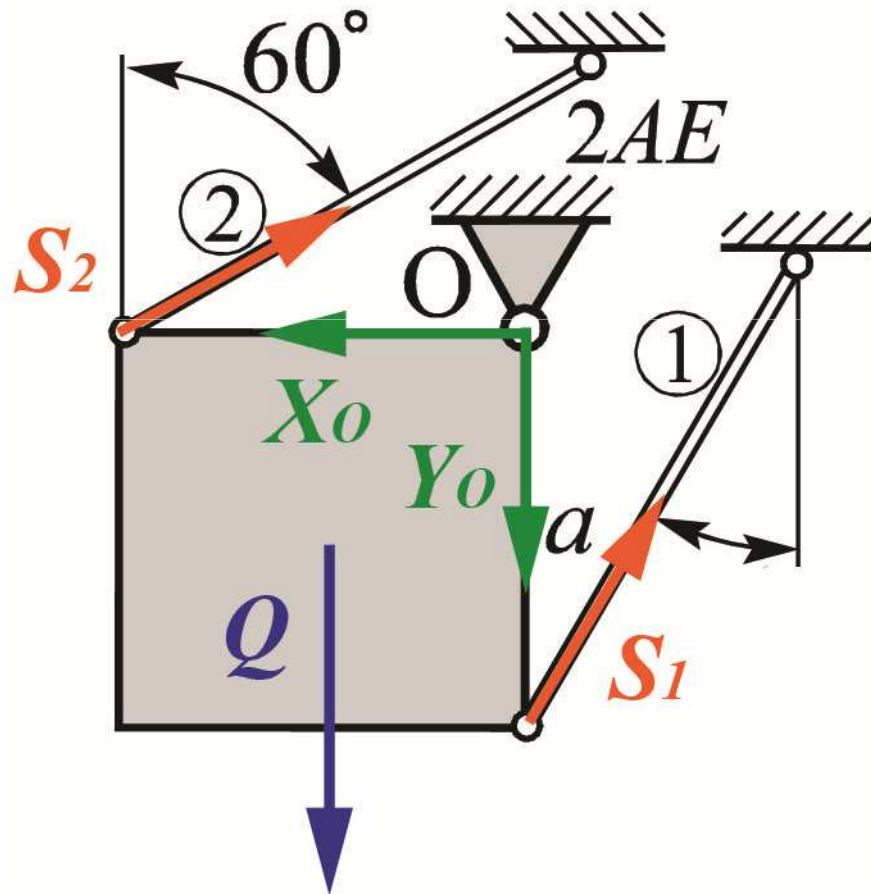


4 реакције везе:

$$X_O, Y_O, S_1, S_1$$

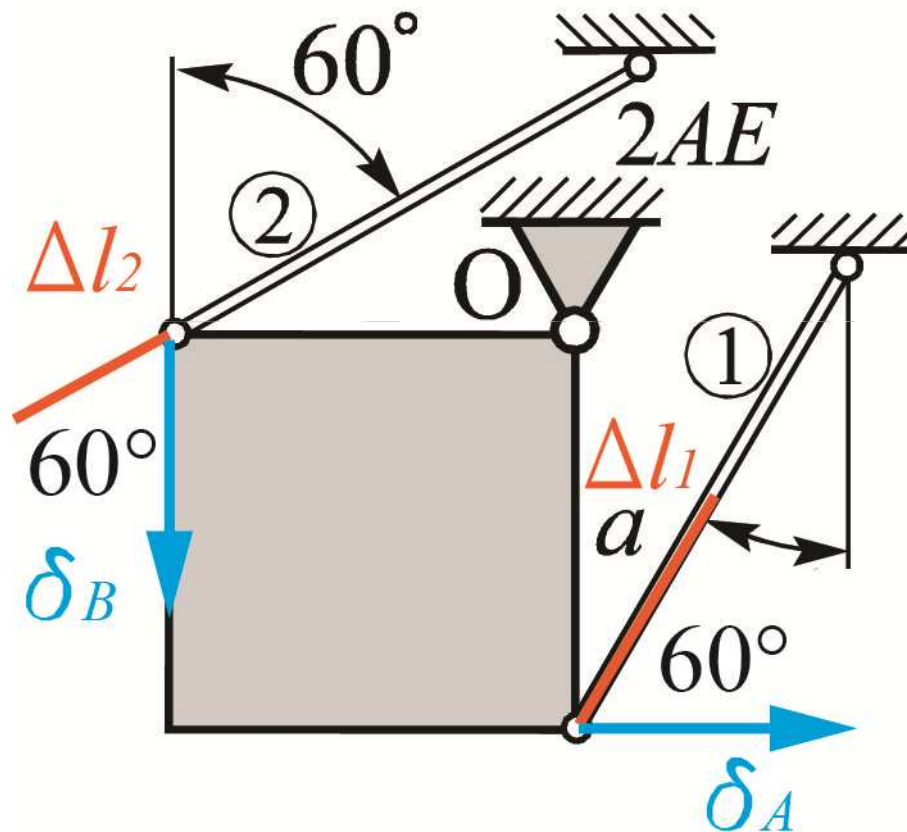
и 3 једначине равнотеже,
следи да је проблем једном
статички неодређен.

Померања и деформације

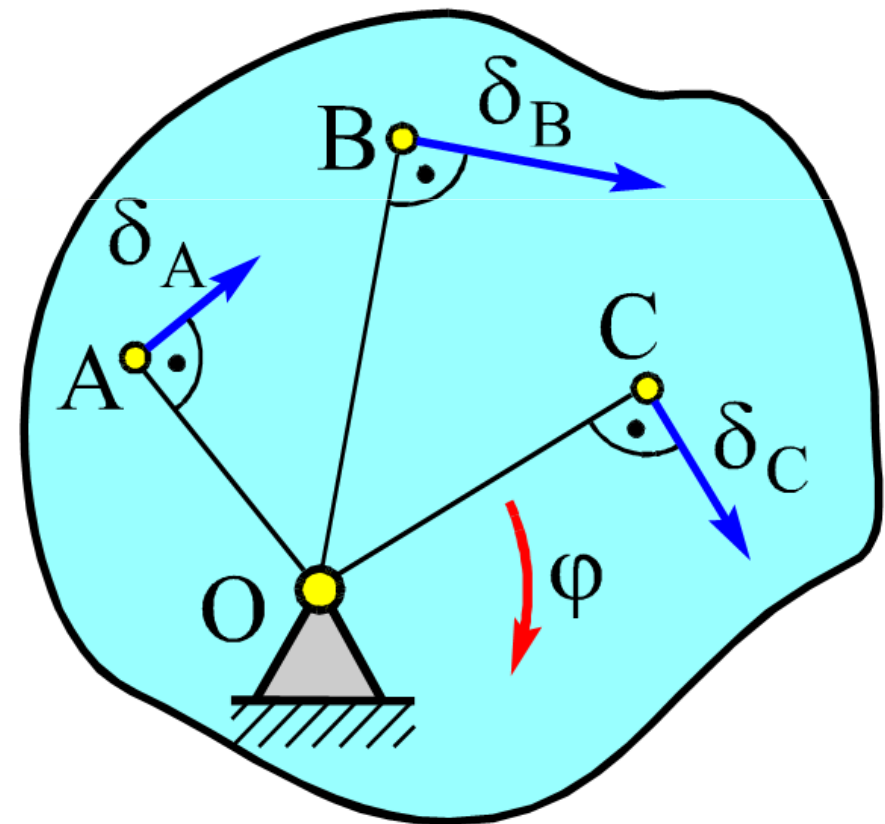


Услед силе тежине претпоставља се да је могућа ротација квадратне плоче око тачке O у смеру супротном од казаљке на сату (позитивном математичком смеру)

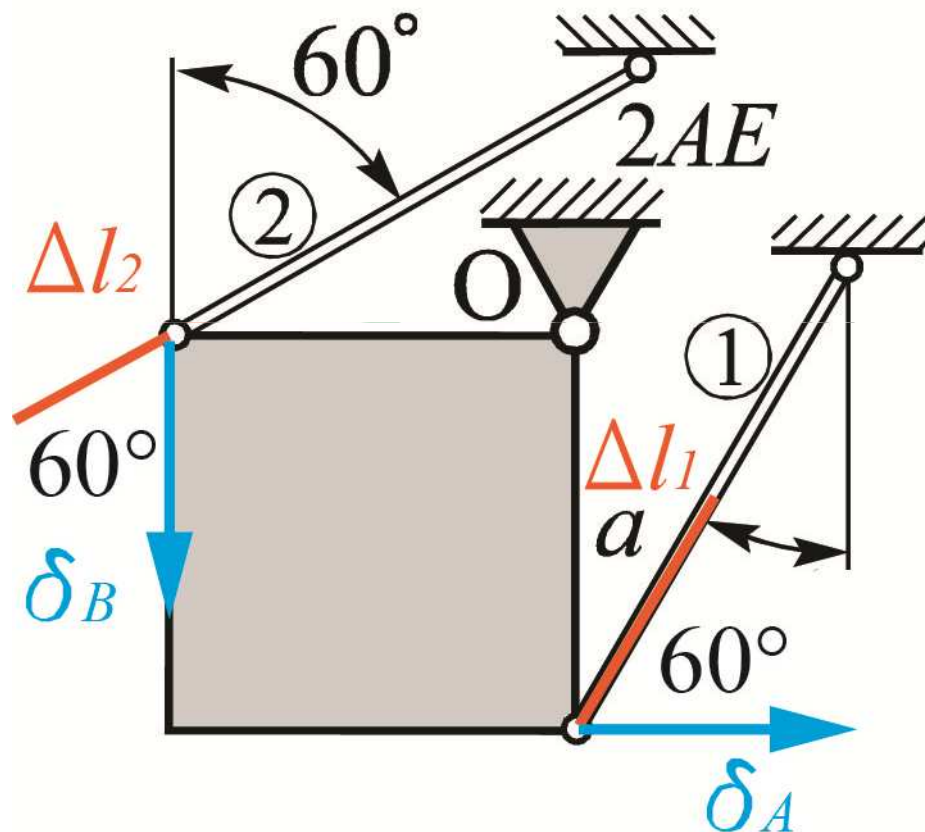
Померања и деформације



Ротација крутог тела око непомичне осе:

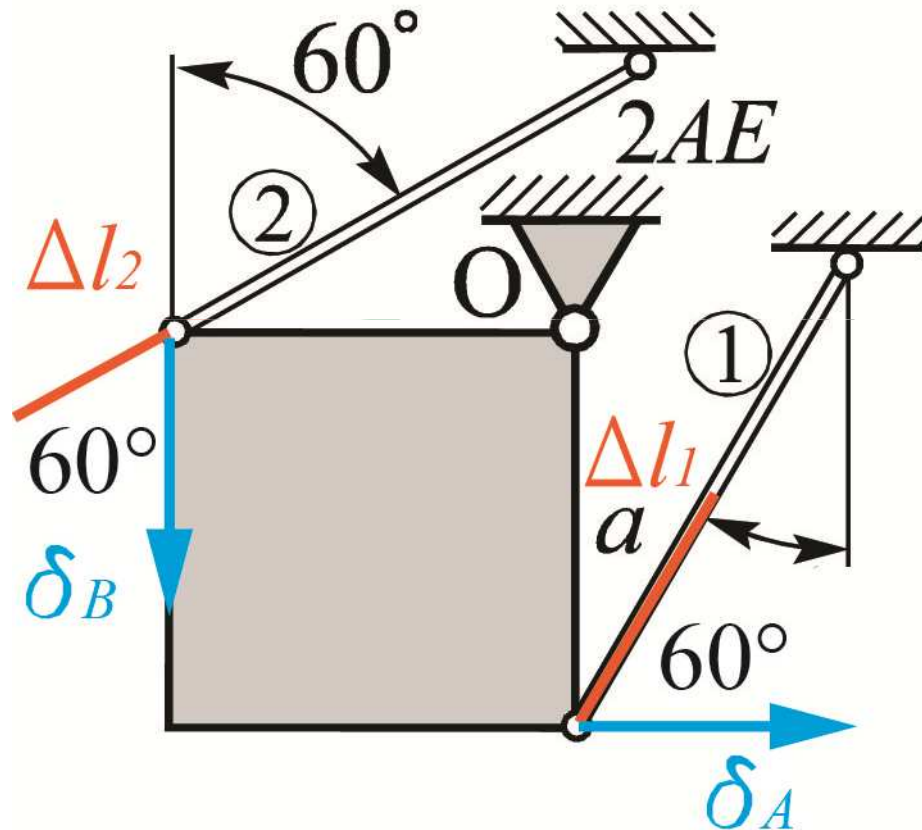


Померања и деформације



Издужења штапова 1 и 2 падају на правац осе штапа. Треба обратити пажњу да је штап 1 оптерећен на **притисак** док је штап 2 оптерећен на **затезање**.

Став о издужењу штапа

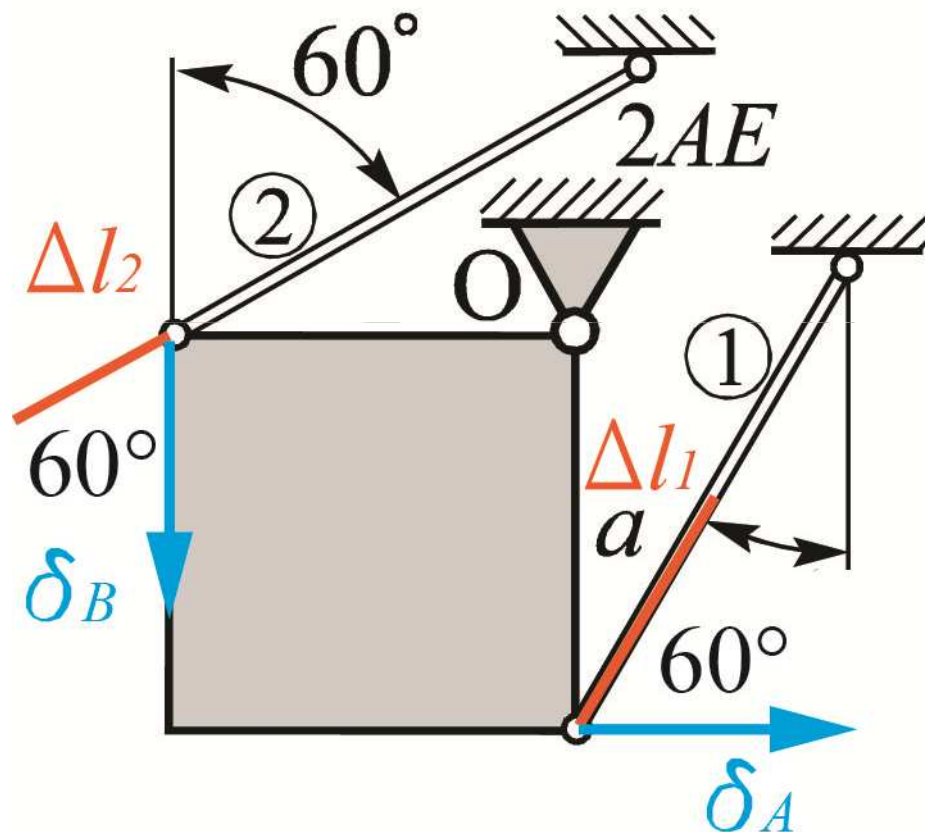


Угао између издужења штапа 1 и померања тачке А је 60 степени, такође угао између издужења штапа 2 и померања тачке В је 60 степени.

$$\Delta l_1 = -\delta_A \cos 60^\circ$$

$$\Delta l_2 = \delta_B \cos 60^\circ$$

Померање тачака

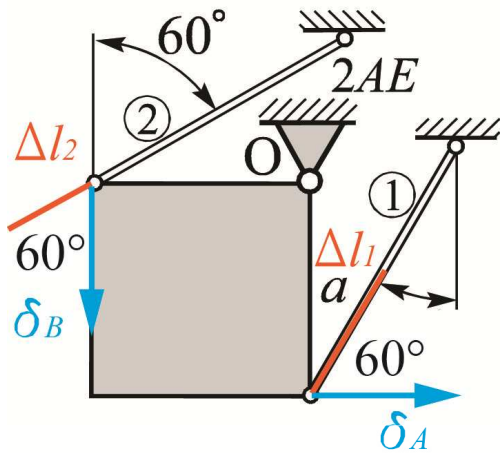


Ако се посматра померање тачке преко дужине кружног лука тада важи:

$$\delta_A = \overline{OA} \varphi = a \varphi$$

$$\delta_B = \overline{OB} \varphi = a \varphi$$

Геометријски услов деформације



Веза између издужења штапова добија се количником истих. Добијена једначина претставља геометријски услов деформације

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{-\delta_A \cos 60^\circ}{\delta_B \cos 60^\circ} = \frac{-a\varphi^{1/2}}{a\varphi^{1/2}} = -1$$

$$\boxed{\Delta l_1 = -\Delta l_2}$$

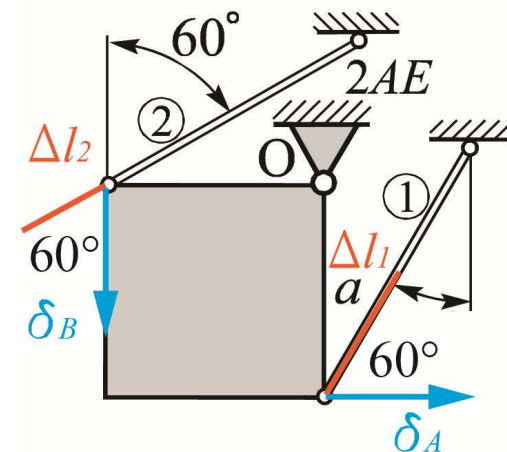
Допунска једначина

Веза између издужења штапова и аксијалних сила у штаповима даје допунску једначину:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} l_1}{A_1 E} = \frac{S_1 l}{AE} \quad \Delta l_2 = \frac{F_{a2} l_2}{A_2 E} = \frac{S_2 l}{2AE}$$

$$(gud) \rightarrow \frac{S_1 l}{AE} = -\frac{S_2 l}{2AE}$$

$$\boxed{S_1 = -\frac{S_2}{2}}$$



Моментна једначина

Користећи моментну једначину (једначину 3) и допунску једначину следе аксијалне силе у штаповима:

$$S_1 \cos 60^\circ a + Q \frac{a}{2} - S_2 a \cos 60^\circ = 0$$

$$\left(-\frac{S_2}{2}\right) \frac{1}{2} + \frac{Q}{2} - S_2 \frac{1}{2} = 0$$

$$S_2 = \frac{2Q}{3} \quad (dj) \rightarrow S_1 = -\frac{S_2}{2} = -\frac{\frac{2Q}{3}}{2} = -\frac{Q}{3}$$

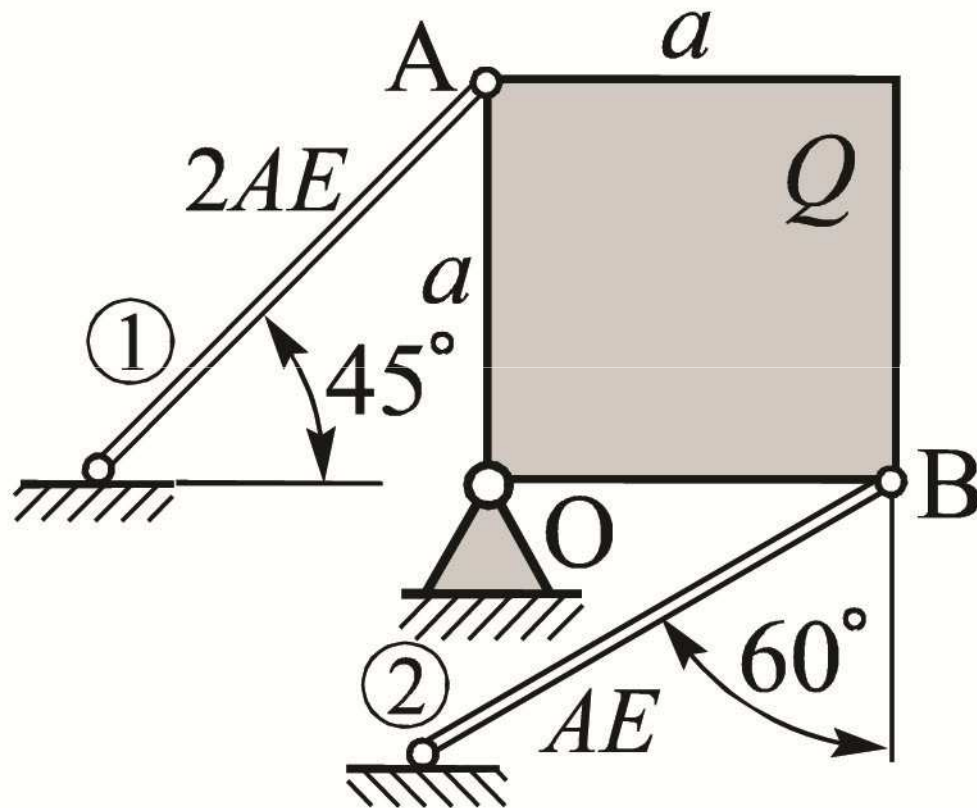
Напони у штаповима

Тражени напони су:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{S_1}{A} = -\frac{Q}{3}$$

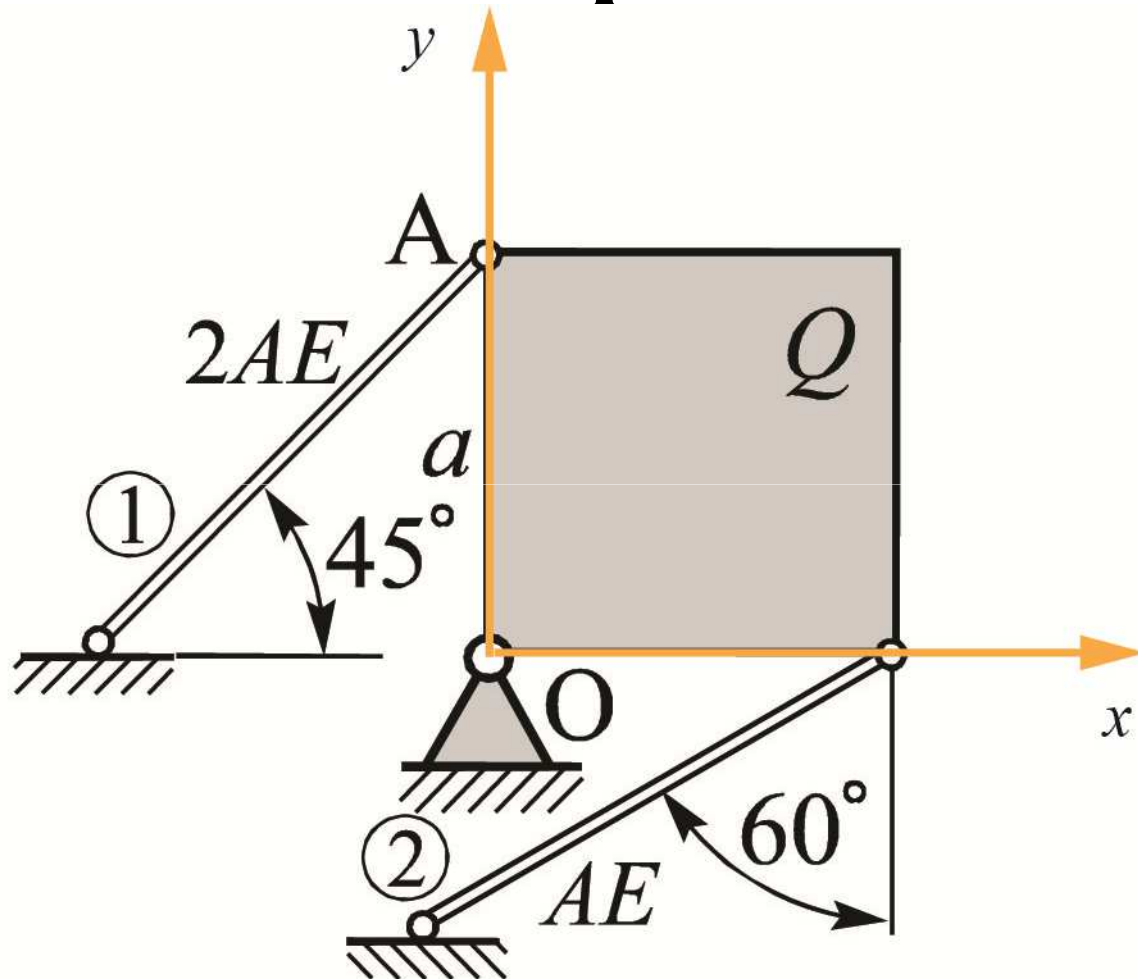
$$\sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{S_2}{2A} = +\frac{Q}{3}$$

Задатак 2



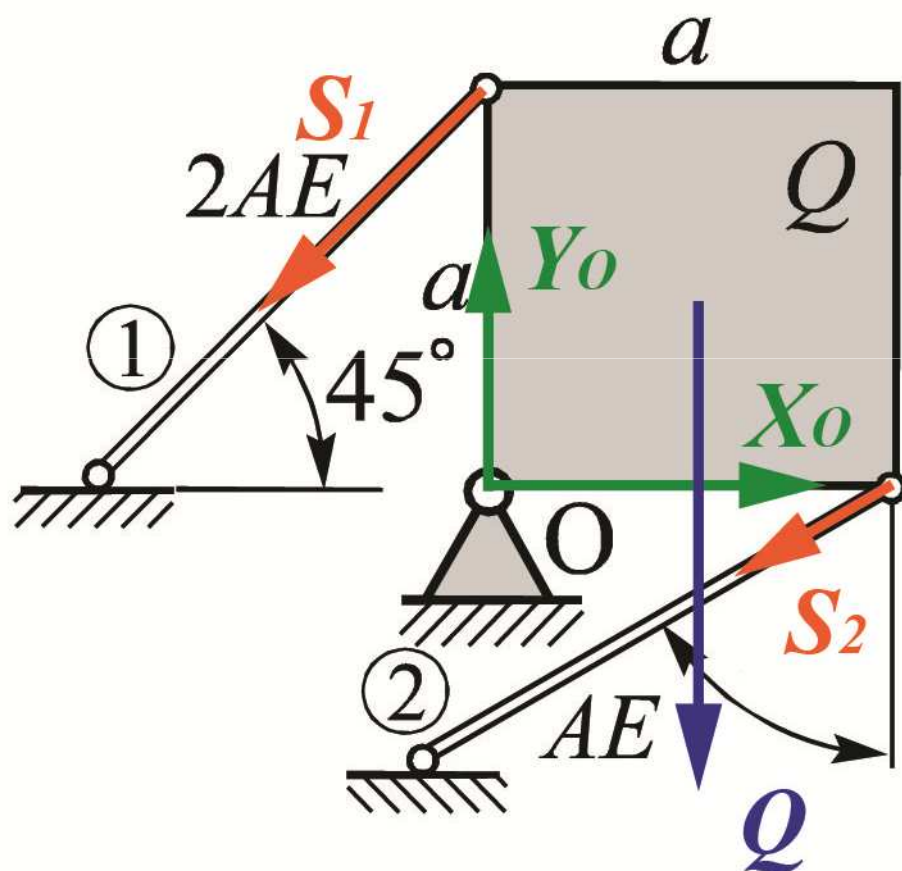
Крута плоча тежине Q , квадратног облика са страницама дужине a зглобно је везана у тачки O за подлогу. За њу су везана два лака еластична штапа, оба дужине l и површине попречног пресека које су задате на слици. Одредити напоне у еластичним штаповима.

Координатни систем



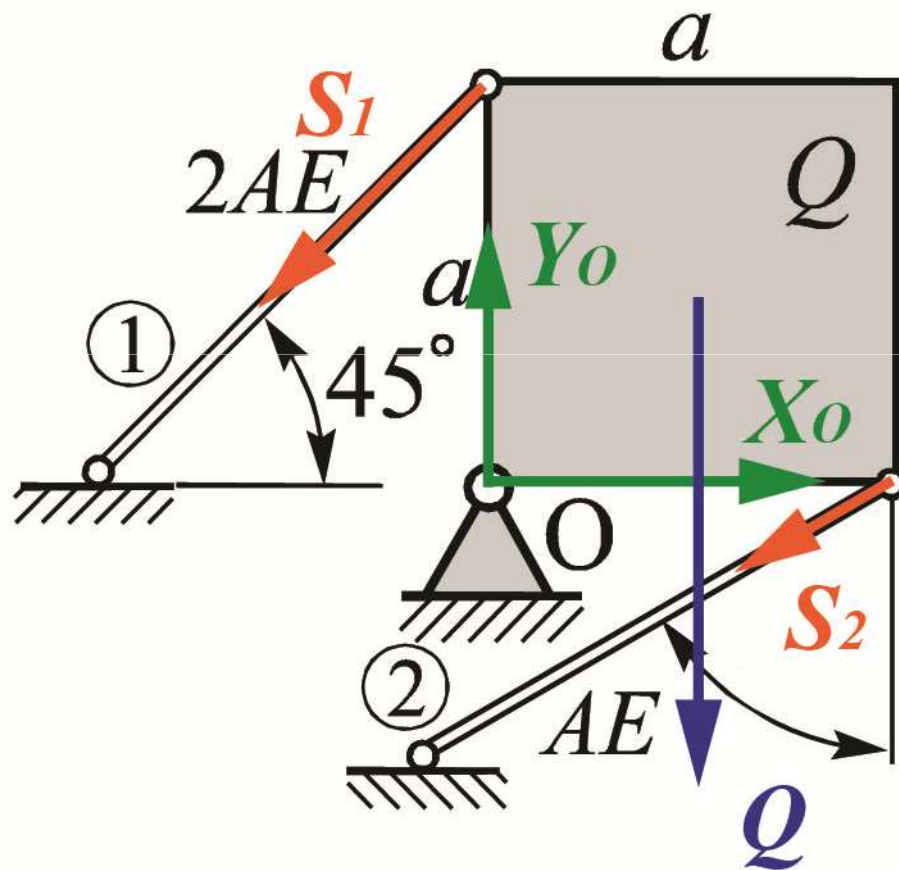
Увођење
координатног
система у тачки O .
Смерови
координатних оса су
производни.

Реакције везе



Ослобађање од веза и увођење реакција веза. Смерови реакција у тачки O су произвољни. Сила тежине Q дејствује у тежишту тела. Реакције у штаповима падају на правац осе штапа

Једначине равнотеже



Услови равнотеже за
тело у равни:

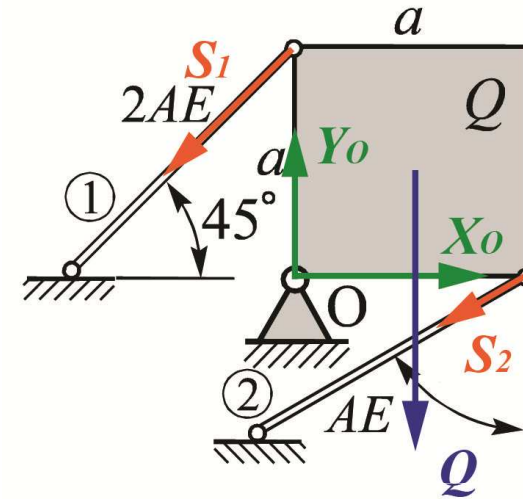
$$\sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

Једначине равнотеже

Једначине равнотеже:

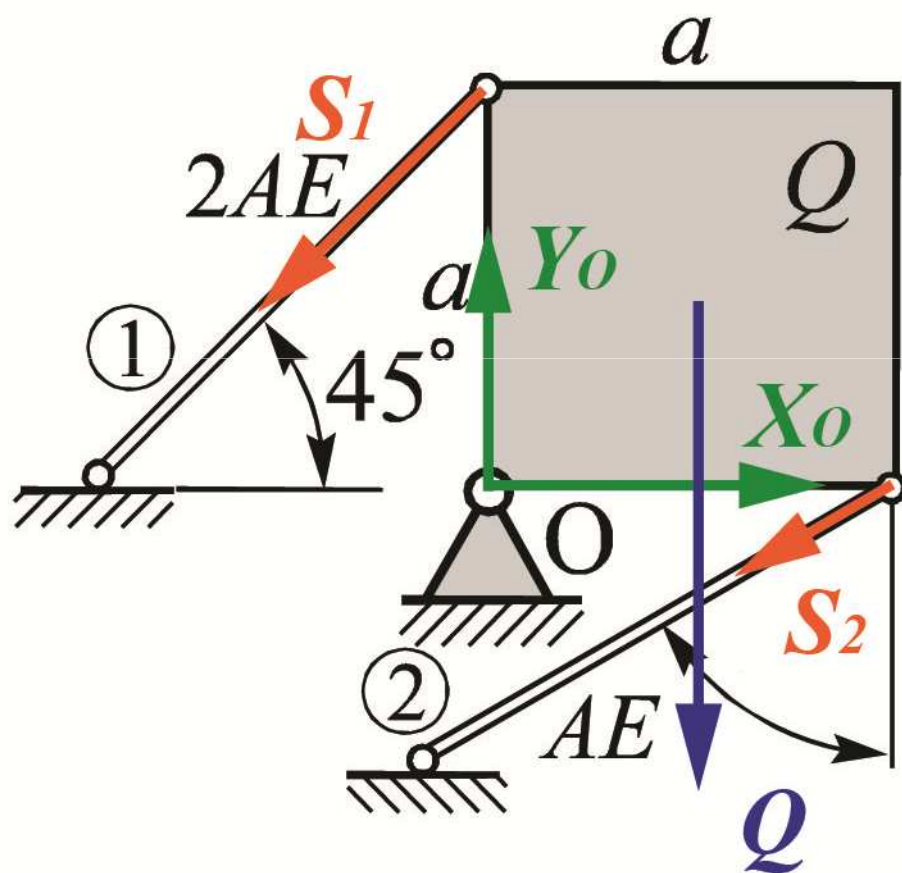


$$(1) \sum X_i = 0 \quad X_O - S_1 \sin 45^\circ - S_2 \sin 60^\circ = 0$$

$$(2) \sum Y_i = 0 \quad -Q + Y_O - S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$(3) \sum M_O = 0 \quad S_1 \cos 45^\circ a - Q \frac{a}{2} - S_2 \cos 60^\circ a = 0$$

Статички неодређен проблем

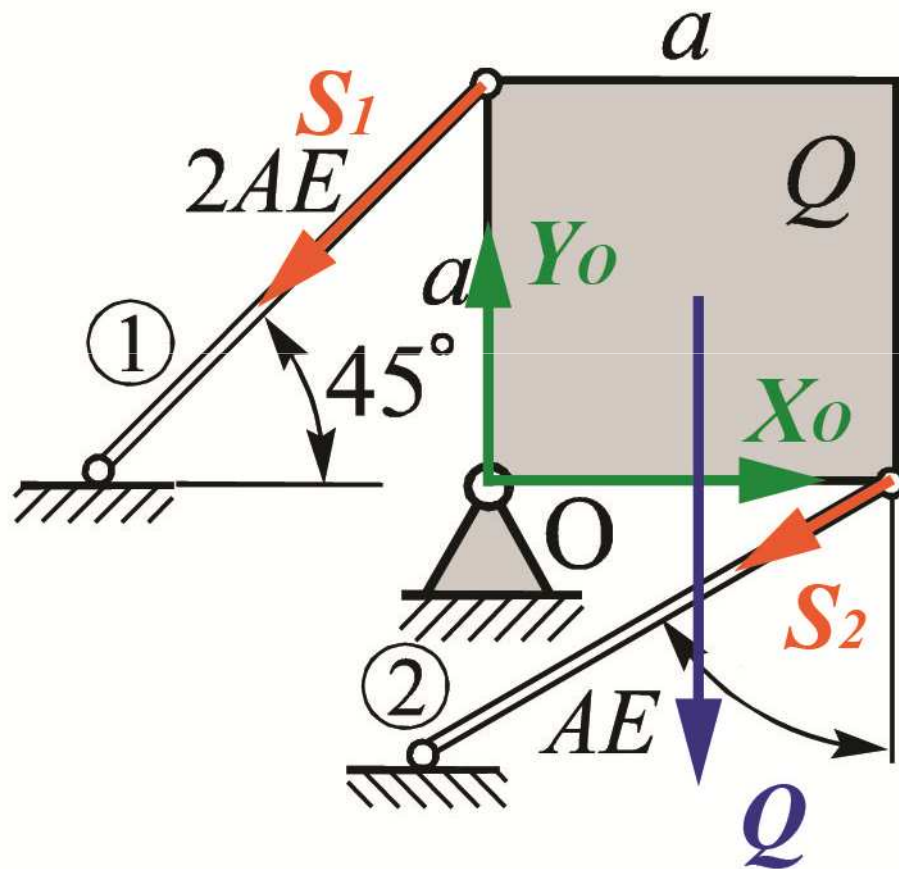


4 реакције везе:

$$X_O, Y_O, S_1, S_2$$

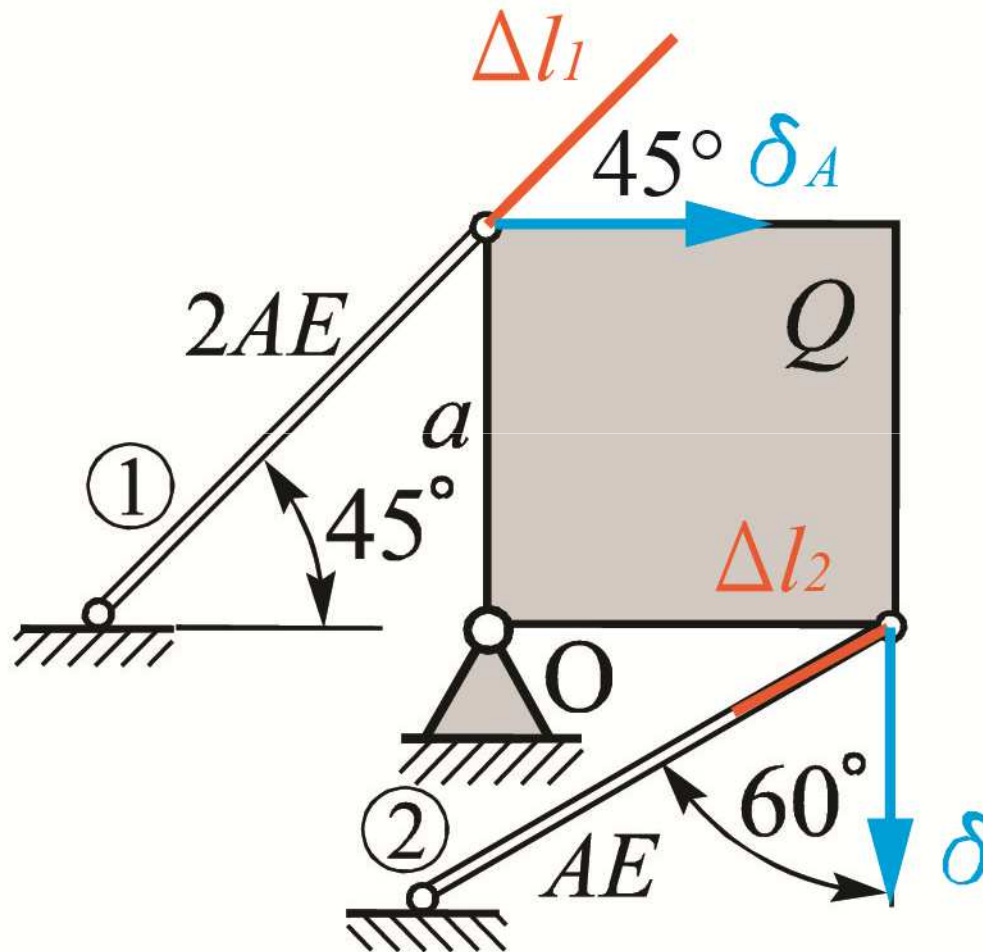
и 3 једначине
равнотеже, следи да
је проблем једном
статички неодређен.

