Универзитет у Новом Саду
Факултет техничких наука

financed by
Austrian
Development Cooperation

wusaustria

Србољуб С. Симић
Ратко Б. Маретић

Основе механике

Ова скрипта је објављена у оквиру пројекта WUS Austria CDP+ 050/2006 финансираног од стране Austrian Cooperation

The publishing of this script is part of the project CDP+ 050/2006 financed by Austrian Cooperation through WUS Austria

Бесплатан примерак

This copy is not for sale

Нови Сад 2007.

Предговор

Књига која је пред Вама писана је за студенте одсека за Инжењерство заштите животне средине Факултета техничких наука у Новом Саду. Њен садржај је усклађен са наставним програмом предмета Основе механике који студенти овог одсека прате током II семестра студија са фондом часова $3+2$. Он је прилагођен и очекиваном знању студената из других предмета који се могу сврстати у основне техничке дисциплине, као што су математика и физика. Поред тога, намера аутора је била да студентима пруже основе и укажу на правце даљег усавршавања који ће им бити од користи у другим предметима које ће пратити током студија, првенствено имајући на уму Основе механике флуида, Основе термодинамике и Распростирање поремећаја. Уводно поглавље и први део књиге, који се односи на статику, написао је проф. Ратко Маретић, а други део књиге, који се односи на динамику, написао је проф. Србољуб Симић.

Ова књига представља плод педагошког ангажовања аутора у раду са студентима Инжењерства заштите животне средине. Вишегодишњи рад са њима је помогао да се предмет обогати садржајима који могу представљати мост ка проблемима који су од интереса у овој струци.

Процес реформи наставних планова и програма на универзитетима у Србији учинио је трансформацију предмета механике нужном и то у релативно кратком временском року. У постизању високих стандарда који се у овом процесу захтевају велики подстрек нашим напорима чинила је подршка добијена кроз пројекат у оквиру CDP+ програма који је подржао WUS Austria. Аутори користе ову прилику да изразе захвалност и нагласе значај овог вида сарадње.

Иако је значајан напор уложен у осмишљавање садржаја ове књиге, сигурно је да у њој постоје пропусти који би се у будућим издањима могли избећи. Аутори ће стога бити захвални свима који ће својим примедбама и сугестијама учинити да се уочене грешке исправе.

Нови Сад, фебруар 2007.

Србољуб С. Симић
Ратко Б. Маретић

Садржај

1

Увод

Механика је наука која проучава кретање тела, као и међусобна дејства између тела која за последицу имају кретање тела. Током свог развоја механика се поделила на више засебних целина. Класична механика се бави појавама у којима је брзина кретања тела мала у односу на брзину светлости која изоси око $3 \times 10^5\, km/s$. Појавама при којима је брзина кретања тела упоредива са брзином светлости бави се релативистичка механика, док се појавама које су везане за микроструктуру материје (атоми) бави квантна механика.

У овом курсу ће бити речи само о класичној механици. Иако постоје ограничења за примену класичне механике, ипак је она са одличном тачношћу примењива за већину процеса са којима се сусрећемо у свакодневном животу и инжењерској пракси.

Унутар механике постоји подела и на статику, кинематику и динамику. Статика проучава тела која су у стању мировања, односно услове који су при томе испуњени. Кинематика се на геометријски начин, без залажења у узроке, бави кретањем тела. Проучавањем кретања тела, као и узроцима кретања бави се динамика.

1.1 Основни појмови механике: кретање, простор, време и маса

Под кретањем тела се подразумева промена положаја тела у простору током времена. Да би се могло проучавати кретање неког тела, које ће се звати посматрано тело, потребно је имати још једно тело у односу на кога се то кретање посматра. Тада се под кретањем подразумева померање тела, чије се кретање посматра, у односу на тело које се проглашава за непокретно тело. Уколико се посматра кретање на површини, или у близини Земље најчешће се управо она усваја као непокретно тело. Међутим, будући да се и Земља креће, при проучавању кретања тела унутар Сунчевог система, као непокретно тело се обично користи Сунце или такозване непокретне звезде, то јест звезде које су веома удаљене од Сунчевог система и чије је кретање на небу занемарљиво у току раздобља мереног рецимо дужином људског животног века. За много дужа временска раздобља ни ове звезде се не могу усвојити као непокретне. Релативистичка механика сматра да апсолутно непокретно тело не постоји.

У практичним и теоријским проблемима обично и не постоји конкретно непокретно тело већ његову улогу преузима непокретни координатни систем. У механици се кретање посматра у Еуклидском простору. За мерење растојања се користи јединица метар (m).

Време у класичној механици сматрамо апсолутним и независним од процеса кретања тела. Време је реална ненегативна скаларна величина која непрекидно расте и исто је у свим деловима простора. Оно се у једначинама механике (уколико постоји кретање) јавља као независно променљива величина. Јединица за време је секунд (s).

У механици, односно у њеном делу који се назива динамика, се телу придружује и појам масе. Маса тела представља ненегативну скаларну величину чија је јединица килограм (kg). Маса је мера инертности тела, односно она је за неко тело већа уколико је то тело, у условима без отпора, теже покренути из стања мировања, или га зауставити уколико се креће. На површини Земље маса тела је пропорционална његовој тежини.

Објекти проучавања у механици

Објекти који се проучавају у механици су материјална тела и материјалне тачке, као и системи који садрже више тела и (или) материјалних тачака. Под материјалним телом се подразумева део простора који је испуњен материјом. У случају да димензије (величина) тела не утичу на његово кретање уводи се појам материјална тачка, при чему се димензије занемарују. На то, да ли ће се тело сматрати тачком по правилу не утиче сама величина тела, већ о каквом се кретању ради. Тако, на пример, при кретању Земље око Сунца, или Сунца по нашој галаксији Млечни пут ови се објекти без обзира на своју величину посматрају као материјалне тачке. С друге стране при кретању атома и молекула, или котрљању кликера по столу води се рачуна и о облику ових објеката, односно они се посматрају као материјална тела.

Треба напоменути да у појединим проблемима механике, поготову оним који се проучавају у делу механике под називом кинематика, могу користити тела и тачке, који немају атрибуте материјално. Тако се, на пример, могу проучавати фигуре и тачке које настају на екрану (зиду и слично) осветљавањем неким покретним извором светлости (рефлектором, ласером итд.), а за које се не може рећи да су у механичком смислу материјалне природе.

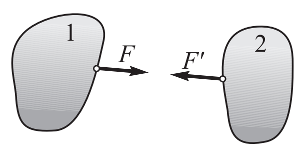
1.2 Механичко дејство

Материјална тела и материјалне тачке могу на различите начине деловати између себе. На пример, једно тело може загревати или осветљавати остала тела, али такав утицај се не сврстава у механичко дејство. Да би постојало механичко дејство између материјалних тела мора се, под утицајем тог дејства, као последица јавити промена начина кретања или мировања тела. Механичко дејство се може остварити како у непосредном додиру тела, тако и на даљину (без додира). Рецимо, уколико на железнички вагон који се налази у стању мировања на прузи налети локомотива она ће, при таквом додиру, променити његово стање мировања и покренути га. На сличан начин, приликом маневрисања и формирања композиције, вагон се може гурнути тако да се извесно време самостално креће. Уколико на њега у том случају налети локомотива (опет у непосредном додиру) она ће променити његов начин кретања (брзину). Као пример механичког дејства на даљину може се навести утицај електромагнета (у чије намотаје је пуштена електрична струја) на парче метала које није у додиру са електромагнетом. При томе ће електомагнет покренути парче метала и привући га ка себи, а такво дејство ће бити обављено на даљину без додира.

Као специјална последица механичког дејства појављује се и промена облика тела. Међутим и промена облика тела представља један вид кретања делова тела, од којих је посматрано тело састављено.

Сила

Као мера механичког дејства уводи се појам силе. Сила се појављује при механичком дејству и доводи до промене кретања или мировања тела. Сила је векторска величина која је одређена својим интензитетом, правцем и смером. Силе могу вршити дејство на једну тачку која се назива нападна тачка, а таква сила је концентрисана сила. Међутим, сила може вршити дејство и по извесној ограниченој површини и у том случају је сила непрекидно распоређена. Јединица за интензитет силе је њутн (N).



Слика 1.1: Акција и реакција

Уколико између два тела постоји механичко дејство тада ће на свако од та два тела деловати по једна сила која је последица међусобног утицаја, као што је приказано на Слици 1.1. Те силе су истог интензитета и правца, а супротног смера. Према томе, ако на тело 1 делује сила F услед дејства тела 2, тада ће на тело 2 услед дејства тела 1 деловати сила F' при чему ће бити задовољено:

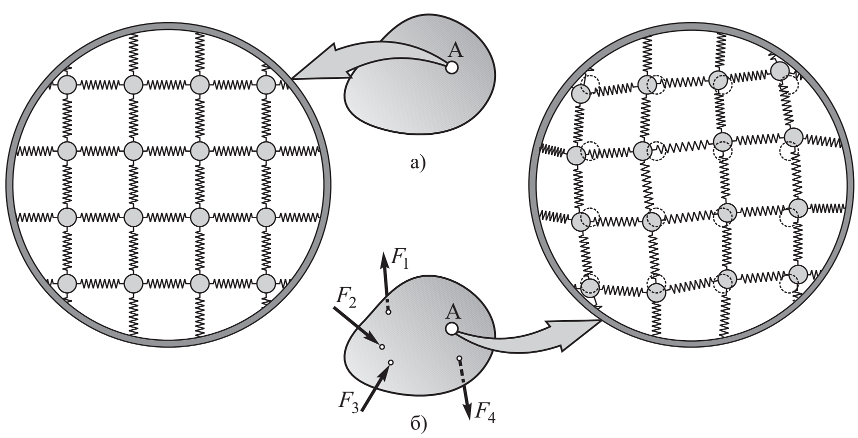
$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'.$$

Ово својство међусобног механичког дејства два тела, представља принцип акције и реакције. О њему ће бити више речи у Динамици.

Класификација сила

Силе које потичу од дејства неког другог тела на посматрано тело су за посматрано тело спољашње силе. Спољашње силе се према месту примене деле на површинске и запреминске силе. Површинске силе делују само по површини тела и остварују се у непосредном додиру тела. На пример, књига која је постављена на сто оптерећује га у директном додиру својом тежином. Запреминске силе делују по целој запремини тела, дакле на сваку тачку тога тела. Као пример запреминских сила могу се навести гравитациона и електромагнетна сила. Гравитациона сила којом Земља привлачи тела на својој површини, представља тежину тела. Ова гравитациона сила делује на сваки делић тела, дакле по целој запремини тела, али се веома често, при решавању задатака, сматра да је сила тежине целог тела придружена само једној тачки тела, која се назива тежиште.

Честице унутар тела (атоми и молекули) делују међу собом силама које се проучавају у посебним гранама физике и хемије. Интензитет ових сила зависи од растојања између честица. Када тело није оптерећено ове се силе налазе у равнотежи и држе атоме и молекуле на окупу. Услед дејства спољашњих оптерећења долази до промене облика тела и при томе се поједине честице тела помере једна у односу на другу, што доводи и до промене сила између ових честица. Ове промене у интензитету сила, представљају један од показатеља и мере оптерећења тела и називају се унутрашње силе.



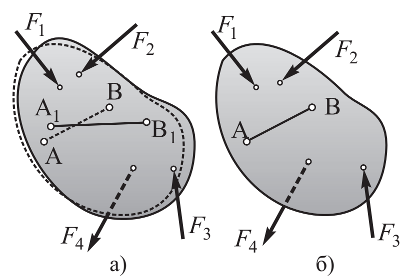
Слика 1.2: Опружни модел утицаја спољашњих сила на деформације тела и појаву унутрашњих сила: а) недеформисано тело; б) деформисано тело

Да би се лакше разумели ови процеси прибегава се опружном моделу материје, који представља врло упрошћен приказ стварних процеса. Према том моделу материја се приказује као скуп куглица које су међусобно повезане опругама. Опруге су код недеформисаног тела ненапрегнуте, као што је приказано на Слици 1.2 а). При дејству спољашњих сила на тело, долази до промене положаја куглица односно, оне се померају у односу на положај које су имале када је тело било недеформисано, који је на Слици 1.2 б) приказан тачкастом линијом. Померање куглица доводи до промене дужине опруга, што изазива њихову деформацију и појаву сила, које представљају унутрашње силе.