Померања и деформације

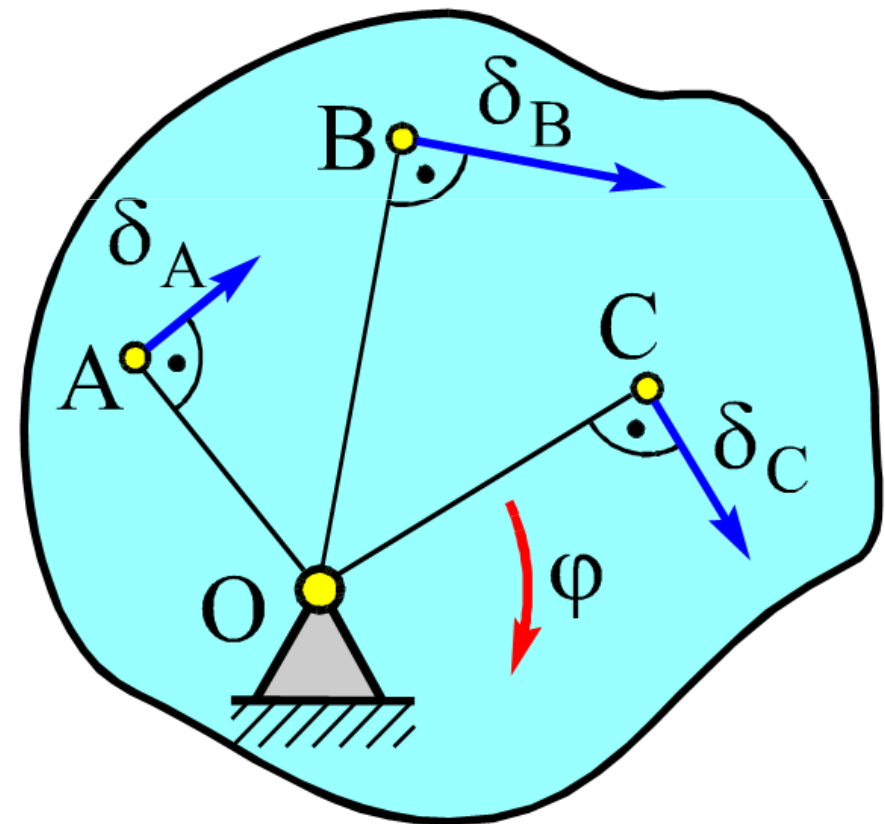


Услед силе тежине претпоставља се да је могућа ротација квадратне плоче око тачке O у смеру казаљке на сату (негативном математичком смеру)

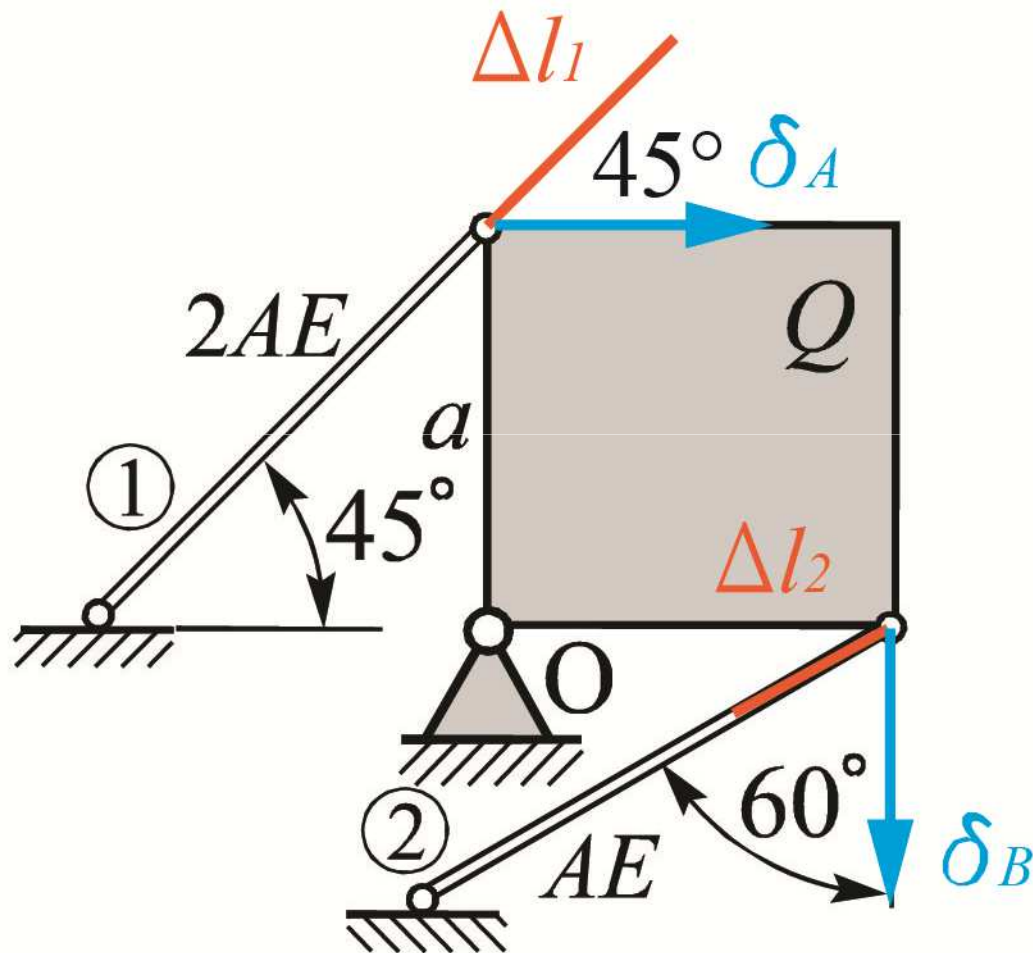
Померања и деформације



Ротација крутог тела око непомичне осе:

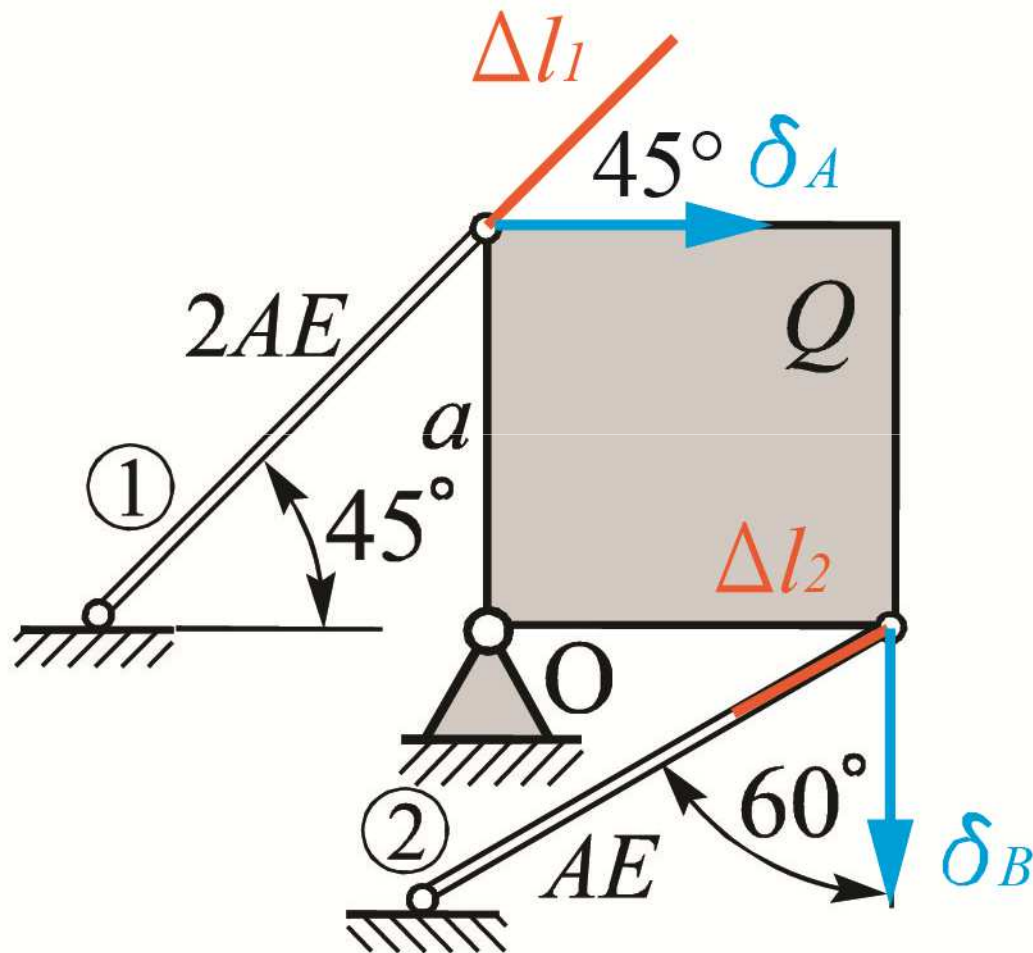


Померања и деформације



Издужења штапова 1 и 2 падају на правац осе штапа. Треба обратити пажњу да је штап 1 оптерећен на **затезање** док је штап 2 оптерећен на **притисак**.

Став о издужењу штапа

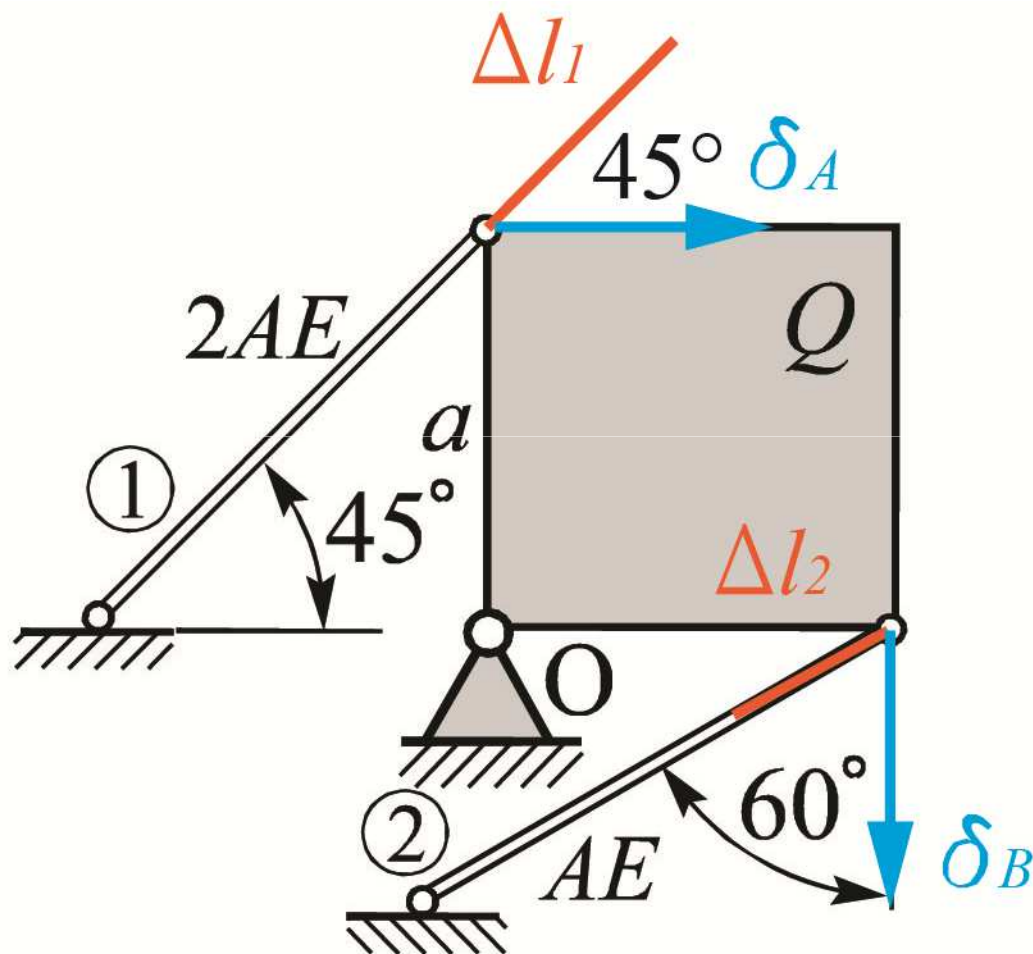


Угао између издужења штапа 1 и померања тачке А је 45° , такође угао између издужења штапа 2 и померања тачке В је 60° .

$$\Delta l_1 = \delta_A \cos 45^\circ$$

$$\Delta l_2 = -\delta_B \cos 60^\circ$$

Померање тачака

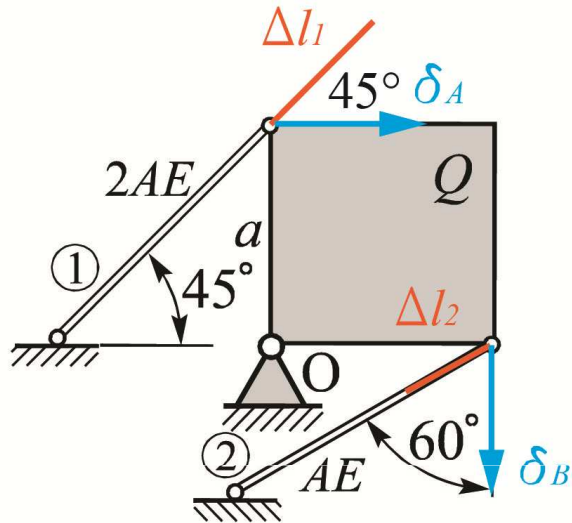


Ако се посматра померање тачке преко дужине кружног лука тада важи:

$$\delta_A = \overline{OA} \varphi = a \varphi$$

$$\delta_B = \overline{OB} \varphi = a \varphi$$

Геометријски услов деформације



Веза између издужења штапова добија се количником истих. Добијена једначина претставља геометријски услов деформације

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\delta_A \cos 45^\circ}{-\delta_B \cos 60^\circ} = \frac{a\varphi \sqrt{2}/2}{-a\varphi 1/2} = -\sqrt{2}$$

$$\boxed{\Delta l_1 = -\sqrt{2}\Delta l_2}$$

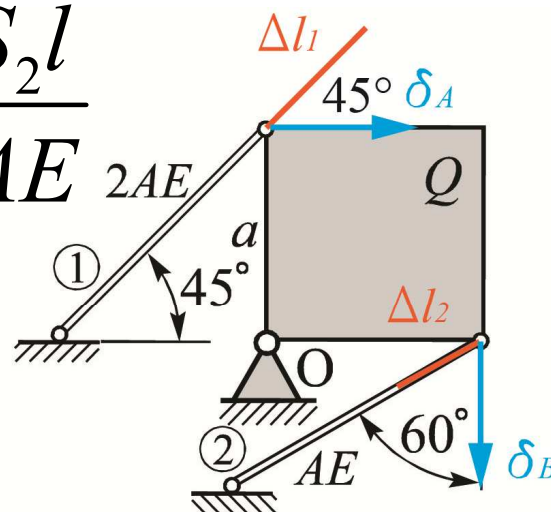
Допунска једначина

Веза између издужења штапова и аксијалних сила у штаповима даје допунску једначину:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} l_1}{A_1 E} = \frac{S_1 l}{2AE} \quad \Delta l_2 = \frac{F_{a2} l_2}{A_2 E} = \frac{S_2 l}{AE}$$

$$(gud) \rightarrow \frac{S_1 l}{2AE} = -\sqrt{2} \frac{S_2 l}{AE}$$

$$\boxed{S_1 = -2\sqrt{2}S_2}$$



Моментна једначина

Користећи моментну једначину (једначину 3) и допунску једначину следе аксијалне силе у штаповима:

$$S_1 \cos 45^\circ a - Q \frac{a}{2} - S_2 \cos 60^\circ a = 0$$

$$(-2\sqrt{2}S_2) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{Q}{2} - S_2 \frac{1}{2} = 0$$

$$S_2 = -\frac{Q}{5} (dj) \rightarrow S_1 = -2\sqrt{2}S_2 = 2\sqrt{2} \left(\frac{Q}{5}\right) = \frac{2\sqrt{2}Q}{5}$$

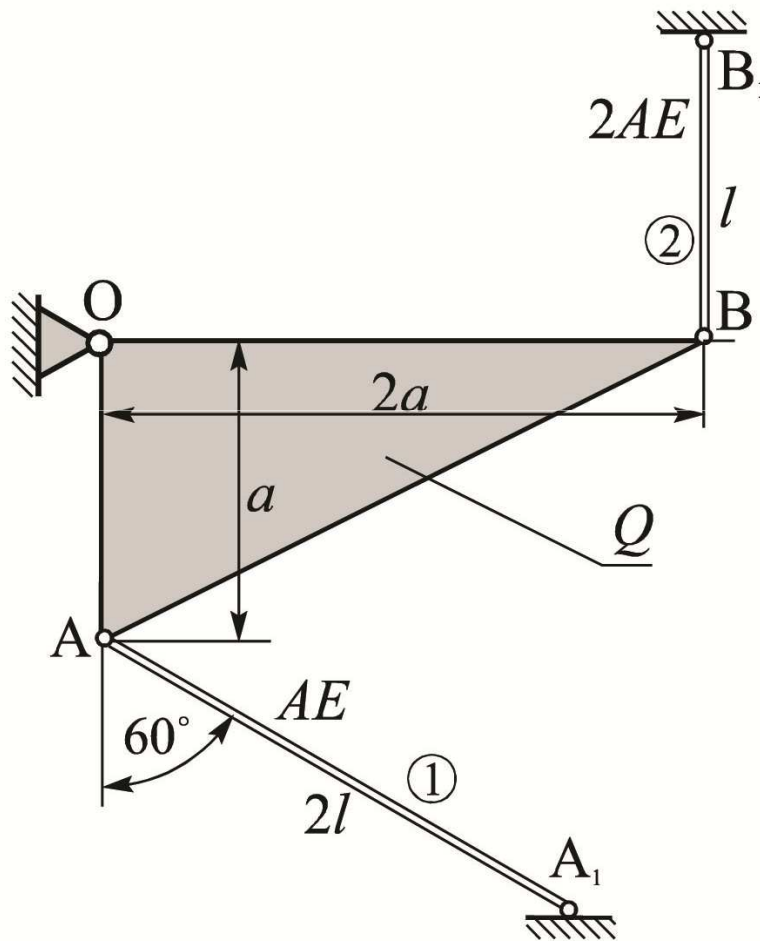
Напони у штаповима

Тражени напони су:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{S_1}{2A} = \frac{\sqrt{2}Q}{5}$$

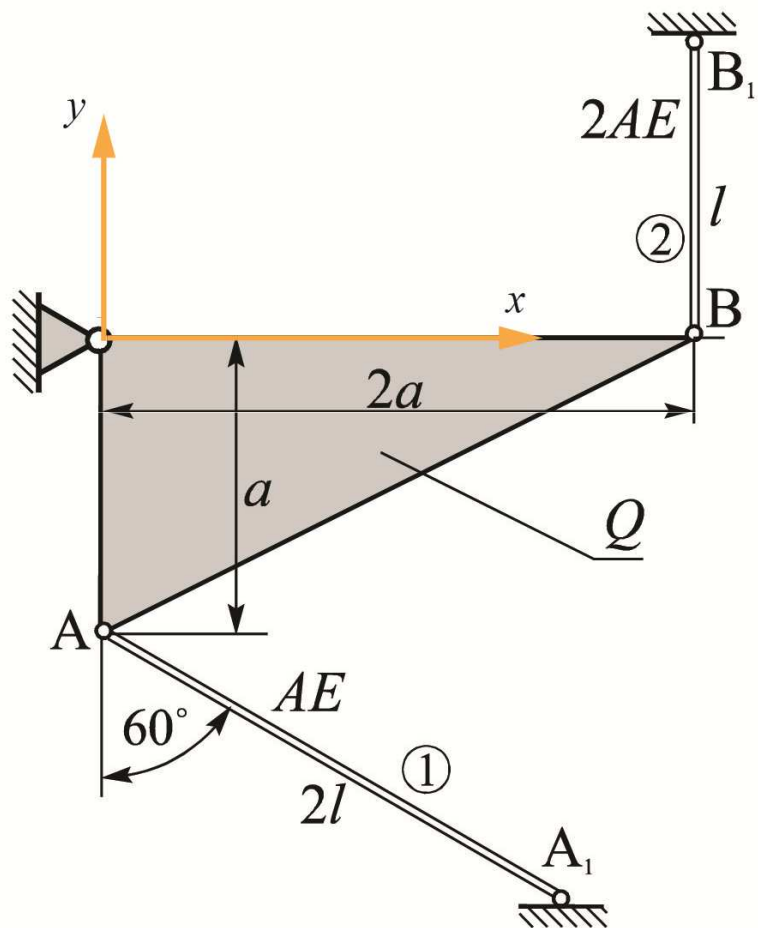
$$\sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{S_2}{A} = -\frac{Q}{5}$$

Задатак 3



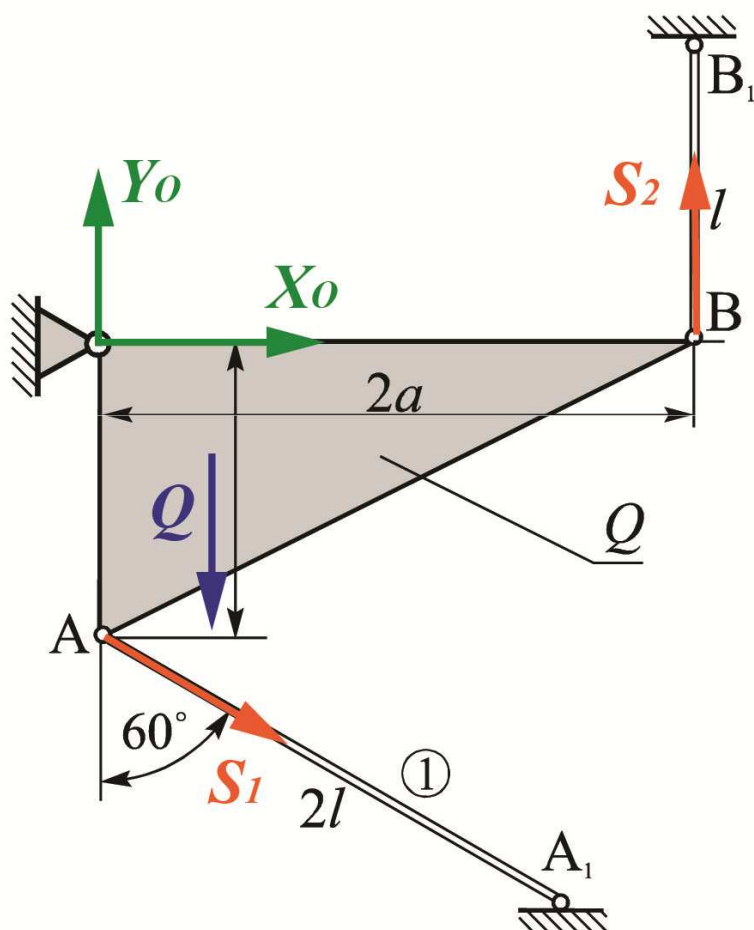
Крути правоугли троугао OAB тежине Q , са катетама дужине $2a$ и a , зглобно је везан у тачки O за подлогу. У тачкама A и B су зглобно везани лаки и еластични штапови, који су преосталим крајевима зглобно везани за подлогу. Одредити напоне у еластичним штаповима.

Координатни систем



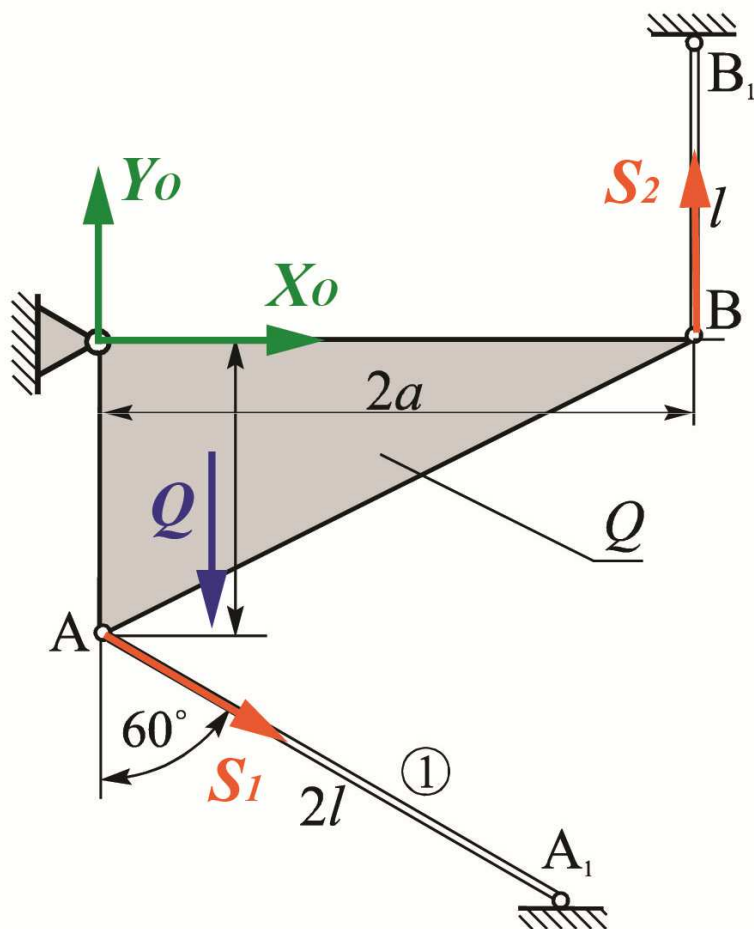
Увођење
координатног
система у тачки O .
Смерови
координатних оса су
производни.

Реакције везе



Ослобађање од веза и увођење реакција веза. Смерови реакција у тачки О су произвољни. Сила тежине Q дејствује у тежишту тела. Реакције у штаповима падају на правац осе штапа

Једначине равнотеже



Услови равнотеже за
тело у равни:

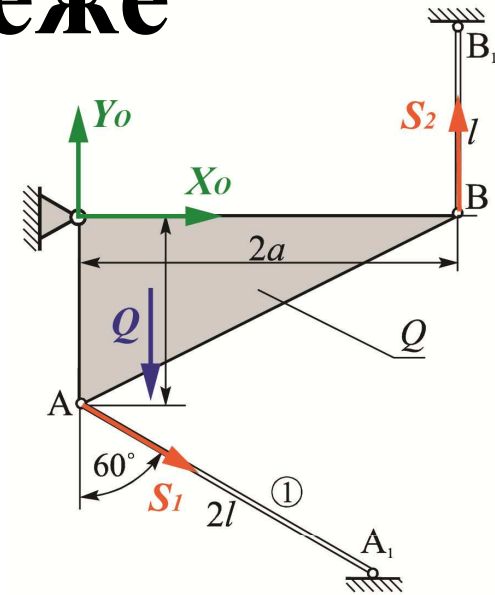
$$\sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

Једначине равнотеже

Једначине равнотеже:

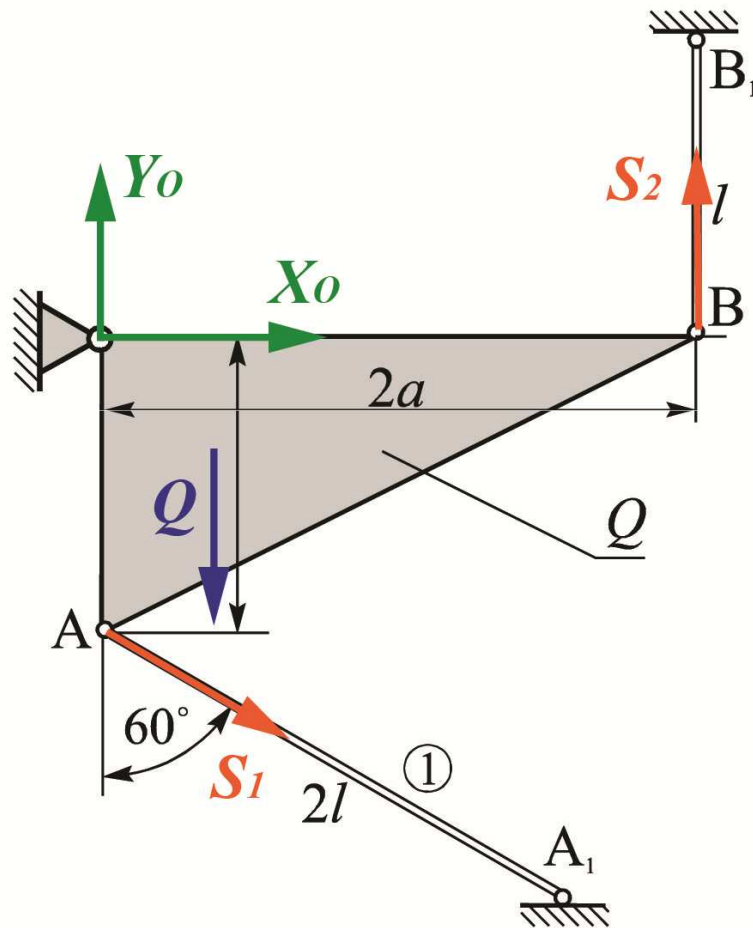


$$(1) \sum X_i = 0 \quad X_O + S_1 \sin 60^\circ = 0$$

$$(2) \sum Y_i = 0 \quad -Q + Y_O - S_1 \cos 60^\circ + S_2 = 0$$

$$(3) \sum M_O = 0 \quad S_1 \sin 60^\circ a - Q \frac{2a}{3} + S_2 2a = 0$$

Статички неодређен проблем

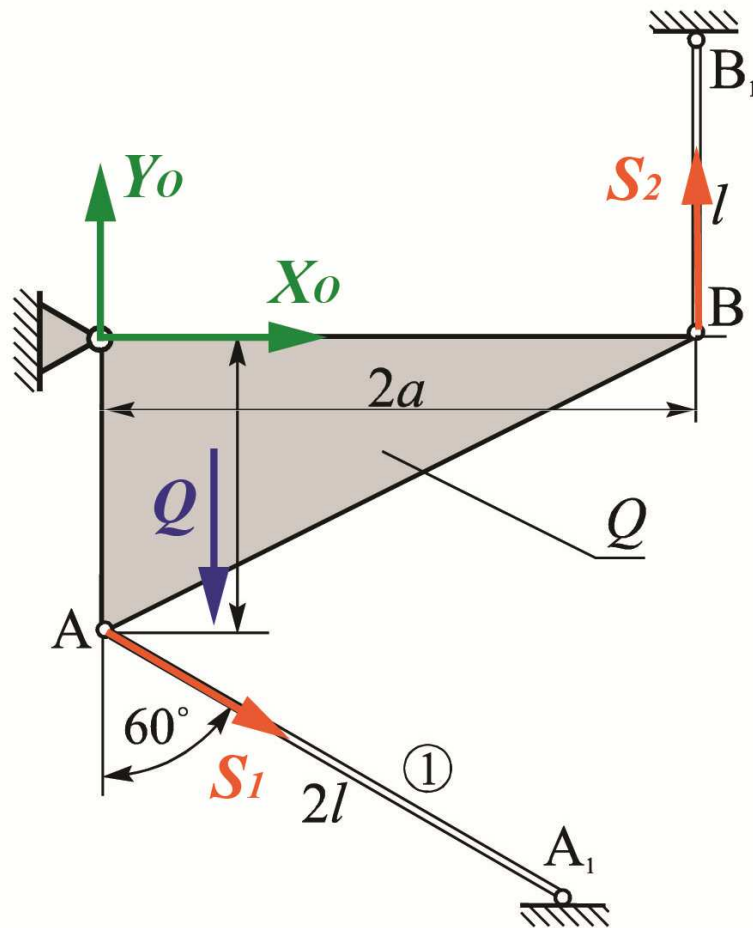


4 реакције везе:

$$X_O, Y_O, S_1, S_2$$

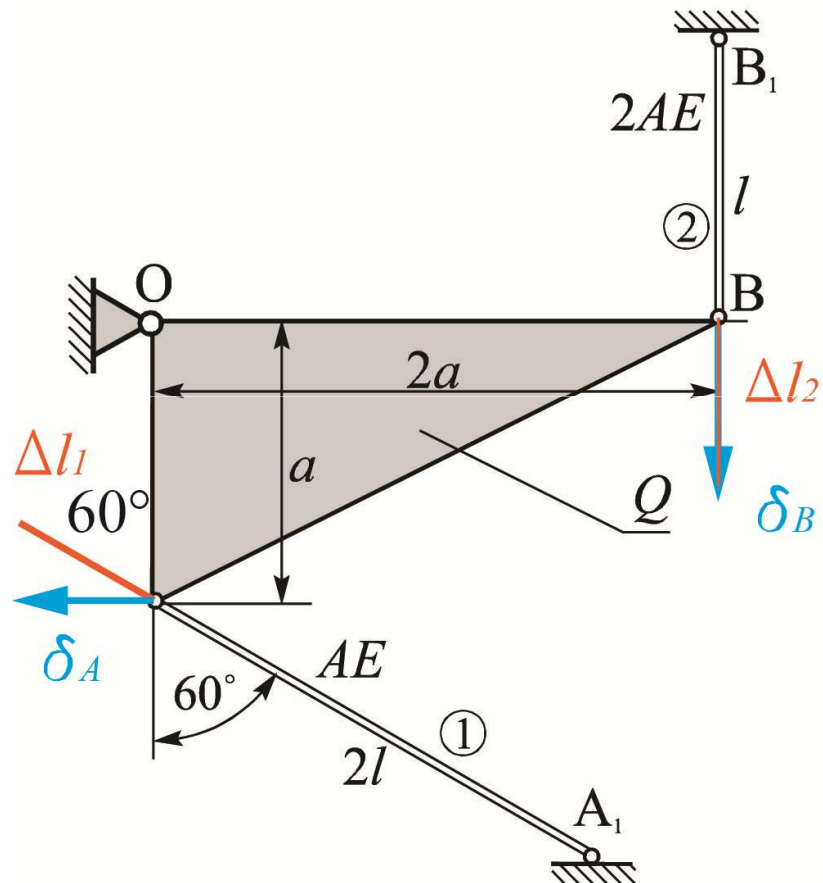
и 3 једначине
равнотеже, следи да
је проблем једном
статички неодређен.

Померања и деформације

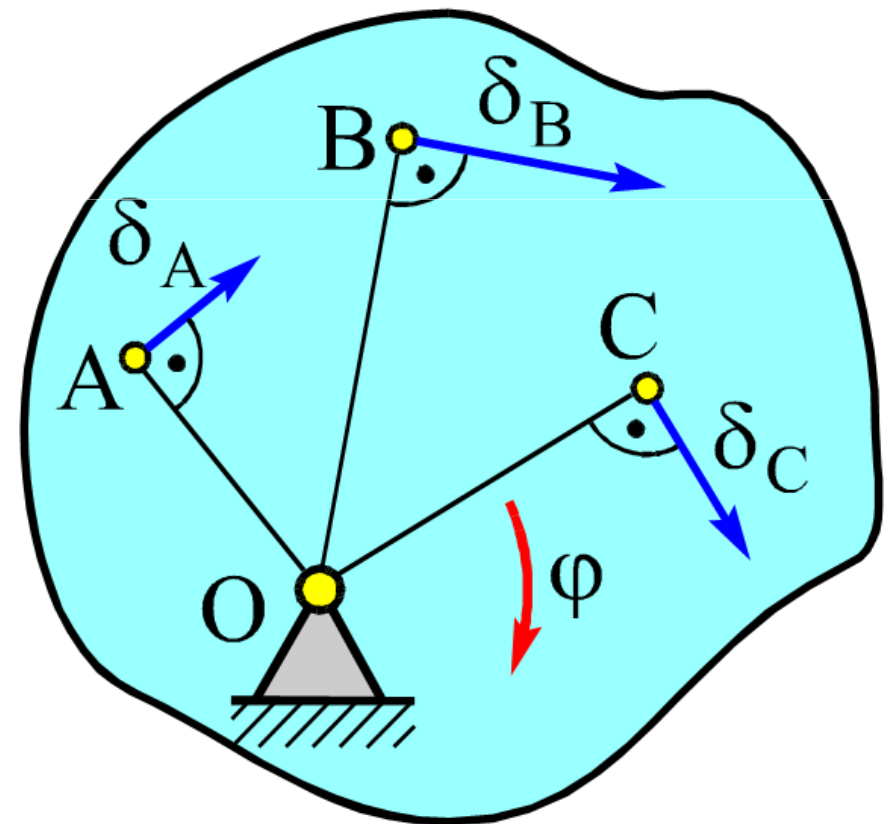


Услед силе тежине претпоставља се да је могућа ротација квадратне плоче око тачке O у смеру казаљке на сату (негативном математичком смеру)

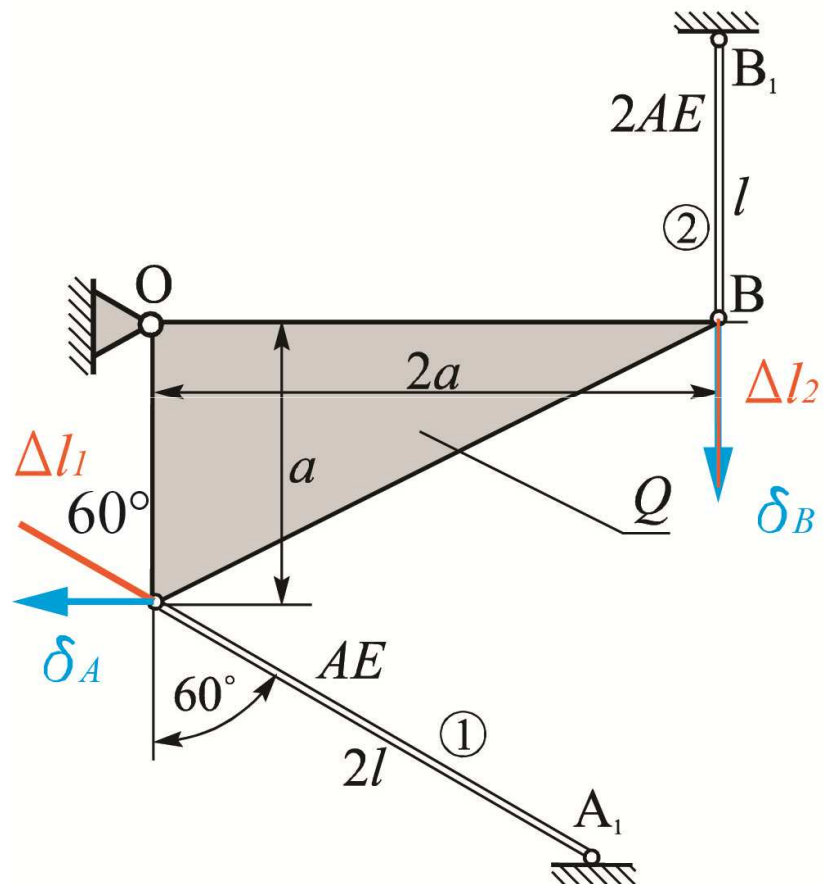
Померања и деформације



Ротација крутог тела око непомичне осе:

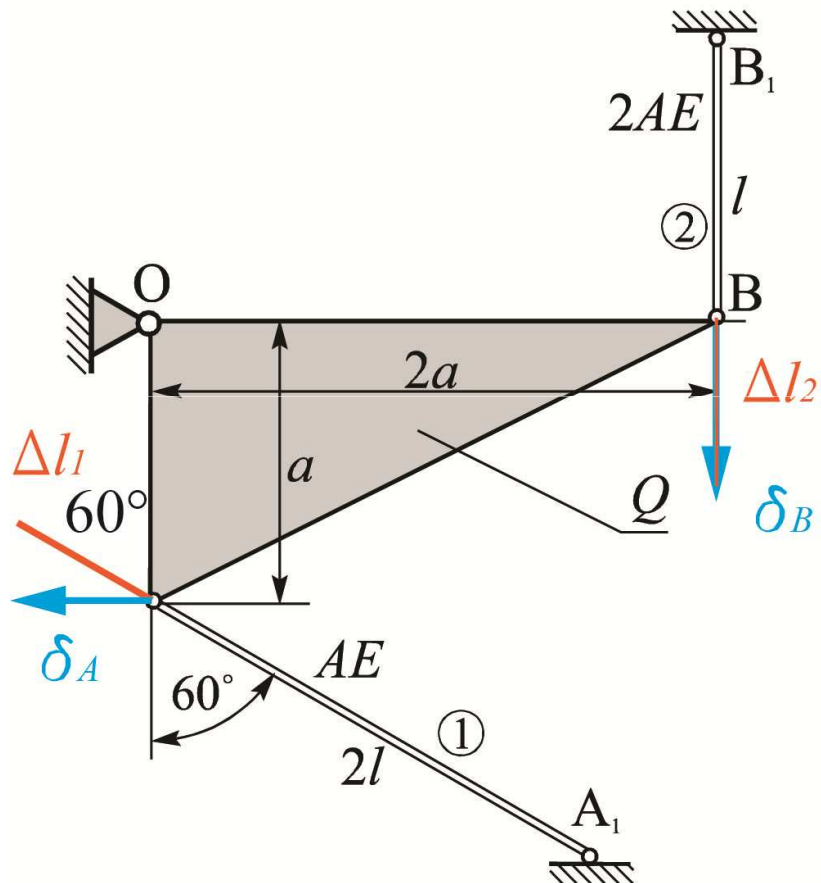


Померања и деформације



Издужења штапова 1 и 2 падају на правац осе штапа. Треба обратити пажњу да је штап 1 оптерећен на **затезање**, такође је и штап 2 оптерећен на **затезање**.

Став о издужењу штапа

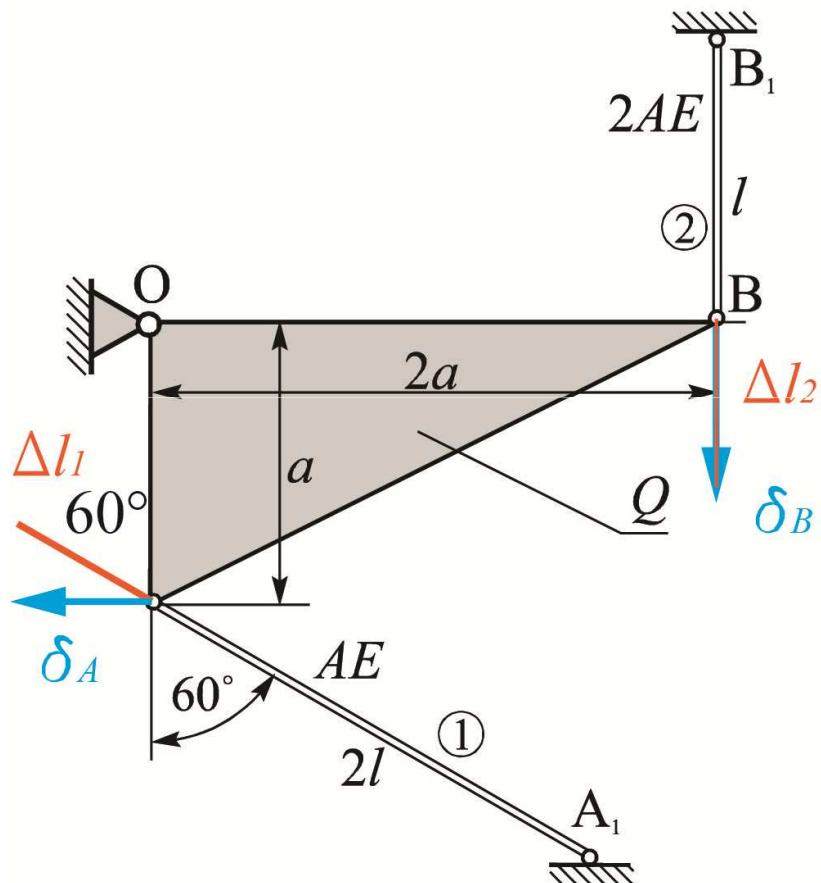


Угао између издужења штапа 1 и померања тачке А је 30° степени, такође угао између издужења штапа 2 и померања тачке В је 0° степени.

$$\Delta l_1 = \delta_A \cos 30^\circ$$

$$\Delta l_2 = \delta_B \cos 0^\circ$$

Померање тачака

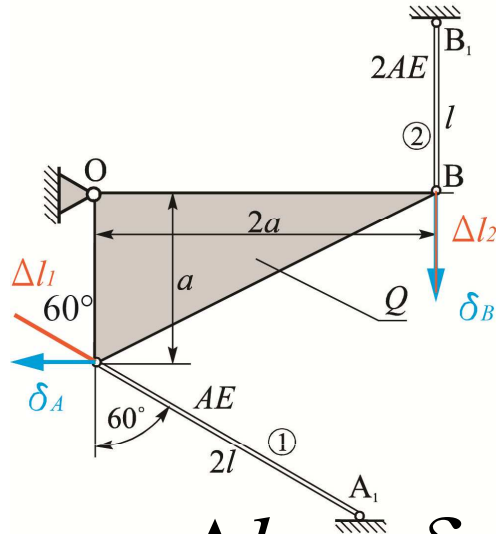


Ако се посматра померање тачке преко дужине кружног лука тада важи:

$$\delta_A = \overline{OA} \varphi = a \varphi$$

$$\delta_B = \overline{OB} \varphi = 2a \varphi$$

Геометријски услов деформације



Веза између издужења штапова
добија се количником истих.
Добијена једначина претставља
геометријски услов деформације

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\delta_A \cos 30^\circ}{\delta_B \cos 0^\circ} = \frac{a\varphi \sqrt{3}/2}{2a\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Delta l_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Delta l_2$$

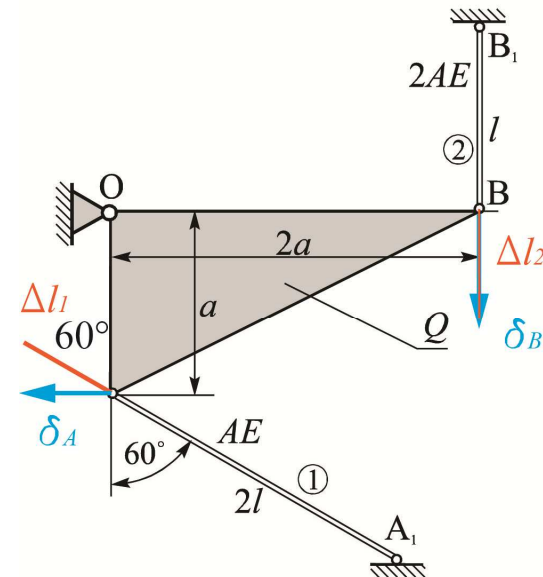
Допунска једначина

Веза између издужења штапова и аксијалних сила у штаповима даје допунску једначину:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} l_1}{A_1 E} = \frac{S_1 2l}{AE} \quad \Delta l_2 = \frac{F_{a2} l_2}{A_2 E} = \frac{S_2 l}{2AE}$$

$$(gud) \rightarrow \frac{S_1 2l}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{S_2 l}{2AE}$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{16} S_2$$



Моментна једначина

Користећи моментну једначину (једначину 3) и допунску једначину следе аксијалне силе у штаповима:

$$S_1 \sin 60^\circ a - Q \frac{2a}{3} + S_2 2a = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{16} S_2\right) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2Q}{3} - 2S_2 = 0$$

$$S_2 = \frac{64Q}{201} (dj) \rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{3}}{16} S_2 = \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{64Q}{201}\right) = \frac{4\sqrt{3}Q}{201}$$

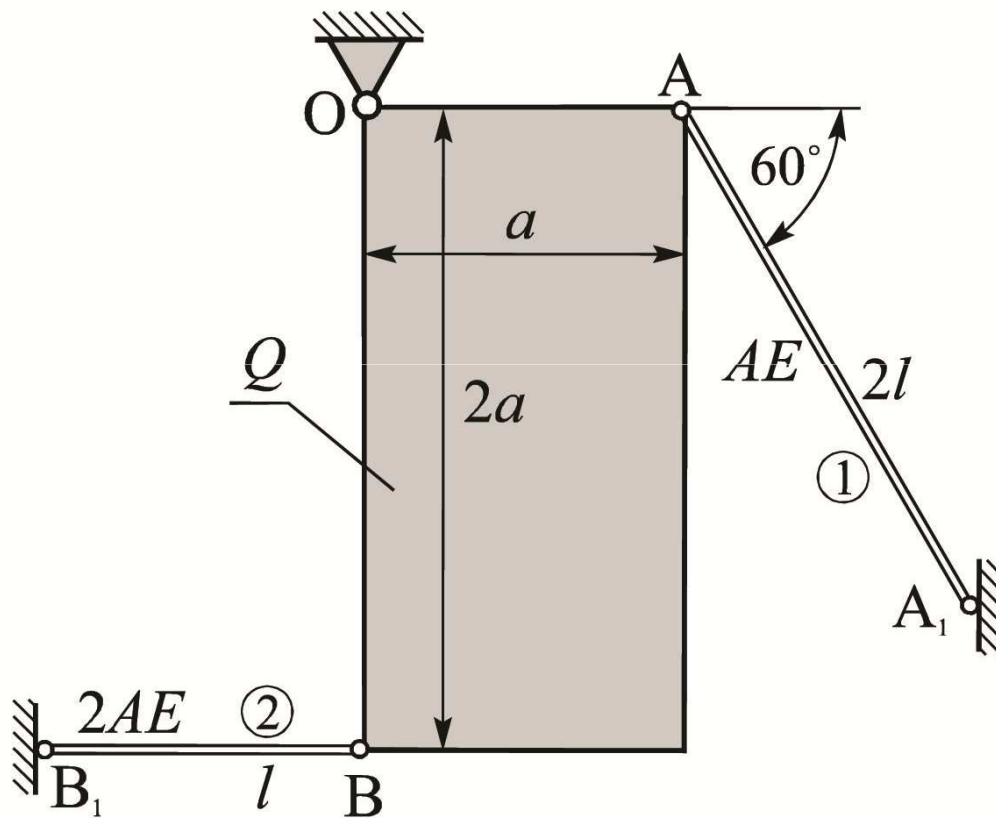
Напони у штаповима

Тражени напони су:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{S_1}{A} = \frac{4\sqrt{3}Q}{201A}$$

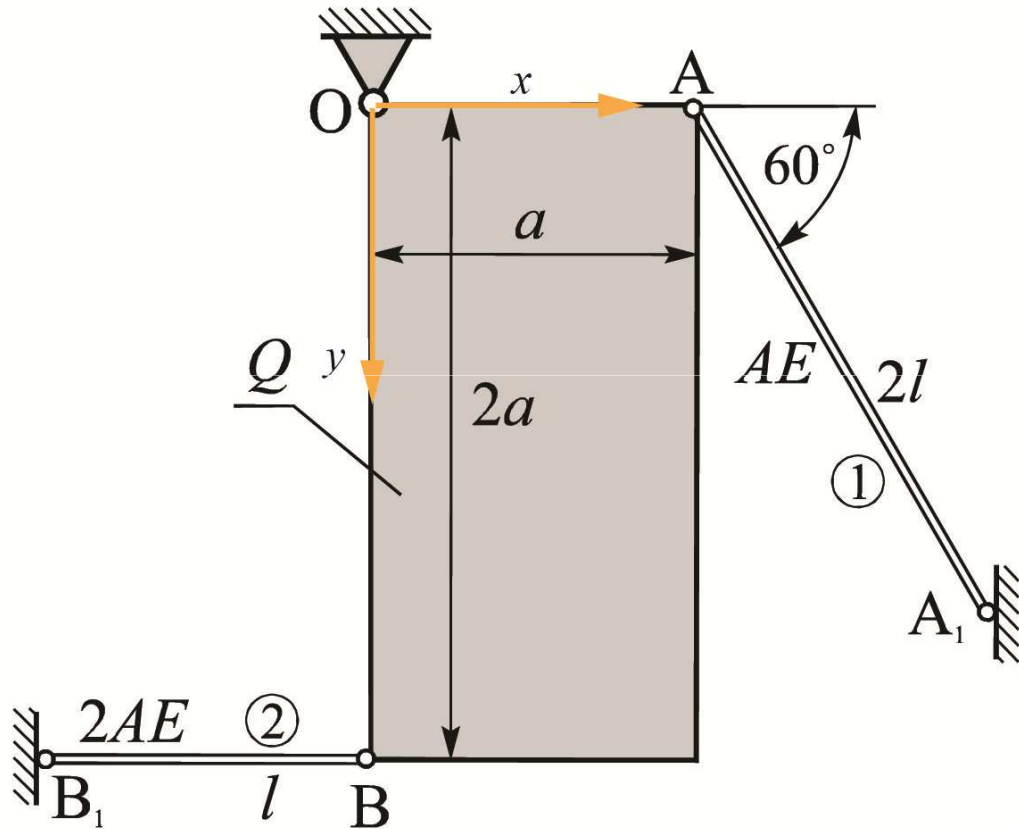
$$\sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{S_2}{A} = \frac{64Q}{201A}$$

Задатак 4



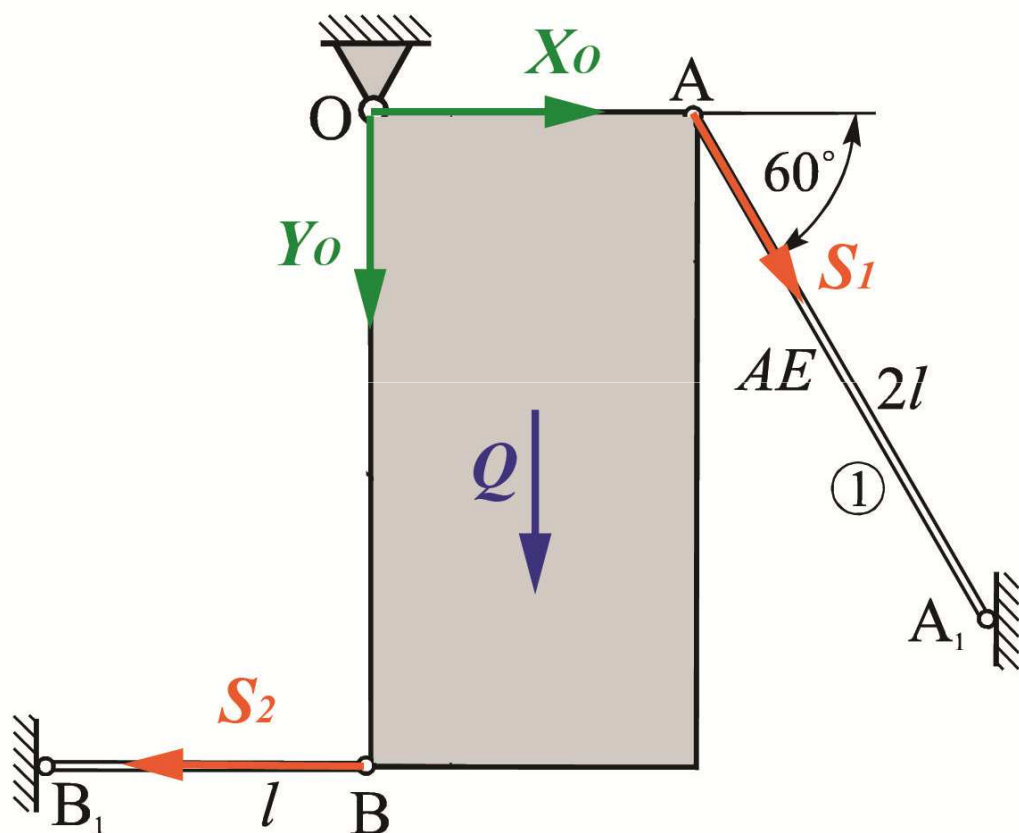
Крути правоугаоник тежине Q , са страницама дужине a и $2a$, зглобно је везан у тачки O за подлогу. У тачкама A и B су зглобно везани лаки и еластични штапови, који су преосталим крајевима зглобно везани за подлогу. Одредити напоне у еластичним штаповима.

Координатни систем



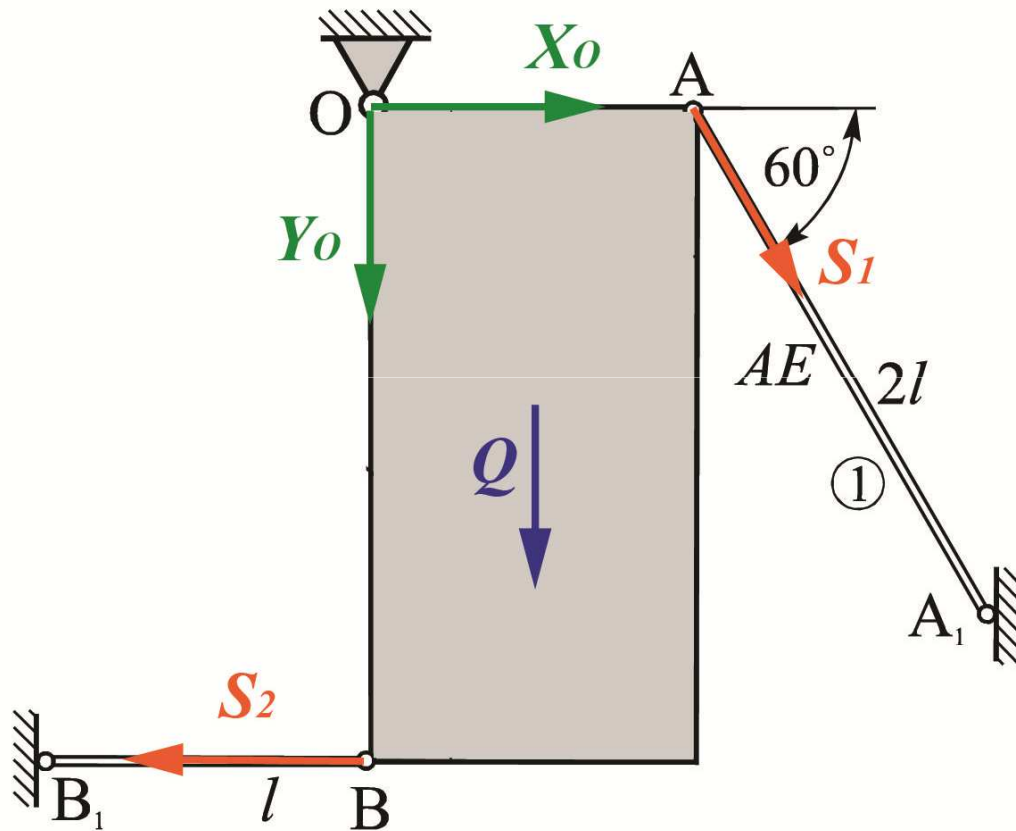
Увођење
координатног
система у тачки O .
Смерови
координатних оса су
производни.

Реакције везе



Ослобађање од веза и увођење реакција веза. Смерови реакција у тачки O су произвољни. Сила тежине Q дејствује у тежишту тела. Реакције у штаповима падају на правац осе штапа

Једначине равнотеже



Услови равнотеже за
тело у равни:

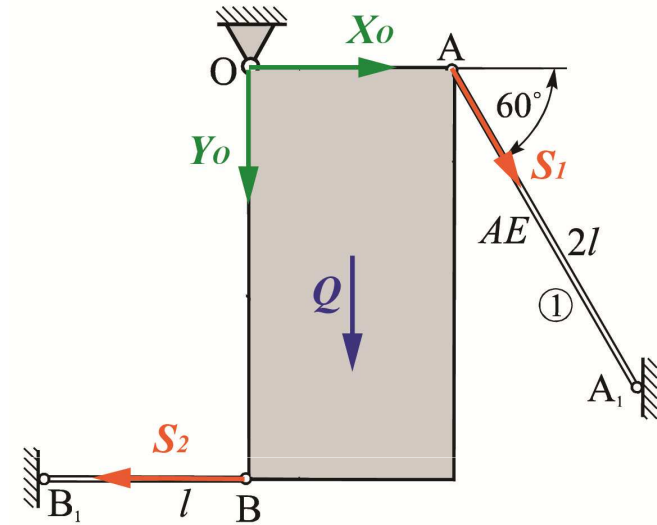
$$\sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

Једначине равнотеже

Једначине равнотеже:

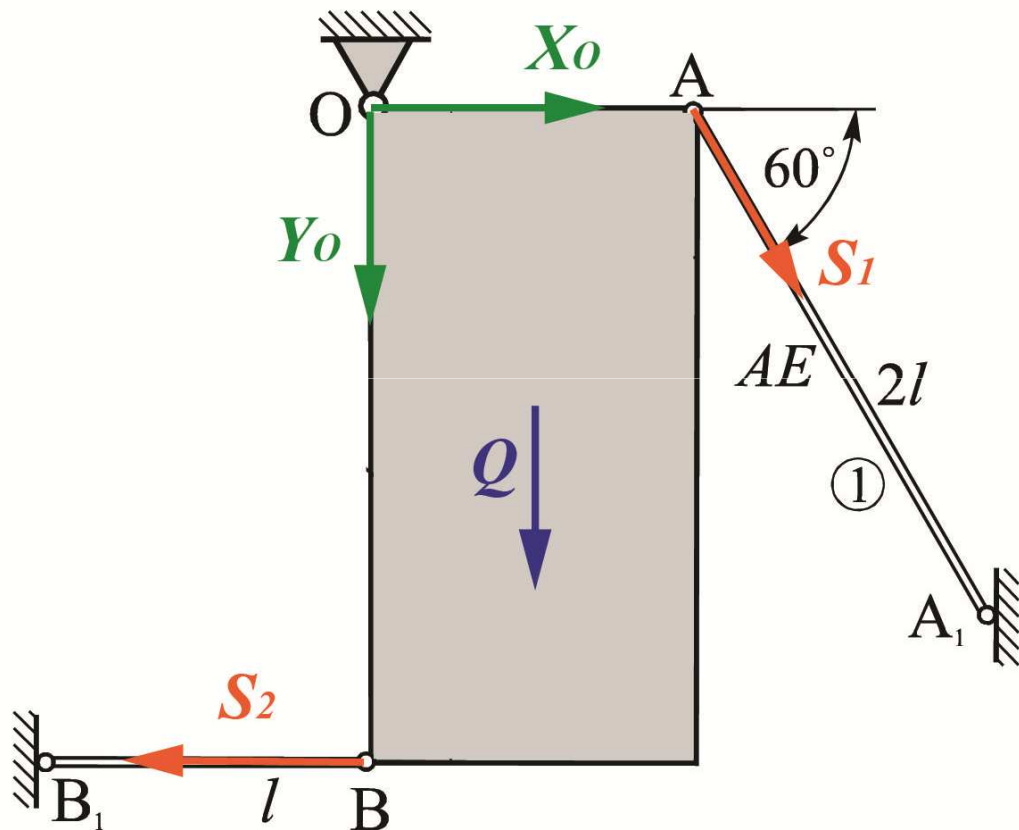


$$(1) \sum X_i = 0 \quad X_O - S_2 + S_1 \cos 60^\circ = 0$$

$$(2) \sum Y_i = 0 \quad Q + Y_O - S_1 \sin 60^\circ = 0$$

$$(3) \sum M_O = 0 \quad -S_1 \sin 60^\circ a - Q \frac{a}{2} - S_2 2a = 0$$

Статички неодређен проблем

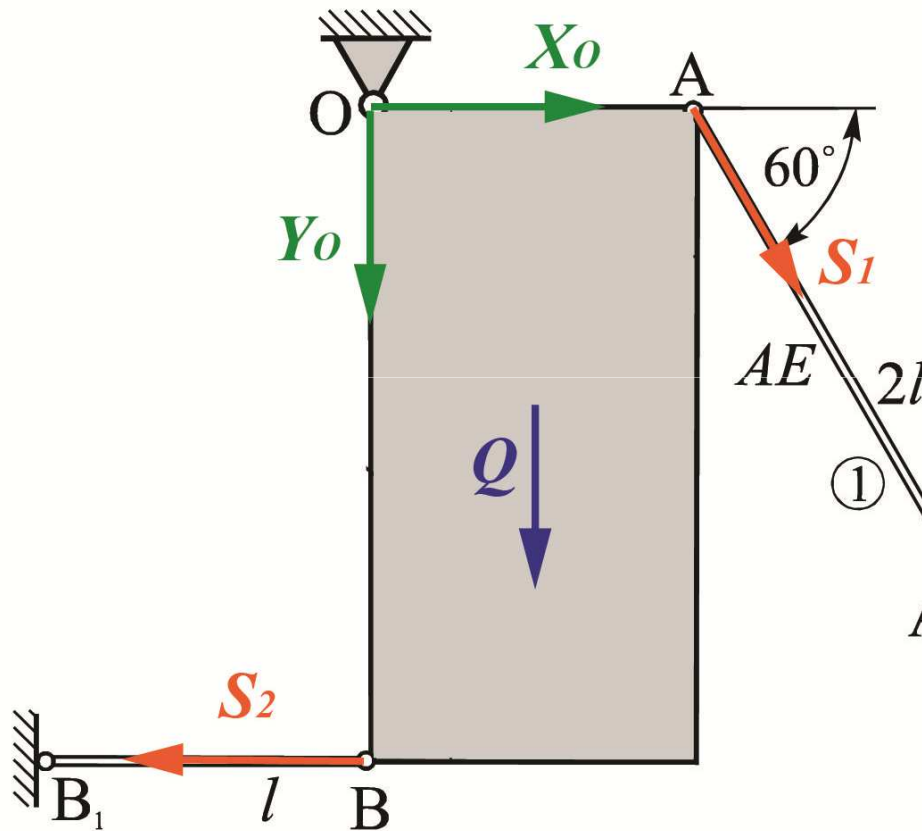


4 реакције везе:

$$X_O, Y_O, S_1, S_1$$

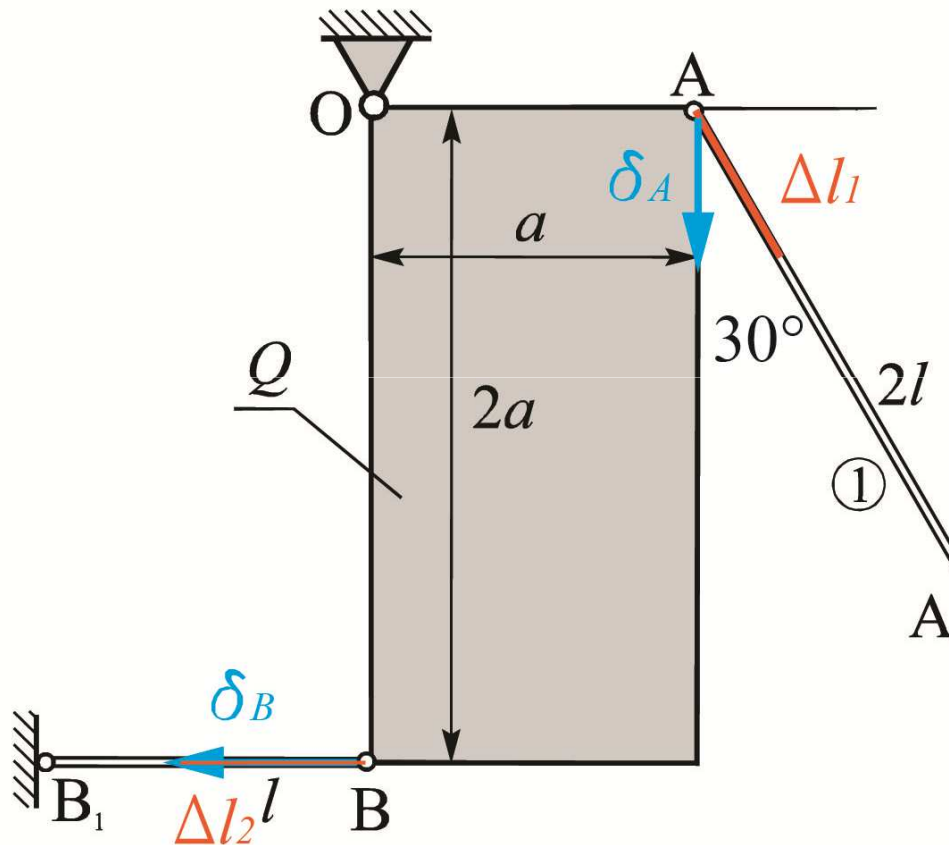
и 3 једначине
равнотеже, следи да
је проблем једном
статички неодређен.