О ефектима дејства спољашњих сила на деформацију тела и интензитете унутрашњих сила бави се посебан део статике који се назива отпорност материјала.

1.3 Деформабилна и крута тела

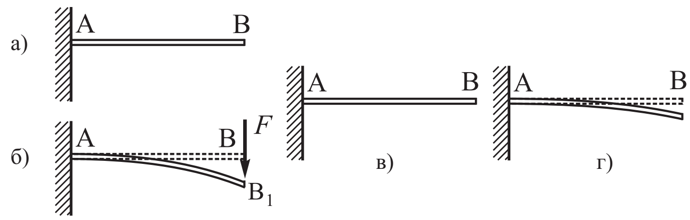
Код свих реалних тела, услед дејства спољашњих сила, долази до промене облика ових тела, односно до њихове деформације. Услед тога сва тела можемо сврстати у деформабилна тела. Уколико се пре дејства спољашњих сила уоче било које две произвољне тачке A и B које су у саставу тела (Слика 1.3 а)), при дејству спољашњих сила ће ове тачке прећи нове положаје A_1 и B_1. При томе ће доћи до промене растојања између тих тачака, то јест дуж AB неће имати исту дужину као и дуж A_1B_1. Наравно, могу постојати тачке између којих се не мења растојање, али то не важи за све тачке тела. У великом броју случајева, који су важни за примену, деформација тела је врло мала у односу на величину тела, тако да је скоро без утицаја на процесе који се проучавају. Имајући на уму овакве случајеве у механици се уводи и појам крутог тела. Круто тело је идеализација која олакшава решавање многих проблема механике. Између било које две тачке овог тела је растојање исто пре и након наношења оптерећења (Слика 1.3 б)).



Слика 1.3: Подела тела: а) деформабилно тело; б) круто тело

Материјали од којих су израђена деформабилна тела се у зависности од њихових својстава при одређеним експерименталним тестовима деле на: еластичне, пластичне, вискоеластичне и материјале са меморијом.

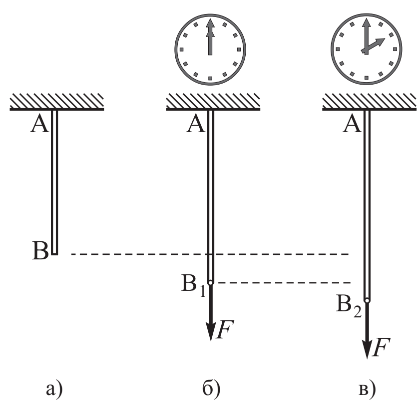
Посматраће се облик неког тела пре наношења оптерећења. На пример, нека је то конзола то јест праволинијски штап који је крајем A узидан у зид (Слика 1.4 а)). Облик штапа ће се променити уколико се он оптерети силом F на крају B као што је то приказано на Слици 1.4 б). Уколико се након тога изврши растерећење штапа могу наступити два битно различита случаја. Први случај је да се штап врати у првобитни праволинијски облик (Слика 1.4 в)) и тада је материјал тела еластичан. У другом случају (Слика 1.4 г)) се штап не враћа у првобитни облик, односно код њега ће и даље постојати одступање од првобитног праволинијског облика. Тада у телу настају трајне деформације, а за материјал оваквог тела се каже да је



Слика 1.4: Тест еластичности тела: а) неоптерећено тело; б) оптерећено; в) еластично тело; г) пластично тело

пластичан. Челик, као један од најважнијих материјала за конструкције је типичан представник еластичних материјала, а поред њега ту спадају алуминијум и разни други метали, разне пластичне масе, гума итд. У пластичне материјале се убрајају смоле, разне материје из живе природе итд.

За еластичне и пластичне материјале је карактеристично да се деформације не мењају са временом, односно време излагања оптерећењу не утиче на деформације. Осим њих, постоје материјали код којих то није случај и да би се они уочили могу се користити различити тестови. Овде ће бити наведен тест на пузање.



Слика 1.5: Тест на пузање: а) неоптерећено тело; б) стање одмах након наношења силе; в) стање након извесног времена

Уочиће се неоптерећени штап који је крајем A учвршћен за подлогу (Слика 1.5 а)). Штап ће се оптеретити силом F на другом крају B (Слика 1.5 б)). Последица оваквог оптерећења је да штап мења своју дужину, то јест да се издужује и да тачка B прелази у положај B_1. Измериће се издужење штапа одмах након наношења оптерећења и након што протекне извесно време (Слика 1.5 в)), када тачка B пређе у положај B_2. Уколико се издужење штапа током времена повећава, материјал овог тела је вискоеластичан. Вискоеластични материјали имају нека својства која их приближавају течностима, односно има се утисак као да они теку, или да се разливају, али у дугом временском раздобљу. У вискоеластичне материјале се сврставају асфалт, бетон, стакло, разне пластичне масе, смоле итд. Граница између еластичних и вискоеластичних материјала није јако строга јер и материјали који се сврставају у еластичне могу под одређеним условима бити вискоеластични. Такав је на пример загрејани челик (што је случај на пример код котлова), код кога се може запазити пузање. Да би се оно спречило, развијени су специјални легирани челици код којих је овај ефекат пузања значајно умањен.

Постоје и специјални материјали са меморијом, код којих при деформисању долази до трајних промена у атомској структури. Након уклањања оптерећена са тела начињених од ових материјала, она се враћају у првобитни облик, али “памте” како су била оптерећена, услед чега при поновном оптерећењу имају другачија својства.

Део I

Статика

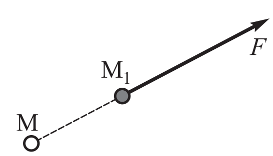
2

Статика

За материјална тела и тачке који су изложени дејству разних оптерећења могу наступити два битно различита стања: они се под дејством оптерећења могу кретати, или остати непокретни. Тако на пример мост, зграде, разна постројења, носеће конструкције итд. се под утицајем оптерећења не померају. Да би се задовољило да се тело или тачка не померају, оптерећења морају задовољити извесне услове. Статика се управо бави тим условима који морају бити испуњени да се неки објекат не би кретао, дакле да би остао статичан. Поред тога, статика проучава и могућност замене неког система оптерећења другим (еквивалентним) системом оптерећења који би имао исто механичко дејство.

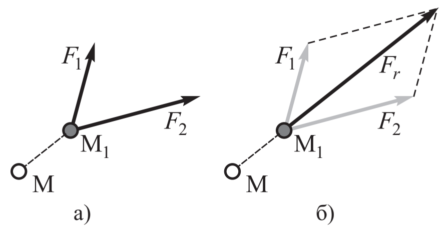
Статика, за разлику од других делова механике, користи релативно једноставан математички апарат. Поред тога, статика је на известан начин искуствено и интуитивно усађена људима, дакле људи поседују "осећај" за њу. Вероватно је због тога статика, у појединим фрагментима, била позната и старим цивилизацијама, што је очигледно имајући у виду њихова изузетна архитектонска достигнућа.

2.1 Статика материјалне тачке



Слика 2.1: Дејство једне силе на материјалну тачку

Уочиће се материјална тачка на коју делује само сила F, као што је то приказано на Слици 2.1. Ова материјална тачка ће бити посматрани објекат и неће се водити рачуна о томе на који начин је остварена сила. Нека је тачка пре дејства силе мировала. Услед дејства силе доћи ће до померања тачке које ће бити у правцу силе. Дакле, тачка ће се померити у положај $_1$ и наставити даље да се креће. Према томе, материјална тачка (а исто важи и за тело), при дејству само једне силе не може



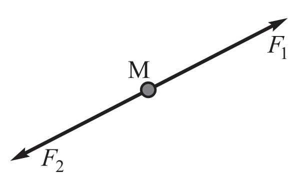
Слика 2.2: Дејство две силе на материјалну тачку—правило паралелограма

бити у равнотежи.

Посматраће се материјална тачка која је изложена дејству две силе, које су означене са F_1 и F_2 (Слика 2.2 а)). Експерименти показују да ће кретање тачке M бити у правцу силе F_r која се назива резултанта, а која се добија векторским сабирањем задатих сила према правилу паралелограма (Слика 2.2 б)). Дакле, уместо да се посматрају силе F_1 и F_2, може се њихово заједничко дејство на тачку заменити резултантом за коју важи да је

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

У механици се сматра да је резултатна F_r еквивалентна систему сила F_1 и F_2, односно да има исто механичко дејство.



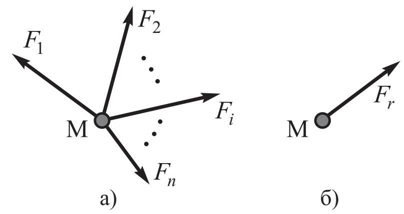
Слика 2.3: Равнотежа материјалне тачке

Уколико је, у специјалном случају, материјална тачка изложена дејству сила F_1 и F_2 које имају исти правац и интензитет а супротан смер (Слика 2.3), тачка се неће померити. Резултанта ових сила је једнака нули па се тачка понаша као да уопште није изложена дејству сила. За овај специјалан случај се каже да се тачка налази у равнотежи.

Материјална тачка може бити изложена и дејству више од две силе (Слика 2.4 а)). У том случају се могу сабрати прве две силе, па добијена резултанта сабрати са трећом силом и тако даље до последње силе. Дакле, уколико на тачку делује више сила њихово дејство на тачку се може заменити са само једном силом која представља њихову резултанту (Слика 2.4 б)), што се записује као:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{F}_i \tag{2.1}$$

Ове силе, чији се правци секу (сучељавају) у једној тачки, зову се сучељне силе. При одређивању резултанте више сила, често се користи аналитичка метода при којој се силе пројектују на осе уведеног координатног система.



Слика 2.4: Дејство више сила на материјалну тачку

У том случају се векторски израз (2.1) своди на скаларне изразе:

$$X_r = \sum_{i=0}^{n} X_i; \quad Y_r = \sum_{i=0}^{n} Y_i; \quad Z_r = \sum_{i=0}^{n} Z_i, \tag{2.2}$$

при чему су X_r, Y_r и Z_r пројекције резултанте на осе Декартовог координатног система, док су X_i, Y_i и Z_i пројекције сила које треба сабрати.

Услови равнотеже материјалне тачке

Користећи претходна запажања може се формулисати услов који мора бити испуњен да би тачка која је изложена дејству више сила била у равнотежи, то јест да би остала у стању мировања. Према том услову тачка ће бити у равнотежи уколико је резултанта свих сила које делују на тачку једнака нули, што се може записати и као:

$$\mathbf{F}_r = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

На основу ове векторске једначине равнотеже, могу се у зависности од тога да ли су силе које делују на тачку у једној равни, или у простору, написати и две односно три скаларне једначине равнотеже. У раванском случају те једначине су:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \tag{2.4}$$

док се у случају просторног система сила, претходним скаларним једначинама равнотеже придодаје и једначина

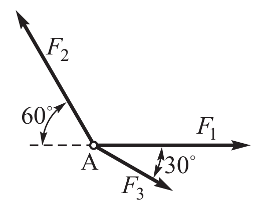
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0.$$

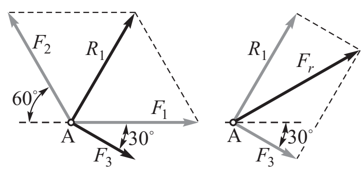
Приликом решавања задатака се ознака за суму често користи без посебних ознака $i = 1$ и n, подразумевајући да треба на одговарајући начин сабрати све силе односно њихове пројекције. У том случају се скаларне једначине равнотеже могу написати и као

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0. \tag{2.5}$$

У даљем тексту ће се због једноставнијег писања, ознака за суму најчешће користити као у изразу (2.5).