Померања и деформације

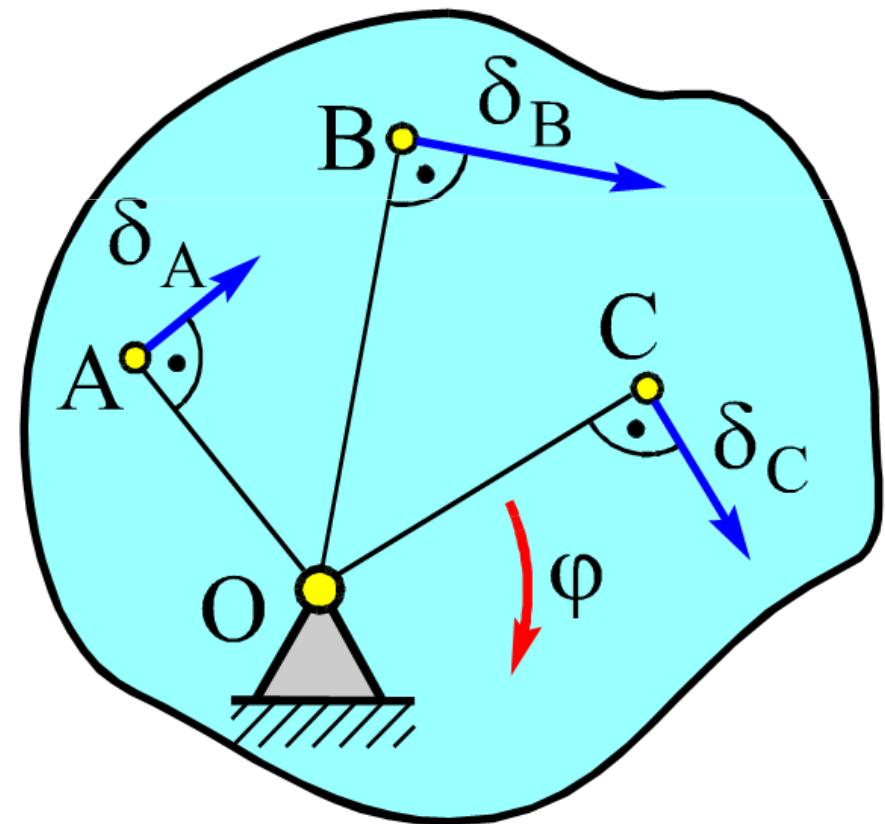


Услед силе тежине претпоставља се да је могућа ротација квадратне плоче око тачке O у смеру казаљке на сату (негативном математичком смеру)

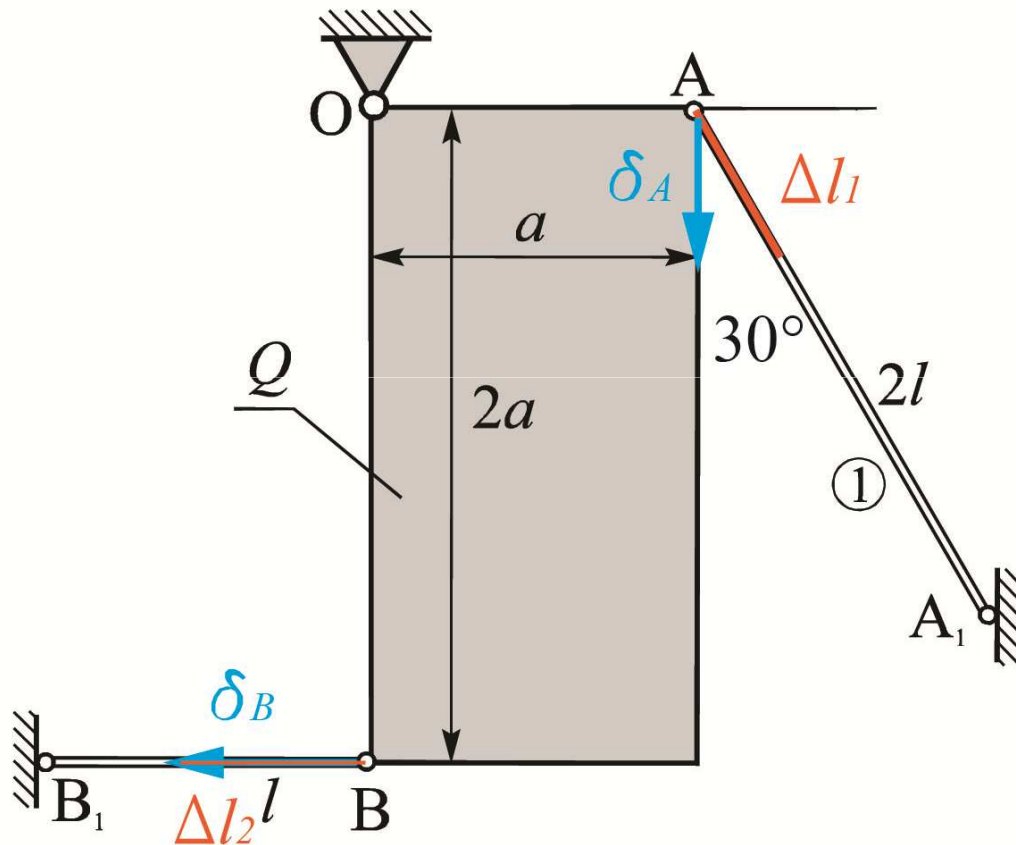
Померања и деформације



Ротација крутог тела око непомичне осе:

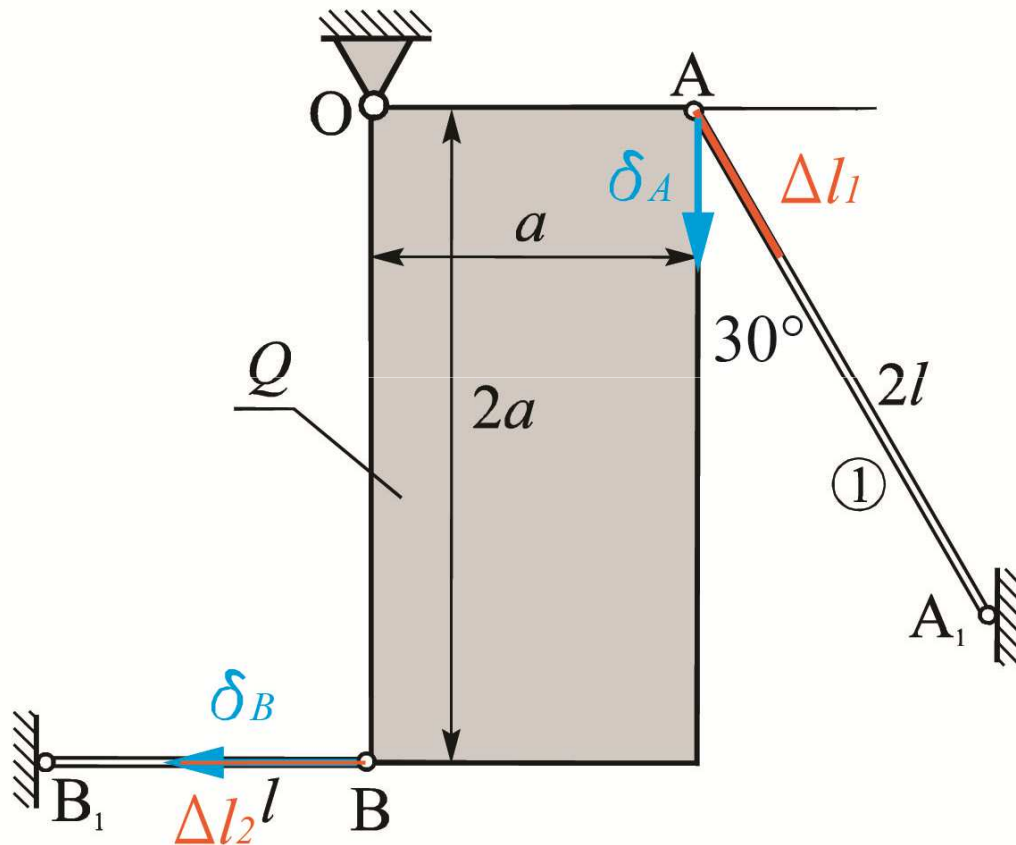


Померања и деформације



Издужења штапова 1 и 2 падају на правац осе штапа. Треба обратити пажњу да је штап 1 оптерећен на **притисак**, такође је и штап 2 оптерећен на **притисак**.

Став о издужењу штапа

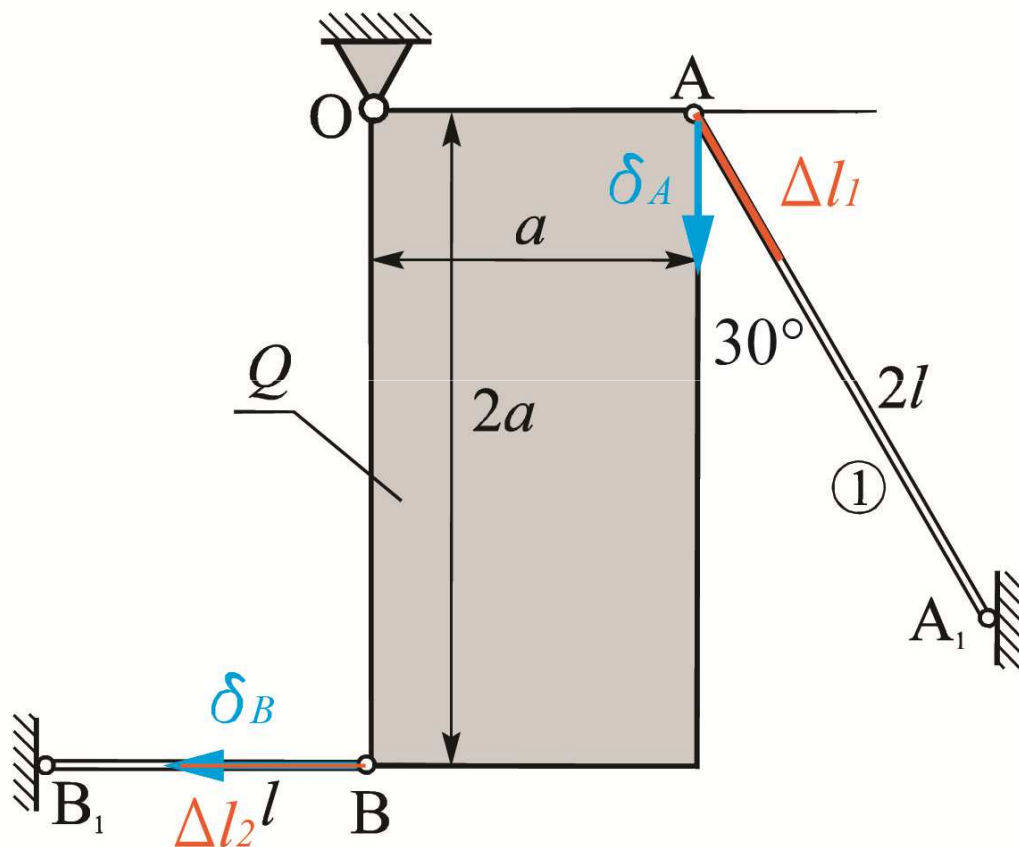


Угао између издужења штапа 1 и померања тачке A је 30° степени, такође угао између издужења штапа 2 и померања тачке B је 0° степени.

$$\Delta l_1 = -\delta_A \cos 30^\circ$$

$$\Delta l_2 = -\delta_B \cos 0^\circ$$

Померање тачака

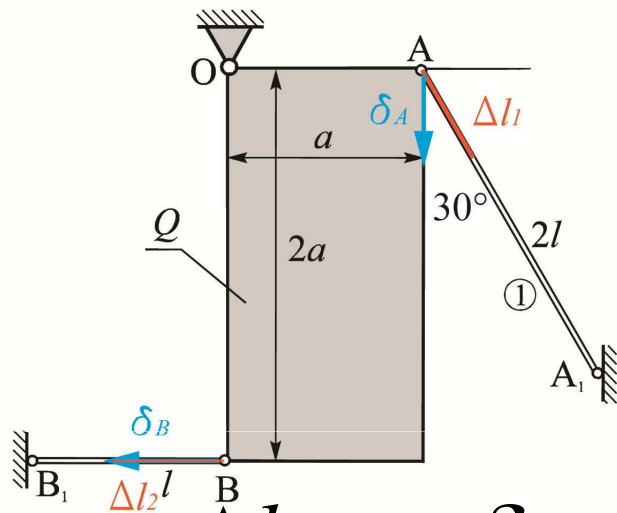


Ако се посматра померање тачке преко дужине кружног лука тада важи:

$$\delta_A = \overline{OA} \varphi = a \varphi$$

$$\delta_B = \overline{OB} \varphi = 2a \varphi$$

Геометријски услов деформације



Веза између издужења штапова добија се количником истих. Добијена једначина претставља геометријски услов деформације

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{-\delta_A \cos 30^\circ}{-\delta_B \cos 0^\circ} = \frac{a\varphi \sqrt{3}/2}{2a\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{\Delta l_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Delta l_2}$$

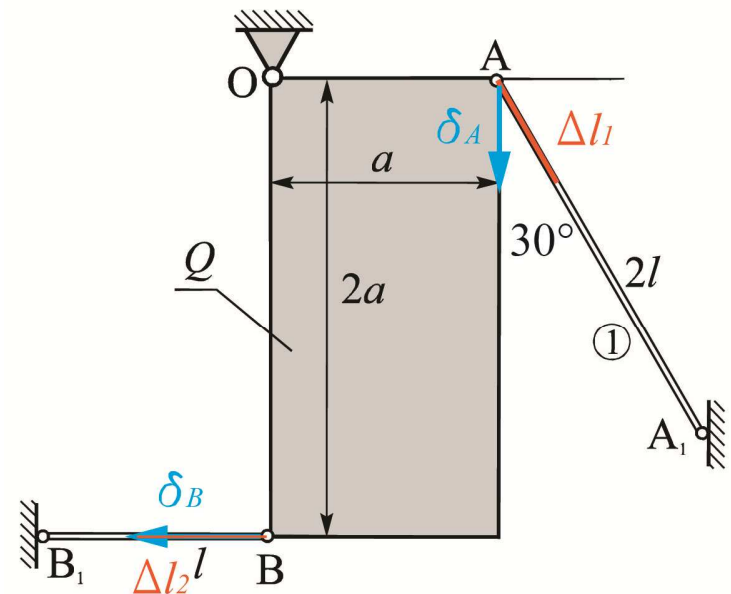
Допунска једначина

Веза између издужења штапова и аксијалних сила у штаповима даје допунску једначину:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} l_1}{A_1 E} = \frac{S_1 2l}{AE} \quad \Delta l_2 = \frac{F_{a2} l_2}{A_2 E} = \frac{S_2 l}{2AE}$$

$$(gud) \rightarrow \frac{S_1 2l}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{S_2 l}{2AE}$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{16} S_2$$



Моментна једначина

Користећи моментну једначину (једначину 3) и допунску једначину следе аксијалне силе у штаповима:

$$-S_1 \sin 60^\circ a - Q \frac{a}{2} - S_2 2a = 0 = 0$$

$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{16} S_2\right) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{Q}{2} - 2S_2 = 0$$

$$S_2 = -\frac{16Q}{67} (dj) \rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{3}}{16} S_2 = -\frac{\sqrt{3}Q}{67}$$

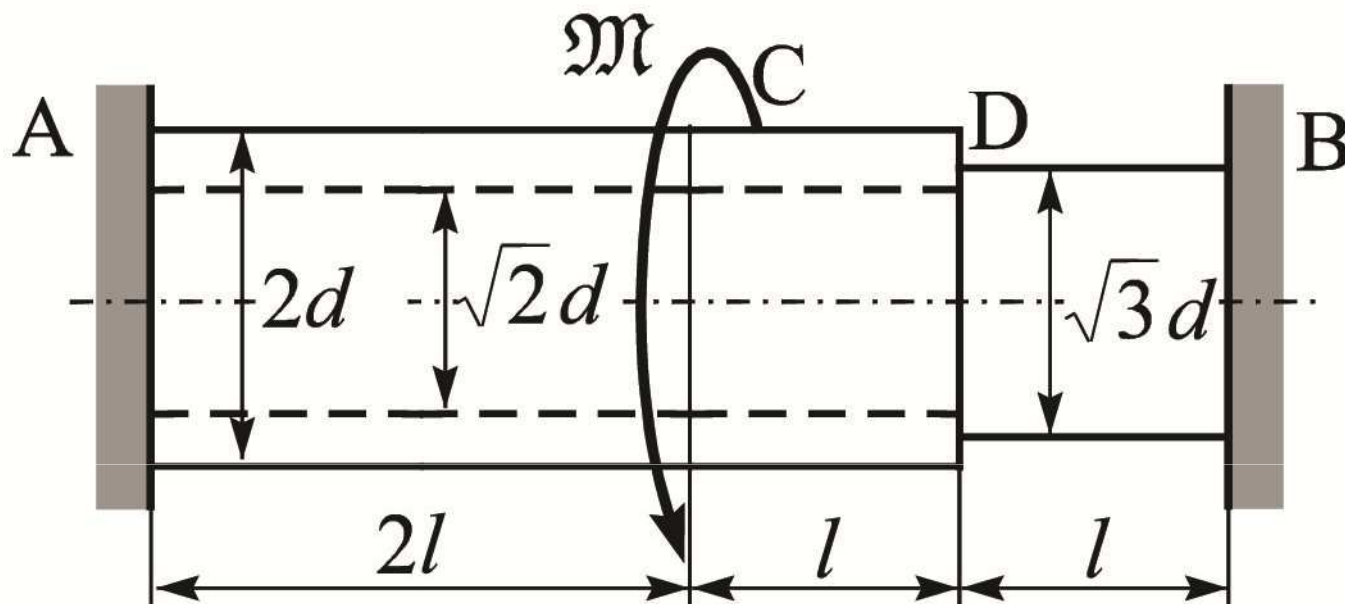
Напони у штаповима

Тражени напони су:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{S_1}{A} = -\frac{\sqrt{3}Q}{67A}$$

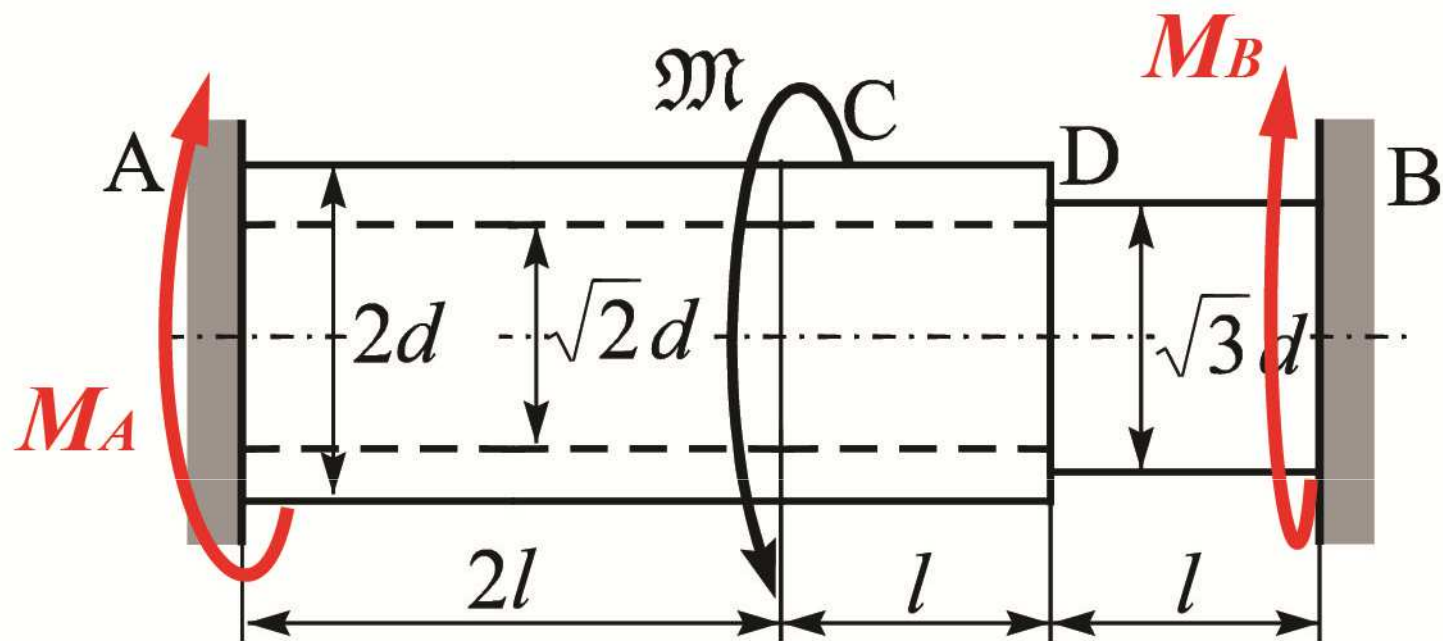
$$\sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{S_2}{A} = -\frac{16Q}{67A}$$

Задатак 5



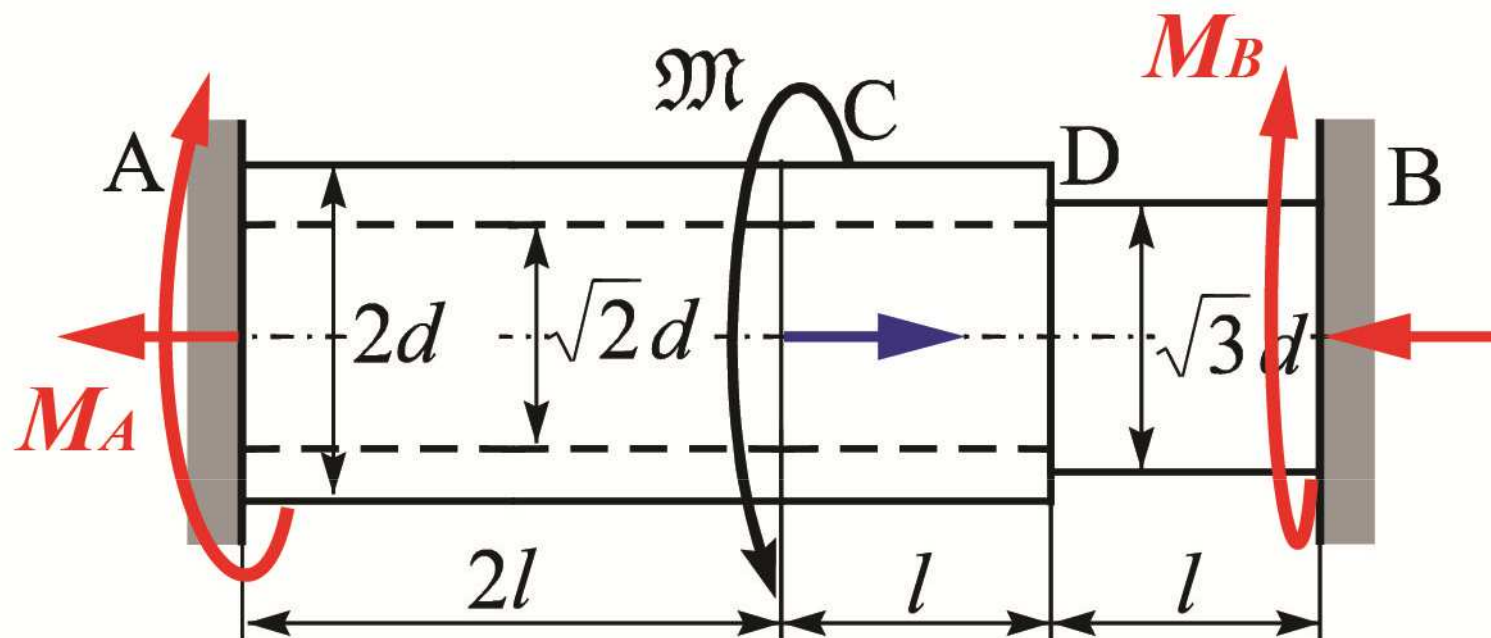
Штап дужине $4l$ причвршћен је својим крајевима A и B за круте зидове. Штап је оптерећен активним спрегом M чија је раван нормална на осу штапа. Штап је променљивог попречног пресека са пречницима задатим на слици. Одредити реакције везе и максималне напоне

Реакције везе

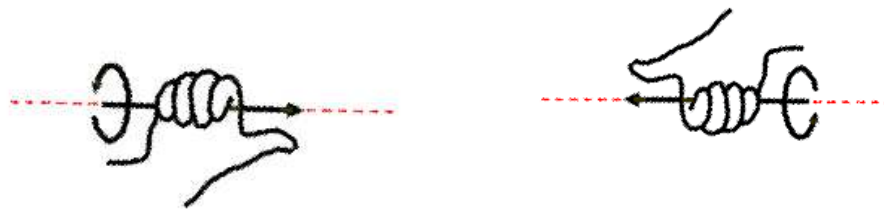


Ослобађање од веза и увођење реакција веза. Смерови реакција у тачкама А и В су произвољни.

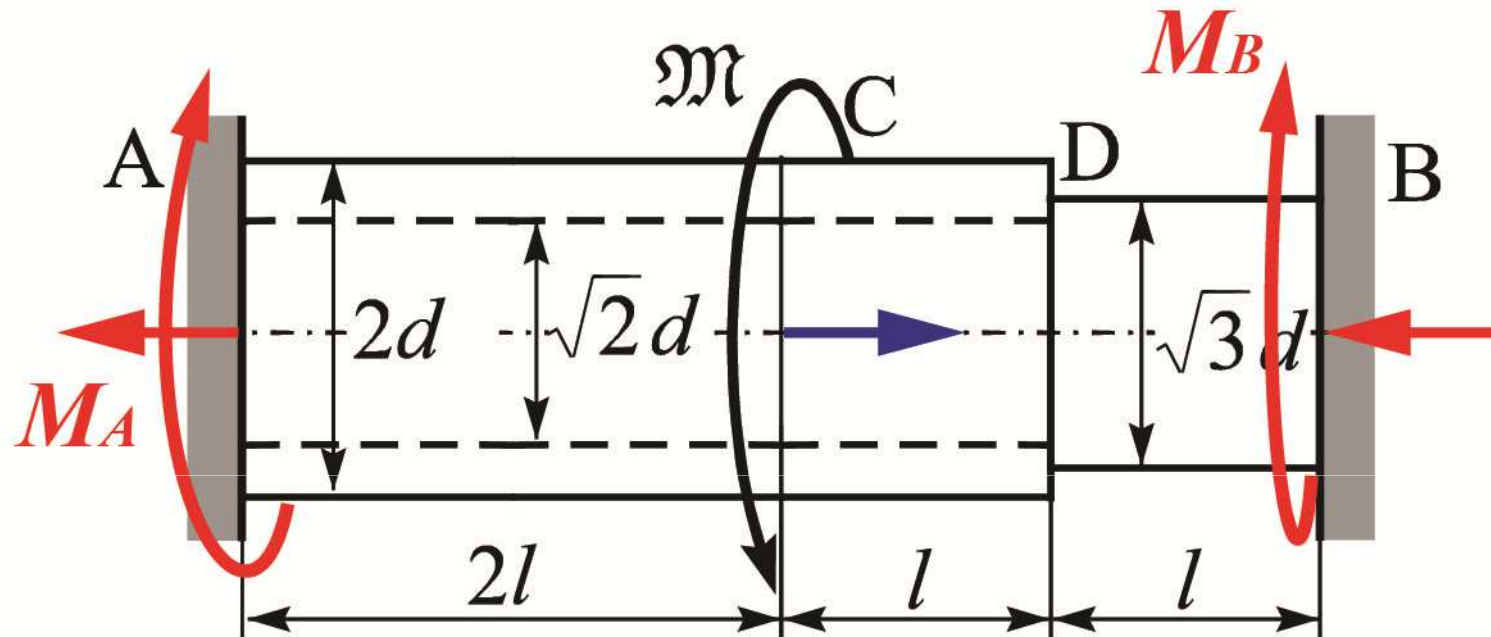
Реакције везе



Смерови вектора момената одрђују се правилом десне руке.



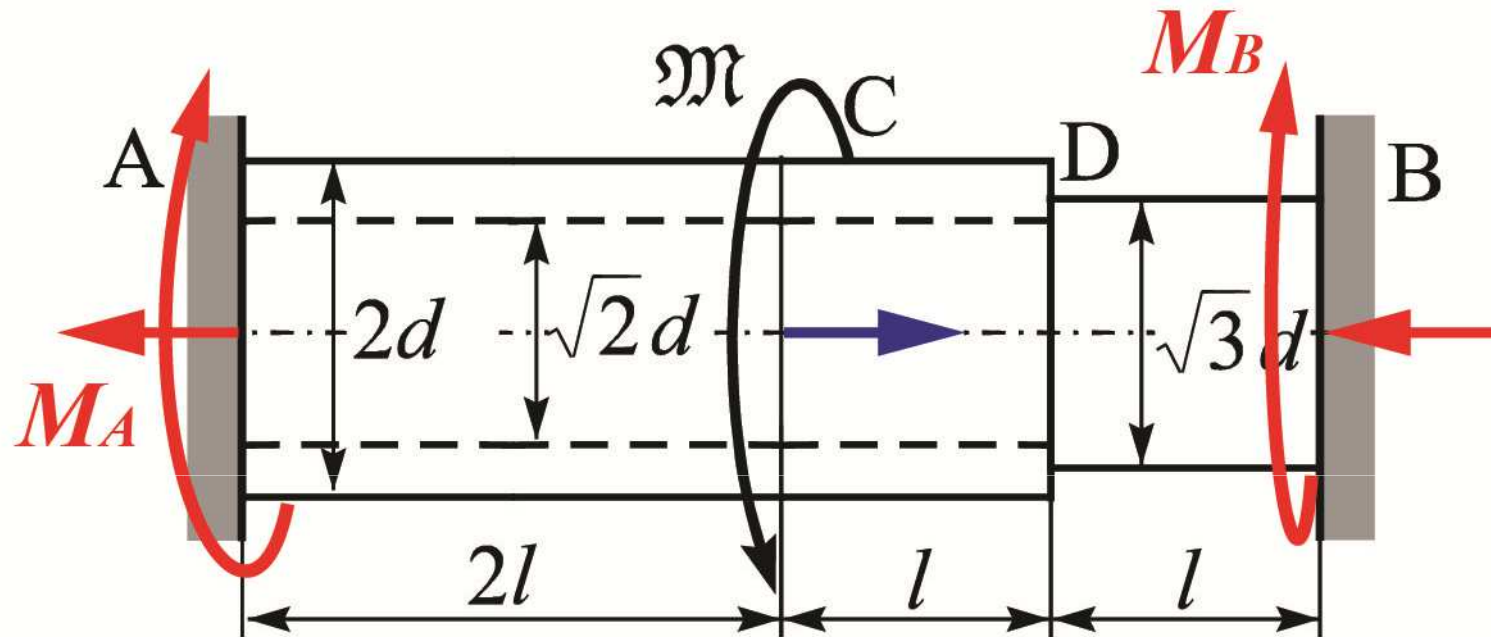
Једначине равнотеже



Услов равнотеже за
тело опеређено само
моментима увијања:

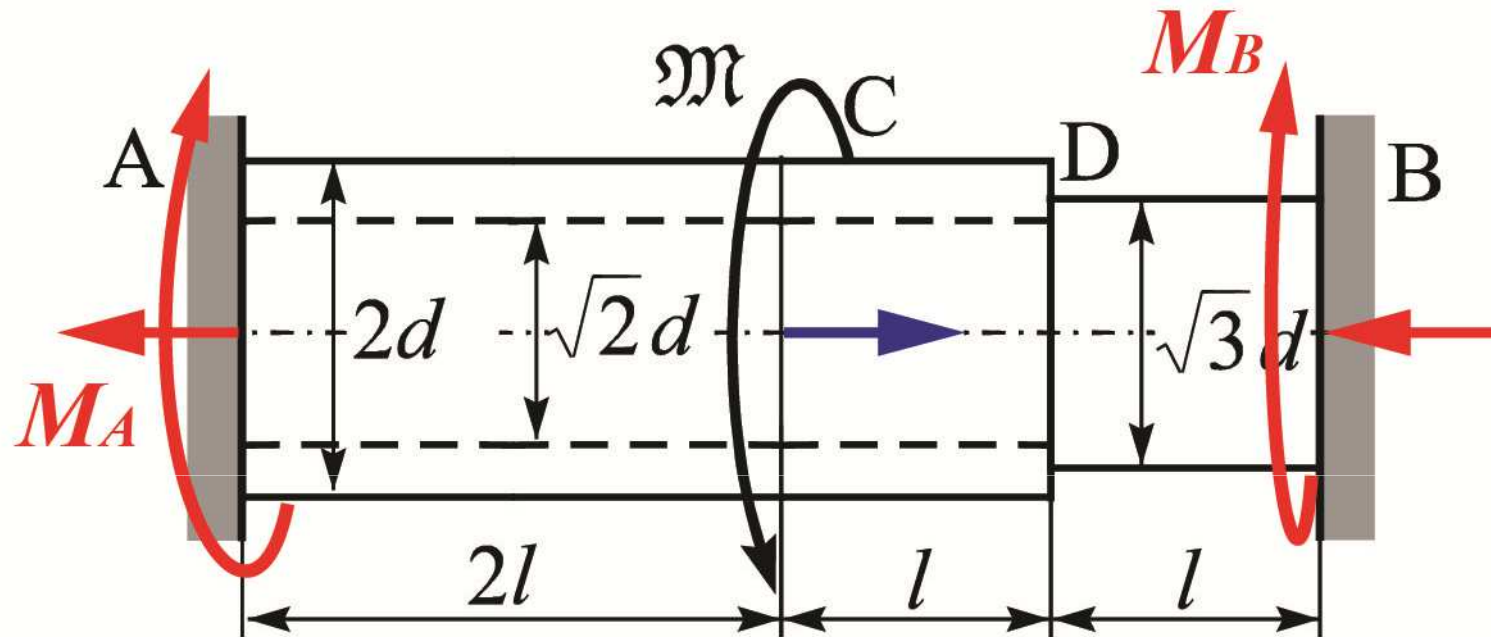
$$\sum M_u = 0$$

Једначине равнотеже



$$\sum M_u = 0 \quad -M_A + M - M_B = 0$$

Једначине равнотеже

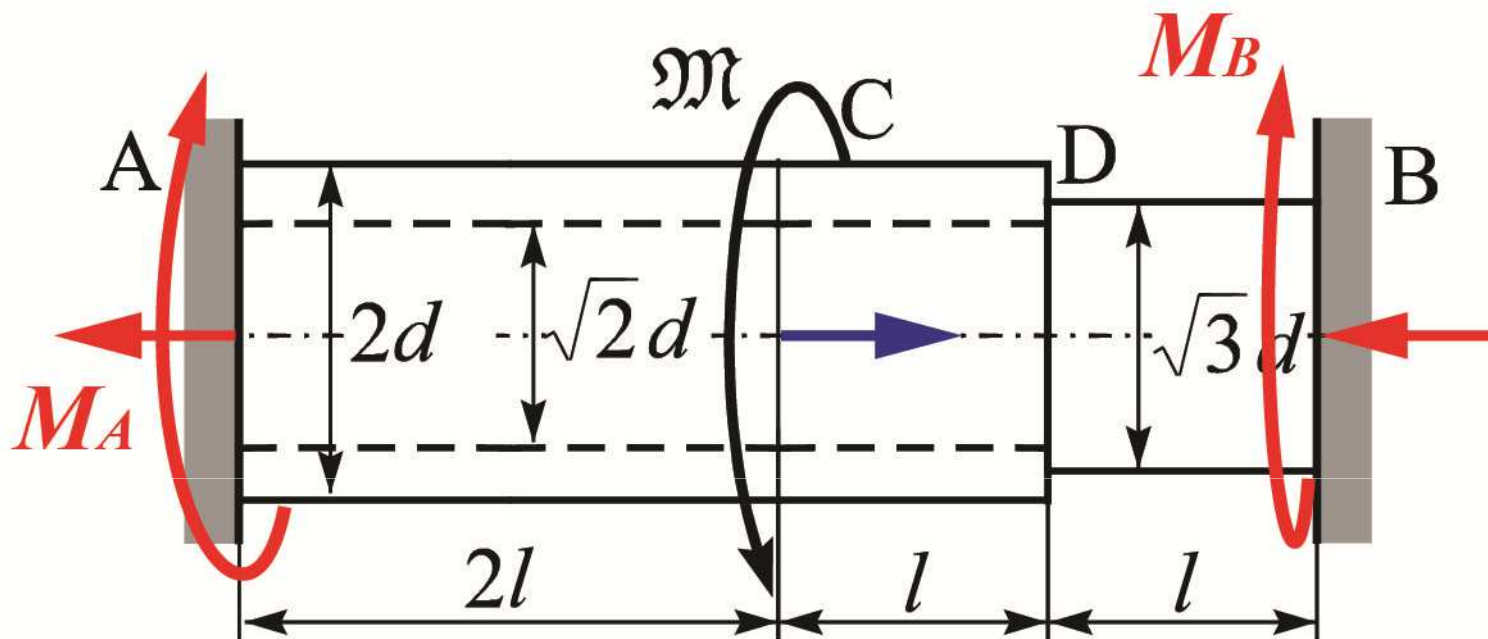


2 реакције везе:

$$M_A, M_B$$

и 1 једначина равнотеже, следи да је проблем једном статички неодређен.