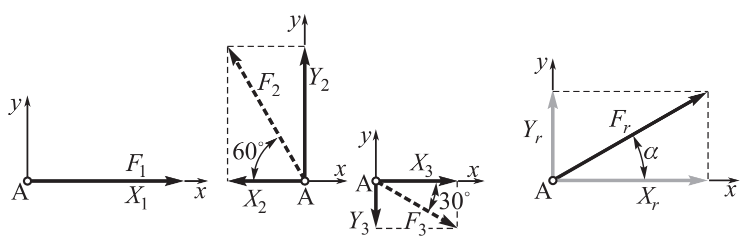
Пример 2.1 *Материјална тачка A изложена је дејству сила чији је распоред у равни дат на слици. Интензитет ових сила је $F_1 = 300$ N, $F_2 = 300$ N и $F_3 = 100$N. Одредити резултанту датих сила. Хоће ли тачка тачка A бити у равнотежи?*





а) б)

► Резултанта задатих сила добија се њиховим векторским сабирањем. Једна од могућности одређивања резултанте је директна примена правила паралелограма. Према том правилу се сабирају по две силе, тако да ће се прво сабрати силе F_1 и F_2 чиме се добија њихова резултанта R_1 (слика а)). Затим треба сабрати силе R_1 и F_3, на основу чега се добија коначна резултанта F_r (слика б)). Ова метода је геометријска па подразумева да се дужине вектора цртају у одређеној размери, а да се по добијању резултанте њена дужина измери и на основу размере преарачуна њен интензитет. Очигледно је да је ова метода незгодна за примену, поготово у случају већег броја сила.



а) б) в) г)

Слика 2.5: Анализа сила

При решавању задатака је знатно ефикасније резултанту одредити аналитичким поступком. У том случају ће се према (2.1) написати векторски израз:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3,$$

који се, имајући у виду да је у питању равански проблем, може свести на два скаларна израза

$$X_r = X_1 + X_2 + X_3;$$
$$Y_r = Y_1 + Y_2 + Y_3,$$

при чему је уведен координатни систем xAy. На Сликама 2.5 а), б) и в) је приказано како се за сваку од задатих сила могу одредити и њене пројекције. На тај начин се добија

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1 = 300N; & Y_1 &= 0N; \\ X_2 &= -F_2\cos 60^\circ = -150N; & Y_2 &= F_2 \sin 60^\circ = 150\sqrt{3}N; \\ X_3 &= F_3 \cos 30^\circ = 150N; & Y_3 &= -F_3 \sin 30^\circ = -50\sqrt{3}N. \end{aligned}$$

Сабирањем пројекција задатих сила добија се да су пројекције резултанте

$$X_r = 300N; \quad Y_r = 100\sqrt{3}N.$$

На основу пројекција резултанте се сада може нацртати и сама резултанта која је приказана на Слици 2.5 г). Интензитет резултанте је:

$$F_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2} = \sqrt{300^2 + (100\sqrt{3})^2} = 200\sqrt{3}N,$$

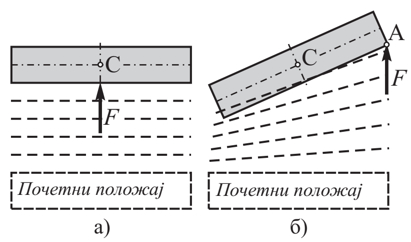
док се угао α одређује на основу:

$$\tan\alpha = \frac{Y_r}{X_r} = \frac{100\sqrt{3}}{300} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ.$$

Једначине равнотеже (2.4) нису задовољене тако да нема говора о равнотежи тачке A, односно ова тачка ће се под дејством проученог система сила кретати. ◀

2.2 Статика материјалног тела

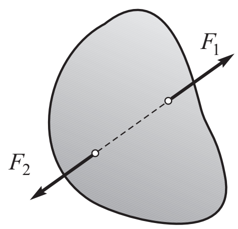
Уколико је тело оптерећено само једном силом оно неће остати у стању мировања, већ ће се кретати. Док се у таквом случају материјална тачка померала у правцу дејства силе, начин кретања тела ће зависити од тога где се на телу налази нападна тачка силе. Посматраће се тело у облику правоугаоне плоче које је у првом случају оптерећено силом F у правцу који пролази кроз средину тела (тачка C на Слици 2.6 а)), што представља један специјалан случај оптерећења. Под дејством силе доћи ће до померања тела и то таквог да је једна изабрана ивица тела све време паралелна почетном положају. Међутим, уколико се исто тело оптерети силом истог интензитета, при чему је нападна тачка A, тада ће се тело померати у правцу силе, али



Слика 2.6: Кретање тела под дејством једне силе: а) правац силе пролази кроз средиште тела; б) правац силе не пролази кроз средиште тела

ће доћи и до обртања тела (Слика 2.6 б)). Дакле, сила која делује на неку тачку тела, и која се паралелно премести тако да делује на неку другу тачку тела, нема исти учинак на тело. Према томе, сила у првом и другом случају неће имати еквивалентно дејство. Очигледно је да ће због могућег обртања услови равнотеже за тело бити сложенији него што су били за тачку.

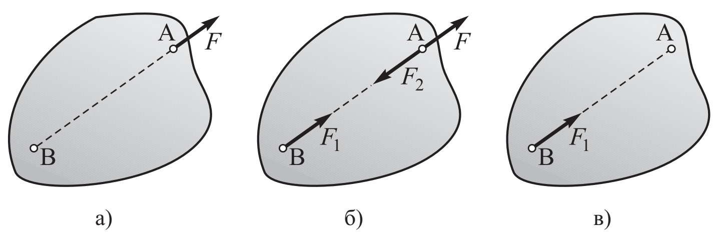
Уравнотежени систем сила



Слика 2.7: Уравнотежене силе

Материјално тело је оптерећено силама F_1 и F_2 истог правца и интензитета F, а супротног смера (Слика 2.7). Једноставни експерименти показују да ће под дејством оваквог система сила тело бити у равнотежи. Овакав систем сила је најједноставнији уравнотежени систем сила. Уколико тело које је било у стању мировања оптеретимо са овим системом сила, стање тела се неће променити. Ако са тела које је оптерећено овим системом сила уклонимо поменути систем сила неће доћи до промене у кретању, или мировању тела.

Сила као клизећи вектор



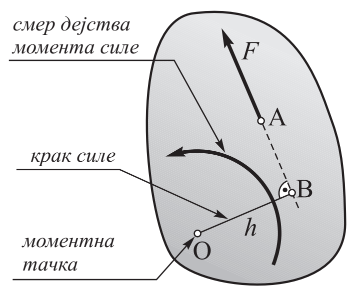
Слика 2.8: Сила као клизећи вектор: а) почетно стање; б) додавање уравнотеженог система сила; в) крајње стање

Нека је тело у тачки А оптерећено силом F, као што је то приказано на Слици 2.8 а). Сада ће се таквом телу додати уравнотежени систем сила F_1 и F_2 (Слика 2.8 б)) такав да је задовољено да је $F_1 = F_2 = F$. При томе је А нападна тачка силе F_2, а В нападна тачка силе F_1. Пошто сада и силе F и $F2$ представљају уравнотежени систем сила, оне се могу уклонити са тела. Као последица се добија да је тело оптерећено само силом F_1 (Слика 2.8 в)). Како при додавању и уклањању уравнотеженог система сила није било промене механичког дејства, закључује се да су силе F и F_1 еквивалентне, односно да се једна може заменити другом. Ради се о силама са истим правцем, смером и интензитетом, са различитим нападним тачкама. Дакле, може се рећи да се сила F "отклизала" на свом правцу и напала другу тачку тела. Према томе, сила је клизећи вектор јер је можемо померити дуж њеног правца, а да се при том не промени њено дејство. Силе F и F_1 ће имати исто дејство на тело, односно оно ће се у оба случају кретати на исти начин.

На пример, уколико се неки сандук који се налази на поду гура, то јест делује на њега силом која је паралелна са подлогом, а затим повлачи помоћу ужета силом истог интензитета, ефекат ће бити исти, односно сандук ће се на исти начин померати.

2.3 Момент силе за тачку

Већ је напоменуто да дејство једне силе на тело, осим у специјалном случају, има за последицу обртање тела, па ће се обртно дејство силе на тело посебно размотрити. Уочиће се једно тело које је оптерећено силом F у тачки A, као и тачка O која ће се звати моментна тачка (Слика 2.9). Повлачењем нормале из тачке O на правац силе F добија се тачка B. Нека је растојање између тачака O и B, које ће звати *крак силе* F за тачку O, означено са h. Сада се момент силе F за тачку O дефинише као производ интензитета силе F и крака силе h, то јест:

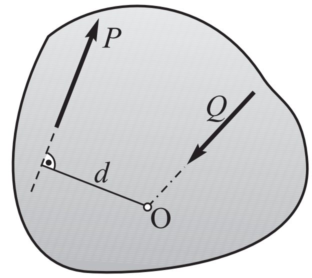


Слика 2.9: Момент силе F за тачку O

$$M_O^F = F\,h. \tag{2.6}$$

Јединица за момент силе је њутн метар [Nm]. При томе се мора водити рачуна о предзнаку ове величине, па се конвенцијом усваја да је момент силе за тачку O позитиван уколико је смер обртног дејства силе у односу на тачку O супротан кретању казаљке на сату. На Слици 2.10 су дати примери одређивања момента силе за тачку O. Тако да ће момент силе P у односу на тачку O бити

$$M_O^P = -P\,d.$$

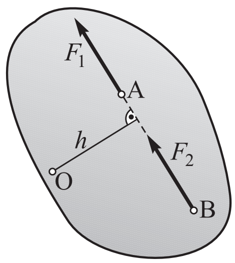


Слика 2.10: Примери одређивања момента силе за тачку O

Дакле, због тога што је смер обртног дејства силе P у односу на тачку O исти као смер кретања казаљке на сату, момент ове силе ће бити негативан.

Правац силе Q пролази кроз тачку O, па је крак ове силе у односу на тачку O једнак нули. Имајући у виду дефиницију момента силе за тачку произилази да је момент силе Q за тачку O једнак нули.

Нека су дате силе F_1 и F_2 које имају исти правац, смер и интензитет, а различите нападне тачке, које су на Слици 2.11 означене са A и B. Будући да је растојање праваца ових сила од тачке O у оба случаја исто, дакле да је крак ових сила у односу на тачку О исти, онда ће исти бити и моменти ових сила у односу на тачку О. Овај закључак је у складу са чињеницом да је сила клизећи вектор, односно да се механичко дејство силе не мења при њеном клизању, односно померању дуж свог правца.



Слика 2.11: Момент силе се не мења померањем силе дуж свог правца

Момент силе F за тачку О се може представити и као векторска величина која се дефинише са:

$$\mathbf{M}_O^{\mathbf{F}} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}, \tag{2.7}$$

где је $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$ (Слика 2.12) вектор положаја нападне тачке А у односу на тачку О. Интензитет овог векторског производа је:

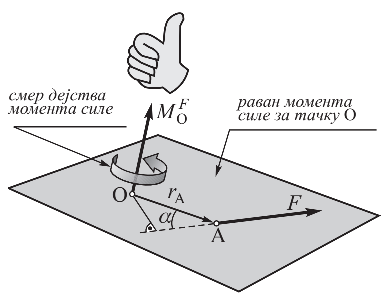
$$M_O^F = \left|\mathbf{M}_O^{\mathbf{F}}\right| = r_A \sin\alpha \, F,$$

где је α угао између правца силе F и правца вектора положаја тачке А. Пошто је:

$$r_A \sin\alpha = h,$$

добија се да је

$$M_O^F = F\,h.$$

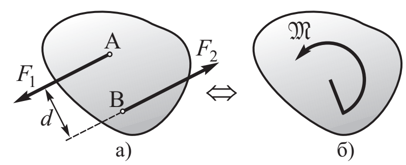


Слика 2.12: Одређивање праца и смера вектора момента силе F за тачку О

Према томе, интензитет векторског производа (2.7) је према (2.6) једнак моменту силе. Вектор момента силе је нормалан на раван коју дефинишу вектори $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{F}$. Смер овог вектора се одређује према правилу десне руке: уколико прсти десне руке (без палца) показују смер обртног дејства момента силе, палац показује смер вектора. Момент силе зависи од избора моментне тачке, то јест променом моментне тачке мења се и вредност момента силе. Због овог својства вектор момента силе има своју нападну тачку и то је моментна тачка О.

2.4 Спрег сила и спрег

Посматраће се тело приказано на Слици 2.13 а) оптерећено силама F_1 и F_2 које имају исти интензитет F, чији су правци међусобно паралелни (растојање између њих износи d), а смерови супротни. У овом случају тело неће остати у стању мировања, већ ће се под дејством ових сила кретати, тачније тело ће почети да се обрће. У механици се овакав систем сила зове *спрег сила*. Дакле, иако су интензитети ових сила исти, оне не представљају уравнотежени систем сила.

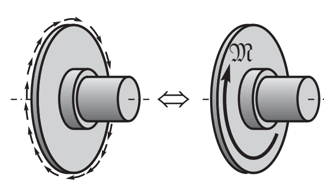


Слика 2.13: а) спрег сила; б) спрег

Спрег сила се често среће у техници, па се уводи и једна посебна механичка величина која се назива спрег и чије је дејство еквивалентно спрегу сила. Према томе, спрег сила се може заменити са спрегом и обрнуто. Спрег се при визуелном представљању обично црта као кружни лук са стрелицом и означава са $\mathfrak{M}$ (Слика 2.13 б)). Раван у којој се црта спрег је раван дејства спрега и представља раван коју дефинишу правци сила F_1 и F_2.

Обртно дејство спрега сила је интензивније уколико су силе већег интензитета и уколико је веће растојање између њихових праваца, па интензитет спрега сила износи:

$$\mathfrak{M} = F\,d.$$



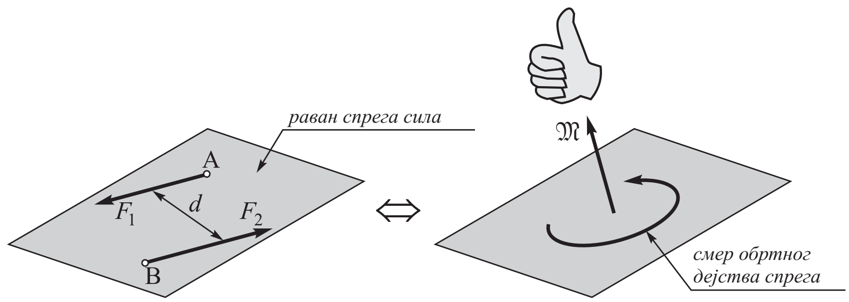
Слика 2.14: Заједничко дејство обимних сила се своди на спрег

Код електричних мотора, пумпи, турбина итд. постоје машински делови који су оптерећени системом сила које делују по читавом обиму тела. Један такав пример је дат на Слици 2.14 где је приказан ротор на кога, при обртању, делују силе које су равномерно распоређене по његовом ободу. При проучавању заједничког дејства ових сила може се приступити замени са једним спрегом, што знатно олакшава математичку анализу проблема.

Спрегу се могу приписати својства вектора јер код њега разликујемо интензитет, правац и смер.

Правац вектора спрега је нормалан на раван спрега, док се смер одређује правилом десне руке: уколико прсти десне руке показују смер обртног дејства спрега, палац показује смер вектора спрега (Слика 2.15). Поред тога, смер вектора спрега се може одредити и тако што се гледано са врха вектора спрега, обртно дејство спрега имати смер супротан кретању казаљке на сату (позитиван математички смер).

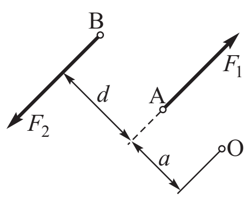
За разлику од вектора силе који је клизећи вектор везан за одређени правац, вектор спрега се може паралелно померати, па се за такав вектор користи назив слободан вектор. Да би се то доказало одредиће се моменти



Слика 2.15: Спрег сила и спрег се могу приказати као вектори

сила F_1 и F_2 ($F_1 = F_2 = F$) које чине спрег сила у односу на неку произвољно одабрану моментну тачку O (Слика 2.16). Њиховим алгебарским сабирањем се добија:

$$M_O^{F_1} + M_O^{F_2} = -F_1\, a + F_2\,(a + d) = F\, d.$$



Слика 2.16: Збир момената сила које чине спрег не зависи од моментне тачке

Овим је показано да је збир момената сила које чине спрег сила, у односу на тачку O, једнак интензитету спрега сила. Поред тога, овај збир момената не зависи од избора моментне тачке O. Дакле, дејство спрега сила, а самим тим и спрега је исто за сваку тачку која се изабере као моментна. Осим тога, уколико се силе F_1 и F_2 заједнички преместе у равни коју образују, тако да им је растојање између њихових праваца и даље d, неће доћи до промене интензитета спрега сила који образују. На основу тога се може закључити да је спрег вектор који се не мења при паралелном померању, односно да вектор спрега спада у слободне векторе, који нису везани за одређени правац, или тачку.

Уколико је тело оптерећено са више спрегова, њихови вектори се тада могу паралелно преместити у једну тачку и сабрати чиме се добија резултујући спрег:

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}}_r = \sum \boldsymbol{\mathfrak{M}}_i.$$

Уколико су сви вектори спрегова у истом правцу, тада се векторска једначина своди на скаларну једначину:

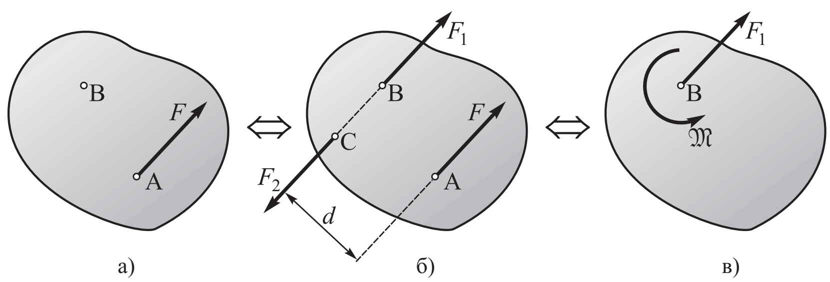
$$\mathfrak{M}_r = \sum \mathfrak{M}_i. \tag{2.8}$$

2.5 Систем произвољних сила у равни

Редукција силе на тачку

Посматраће се тело које је приказано на Слици 2.17 а) које је изложено дејству силе F у тачки A. Сада ће се телу додати уравнотежен систем сила који се састоји од сила F_1 и F_2 (Слика 2.17 б)). Интензитет ових сила је F, њихов правац је паралелан са правцем силе F и на растојању d, при чему је B нападна тачка силе F_1. Силе F и F_2 чине сада спрег сила, па се уместо њих може увести спрег $\mathfrak{M}$ чији је интензитет $\mathfrak{M} = F\,d$ (Слика 2.17 в)). Истовремено, треба уочити да је интензитет овог спрега једнак моменту силе F у односу на тачку B, дакле да је:

$$\mathfrak{M} = M_B^F$$

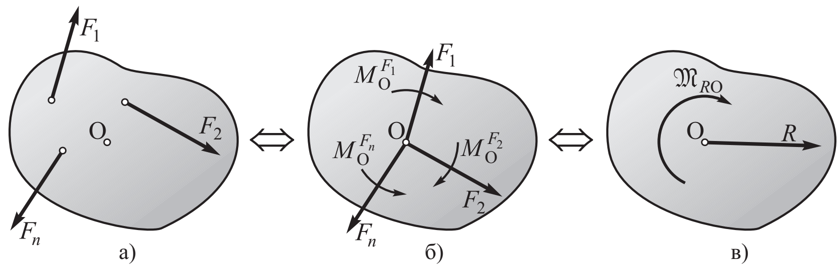


Слика 2.17: Паралелно преношење силе—поступак редукције силе на тачку

Након ових трансформација тело је оптерећено силом F_1 у тачки B и спрегом $\mathfrak{M}$. На овај начин је показано да оптерећење тела силом F у тачки A има исто механичко дејство као и оптерећење тела силом F_1 у тачки B и спрегом $\mathfrak{M}$. Према томе, ова два оптерећења су еквивалентна и због тога се могу међусобно заменити. Овај поступак паралелног померања силе зове се *редукција силе на тачку*. Дакле, сила која делује на једну тачку тела може се паралелно померити тако да делује на неку другу тачку тела, али јој се том приликом мора додати и спрег. Интензитет овог спрега је једнак моменту силе (која се помера) у односу на тачку у коју се сила премешта.

Систем произвољних сила

Посматраће се тело које је изложено дејству система сила $F_1, F_2, \ldots, F_n$ које се налазе у једној равни (Слика 2.18 а)) и које имају различите нападне тачке. Све ове силе се могу редуковати на неку произвољну тачку O и при томе им се морају придружити спрегови који су једнаки моментима тих сила у односу на тачку O, као што је већ показано у претходном делу текста. Тако се добија еквивалентан систем од n сила са заједничком нападном тачком O (сучељне силе) и од n спрегова (Слика 2.18 б)).



Слика 2.18: Свођење произвољног система сила у равни на резултујућу силу и резултујући спрег

Добијени систем сучељних сила се може заменити са само једном силом **R**, која се назива *резултујућа сила*, чија је вредност:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i. \tag{2.9}$$

Сабирањем спрегова, односно момената сила у односу на тачку O добија се само један спрег који се зове *резултујући спрег* и који износи:

$$\mathfrak{M}_{RO} = \sum M_O^{\mathbf{F}_i}. \tag{2.10}$$

Будући да су силе у једној равни, сви вектори момената тих сила у односу на тачку O су колинеарни и нормални на раван сила. Због тога, при означавању главног момента није коришћена векторска ознака јер се подразумева да је и тај вектор нормалан на раван у којој су силе. На тај начин се систем произвољних сила у равни свео на дејство једне силе и једног спрега (Слика 2.18 в)), који се заједнички зову *торзер*.

Услови равнотеже тела при дејству система произвољних сила у равни

Имајући у виду да се систем произвољних сила у равни при дејству на неко тело, своди на заједничко дејство резултујуће силе и резултујућег спрега, може се закључити да ће се тело под њиховим дејством кретати. Да би тело било у равнотежи, дакле да се не би померало, потребно је обезбедити да резултујућа сила и резултујући спрег буду једнаки нули. Овакав закључак доводи до једначина равнотеже које том приликом морају бити задовољене, а оне гласе:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}; \quad \mathfrak{M}_{RO} = \sum M_O^{\mathbf{F}_i} = 0. \tag{2.11}$$

На основу прве једначине, која је векторске природе, следе две скаларне једначине па се једначине равнотеже своде на систем од три једначине које гласе:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum M_O^{\mathbf{F}_i} = 0. \tag{2.12}$$

За трећу једначину (2.10.2) је уобичајени назив *моментна једначина* и најчешће се користи простија ознака:

$$\sum M_O = 0. \tag{2.13}$$

У претходном одељку је показано да је тачка О у односу на коју се рачуна момент, произвољно одабрана. Зато се приликом писања моментне једначине може користити било која тачка у равни у којој су силе.

Као што је то већ било наговештено, услови равнотеже тела су сложенији него услови равнотеже тачке. Упоређењем ових услова види се да су прва два услова равнотеже тела (2.12) иста као и услови равнотеже тачке (2.4). Разлика постоји услед постојања додатног трећег услова из (2.12) који код тачке не постоји.

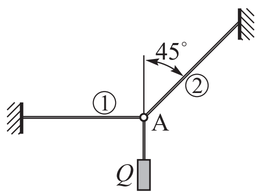
Везе и реакције веза

Материјална тела која су до сада посматрана нису имала ограничења у погледу кретања, па се зато називају слободна тела. Примери слободних тела су: авион у лету, подморница под морем, Земља и истраживачке сонде при кретању по Сунчевом систему итд. У техници је много чешћи случај да постоји спрега између посматраног тела и околних тела због чега постоје ограничења у кретању посматраног тела. На пример, локомотива се креће линијом коју дефинишу шине, фиока се креће правцем вођица, врата се обрћу око шарки на оквиру итд. У свим овим случајевима се посматрана тела називају *везана тела*, тела која ограничавају кретање су *везе*, а само кретање је *везано кретање*. Кретање тела може бити и потпуно спречено везама, као што је на пример случај код стуба који је пободен у земљу, затвореног прозора, или полице причвршћене на зид.

Везано тело делује на везу одређеним оптерећењима, силама и (или) спреговима, а са друге стране према принципу акције и реакције и веза делује на тело оптерећењима истог интензитета и правца, а супротног смера. Ово дејство које веза врши на посматрано тело зове се *реакција везе*. Уколико, на пример, кретање колица по подлози онемогућимо ужетом које је везано за неки непокретни објекат, па колица оптеретимо силом у намери да их покренемо, уже које представља везу ће се томе супроставити. При томе ће уже бити оптерећено и деловаће и на колица извесном силом, дакле реакцијом везе. Све што је претходно напоменуто за везана материјала тела важи и за везане материјалне тачке.