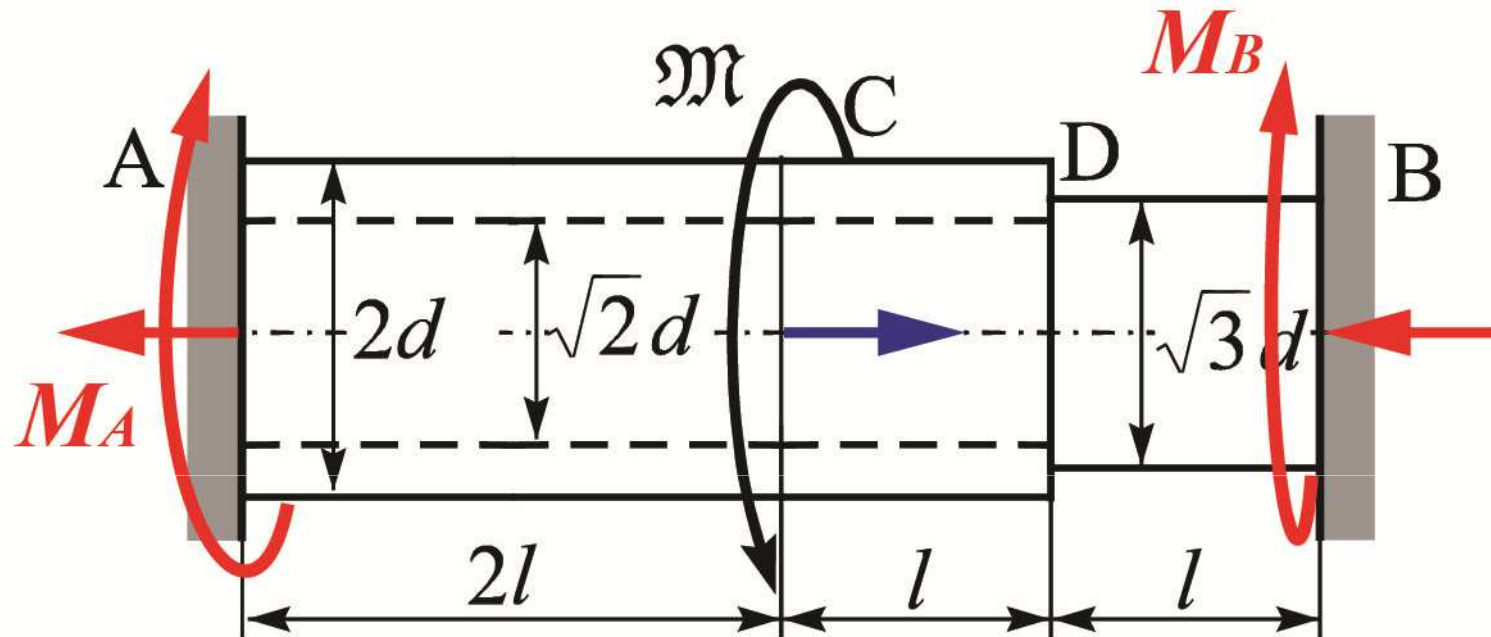
Геометријски услов деформације



Штап је укљештен на оба краја. Следи да је угао увијања између пресека А и В једнак нули. Овај услов преставља **геометријски услов деформације**

$$\theta_{B/A} = 0$$

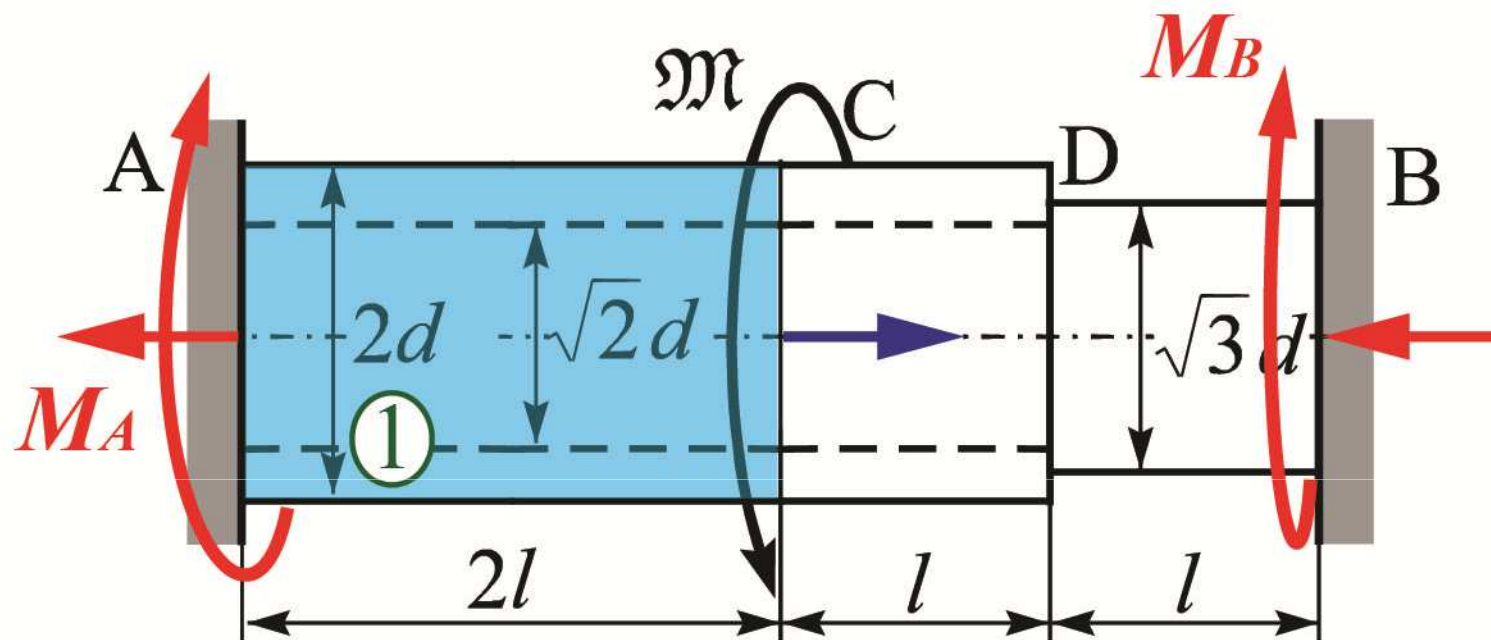
Подела на сегменте



Штап се дели на сегменте тако да је унутар једног сегмента момент увијања константан као и попречни пресек штапа.

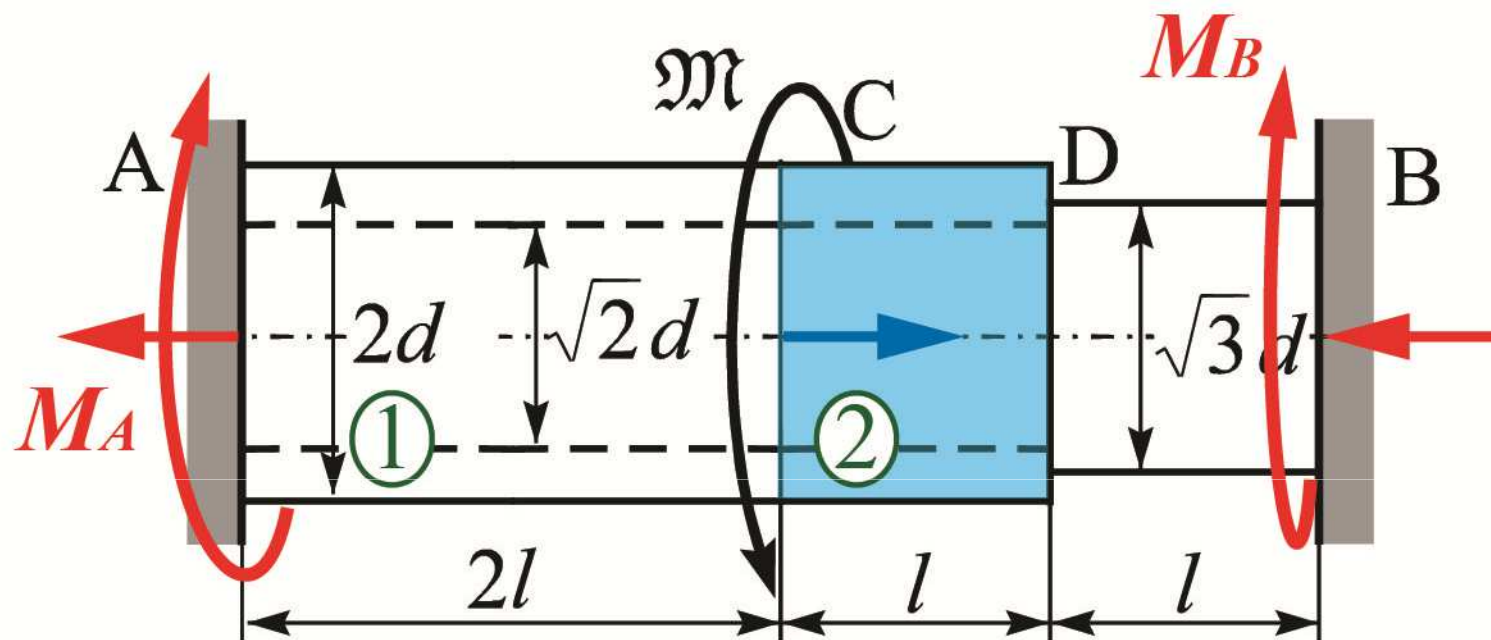
$$M_u = \text{const}, I_0 = \text{const}$$

Подела на сегменте



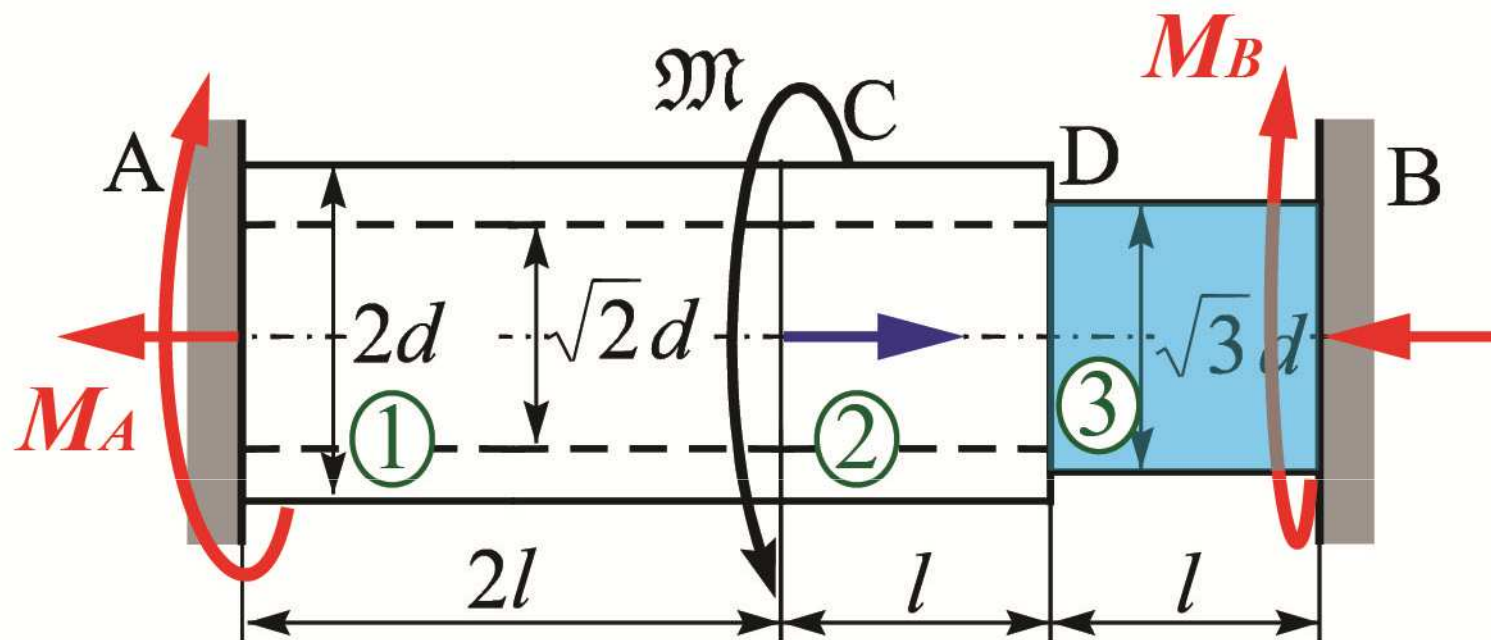
Сегмент 1 налази се између тачке А и С

Подела на сегменте



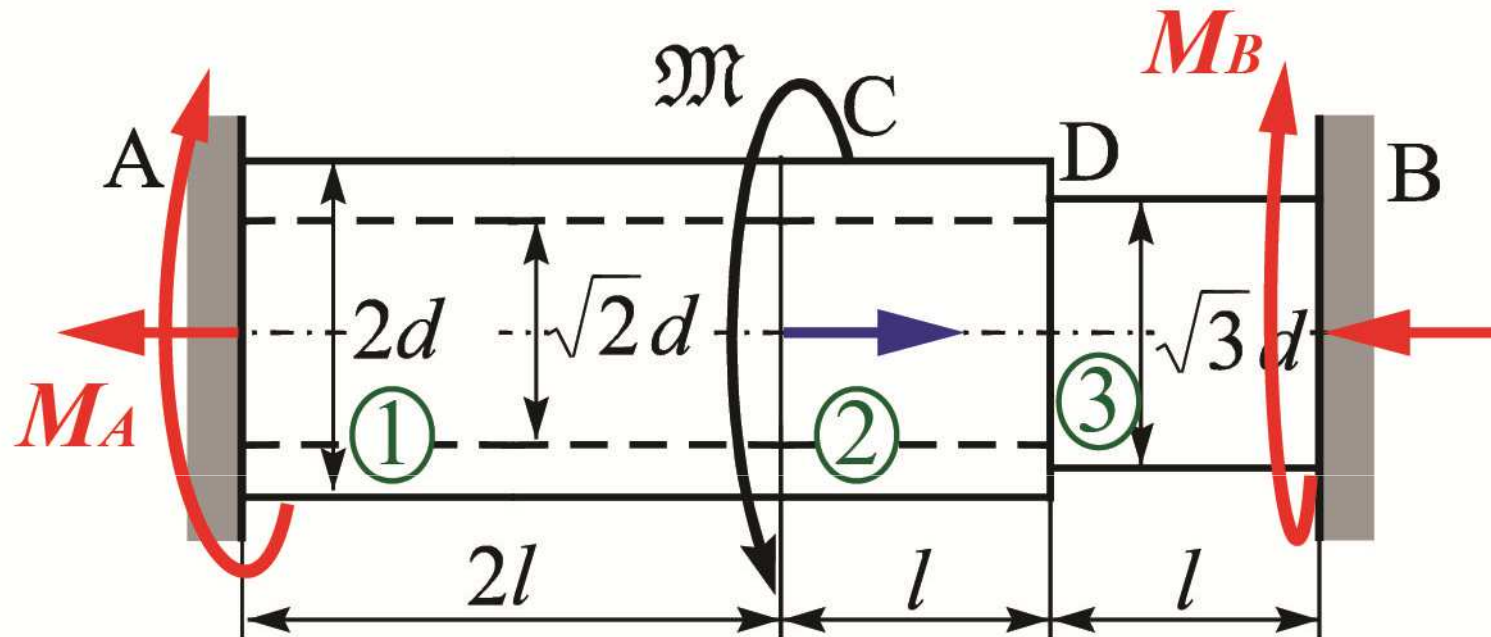
Сегмент 2 налази се између тачке С и D

Подела на сегменте



Сегмент 3 налази се између тачке D и B

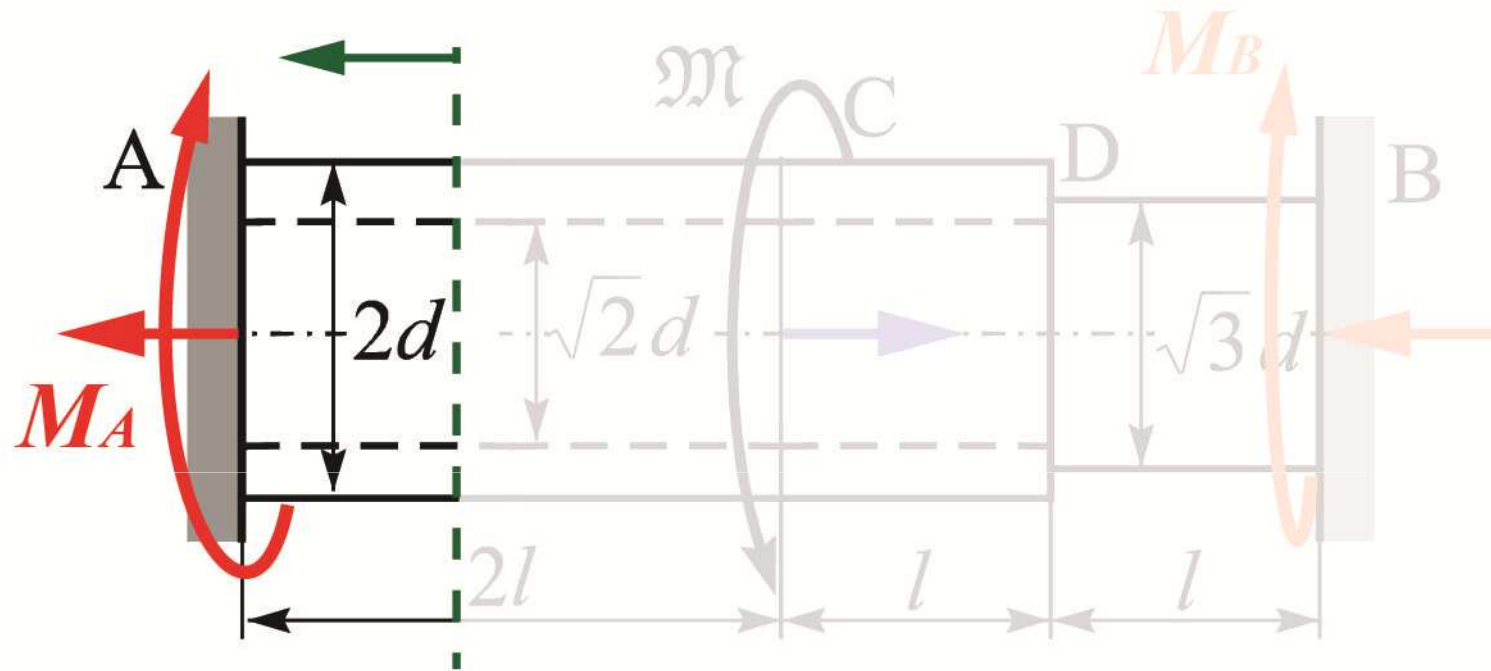
Подела на сегменте



$$\theta_{B/A} = \theta_{C/A} + \theta_{D/C} + \theta_{B/D} = 0$$

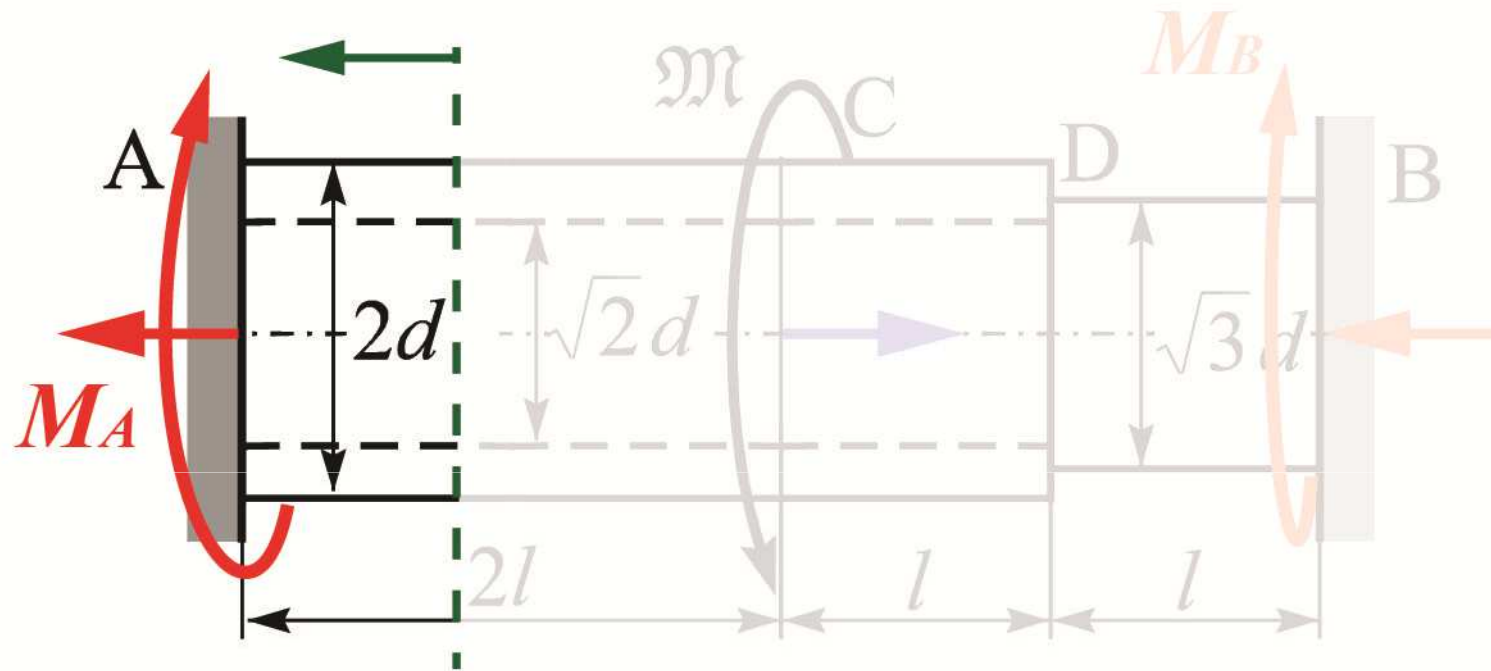
Сада када је штап подељен на сегменте потребно је одредити момент увијања у сваком сегменту као и поларне моменте инерције.

Моменти увијања



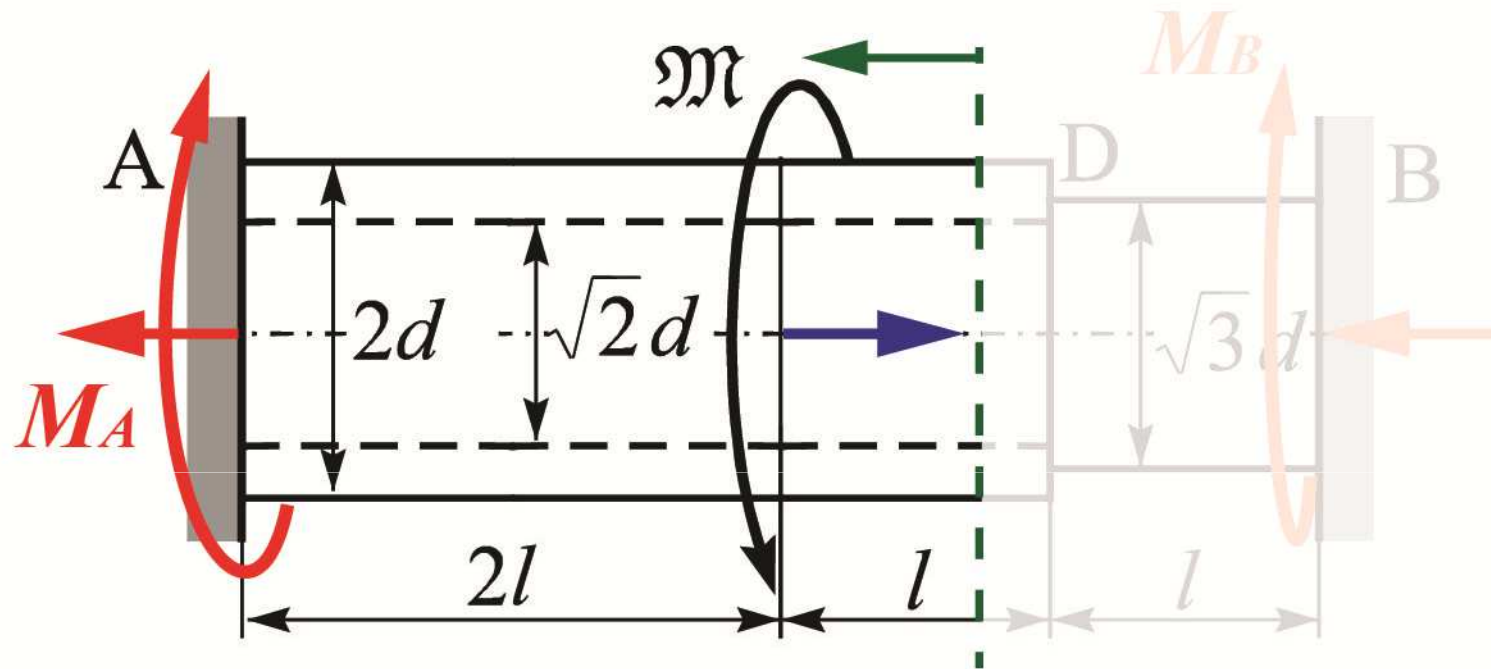
Момент увијања рачуна се као сума свих момената увијања са леве или са десне стране пресека. Пресецимо штап на произвољном месту у сегменту 1

Моменти увијања



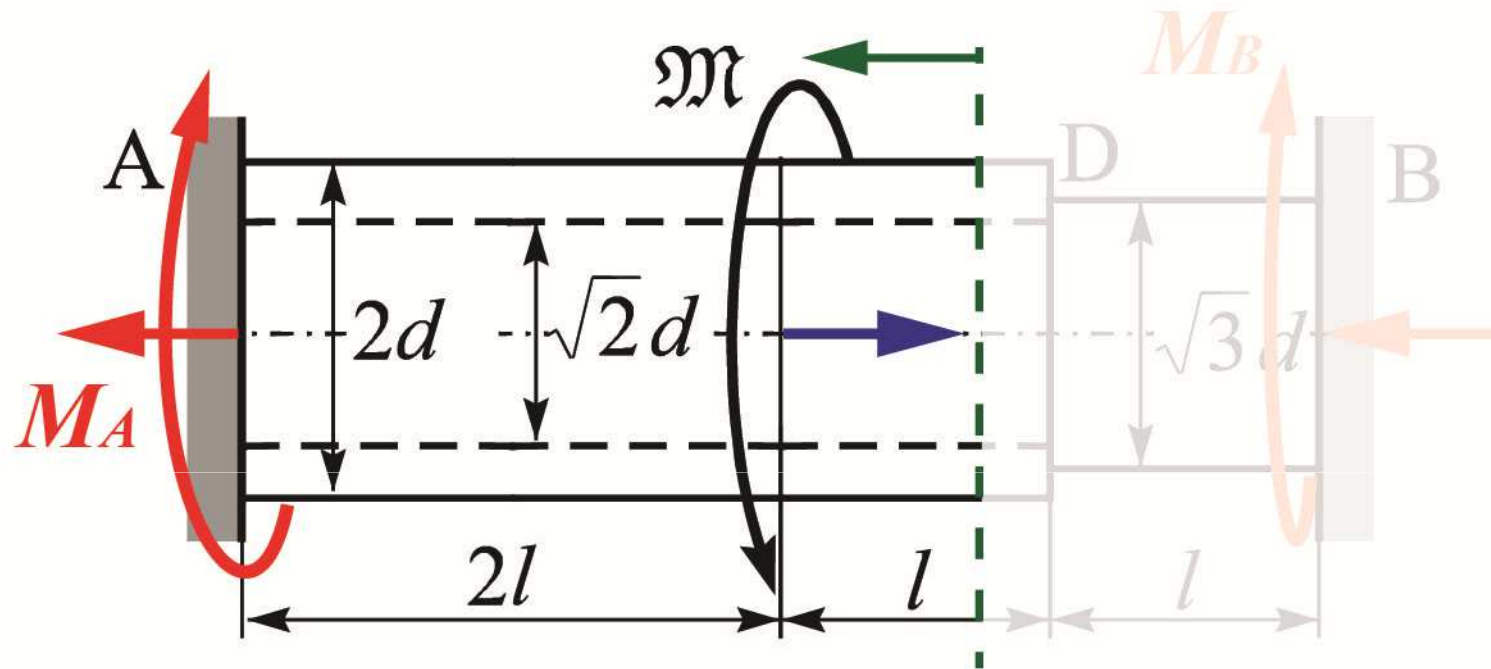
Момент увијања: $M_{u1} = M_A$

Моменти увијања



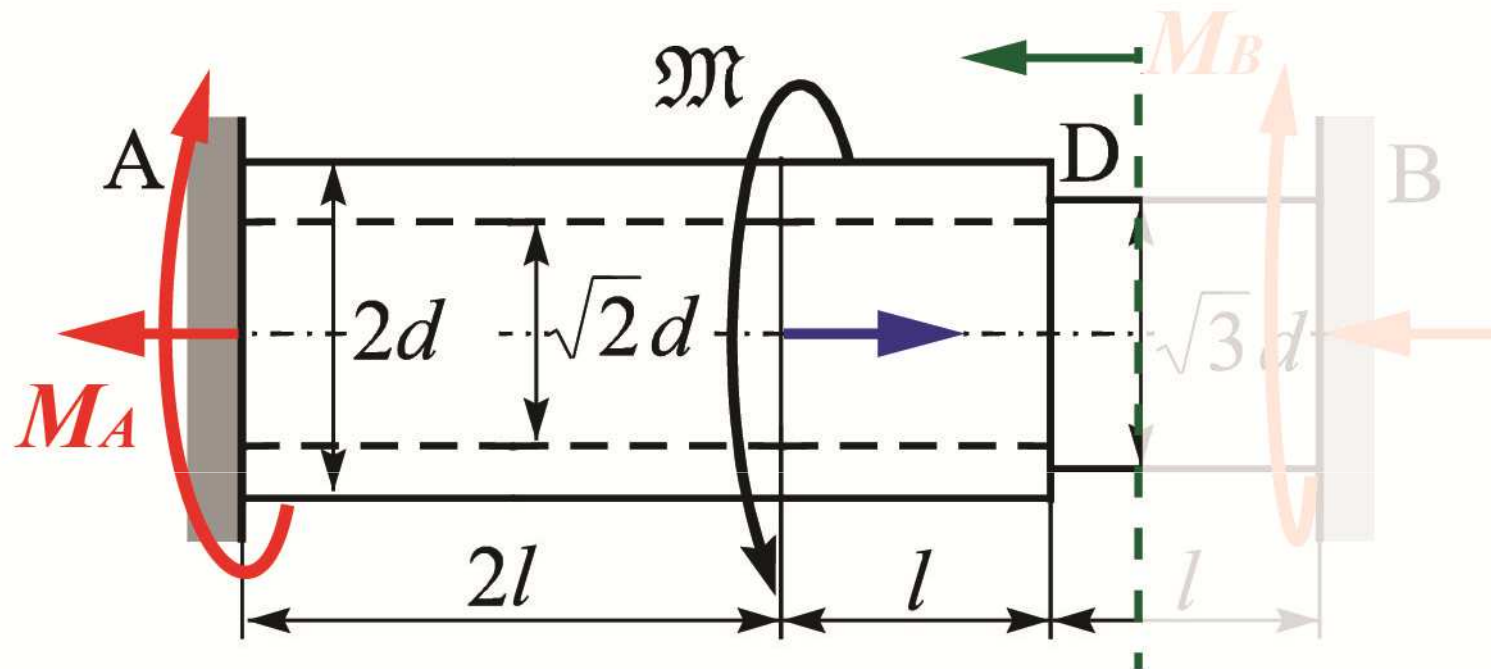
Пресецимо штап на произвољном месту у
сегменту 2