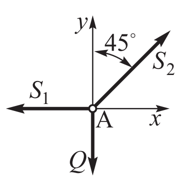
Приликом извођења једначина равнотеже за материјалну тачку (2.5) и материјално тело (2.12) нису постојала ограничења у погледу кретања тачке или тела, па поменуте једначине важе за слободну тачку и слободно тело. Да би се ове једначине могле применити и за везане материјалне објекте, морају се у мислима уклонити везе, дакле замислити да је објекат слободан. При томе се на објекат, поред већ присутних оптерећења која ће се звати активна оптерећења, морају придодати и реакције везе, дакле оптерећења која потичу од дејства веза. Под заједничким дејством активних оптерећења и реакција везе материјални објекат се неће кретати, дакле биће у равнотежи, па се на њега сада могу применити једначине равнотеже.

Реакција везе зависи од типа везе и да би се за поједину везу она одредила, полази се од тога која кретање тела веза допушта, а која не. За она кретања која веза допушта неће постојати реакције везе, а за кретања која су спречена, постојаће и реакција везе.



Пример 2.2 *Два ужета означена на слици са 1 и 2 су међусобно својим крајевима везана у тачки A док су им преостали крајеви везани за зидове. У тачки A је везано и уже за које је везан терет тежине Q. Одредити реакције везе.*

► Када би уклонили ужад 1 и 2, тачка A би се под дејством активне силе тежине Q кретала. Међутим, како ова ужад постоје, она потпуно онемогућавају кретање тачке A, што значи да за њу представљају везу. Према томе, тачка A је везана тачка. Сада ће се замислити да су ужад 1 и 2 уклоњена, али да је њихово дејство на тачку A замењено одговарајућим утицајима које ужад врше на тачку A. То су реакције везе које су у случају ужета силе S_1 и S_2, чији је интензитет непознат, које су у правцу ужета и чији је смер је од тачке A (слика 2.11.2). На тај начин на тачку A делују три силе чији се правци секу у тачки A, што значи да се ради о систему раванских сучељних сила. Под дејством ових сила, од којих су две непознате, тачка A ће бити у равнотежи. У случају да се изабере приказани координатни систем, две једначине равнотеже ће гласити:



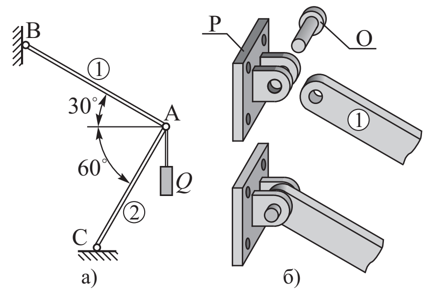
$$\sum X_i = -S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -S_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 = 0;$$
$$\sum Y_i = S_2 \cos 45^\circ - Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - Q = 0.$$

Решење овог система од две једначине са две непознате је

$$S_1 = Q; \quad S_2 = \sqrt{2}q.$$

Треба уочити да смер сила S_1 и S_2, обавезно мора бити у приказаном смеру, јер је уже способно само да "повуче" тачку A, а не и да је "гурне". ◄

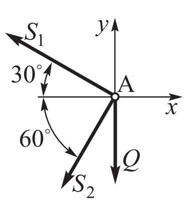
Пример 2.3 *Два лака штапа означена на слици а) са 1 и 2 су међусобно својим крајевима зглобно везана у тачки A док су им преостали крајеви зглобно везани за подлогу у тачкама B и C. Зглобни ослонци су технички изведени тако што је кроз отворе на постољу P (које је причвршћено за зид) и штапу 1 увучена осовиница O (слика б)). У тачки A је везано и уже за које је везан терет тежине Q. Одредити реакције везе. Могу ли се у овом случају штапови заменити са ужадима?*



► Штапови спречавају кретање тачке A па за њу представљају везе. Да би се анализирала равнотежа тачке A, она ће се у мислима ослободити веза и уместо њих увести одговарајуће реакције везе. Када је веза лаки штап који је на крајевима зглобно везан, реакција везе је сила која је у правцу осе штапа. Ова сила може бити усмерена ка тачки A, у ком случају штап притиска (гура) тачку A, или од ње, при чему тада штап вуче тачку A. У овом задатку ће се претпоставити да су реакције везе S_1 и S_2 усмерене од тачке A. Дакле, сада је тачка A, поред активне силе Q, оптерећена и са две силе чији су интензитети непознати. Пошто се правци свих сила секу у тачки A ради се о сучељном систему сила за који се могу написати две једначине равнотеже и то:

$$\sum X_i = -S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 60^\circ = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}S_1 + S_2 = 0;$$

$$\sum Y_i = S_1 \sin 30^\circ - S_2 \sin 60^\circ - Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}S_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 - Q = 0;$$



На основу прве једначине је:

$$S_2 = -\sqrt{3}S_1,$$

па се заменом у другу једначину добија:

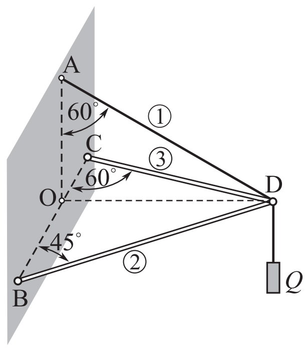
$$\frac{1}{2}S_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}S_1) = Q \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{Q}{2}$$

Сада није тешко закључити да је:

$$S_1 = \frac{Q}{2}.$$

Сила у штапу 1 има позитиван предзнак што значи да има смер који је претпостављен, док се на основу негативног предзнака у решењу за силу S_2

закључује да је смер ове реакције погрешно претпостављен, односно да је сила усмерена ка тачки А. Дакле, штап 2 "гура" тачку А, што уже не може. У овом случају штап 1 може бити замењен ужетом, док код штапа 2 то није случај. ◄



Пример 2.4 *Уже (на слици означено са 1) је својим крајевима везано за тачке A и D. Два лака штапа (2 и 3) су међусобно својим крајевима зглобно везани у тачки D док су им преостали крајеви зглобно везани у тачкама B и C. Тачке A, B и C се налазе у вертикалној равни. У тачки D је везано и уже за чији крај је везан терет тежине Q. Одредити реакције везе.*

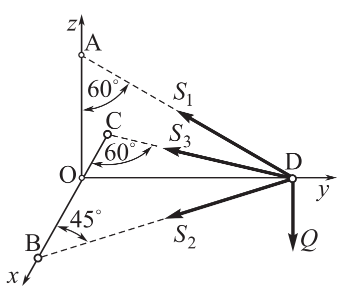
► Имајући у виду да је тачка D везана, у мислима ће се уклонити везе и уместо њих увести реакције везе, дакле силе S_1, S_2 и S_3 (видети слику). Под дејством ових сила и силе Q тачка D је у равнотежи. Будући да је у питању просторни систем сила могу се написати три једначине равнотеже. У приказаном координатном систему, пројекције реакција везе S_1, S_2 и S_3 су:

$$X_1 = 0; \qquad Y_1 = -S_1 \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} S_1; Z_1 = S_1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} S_1;$$

$$X_2 = S_2 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} S_2; \quad Y_2 = -S_2 \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2; Z_2 = 0;$$

$$X_3 = -S_3 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} S_3; Y_3 = S_3 \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} S_3; \quad Z_3 = 0.$$

Једначине равнотеже су:



$$\sum X_i = \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - \frac{1}{2} S_3 = 0;$$

$$\sum Y_i = -\frac{\sqrt{3}}{2} S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} S_3 = 0;$$

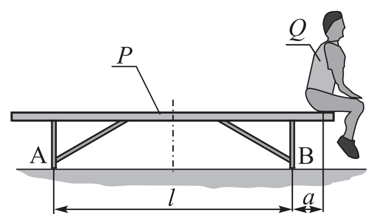
$$\sum Z_i = \frac{1}{2} S_1 - Q = 0.$$

Решење овог система једначина је:

$$S_1 = 2Q; \quad S_2 = -\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} Q; \quad S_3 = -\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} Q.$$

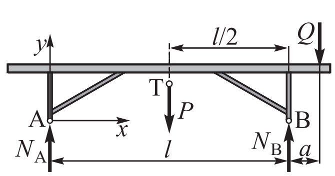
Предзнаци сила S_2 и S_3 су негативни што значи да су смерови ових сила погрешно претпостављени. Очигледно да се исправно поступило што су се у задатом систему користили штапови, јер ужад не би омогућила равнотежу. ◀

Пример 2.5 *Симетрична клупа тежине $P = 160N$, са растојањем $l = 200cm$ између ногу A и B, ослоњена је на под за који ће се усвојити да је идеално гладак. На клупу је на растојању $a = 25cm$ од ноге B сео човек тежине $Q = 700N$. Одредити реакције везе.*



▶ Тежина клупе P је сила за коју можемо сматрати да делује у тежишту T које је у равни симетрије клупе. Није задато на којој је удаљености од пода, али то за решење овог задатка и није битно. На клупу делује и активна сила Q тежине човека који је сео на клупу. Када не би било пода, клупа би се кретала, па према томе под за клупу представља везу која не дозвољава померање у правцу који је нормалан на раван пода. Ова веза би дозволила померање у равни пода када би постојала нека сила која делује у правцу паралелном са подлогом. Може се закључити да ће у случају додира тела са глатком подлогом реакција везе бити сила чији је правац нормалан на раван подлоге (видети слику). Пошто у овом случају постоји додир тела са подлогом у тачкама A и B постојаће и две реакције везе и то силе N_A и N_B чији су правци нормални на раван пода. Како је клупа сада у мислима ослобођена веза, она је постала слободно тело и да би била у равнотежи морају бити задовољене једначине равнотеже, којих ће на основу (2.12) бити три. Ако се уведе координатни систем xAy тада ће сума пројекција свих сила на осе x и y бити:

$$\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \\ &\sum Y_i = N_A + N_B - P - Q = 0. \end{aligned} \tag{а}$$

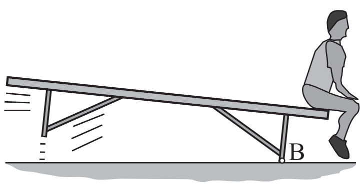


Осим ове две једначине, од којих је прва тривијална, постојаће и моментна једначина која се може написати за било коју тачку. Ако се изабере да је то тачка A, тада ће сума момената свих сила у односу на тачку A бити:

$$\sum M_A = N_B l - P\frac{l}{2} - Q(l+a) = 0. \tag{б}$$

Решавањем система једначина (а) и (б) добијају се решења:

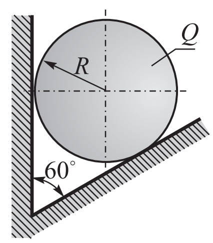
$$N_B = \frac{P}{2} + (1 + \frac{a}{l})Q = 867,5N;$$
$$N_A = -N_B + P + Q = \frac{P}{2} - \frac{a}{l}Q = -7,5N.$$



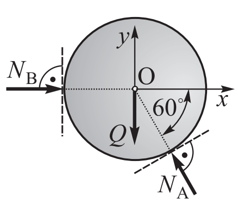
Негативни предзнак у решењу за силу N_A указује на то да ова сила мора имати супротан смер од претпостављеног да би клупа са човеком остала у равнотежи. То се може остварити везивањем ноге А за подлогу (на пример уз помоћ завртања). Без везивања ноге А за под, доћи ће до кретања клупе, односно она ће почети да се окреће око тачке B.

◀

Пример 2.6 *Лопта тежине Q и полупречника R ослоњена је на две идеално глатке равне подлоге које заклапају угао од 60°. Одредити реакције везе.*



▶ Сила тежине лопте је запреминска сила која делује на сваки делић лопте, али ће укупно дејство те силе бити еквивалентно концентрисаној сили која делује на тежиште лопте. Према томе, лопта је у средишту O, које представља тежиште лопте, оптерећено активном силом Q. Лопта ће се у мислима ослободити веза, па ће на тај начин постати слободно тело. При томе се утицај глатких подлога мора заменити реакцијама везе, а то су силе N_A и N_B чији су правци нормални на подлоге. Под дејством ових сила, лопта се налази у равнотежи тако да се могу написати једначине равнотеже. Правци свих сила се секу у тачки , па се добија сучељни систем сила, за који се могу написати две једначине равнотеже и то:

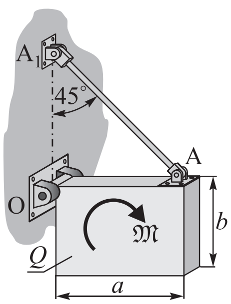


$$\sum X_i = N_B - N_A \cos 60^\circ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_B - \frac{1}{2}N_A = 0;$$
$$\sum Y_i = N_A \sin 60^\circ - Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}N_A - Q = 0.$$

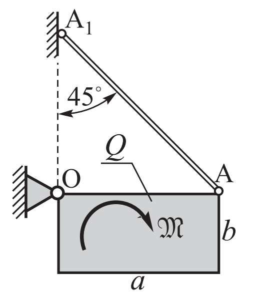
на основу којих су тражене реакције:

$$N_A = \frac{2}{\sqrt{3}}Q = \frac{2\sqrt{3}}{3}Q; \quad N_B = \frac{1}{2}N_A = \frac{\sqrt{3}}{3}Q.$$

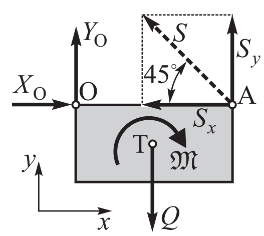
Како се правци свих сила секу у тачки O, у овом случају, без обзира на то што је у питању тело, проблем се своди на проучавање равнотеже тачке O. Зато је за решавање овог задатка било довољно написати само две једначине равнотеже. ◄



Пример 2.7 *Тело тежине Q које има облик квадра за задатим страницама и b везано је непокретним зглобним ослонцем у тачки O за зид и оптерећено спрегом $\mathfrak{M}$. За тело је у тачки A зглобно везан лаки штап који је другим крајем зглобно везан за зид. Одредити реакције везе.*



► Уобичајено је да се при решавању задатака, због уштеде у времену, приступа упрошћеном приказу и скицирању конкретних објеката. У овом случају ће се уместо детаљног приказа зглобних веза са осовиницама и другим деловима, на слици дати само скица конкретног проблема. Треба запазити да су зглобна веза тела са подлогом у тачки O и зглобне везе на крајевима штапа у тачкама A и A_1 технички изведене на готово истоветан начин. Ипак, при скицирању зглобне везе тела које има тежину, или је оптерећено, најчешће се зглобна веза приказује са стилизованим троугластим ослонцем.



Дато тело треба ослободити веза и уместо њих увести реакције везе. Непокретни зглобни ослонац не дозвољава померање тачке O ни у хоризонталном ни у вертикалном правцу. Због тога ће реакције везе бити две силе које ће се означити са X_O и Y_O. Уклањањем везе лаки штап AA_1 као реакција везе се уводи и сила S која је у правцу осе штапа. Тело ће под дејством ове три непознате реакције везе и активне силе тежине Q која напада средишну тачку T, бити у равнотежи. За приказани систем произвољних сила у равни могу се написати три једначине равнотеже (2.12). Прве две једначине равнотеже се односе на пројекције сила на осе координатног система и гласе:

$$\sum X_i = X_O - S\cos 45^\circ = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad X_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}S = 0; \tag{а}$$

$$\sum Y_i = Y_O + S\sin 45^\circ - Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}S - Q = 0. \tag{б}$$

Трећа једначина равнотеже је моментна једначина у односу на произвољно одабрану тачку. Изабраће се да је то тачка O, а приликом одређивања момента силе S, уместо саме силе S посматраће се силе S_x и S_y које су заједно еквивалентне сили S. Тако ће и збир момената сила S_x и S_y бити једнак моменту силе S. Момент силе S_x је једнак нули, док крак силе S_y износи a. Како је:

$$S_y = S\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}S,$$

моментна једначина је

$$\sum M_O = S_y a - Q\frac{a}{2} - \mathfrak{M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}Sa - \frac{1}{2}Qa - \mathfrak{M} = 0. \qquad \text{(в)}$$

Дакле, задати проблем се свео на решавање система једначина (а), (б) и (в). Из једначине (в) је:

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2}Q + \sqrt{2}\frac{\mathfrak{M}}{a}.$$

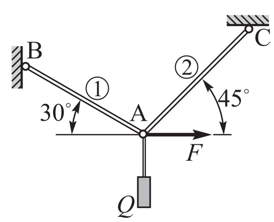
Заменом ове вредности за S у једначине (а) и (б) добија се:

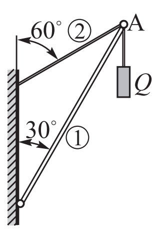
$$X_O = \frac{\sqrt{2}}{2}S = \frac{Q}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{a}; \quad Y_O = Q - \frac{\sqrt{2}}{2}S = \frac{Q}{2} - \frac{\mathfrak{M}}{a}.$$

◄

Задаци

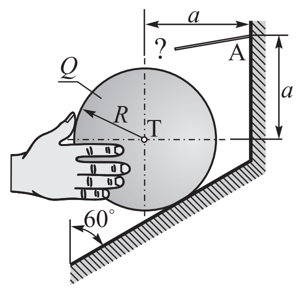
2.1 Лаки штапови 1 и 2 су међусобно зглобно везани у тачки A, док су им преостали крајеви у тачкама B и C зглобно везани за подлогу. Тачка A је оптерећена силом F и у тој тачки је везано уже за које је причвршћен терет Q. Одредити реакције везе. Дискутовати могућност да се штапови замене са ужадима.

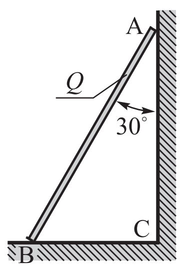




2.2 Лаки штап 1 је својим крајем зглобно везан за зид. За други крај штапа (који је означен са A) везано је уже 2 које је другим крајем везано за зид. У тачки A је везано и уже за које је окачен терет тежине Q. Одредити реакције везе. Одредити да ли је ова конструкција, код које је као елемент везе уведено уже, исправно замишљена, односно да ли ће уже моћи да оствару улогу везе? Може ли се штап 1 заменти са ужетом?

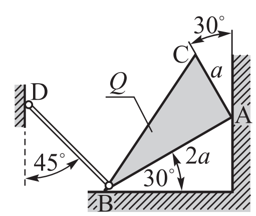
2.3 Лопта тежине Q постављена је на идеално глатку раван и придржавана руком да се при томе не би померила. У тачки A је за зид везано уже. Одредити у којој тачки на лопти треба причврстити крај ужета да се по уклањању руке лопта не би померила? Колике су у том случају реакције везе? Описати шта ће се десити у случају да се уже веже за лопту у некој другој тачки.

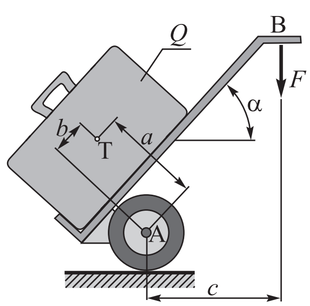




2.4 Штап AB тежине Q и дужине a, ослоњен је у тачки B на идеално глатки под, а у тачки A на идеално глатки зид. Може ли штап остати у равнотежи? Написати једначине равнотеже па проверити да ли ће оне бити задовољене. Да ли ће се нешто у погледу равнотеже изменити уколико за тачку B вежемо уже које је другим крајем везано за зид у тачки C. Одредити у том случају реакције везе.

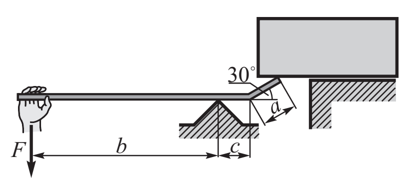
2.5 Плоча тежине Q у облику правоуглог троугла са катетама дужине и 2, ослоњена је у тачкама A и B на идеално глатке површине. У тачки B је за плочу зглобно везан лаки штап који је другим крајем зглобно, у тачки D, везан за зид. Одредити реакције везе. Да ли би плоча остала у равнотежи када би се уклонио лаки штап.

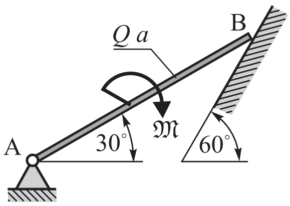




2.6 Колица, којима ће се занемарити тежина, оптерећена су тежином корисног терета Q, са тежиштем у тачки T. Одредити интензитет вертикалне силе F којом треба деловати на ручицу колица, да би колица била у равнотежи. Да ли се нагињањем колица под неким углом може остварити да колица и без дејства силе F буду у равнотежи? Какав је у том случају положај тежишта терета T у односу на тачку A?

2.7 Лака полуга је ослоњена на ослонац и оптерећена силом F. Одредити силу којом крај полуге делује на приказано тело.





2.8 Штап тежине Q и дужине a зглобно је везан у тачки A за подлогу и оптерећен спрегом $\mathfrak{M}$. Штап је крајем B наслоњен на идеално глатку површину. Одредити реакције везе. Имајући у виду да је штап зглобно везан за подлогу хоће ли реакција везе бити сила која је у правцу осе штапа?

3

Отпорност материјала

У уводном делу ове књиге је напоменуто како су сва стварна тела деформабилна, односно да под дејством оптерећења она више, или мање мењају свој облик. Поред тога, напоменуто је да ове промене облика доводе и до појаве унутрашњих сила. Отпорност материјала се бави анализом стања и унутрашњих сила у еластичном телу које је изложено дејству спољашњих оптерећења. Постоје научне дисциплине које стање у деформабилном телу анализирају строгим математичким поступцима полазеће од малог броја претпоставки. Једначине добијене применом неких од тих наука (на пример Теоријом еластичности) су најчешће врло тешке за решавање, јер се ради о већем броју међусобно спрегнутих парцијалних диференцијалних једначина. Аналитичка решења ових једначина се могу наћи за ограничен број примера и најчешће су врло гломазна и тешка за примену. Ситуација се поправила увођењем рачунара, јер се могу наћи нумеричка решења једначина, међутим она су доста тешка за анализу и извођење општих закључака. Имајући ове мане у виду, развијена је Отпорност материјала, која до решења долази коришћењем низа претпоставки које су у пракси у већини случајева оправдане. Отпорност материјала нема тако строг приступ проблемима као Теорија еластичности, али се зато добијају решења задовољавајуће тачности, која су сасвим прихватљива за техничку праксу. Отпорност материјала до неких својих претпоставки долази и на основу доказа из Теорије елатичности, али и на основу искуства и експерименталних запажања.

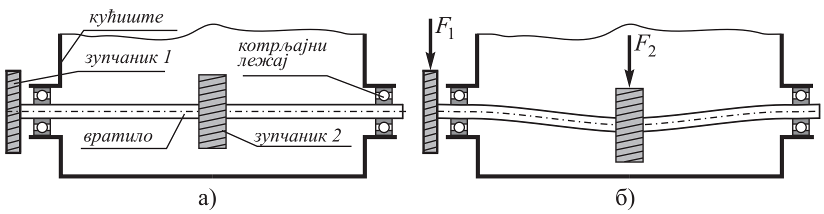
3.1 Основни задаци отпорности материјала

Техничка и идустријска цивилизација која се развила у последњих неколико векова, заснива се на коришћењу многобројних средстава, оруђа и апарата, једном речју тела, са којима људи врше неку делатност, или их користе у свакодневном животу. Будући да су она направљена од реалних материјала и у већини случајева изложена разним оптерећенима, присутна је могућност да затаје у извршавању својих функција. На пример, сломи се вратило у аутомобилском мотору, искриви се мешалица на миксеру, сруши се стамбена зграда итд. Несумљиво је да се већ при конструисању морају формирати одређени критеријуми који ће дати одговор на питање да ли ће тело кога треба направити моћи да оствари функције за које је предвиђено. Важну улогу у томе има и Отпорност материјала. Њени основни задаци су:

а) испитивање чврстоће;

б) испитивање крутости;

в) испитивање стабилности.