Моменти увијања



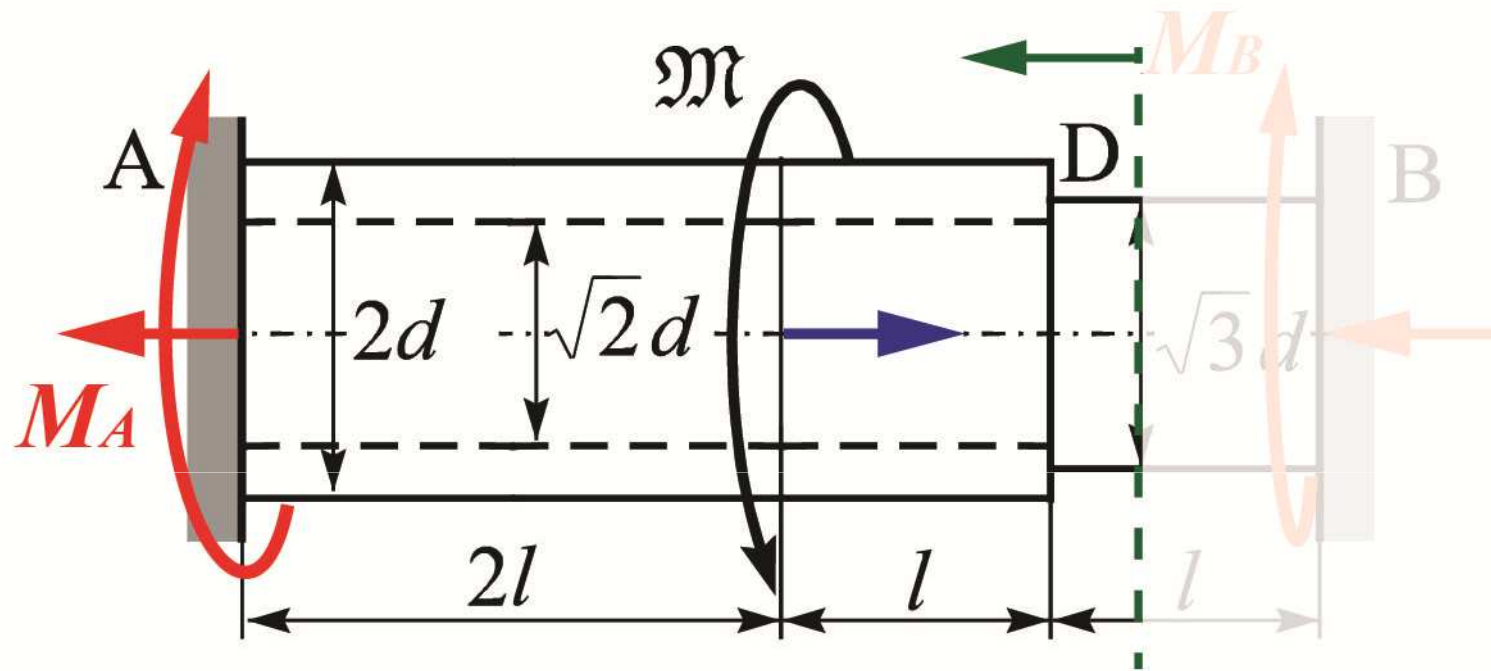
Момент увијања: $M_{u2} = M_A - M$

Моменти увијања



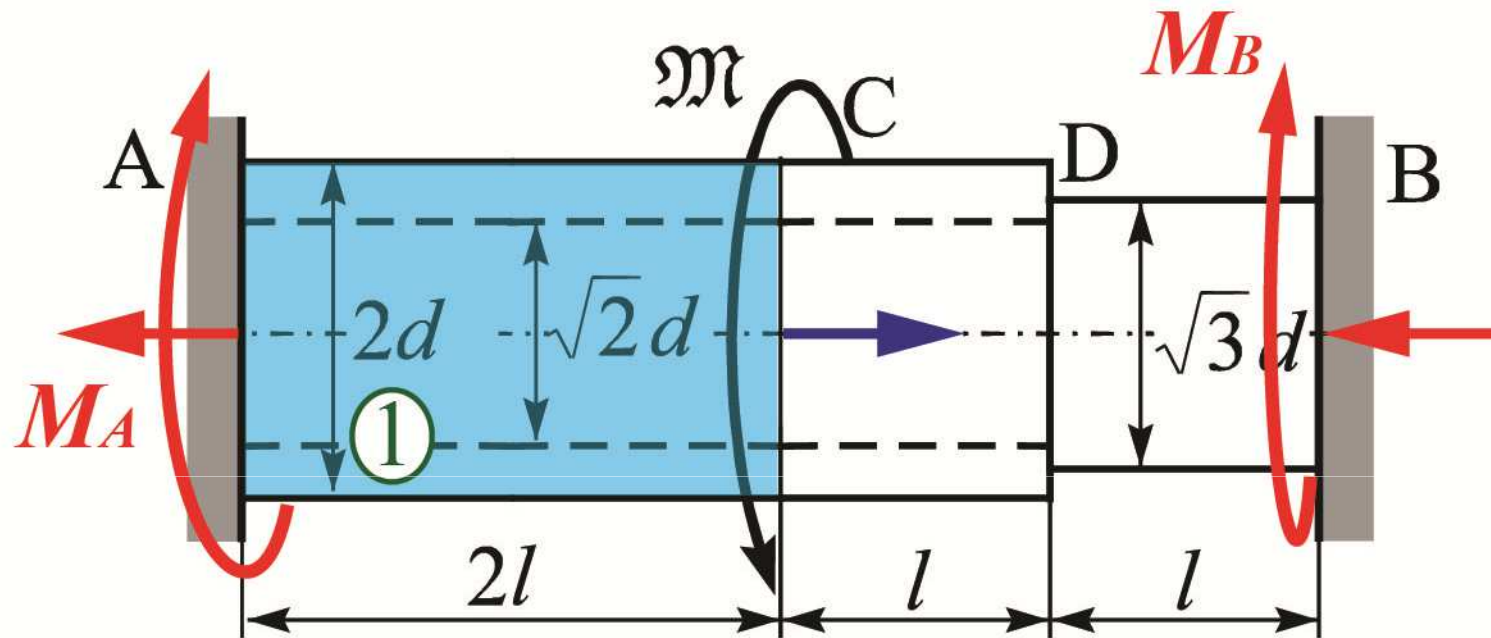
Пресецимо штап на произвољном месту у сегменту 3

Моменти увијања



Момент увијања: $M_{u3} = M_A - M$

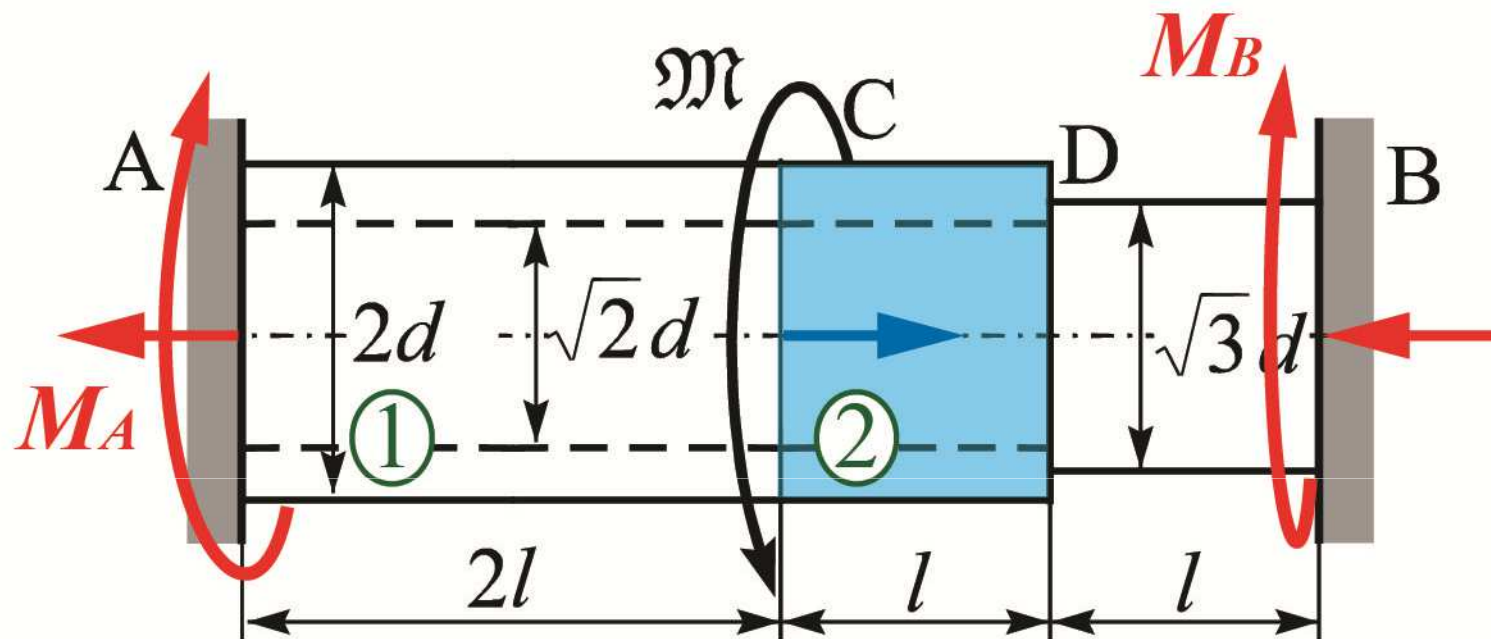
Поларни мом. инерције



Поларни момент инерције сегмента 1:

$$I_{01} = \frac{(2d)^4 - (\sqrt{2}d)^4}{32} \pi = \frac{12}{32} d^4 \pi$$

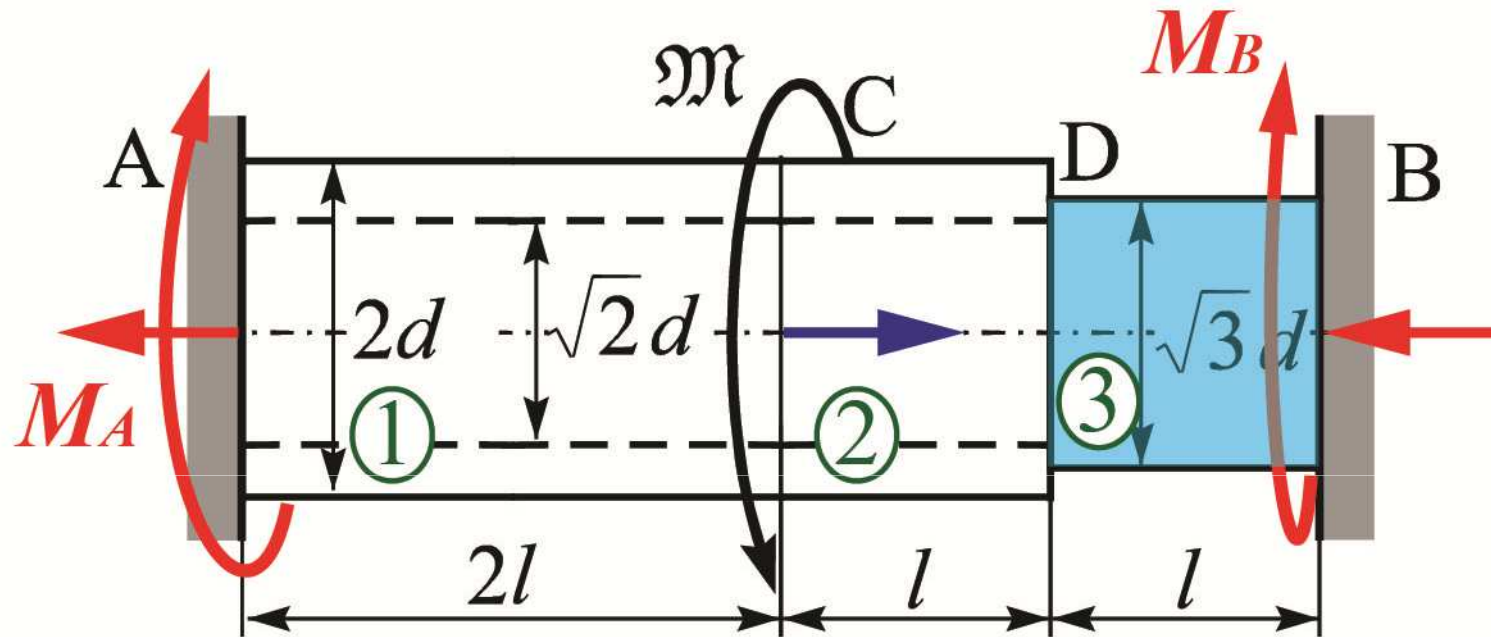
Поларни мом. инерције



Поларни момент инерције сегмента 2:

$$I_{02} = \frac{(2d)^4 - (\sqrt{2}d)^4}{32} \pi = \frac{12}{32} d^4 \pi$$

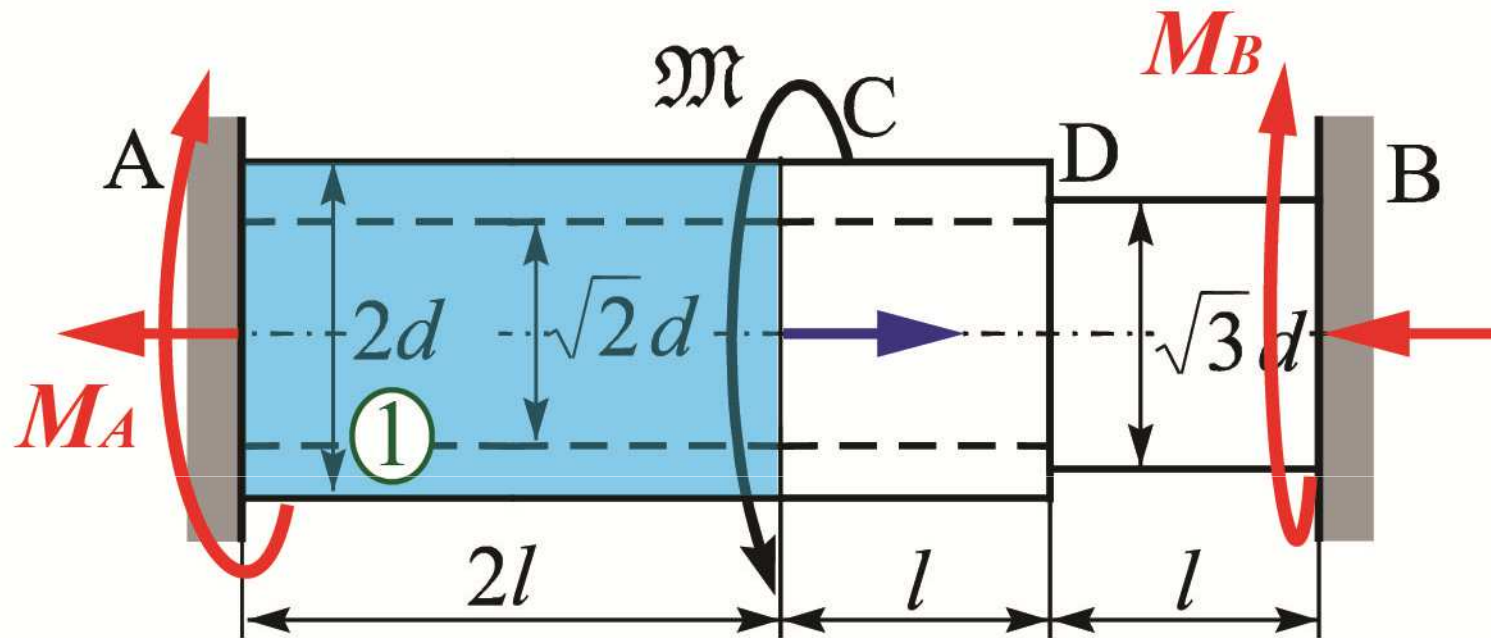
Поларни мом. инерције



Поларни момент инерције сегмента 3:

$$I_{03} = \frac{(\sqrt{3}d)^4}{32} \pi = \frac{9}{32} d^4 \pi$$

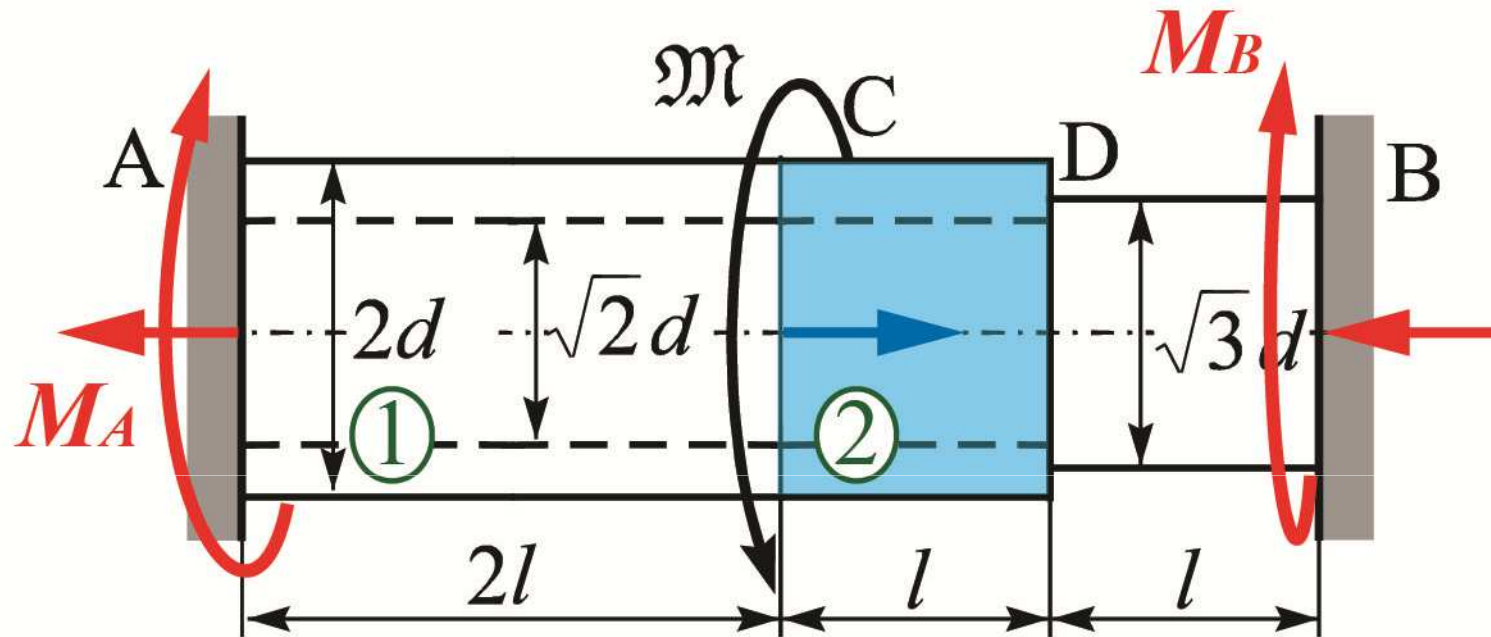
Углови увијања



Угао увијања сегмента 1:

$$\theta_{C/A} = \frac{M_{u1} l_1}{I_{01} G} = \frac{M_A 2l}{\frac{12}{32} d^4 \pi G} = \frac{16 M_A l}{3 d^4 \pi G}$$

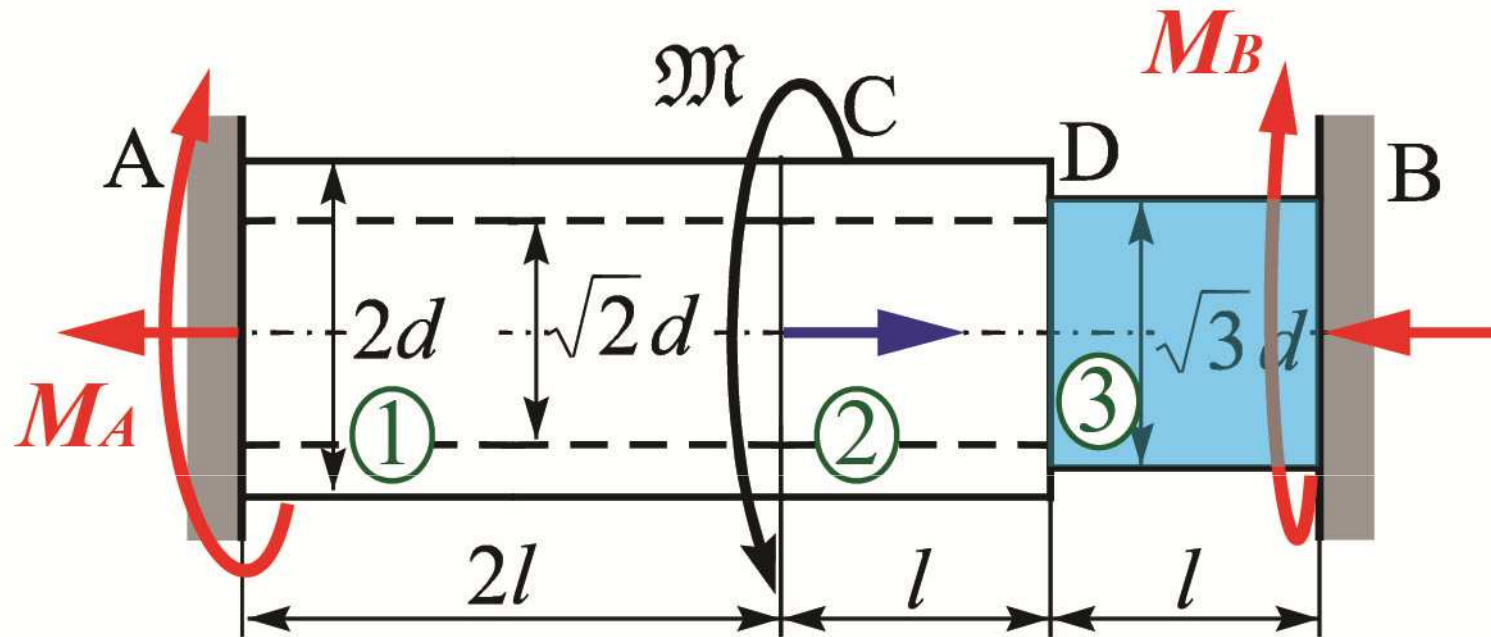
Углови увијања



Угао увијања сегмента 2:

$$\theta_{D/C} = \frac{M_{u2} l_2}{I_{02} G} = \frac{(M_A - M) l}{\frac{12}{32} d^4 \pi G} = \frac{8(M_A - M) l}{3d^4 \pi G}$$

Углови увијања



Угао увијања сегмента 3:

$$\theta_{B/D} = \frac{M_{u3} l_3}{I_{03} G} = \frac{(M_A - M) l}{\frac{9}{32} d^4 \pi G} = \frac{32(M_A - M) l}{9 d^4 \pi G}$$

Допунска једначина

$$\theta_{B/A} = \theta_{C/A} + \theta_{D/C} + \theta_{B/D} = 0$$

$$\frac{16M_A l}{3d^4 \pi G} + \frac{8(M_A - M)l}{3d^4 \pi G} + \frac{32(M_A - M)l}{9d^4 \pi G} = 0$$

$$\frac{16M_A}{3} + \frac{8(M_A - M)}{3} + \frac{32(M_A - M)}{9} = 0$$

$$48M_A + 24(M_A - M) + 32(M_A - M) = 0$$

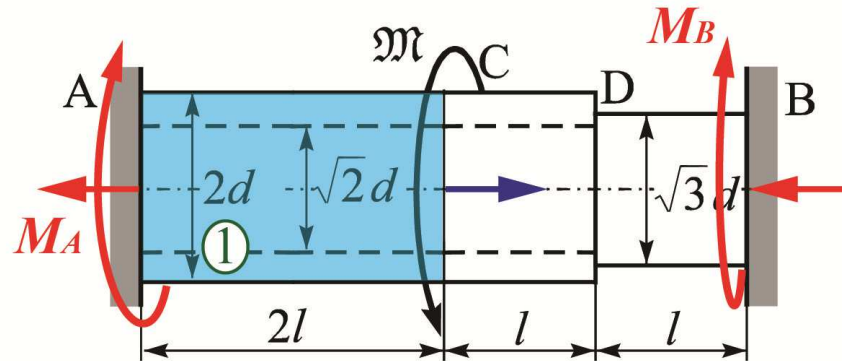
$$\boxed{48M_A + 24M_A + 32M_A = 24M + 32M}$$

Решења реакција веза

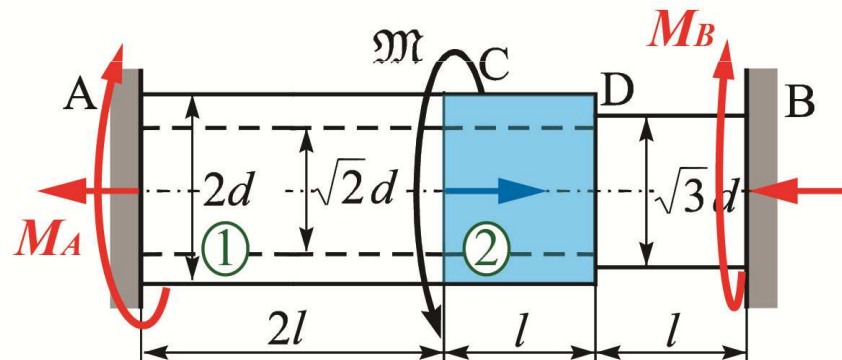
$$M_A = \frac{56}{104}M = \frac{7}{13}M$$

$$M_B = M - M_A = \frac{5}{13}M$$

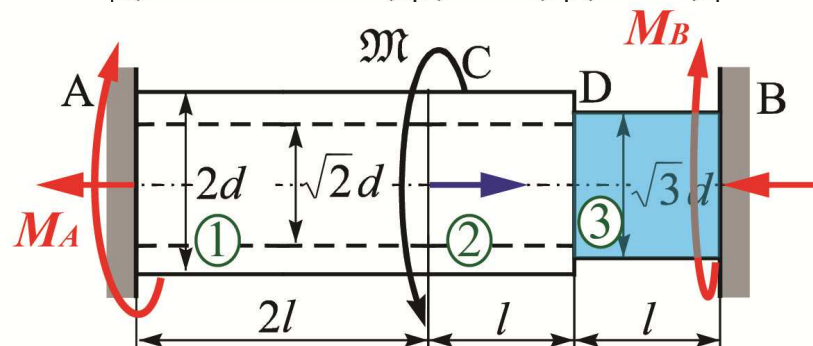
Полупречници сегмената



$$\rho_{1\max} = d$$



$$\rho_{2\max} = d$$



$$\rho_{3\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$$

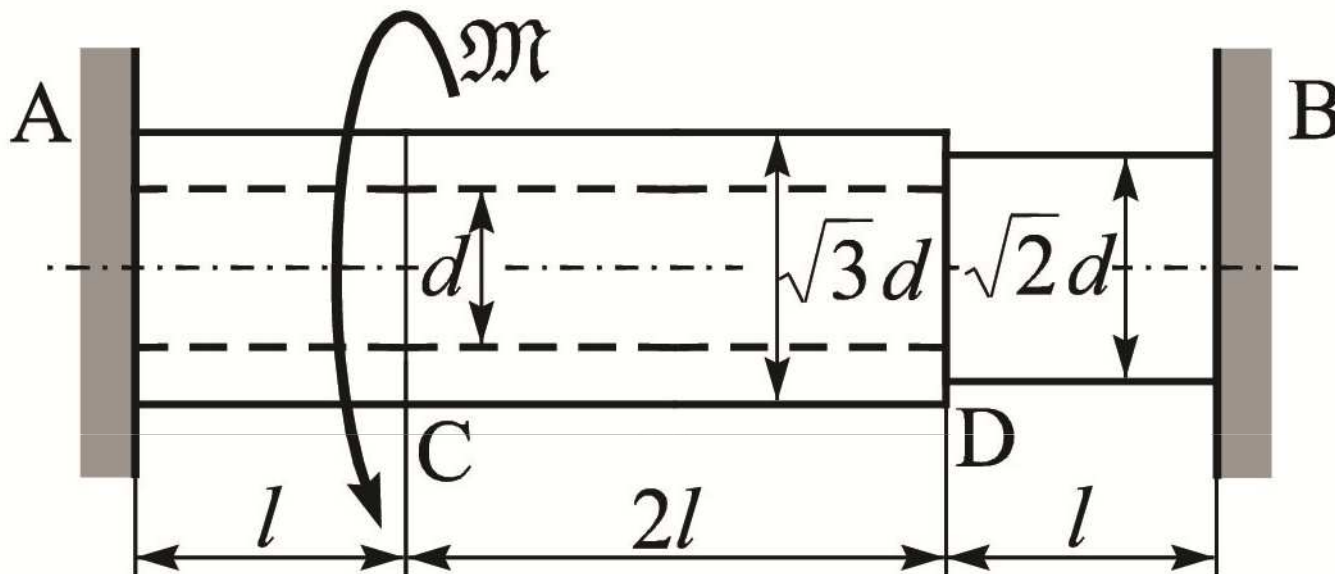
Напони

$$\tau_{1\max} = \frac{M_{u1}}{I_{01}} \rho_{1\max} = \frac{\frac{7}{13}M}{\frac{3}{8}d^4\pi} d = \frac{2}{3} \frac{M}{d^3\pi}$$

$$\tau_{2\max} = \frac{M_{u2}}{I_{02}} \rho_{2\max} = \frac{-\frac{5}{13}M}{\frac{3}{8}d^4\pi} d = -\frac{5}{13} \frac{M}{d^3\pi}$$

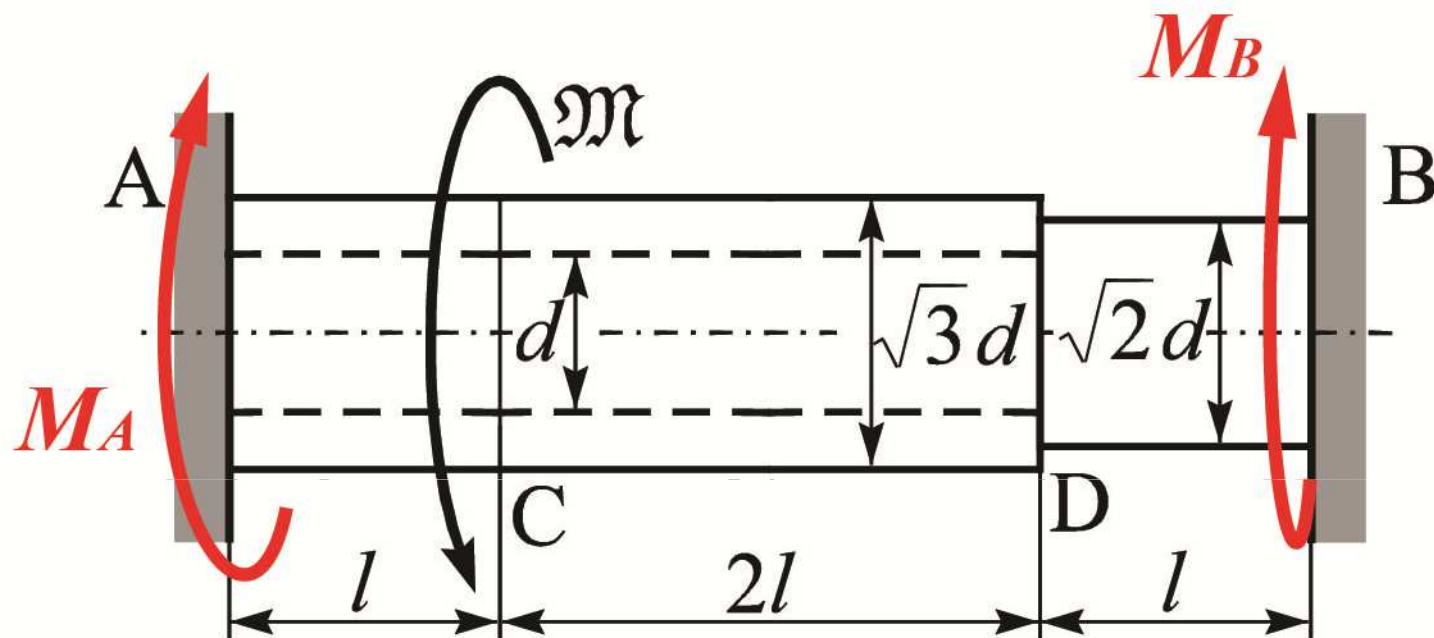
$$\tau_{3\max} = \frac{M_{u3}}{I_{03}} \rho_{3\max} = \frac{-\frac{5}{13}M}{\frac{9}{32}d^4\pi} \frac{\sqrt{3}d}{2} = -\frac{80\sqrt{3}}{117} \frac{M}{d^3\pi}$$

Задатак 6



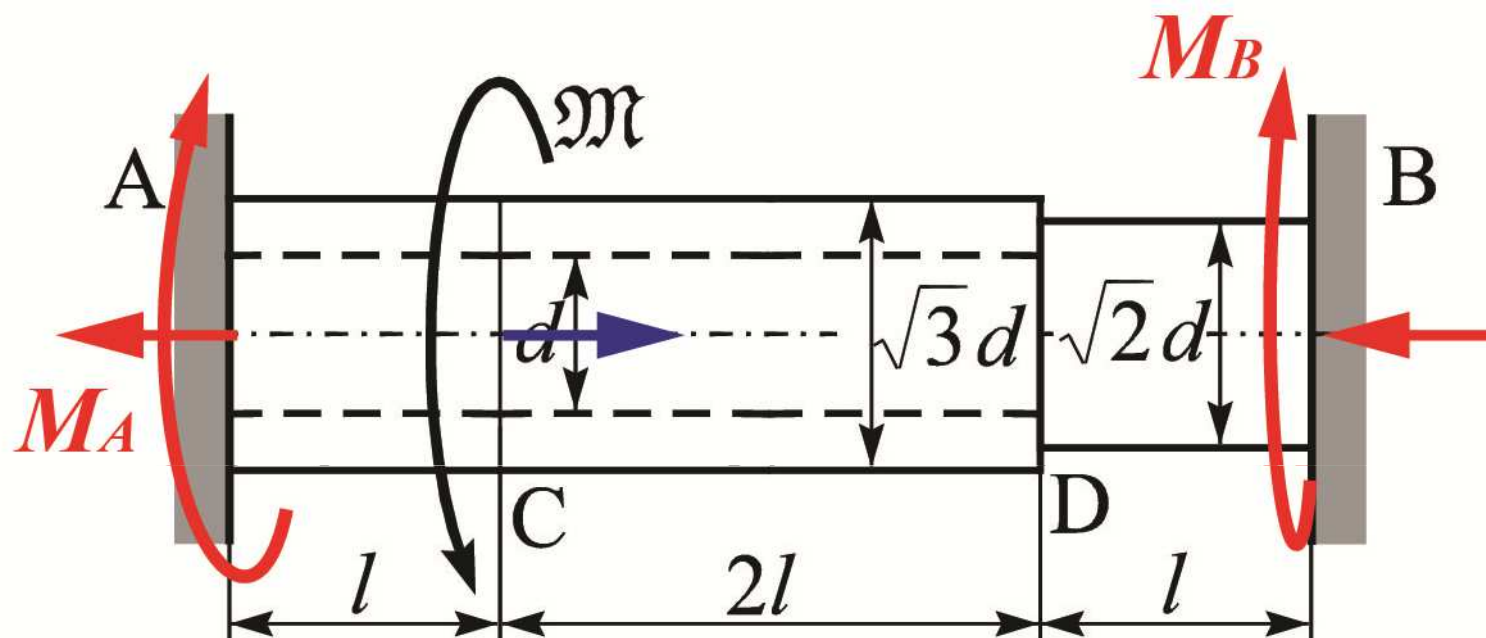
Штап дужине $4l$ причвршћен је својим крајевима A и B за круте зидове. Штап је оптерећен активним спрегом M чија је раван нормална на осу штапа. Штап је променљивог попречног пресека са пречницима задатим на слици. Одредити реакције везе и максималне напоне

Реакције везе

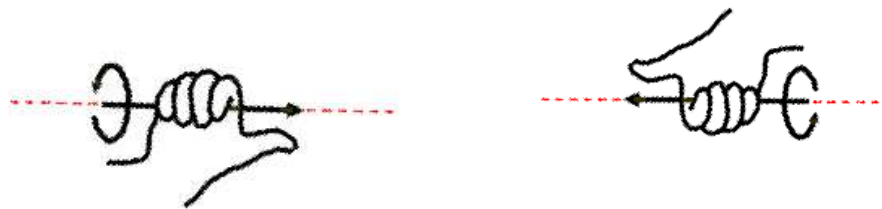


Ослобађање од веза и увођење реакција веза. Смерови реакција у тачкама А и В су произвољни.

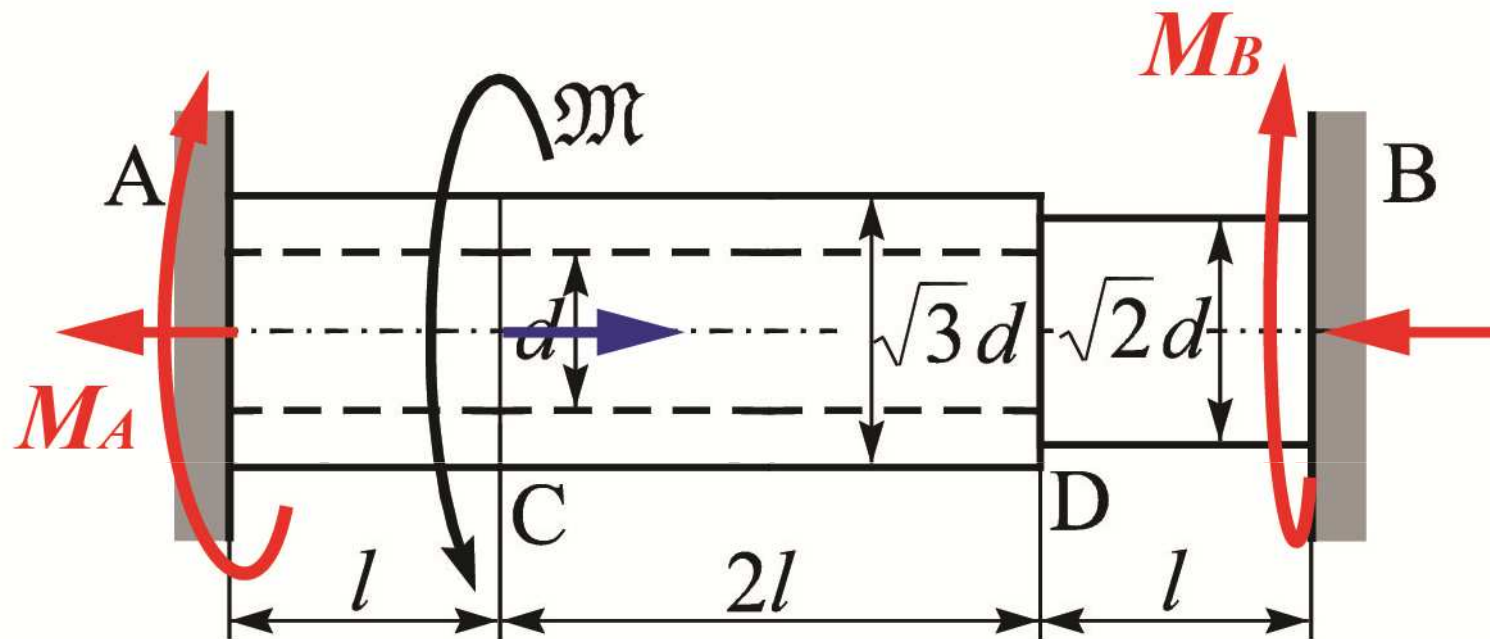
Реакције везе



Смерови вектора момената одрђују се правилом десне руке.



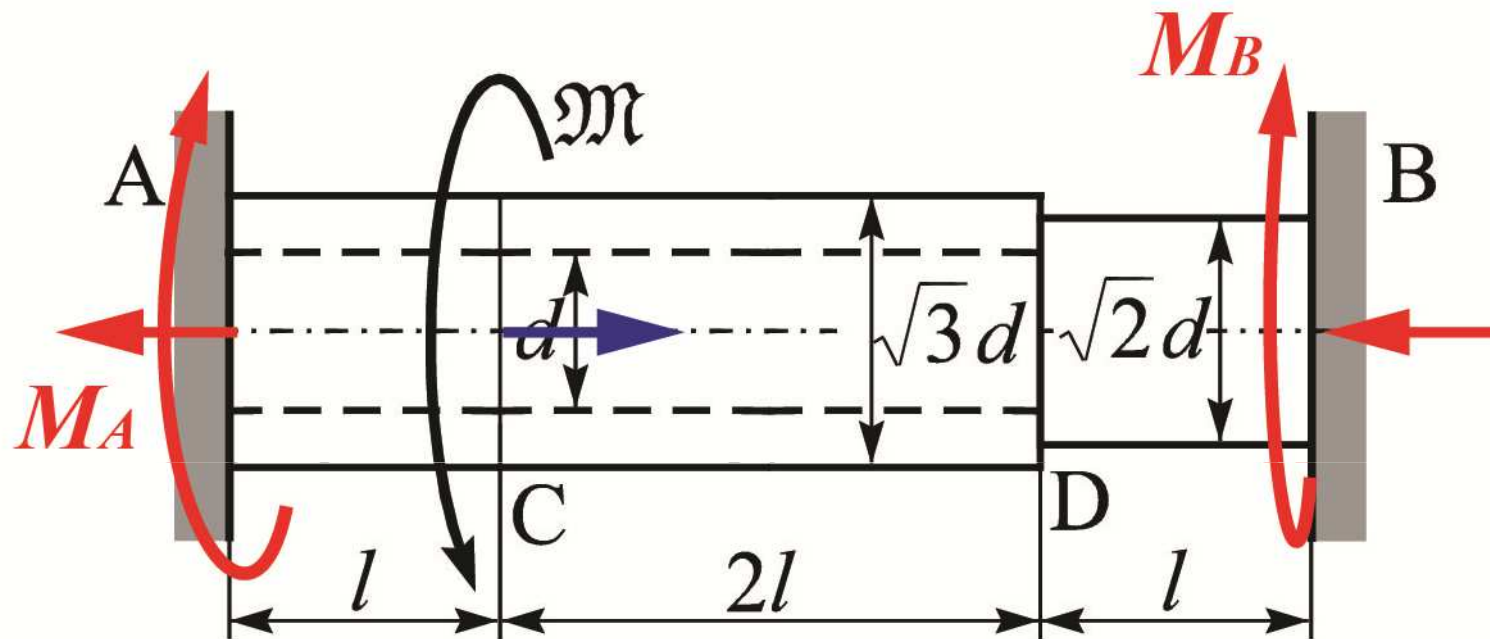
Једначине равнотеже



Услов равнотеже за
тело оперећено само
моментима увијања:

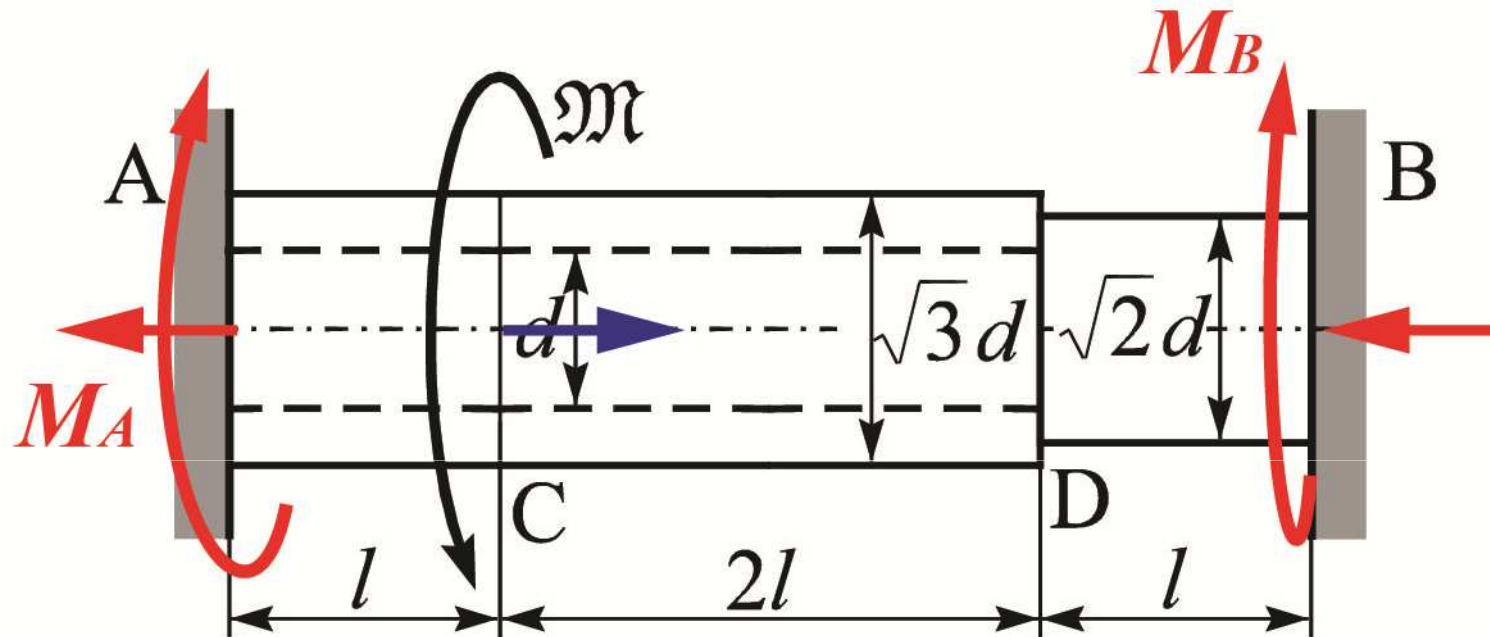
$$\sum M_u = 0$$

Једначине равнотеже



$$\sum M_u = 0 \quad -M_A + M - M_B = 0$$

Једначине равнотеже

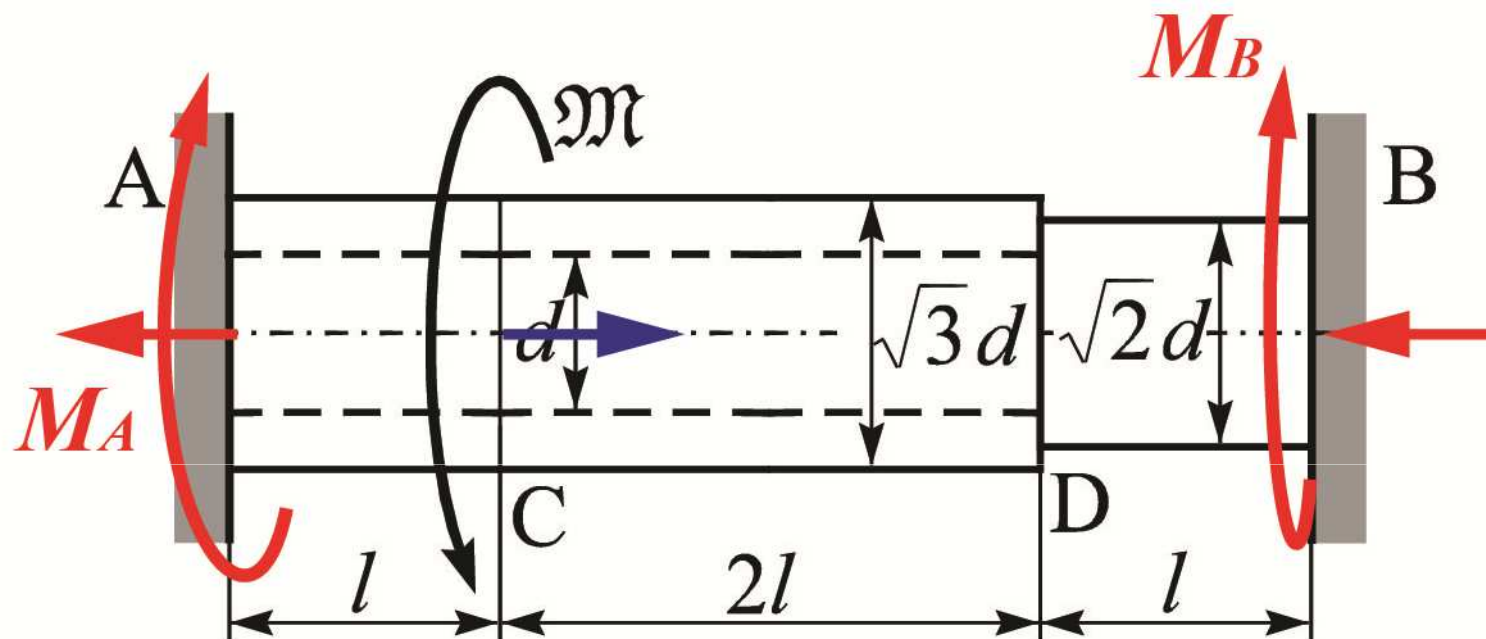


2 реакције везе:

$$M_A, M_B$$

и 1 једначина равнотеже, следи да је проблем једном статички неодређен.

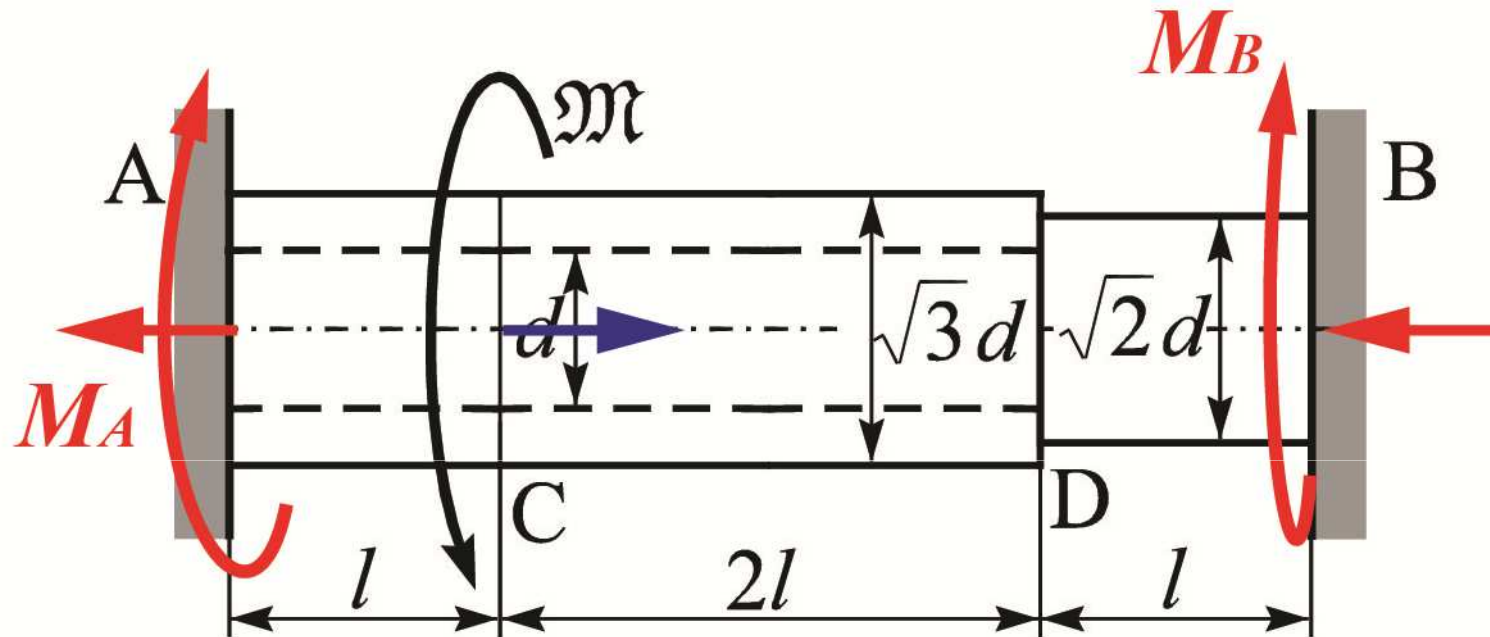
Геометријски услов деформације



Штап је укљештен на оба краја. Следи да је угао увијања између пресека А и В једнак нули. Овај услов преставља **геометријски услов деформације**

$$\theta_{B/A} = 0$$

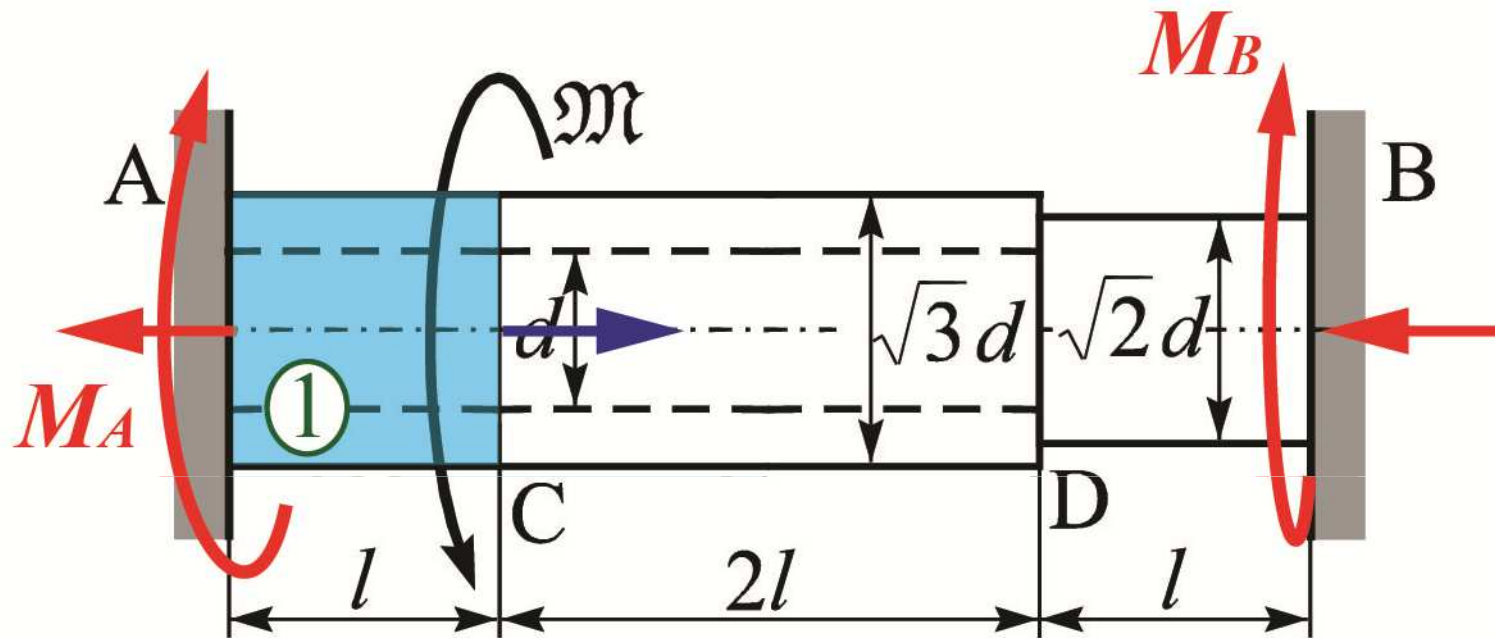
Подела на сегменте



Штап се дели на сегменте тако да је унутар једног сегмента момент увијања константан као и попречни пресек штапа.

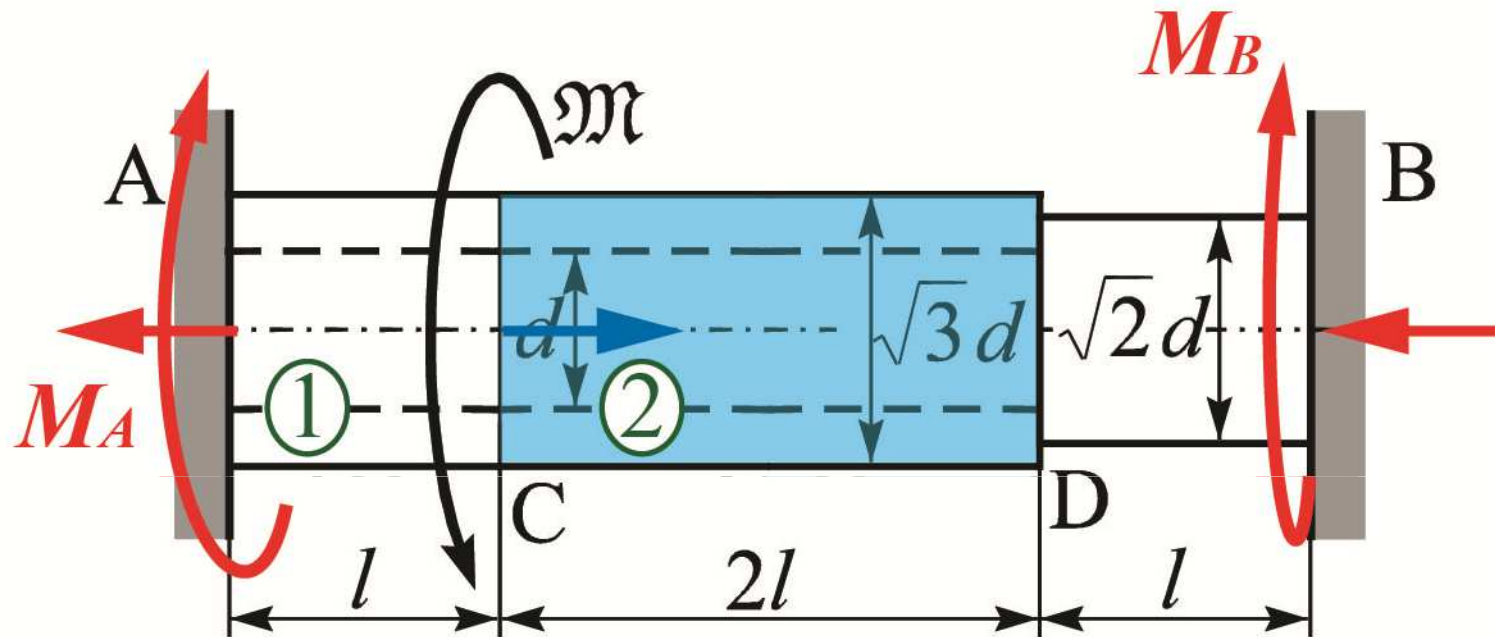
$$M_u = \text{const}, I_0 = \text{const}$$

Подела на сегменте



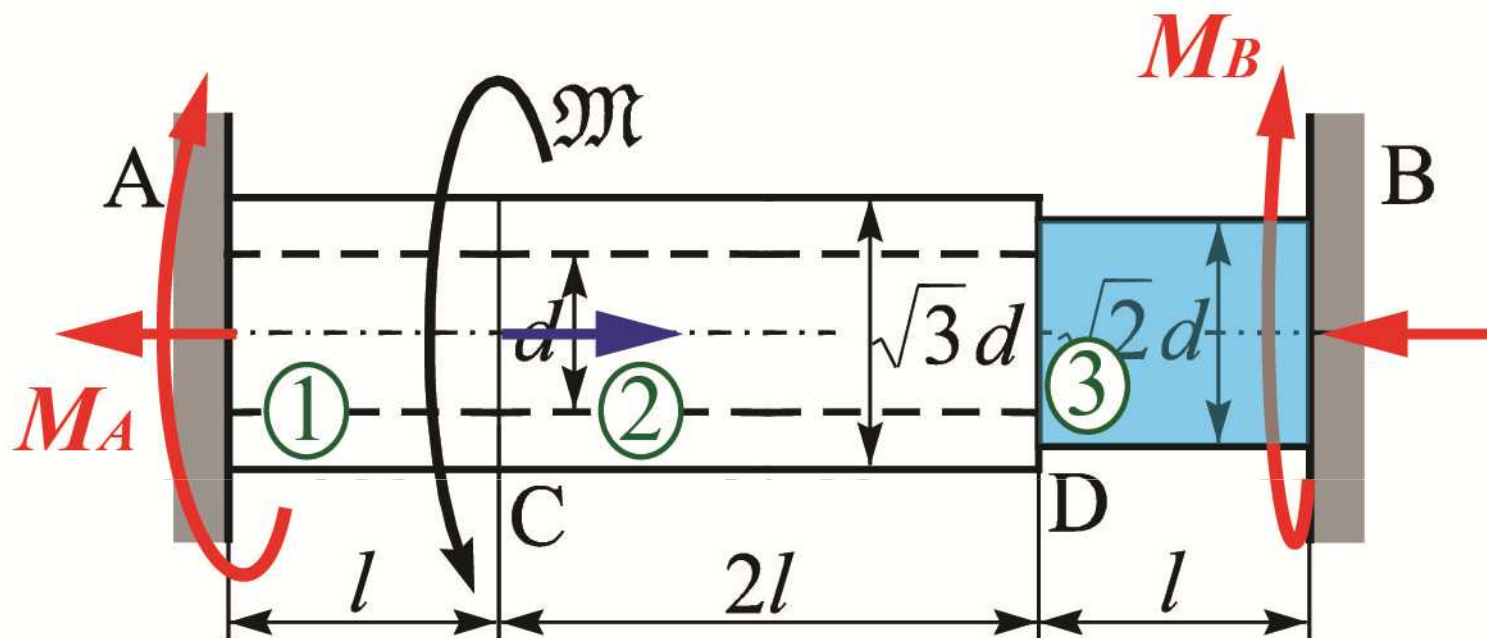
Сегмент 1 налази се између тачке А и С

Подела на сегменте



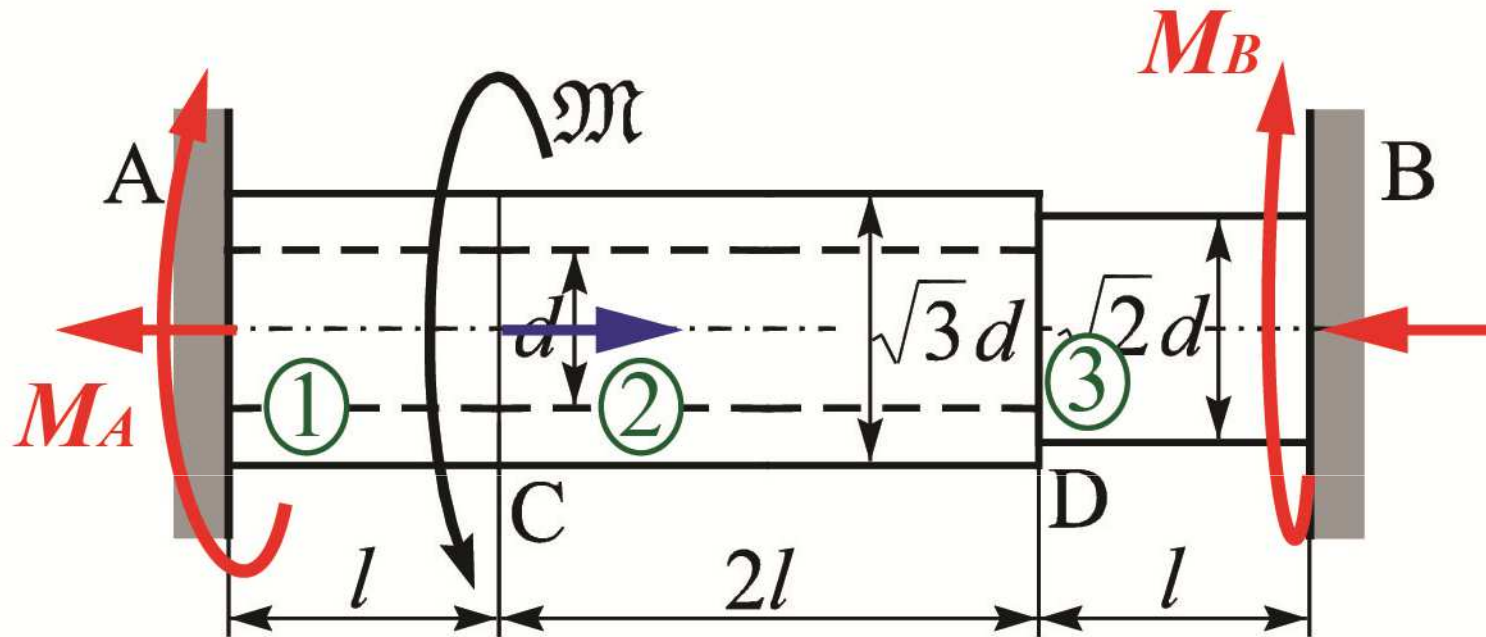
Сегмент 2 налази се између тачке С и D

Подела на сегменте



Сегмент 3 налази се између тачке D и B

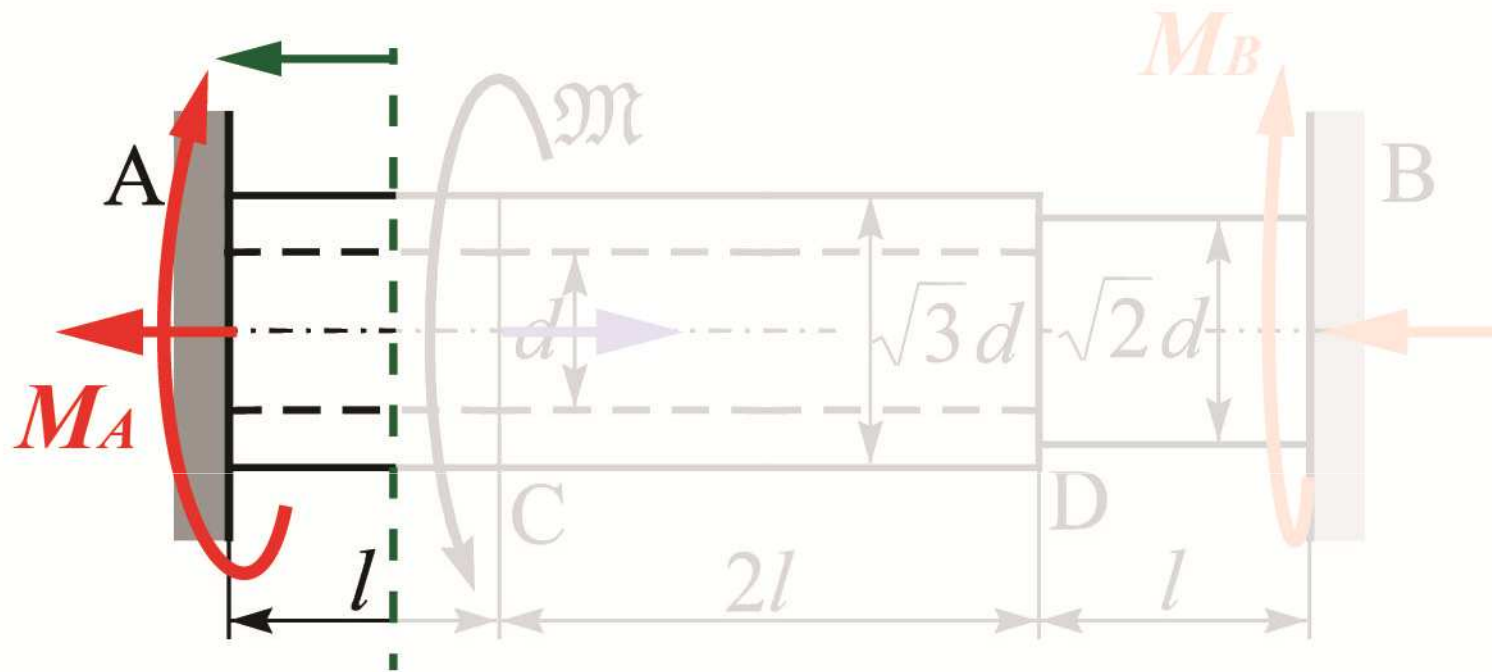
Подела на сегменте



$$\theta_{B/A} = \theta_{C/A} + \theta_{D/C} + \theta_{B/D} = 0$$

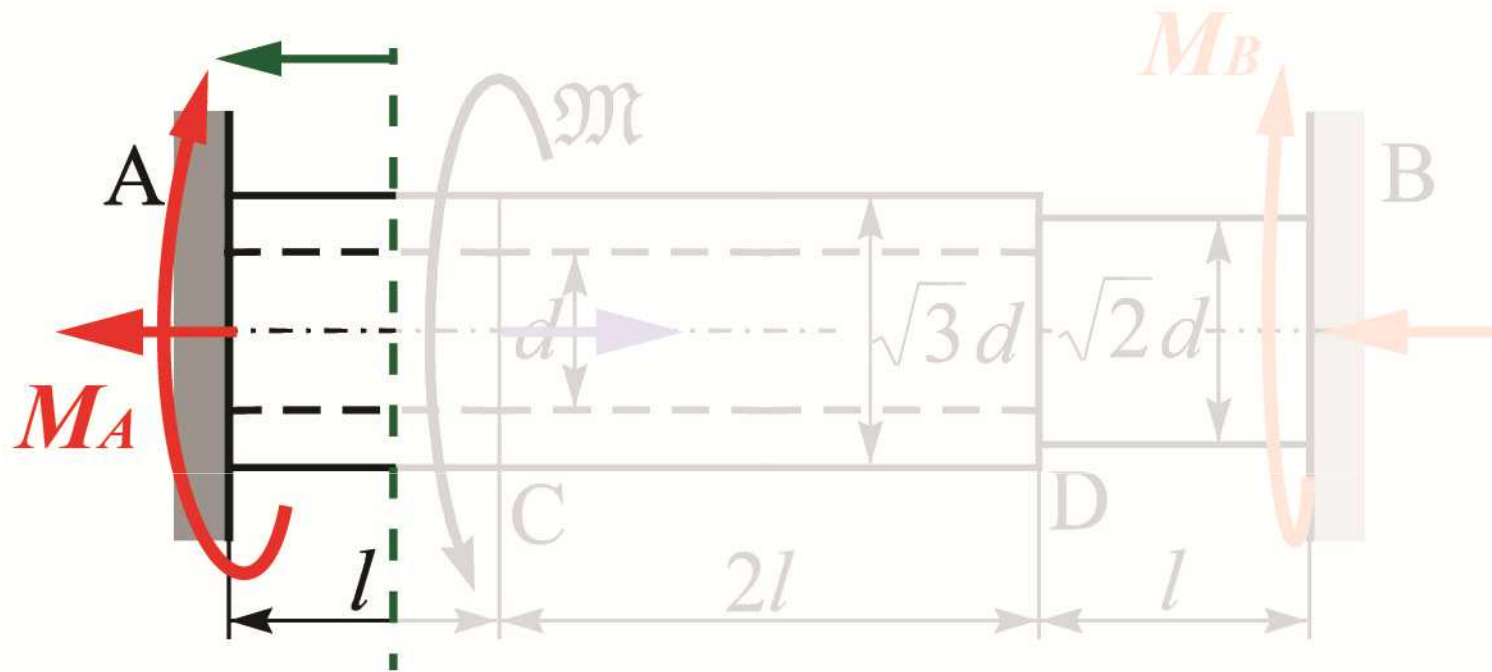
Сада када је штап подељен на сегменте потребно је одредити момент увијања у сваком сегменту као и поларне моменте инерције.