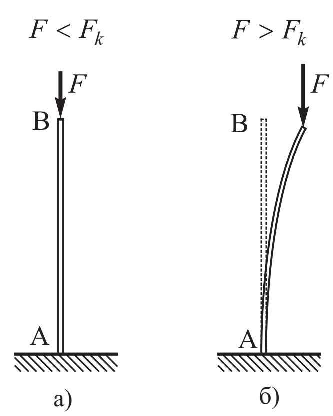


Слика 3.1: Пример преносног механизма а) неоптерећен; б) оптерећен

Испитивање чврстоће тела је у већини случајева најважнији задатак који треба остварити. Чврстоћа је својство тела да се под дејством оптерећења не сломи, или трајно деформише. Јасно је да оптерећено тело у току експлоатације мора остати читаво и да не сме доћи до његовог лома, или оштећења. На Слици 3.1 а) је приказан један део преносног механизма који се састоји од зупчаника 1 који прима оптерећење (од зупчаника који није приказан), вратила које се обрће на лежајевима и зупчаника 2 који даље преноси оптерећење (на зупчаник који није приказан). Вратило може да се направи од различитих материјала "јачих"—који су скупљи и "слабијих"—који су јефтинији. Поред тога вратило може бити направљено тако да је већег, или мањег пречника. Циљ испитивања чврстоће је да се у зависности од изабраног материјала направи вратило таквог пречника које може да оствари своју функцију преноса (тако да се не сломи, или трајно искриви). При томе се захтева и да цена таквог вратила буде тржишно прихватљива. Очигледно је да се ради о сложеном критеријуму који није једнозначно остварив, то јест постоји више могућности за његово задовољење.

Постоје многи случајеви када се мора извршити испитивање крутости тела да би оно могло успешно да оствари функције за које је намењено. Крутост је својство тела да му деформације буду у задатим границама. Код неких тела је при конструисању довољно задовољити чврстоћу тела, док се не врши испитивање на крутост. То су по правилу случајеви када се на основу искуства и разних препорука не очекује да могу наступити деформације које би угрозиле функционисање тела. Међутим, постоје и примери када је неопходно, или препоручљиво извршити испитивање крутости, а један од њих је дат на Слици 3.1 б). Услед дејства одређених оптерећења на зупчаник, доћи ће до деформације вратила, због које ће оса вратила одступити од праве линије. Деформација приказана на слици је карикирана и преувеличана, да би се боље запазила и не појављује се у тој мери у стварним конструкцијама. Због деформације вратила могу наступити одређени проблеми у функционисању преносног механизма. Тако, на пример, може наступити додатно значајно повећање оптерећења лежаја што се неминовно одражава на дужину њиховог животног века. Поред тога могу се појавити и проблеми са спрезањем зупчаника, јер зуби једног зупчаника не би одговарали међузубљу другог зупчаника. Дакле, без обзира на то што вратило задовољава критеријум чврстоће и што се неће сломити под дејством оптерећења, ипак је у датој ситуацији корисно повећати пречник вратила, да би оно постало круће, односно да би му деформације биле мање.

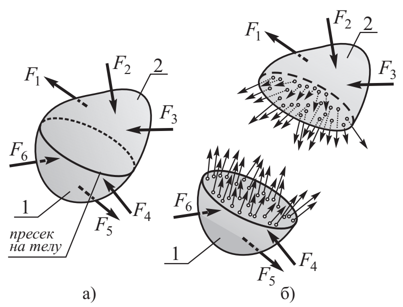
Испитивање стабилности тела долази до изражаја у случајевима витких тела, као што су дугачки штапови, стубови, танке плоче, танкозидне цеви итд. Да би тело било у стабилном положају равнотеже, мала промена у оптерећењу тела мора проузроковати и малу промену деформације тела. Нестабилни равнотежни положај тела прате велике деформације, које могу угрозити његову радну функцију. На Слици 3.2 је дат пример тела које под одређеним условима може да дође у стање када постаје нестабилно. Приказан је штап који је доњим крајем A уклештен за подлогу и притиснут силом F на горњем крају B. У зависности од тога колики је интензитет силе F, могу наступити два битно различита случаја. У првом случају, када је интензитет силе F мањи од критичне силе F_k, (Слика 3.2 а)) оса штапа ће и даље остати праволинијска. Тада је штап у стабилном равнотежном положају и његове деформације ће бити мале. Међутим, уколико је оптерећење штапа веће од критичне силе, доћи ће до одступања осе штапа од праве линије (Слика 3.2 б)), па ће у овом случају положај равнотеже штапа бити нестабилан. При томе ће наступити и значајне деформације штапа па је очигледно да је овакво стање недопустиво. При испитивању стабилности тела је обично циљ одредити минимално оптерећење које доводи до нестабилности и које се назива критично оптерећење.



Слика 3.2: Равнотежа тела: а) стабилна; б) нестабилна

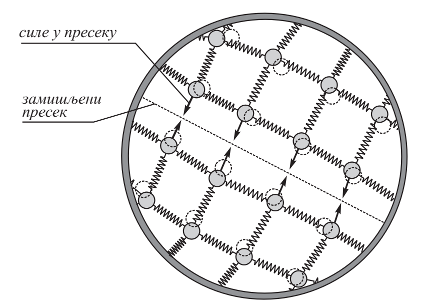
3.2 Метода пресека и вектор напона

У отпорности материјала се при анализи стања тела изложеног оптерећењима и одређивању унутрашњих сила користи метода пресека. Према тој методи се на телу начини замишљени пресек и тело подели на два дела који су означени са 1 и 2 (Слика 3.3 а)). Поменути делови делују један на другог силама које су непрекидно распоређене на пресечној површини (Слика 3.3 б)) и које за тело као целину представљају унутрашње силе. Овај приступ, који се назива и Ојлер-Кошијев аксиом је од кључне важности при анализи унутрашњих сила.



Слика 3.3: На замишљеној пресечној површини тела су непрекидно распоређене силе: а) тело као целина; б) раздвојени делови

За оправдање методе пресека може послужити опружни модел материје, о коме је већ било речи у претходној глави и који је при томе био илустован Сликом 1.2. Према том моделу се честице у телу држе на окупу захваљујући међусобном дејству које се моделира опругама. На Слици 3.4 је приказано стање које настаје уколико се начини замишљени пресек кроз тело и уклоне све опруге које се налазе на пресеку. Утицај уклоњених опруга на честице тела се замењује паровима сила које су према принципу акције и реакције истог интензитета и правца, а супротног смера (видети Слику 1.1). На тај начин се тело дели на два дела, а при томе су честице на пресечним површинама изложене дејству сила из деформисаних опруга које су у овом процесу уклоњене.



Слика 3.4: Опружни модел материје се користи за образложење Ојлер-Кошијевог аксиома

Да би се описале унутрашње силе тела у тачки P, направиће се пресек тела кроз ту тачку (Слика 3.5 а)) и посматрати део тела који је означен са 1. На пресечној површи ће постојати распоређене унутрашње силе, а посматраће се само оне силе које делују на делу површи који представља околину за тачку P (Слика 3.5 б)). Нека површина ове околине тачке P (која је на Слици 3.5 в) посебно издвојена и увеличана) износи ΔA. Поред тога, увешће се и јединични вектор нормале $\mathbf{n}$ за пресечну површ. Уместо распоређених сила које делују на површини ΔA могу се увести резултујућа сила ΔR и резултујући спрег $\Delta\mathfrak{M}_{RP}$ (Слика

3.5 г)) јер је њихово дејство еквивалентно.

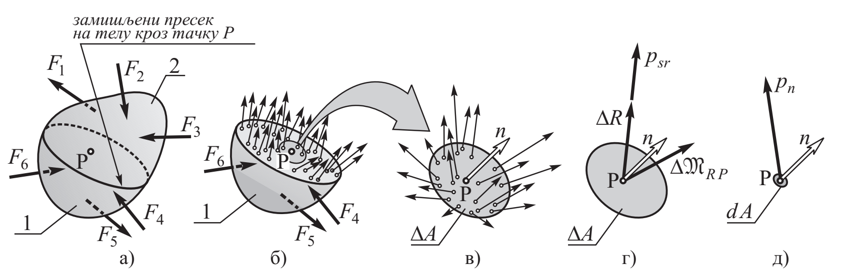
Величина која се зове *средњи вектор напона* дефинише се као:

$$\mathbf{p}_{sr} = \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta A}.$$

Средњи вектор напона представља квантитативни опис просечне вредности унутрашњих сила на површини ΔA. Уколико се жели тачнији опис сила смањиће се величина површине, што доводи до мање вредности главног вектора, али ће при томе однос главног вектора и површине бити коначан. Ако се процес смањења површине настави, па узме да она тежи нули, као што је то показано на Слици 3.5 д) добиће се величина звана *вектор напона* која се дефинише као:

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{R}}{dA}. \tag{3.1}$$

где су са $d\mathbf{R}$ и dA означени елементарна сила и елементарна површина.

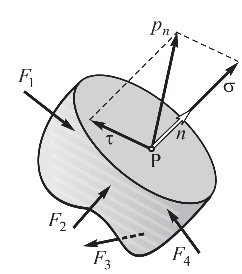


Слика 3.5: Дефинисање вектора напона: а) тело као целина; б) део тела 1*; в) околина тачке P; г) еквивалентно оптерећење; д) вектор напона за елементарну површину*

Вектор напона зависи од одабране тачке P, али и од тога са којом површином је тело пресечено, односно од јединичног вектора нормале. Вектор напона представља основну меру унутрашњих сила у телу. Јединица за вектор напона је Паскал [Pa], $1Pa = 1N/m2$.

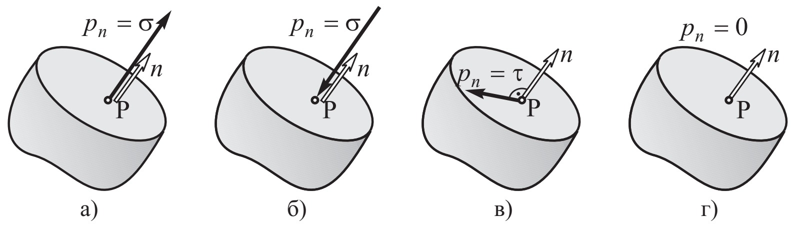
Вектор напона се може разложити на правац нормале и на раван пресека (Слика 3.6). Компонента вектора напона у правцу нормале је *нормални напон* σ, док је компонента у равни пресека *тангенцијални напон* τ, па се може написати да је:

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}. \tag{3.2}$$



Слика 3.6: Тангенцијални и нормални напон

У зависности од начина оптерећења тела и изабраног пресека, могући су и разни специјални случајеви вектора напона, од којих су неки приказани на Слици 3.7. Тако се може десити да вектор напона има исти правац као



Слика 3.7: Неки специјални случајеви вектора напона: а) затезни нормални напон; б) притисни нормални напон; в) тангенцијални напон; г) вектор напона је 0

и јединични вектор нормале, што значи да ће постојати само нормални напон, било да је усмерен од пресека (случај а)), или ка пресеку (случај б)). Насупрот томе, у неким случајевима се могу појавити само тангенцијални напони (случај в)). Најзад, могу постојати и пресеци у којима уопште нема напона (случај г)), али је при томе могуће да у истој тачки P, само у неким другим пресецима, вектор напона буде различит од нуле.

3.3 Хипотезе отпорности материјала

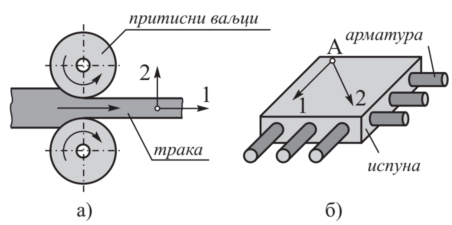
Реална тела која се користе у техници су често врло сложеног облика и направљена су од материјала који имају различита физичка својства. Услед тога, могу се појавити проблеми при настојању да се реше практични задаци. Да би се ипак могли обрадити и такви случајеви уводи се низ претпоставки, које се називају *хипотезе* и које идеализују реално тело. Те хипотезе су:

1. непрекидност материјала;
2. хомогеност материјала;
3. изотропност материјала;
4. хипотеза о малим деформацијама;
5. замена стварног оптерећења статички еквивалентним;
6. хипотеза равних пресека.

Непрекидност материјала. Према овој хипотези тело је потпуно испуњено материјом и представља непрекидну средину. Са микроскопског становишта ова хипотеза није задовољена јер је материја састављена од атома чија је грађа таква да унутар њих постоји огроман празан простор. Међутим, због изузетно великог броја атома у једном телу макроскопске величине, ова се хипотеза са правом може прихватити.