Моменти увијања



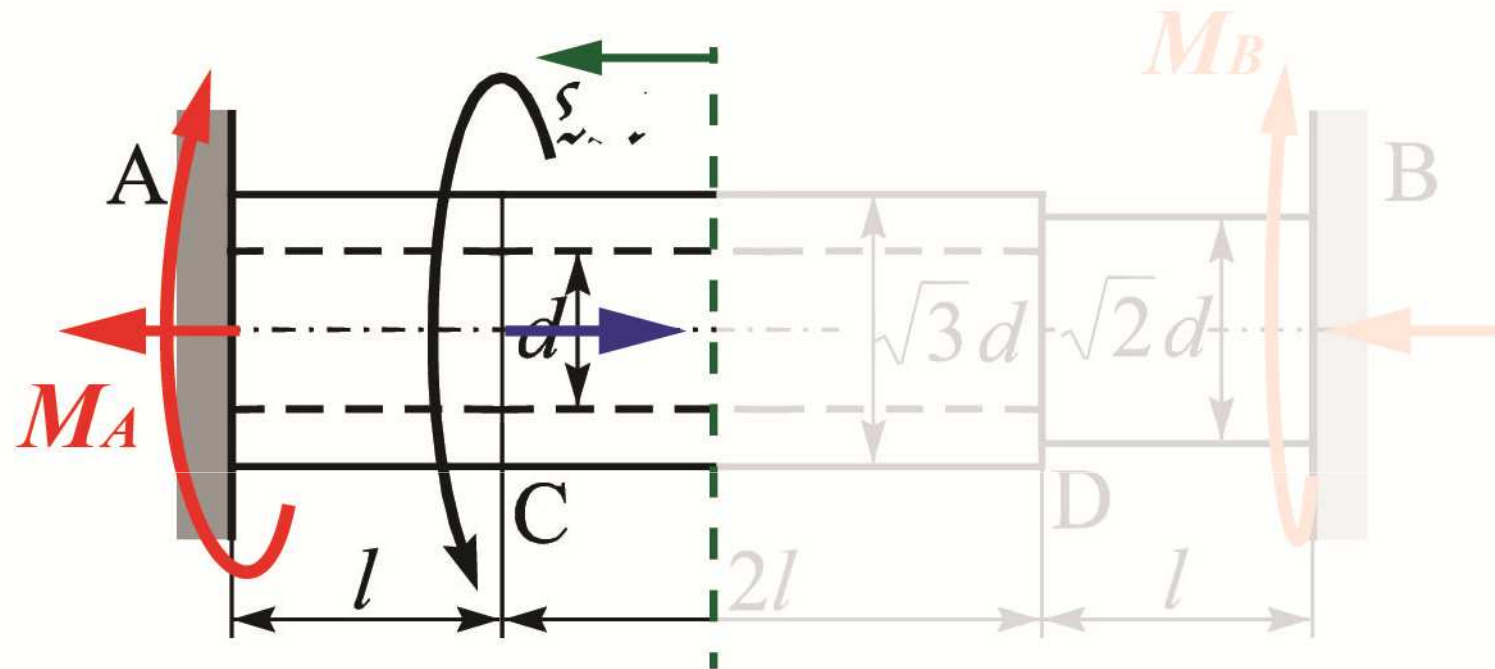
Момент увијања рачуна се као сума свих момената увијања са леве или са десне стране пресека. Пресецимо штап на произвољном месту у сегменту 1

Моменти увијања



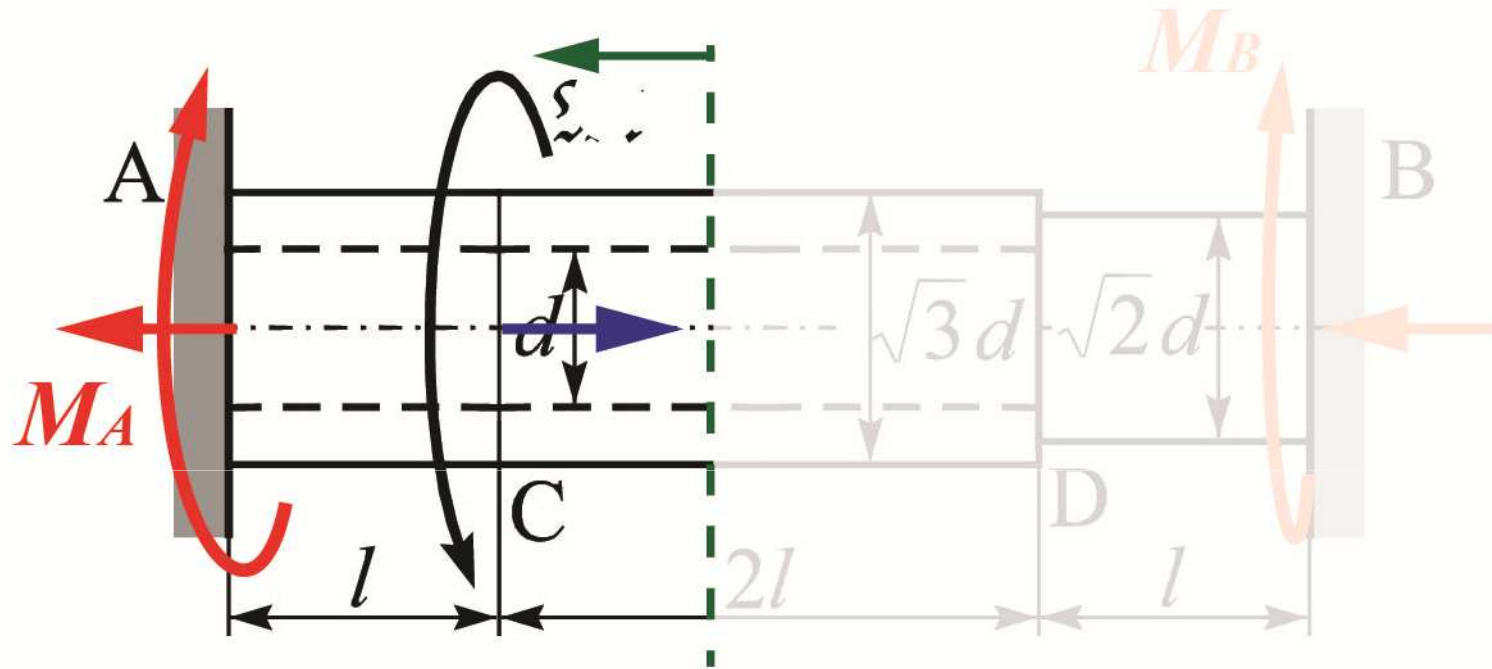
Момент увијања: $M_{u1} = M_A$

Моменти увијања



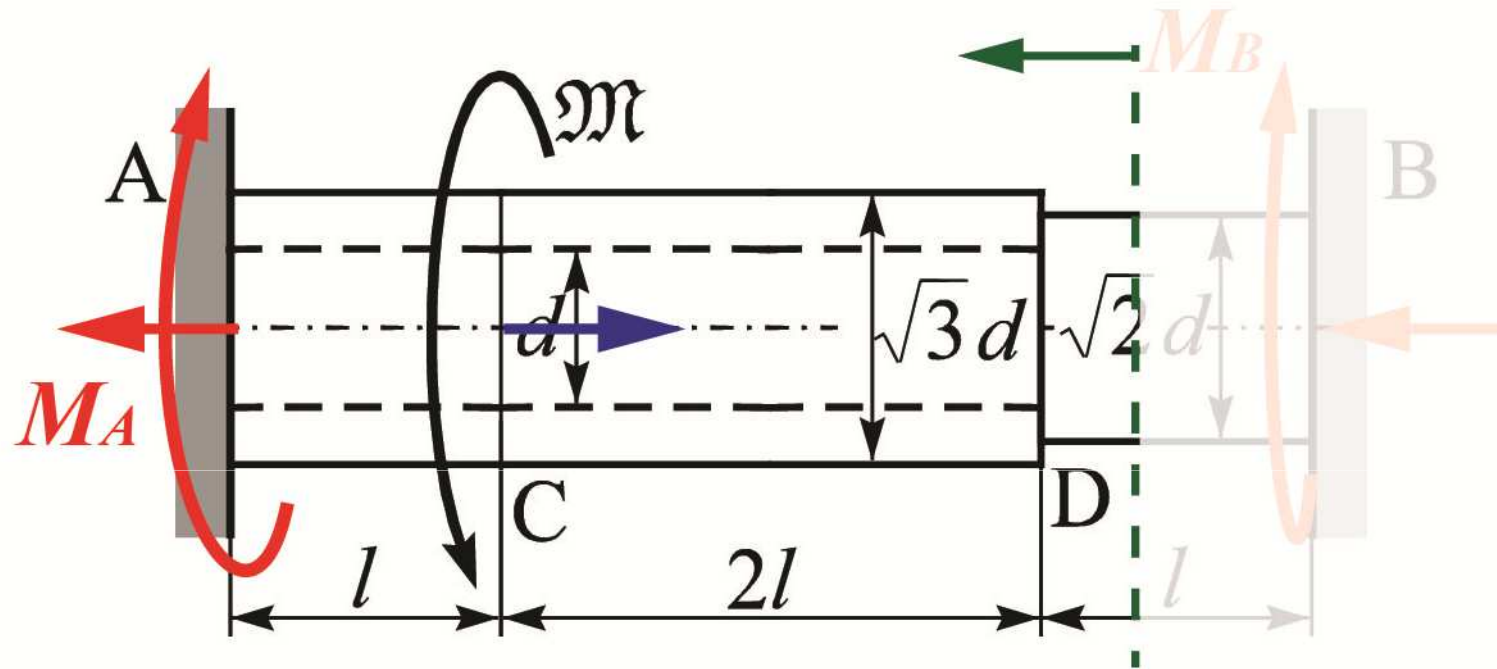
Пресецимо штап на произвољном месту у
сегменту 2

Моменти увијања



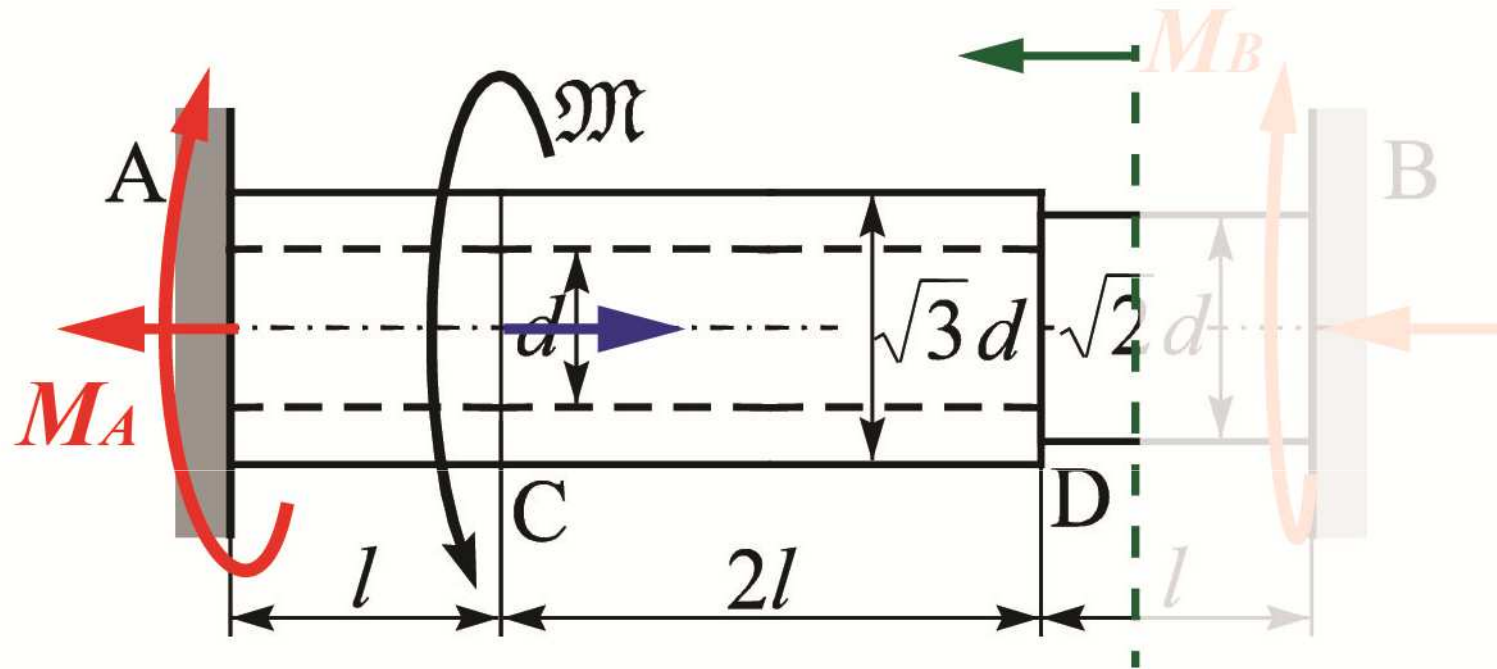
Момент увијања: $M_{u2} = M_A - M$

Моменти увијања



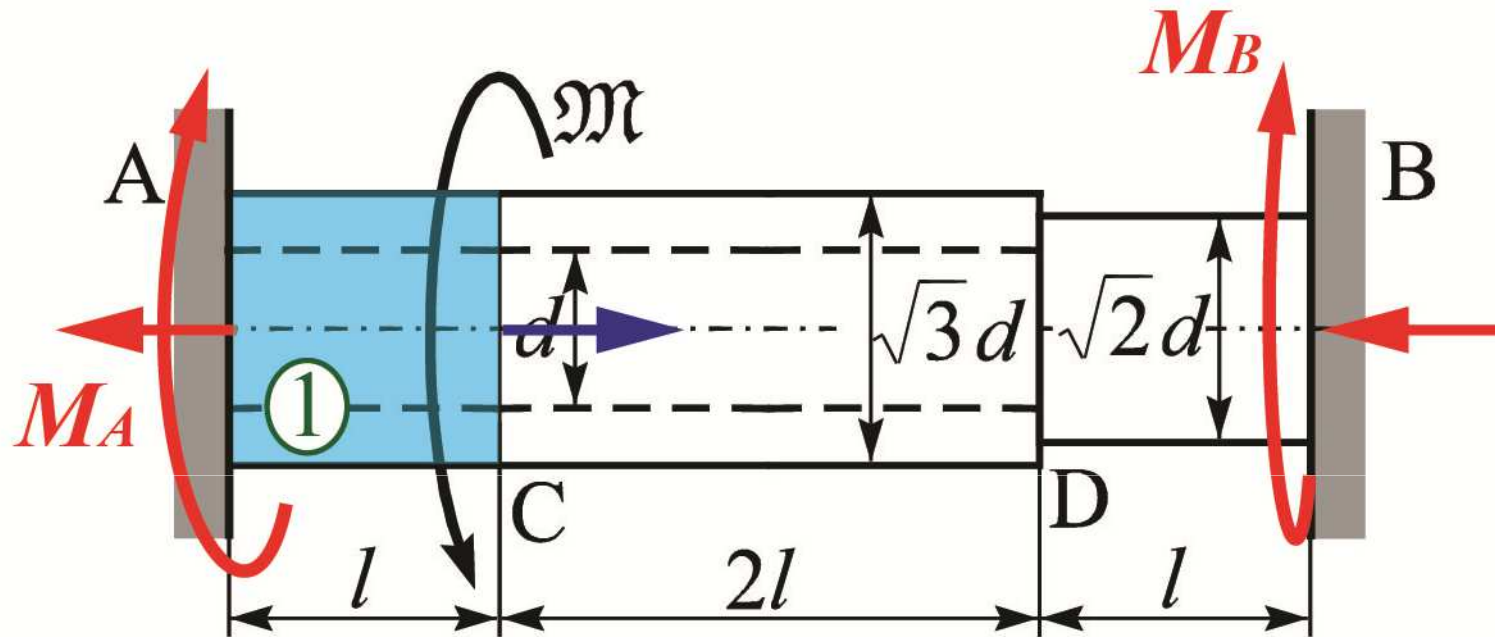
Пресецимо штап на произвољном месту у
сегменту 3

Моменти увијања



Момент увијања: $M_{u3} = M_A - M$

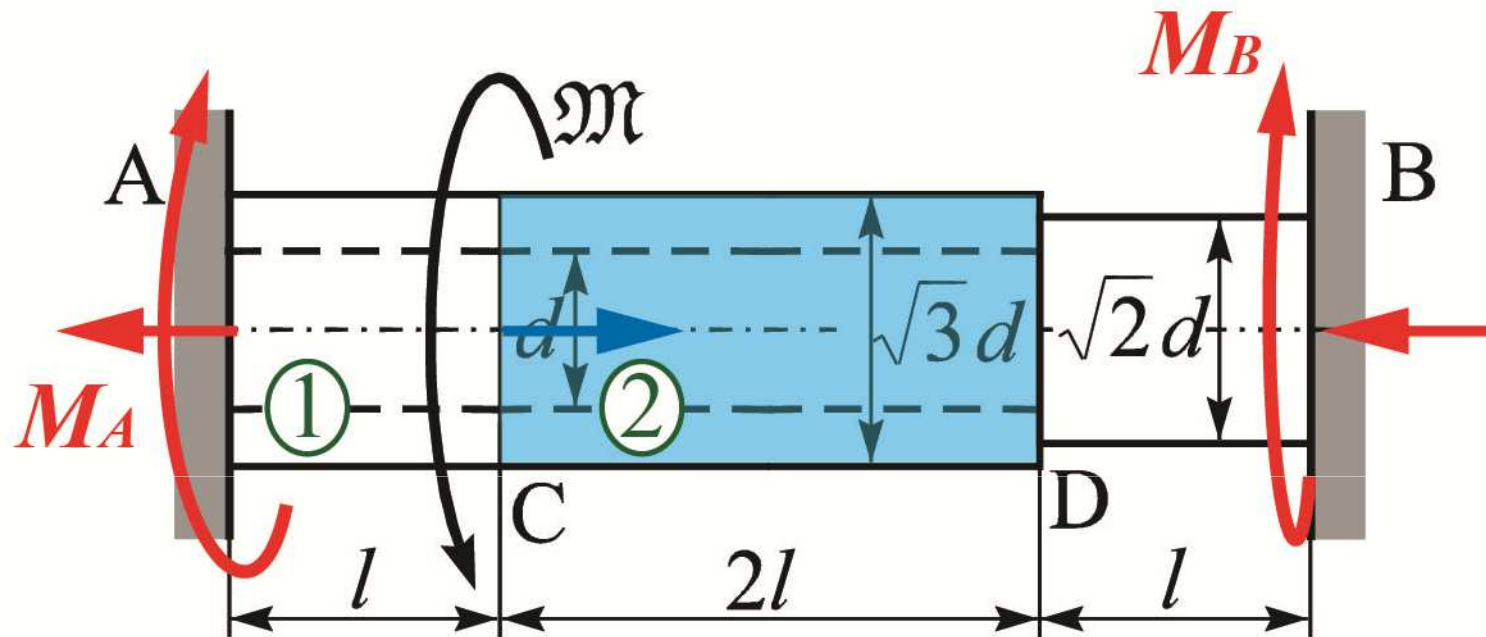
Поларни мом. инерције



Поларни момент инерције сегмента 1:

$$I_{01} = \frac{(\sqrt{3}d)^4 - (d)^4}{32} \pi = \frac{8}{32} d^4 \pi$$

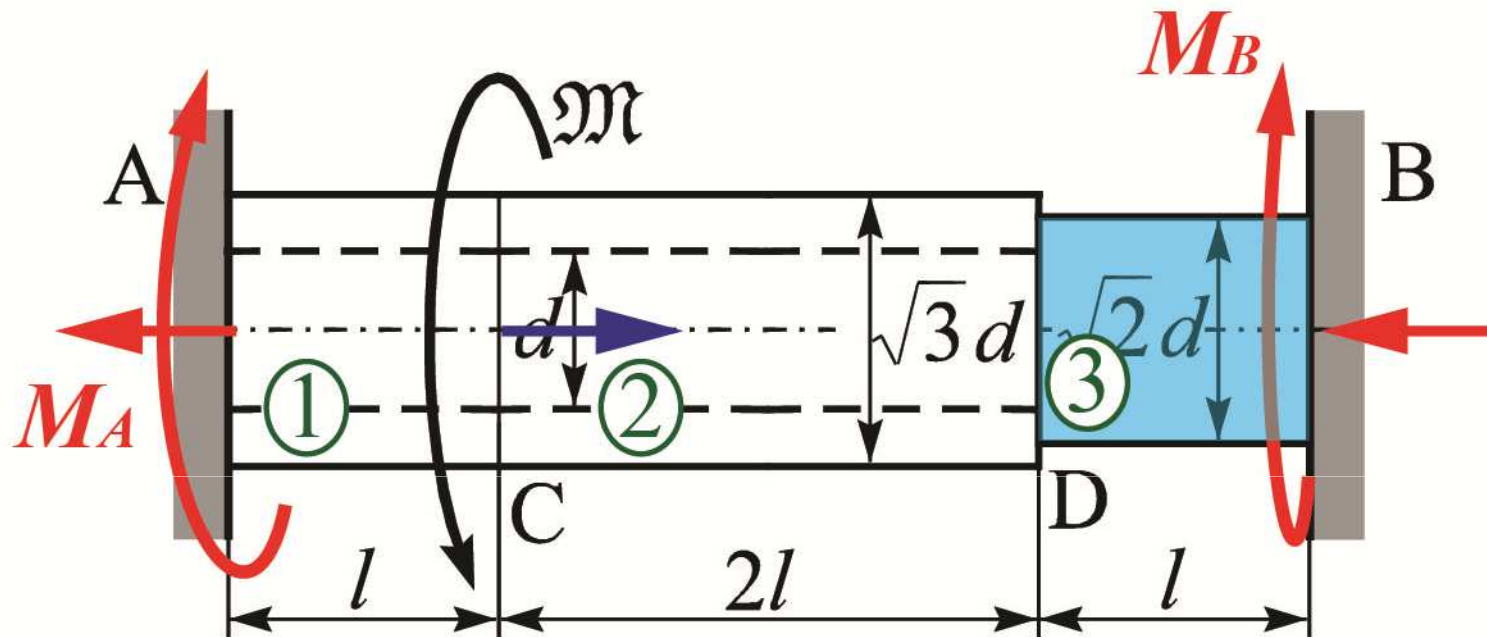
Поларни мом. инерције



Поларни момент инерције сегмента 2:

$$I_{02} = \frac{(\sqrt{3}d)^4 - (d)^4}{32} \pi = \frac{8}{32} d^4 \pi$$

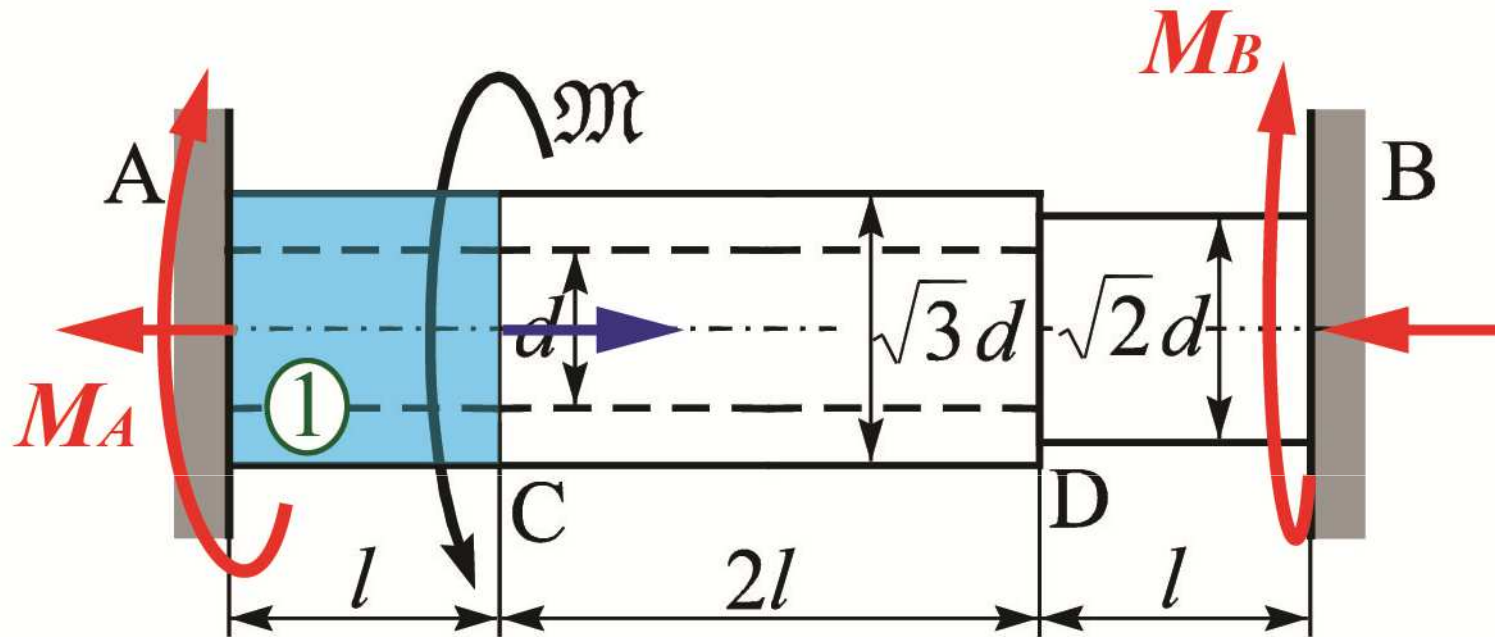
Поларни мом. инерције



Поларни момент инерције сегмента 3:

$$I_{03} = \frac{(\sqrt{2}d)^4}{32} \pi = \frac{4}{32} d^4 \pi$$

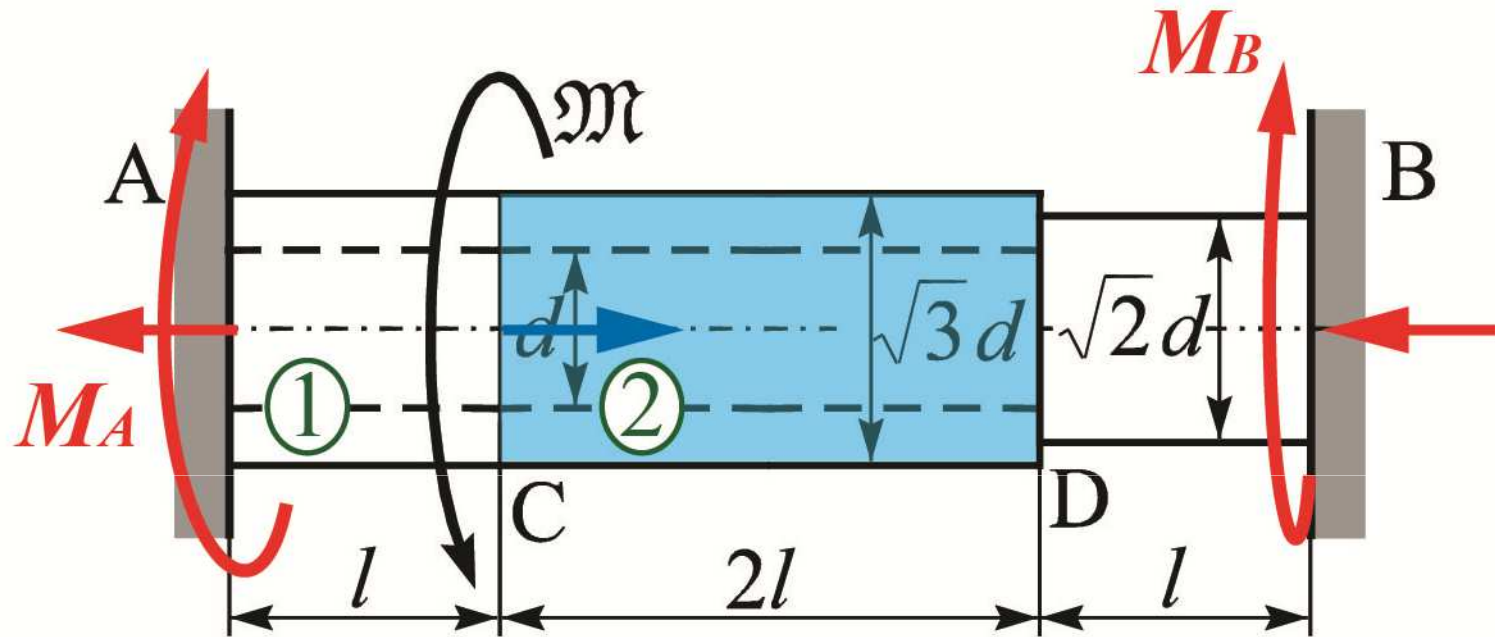
Углови увијања



Угао увијања сегмента 1:

$$\theta_{C/A} = \frac{M_{u1} l_1}{I_{01} G} = \frac{M_A l}{\frac{8}{32} d^4 \pi G} = \frac{4 M_A l}{d^4 \pi G}$$

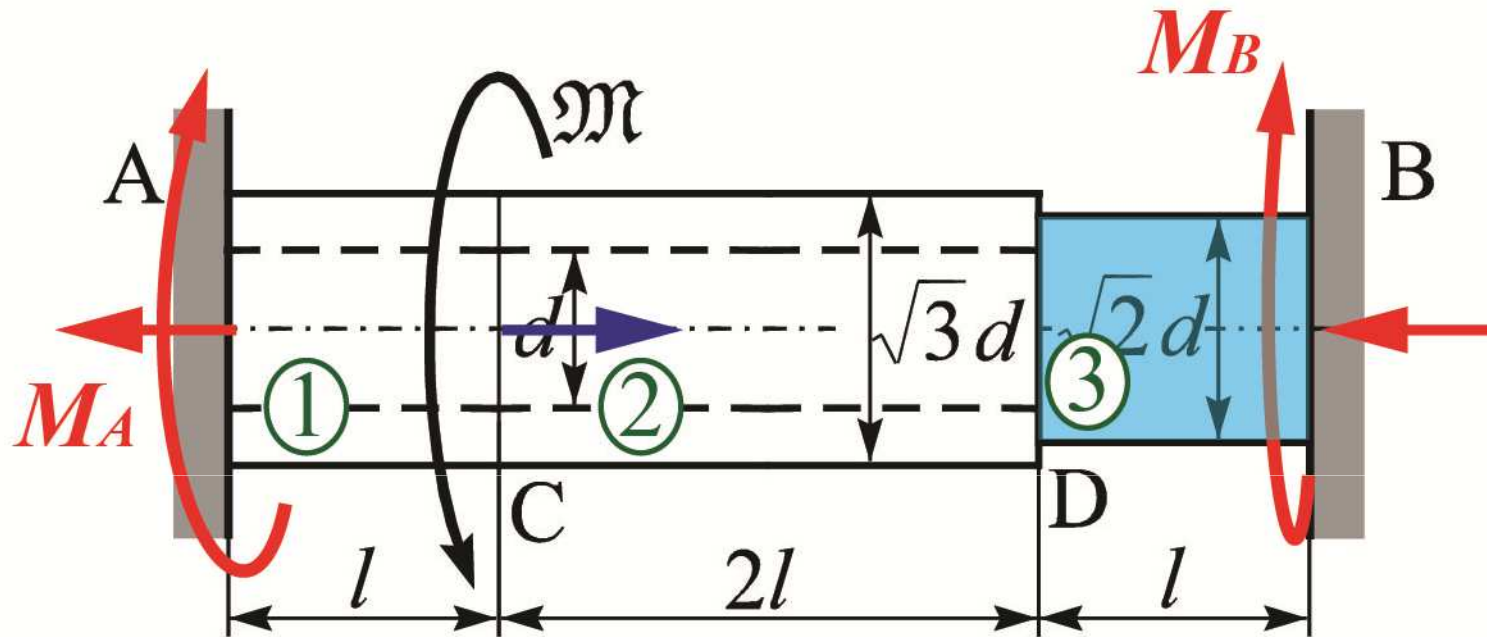
Углови увијања



Угао увијања сегмента 2:

$$\theta_{D/C} = \frac{M_{u2} l_2}{I_{02} G} = \frac{(M_A - M) 2l}{\frac{8}{32} d^4 \pi G} = \frac{8(M_A - M) l}{d^4 \pi G}$$

Углови увијања



Угао увијања сегмента 3:

$$\theta_{B/D} = \frac{M_{u3} l_3}{I_{03} G} = \frac{(M_A - M) l}{\frac{4}{32} d^4 \pi G} = \frac{8(M_A - M) l}{d^4 \pi G}$$

Допунска једначина

$$\theta_{B/A} = \theta_{C/A} + \theta_{D/C} + \theta_{B/D} = 0$$

$$\frac{4M_A l}{d^4 \pi G} + \frac{8(M_A - M)l}{d^4 \pi G} + \frac{8(M_A - M)l}{d^4 \pi G} = 0$$

$$\frac{4M_A}{1} + \frac{8(M_A - M)}{1} + \frac{8(M_A - M)}{1} = 0$$

$$4M_A + 8(M_A - M) + 8(M_A - M) = 0$$

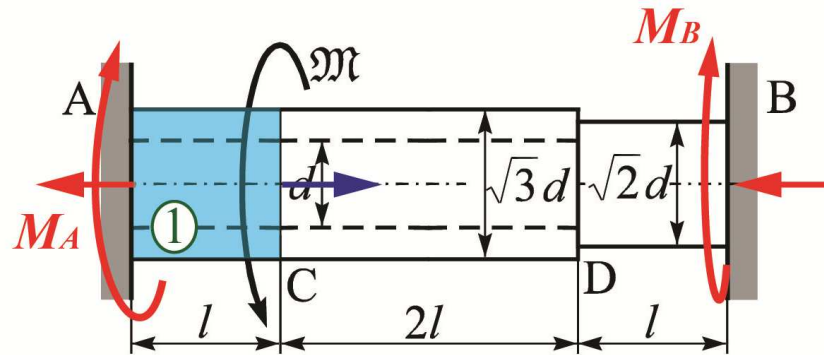
$$\boxed{4M_A + 8M_A + 8M_A = 8M + 8M}$$

Решења реакција веза

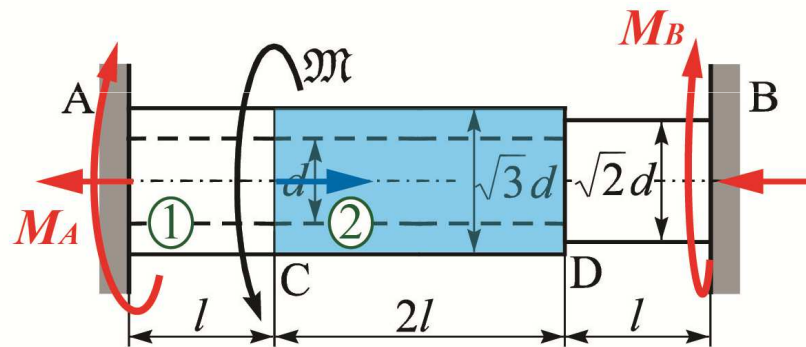
$$M_A = \frac{16}{20}M = \frac{4}{5}M$$

$$M_B = M - M_A = \frac{1}{5}M$$

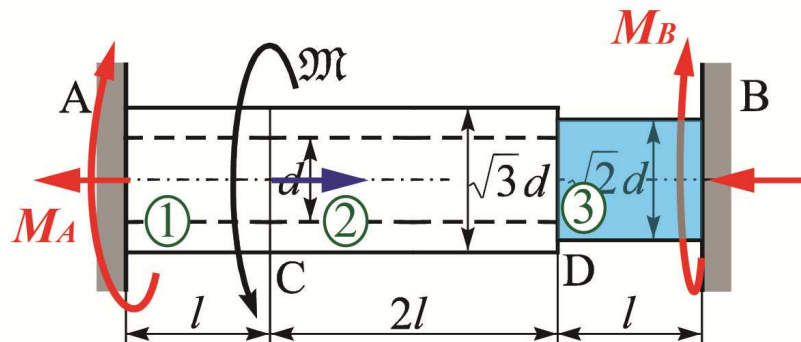
Полупречници сегмената



$$\rho_{1\max} = \sqrt{3}d/2$$



$$\rho_{2\max} = \sqrt{3}d/2$$



$$\rho_{3\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

Напони

$$\tau_{1\max} = \frac{M_{u1}}{I_{01}} \rho_{1\max} = \frac{\frac{4}{5}M}{\frac{1}{4}d^4\pi} \frac{\sqrt{3}d}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{5} \frac{M}{d^3\pi}$$

$$\tau_{2\max} = \frac{M_{u2}}{I_{02}} \rho_{2\max} = \frac{-\frac{1}{5}M}{\frac{1}{4}d^4\pi} \frac{\sqrt{3}d}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{5} \frac{M}{d^3\pi}$$

$$\tau_{3\max} = \frac{M_{u3}}{I_{03}} \rho_{3\max} = \frac{-\frac{1}{5}M}{\frac{1}{8}d^4\pi} \frac{\sqrt{2}d}{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{5} \frac{M}{d^3\pi}$$