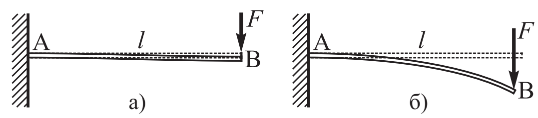
Хомогеност материјала. На основу ове хипотезе у свим тачкама тела су иста физичка својства. Приликом израде неког тела ливењем може доћи до издвајања нечистоћа које се због тога што су лакше од истопљеног материјала, пењу ка горњем делу одливка. Након хлађења, такво тело неће имати иста својства у горњем и доњем делу, односно оно неће задовољити услов хомогености.

Изотропност материјала. Код тела које задовољава ову хипотезу у свим правцима у било којој тачки својства ће бити иста. Постоји низ материјала код којих ова хипотеза није испуњена. То је, на пример, случај код влакнастих материјала, јер су својства материјала различита за правац влакана и нормално на њега. Тела која се добијају из монокристала (на пример резањем плочица из једног кристала силицијума), имају различита физичка својства у правцу осе кристала и нормално на њу. При производњи лимова, трака и жица ваљањем (Слика 3.8 а)), постоје ваљци који снажно притискају материјал и извлаче га, при чему долази до промена у материјалу. Као последица ваљања, својства ових тела ће бити различита у правцу ваљања 1 и нормално на њега (2). Код композитних материјала који се добијају армирањем испуне са влакнима (угљеник, стакло, кевлар итд.) материјал ће се различито понашати ако га оптеретимо у правцу влакана 1, или под углом од 45° (правац 2) у односу на тај правац (Слика 3.8 б)). Све су то примери неизотропних материјала на које се отпорност материјала може применити са малом тачношћу, или се уопште не може применити. Челик, један од најважнијих материјала за израду конструкција се састоји од врло ситних кристала који су различите оријентације, па је макроскопски гледано код њега ова хипотеза задовољена.



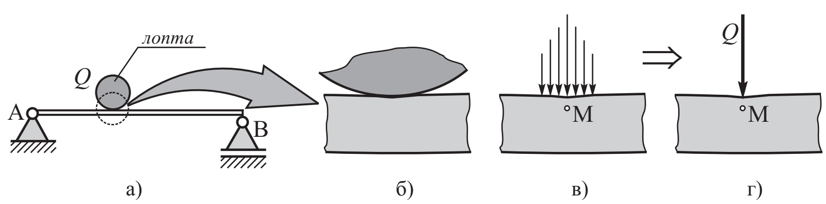
Слика 3.8: Неизотропни материјали: а) траке; б) композити

Хипотеза о малим деформацијама. У отпорности материјала се проучавају случајеви деформација које су мале у односу на величину тела. На Слици 3.9 су дата два случаја савијања конзолног носача који је крајем A укљештен у зид, док му је други крај B оптерећен силом. У првом случају (Слика 3.9 а)) је померање тачке B (а самим тим и деформације) мало у односу на дужину штапа l, па је у овом случају хипотеза задовољена. У другом случају (Слика 3.9 б)), су приказане велике деформације, па поменута хипотеза није задовољена. Математички гледано, мале деформације се описују линеарним диференцијалним једначинама, док се у случају великих деформација користе нелинеарне једначине које су знатно теже за решавање. Код реалних конструкција је ова хипотеза врло често задовољена, јер је неприхватљиво да деформације буду велике, осим ако то сама функција тела не захтева, на пример код опруга, амортизера, гибњева итд.



Слика 3.9: Савијање конзоле: а) мале деформације; б) велике деформације

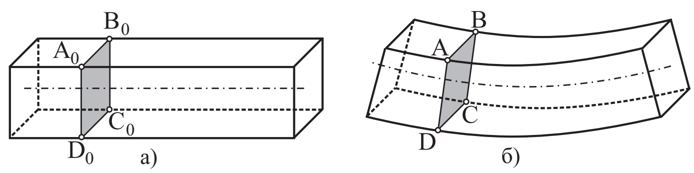
Замена стварног оптерећења статички еквивалентним. Ова хипотеза се назива и *Сен-Венанов принцип* и према њој се стварно оптерећење које делује на некој малој површини тела може заменити еквивалентним оптерећењем. Ова замена неће утицати на унутрашње силе у тачкама које су довољно удаљене од места где је оптерећење нането. Као пример, посматраће се греда на два ослонца која је оптерећена лоптом тежине Q (Слика 3.10 а)). Због деформације греде и лопте, додир између та два тела није тачка, већ извесна мала површина (Слика 3.10 б)). Стварно оптерећење које делује на греду су непрекидно распоређене силе на површини додира (Слика 3.10 в)). Међутим, при проучавању деформације греде, ове силе се замењују главним вектором који за њих представља еквивалентно дејство и који је једнак тежини лопте (Слика 3.10 г)).



Слика 3.10: Замена стварног оптерећења статички еквивалентним: а) лопта на греди; б) детаљ додира; в) стварно оптерећење; г) еквивалентно оптерећење

Ова замена ће имати утицај на унутрашње силе у тачки M која је врло близу месту додира, али ће бити без утицја на тачке кoју су удаљеније.

Хипотеза равних пресека. Хипотеза равних пресека, позната и као *Бернулијева хипотеза*, односи се на стварне, или замишљене пресеке на телу. На основу ове хипотезе пресеци који су били равни када је тело недеформисано, остају равни и у случају деформације тела. На Слици 3.11 а) приказан је призматичан штап у недеформисаном стању и тачке A_0, B_0, C_0 и D_0 које се налазе у једном попречном пресеку, дакле у једној равни. Након деформисања овог штапа, које је приказано на Слици 3.11 б) поменуте тачке ће се померити и прећи у положаје означене са A, B, C и D. При томе, ове четири тачке ће и даље остати у једној равни, која се у овом примеру неће поклапати са равни у којој су биле када тело није било деформисано.

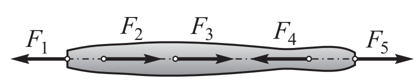


Слика 3.11: Хипотеза о равним пресецима: а) недеформисано тело; б) деформисано тело

На први поглед ове хипотезе знатно ограничавају примењивост отпорности материјала. Међутим, на основу примера који су наведени код појединих хипотеза, види се да су код уобичајених конструкција које се користе у техници ове хипотезе у већој или нешто мањој мери ипак добро задовољене.

3.4 Аксијално оптерећени штапови

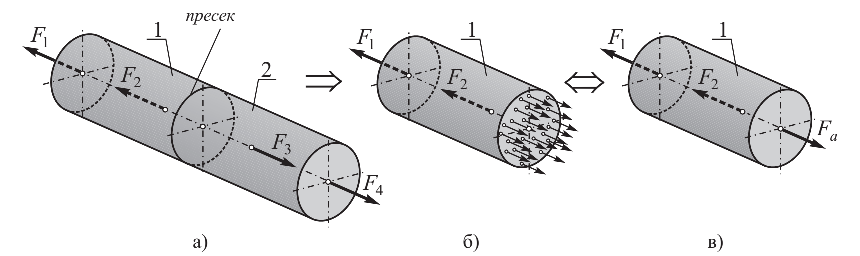
Штап је тело чија је једна димензија значајно већа у односу на преостале две. Штап је аксијално оптерећењен уколико је изложен дејству сила чији се правци поклапају са осом штапа. Пример штапа који је аксијално оптерећен је дат на Слици 3.12. При испитивању унутрашњих сила у штапу примениће се већ помињана метода пресека. На штапу (Слика 3.13 а)) ће се замислити произвољан попречни пресек, који дели штап на два дела (1 и 2) и посматрати равнотежа дела означеног са 1. На месту пресека се уводи утицај дела 2 на део 1 и то у облику непрекидно распоређених сила (Слика 3.13 б)).



Слика 3.12: Аксијално оптерећени штап

Уместо ових сила, може се увести само резултујућа сила у пресеку која има статички еквивалентно дејство као и распоређене силе (Слика 3.13 в)). Будући да део 1 мора бити у равнотежи, јер је и штап као целина у равнотежи, јасно је да резултујућа сила мора бити у правцу осе штапа јер су и остале силе које делују на штап са истим својством. Ова резултујућа сила се назива *аксијална сила* у пресеку и даје информацију о мери у којој је пресек штапа оптерећен. Због равнотеже дела 1 аксијална сила у пресеку је једнака збиру сила са леве стране пресека, то јест:

$$F_a = \sum F_i^l,$$



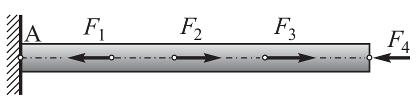
Слика 3.13: Аксијална сила у пресеку: а) аксијално оптерећени штап као целина; б) равнотежа дела 1*; в) аксијална сила у пресеку*

где је уведена посебна ознака (индекс l) којим се ставља до знања да је извршено сабирање сила само са леве стране пресека.

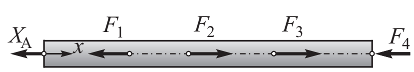
Уколико је аксијална сила са смером од пресека, тада је пресек оптерећен на затезање а аксијална сила позитивна. У супротном је аксијална сила негативна а пресек је оптерећен на притисак. Исти овај поступак анализе се може спровести и за десни део штапа, али се тада аксијална сила добија сабирањем сила са десне стране пресека, па је тада:

$$F_a = \sum F_i^d.$$

Дакле, аксијална сила се може аналитички одредити сабирањем сила са леве, или са десне стране пресека и у оба случаја се добија исти резултат. При тим сабирањима потребно је придржавати се одређених договора (конвенција) о томе какав ће бити предзнак силе које се сабирају. Према конвенцији сила ће бити са позитивним предзнаком, уколико је усмерена од пресека. Уколико се сабирају силе са леве стране пресека, позитиван смер је у лево, док ће при сабирању сила са десне стране позитиван предзнак имати оне које су усмерене удесно.



Пример 3.1 *Штап приказан на слици причвршћен је крајем A за подлогу и оптерећен силама* $F_1 = 1\ kN$, $F_2 = 4\ kN$, $F_3 = 1\ kN$ *и* $F_4 = 2\ kN$. *Одредити вредност аксијалне силе у појединим пресецима штапа.*



► Уклониће се постојећа веза и увести реакција везе, а то је сила X_A која је у правцу осе штапа. Како су све силе које делују на штап у једном правцу, може се написати једна једначина равнотеже и то:

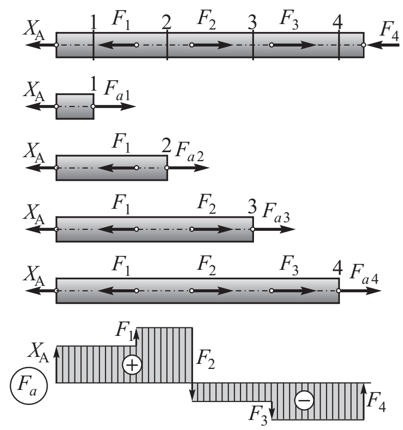
$$\sum X_i = -X_A - F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = 0,$$

на основу које је $X_A = 2\ kN$.

Да би се одредила аксијална сила, на штапу ће се направити низ пресека који су означени бројевима и за сваки од њих извршити сумирање сила које су са леве стране пресека. При томе ће се поштовати конвенција о предзнаку, према којој ће силе усмерене у лево (од пресека) имати позитиван предзнак. Аксијалне силе у пресецима су:

$$\begin{aligned} F_{a1} &= X_A = 2kN; \\ F_{a2} &= X_A + F_1 = 3kN; \\ F_{a3} &= X_A + F_1 - F_2 = -1kN; \\ F_{a4} &= X_A + F_1 - F_2 - F_3 = -2kN. \end{aligned}$$

На Слици 3.14 је приказано и како се поједини делови штапа, који су добијени пресецима, налазе у равнотежи услед дејства аксијалних сила у пресецима. Смер аксијалне силе у пресецима 3 и 4 је супротан од уцртаног због негативног предзнака.



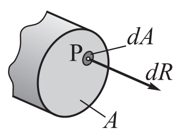
Слика 3.14: Анализа аксијалних сила

На крају је нацртан и дијаграм аксијалне силе, где је дат графички приказ вредности аксијалне силе. ◀

Напони у аксијално оптерећеном штапу

Према хипотези о равним пресецима, која је описана у одељку 3.3, попречни пресеци аксијално оптерећеног штапа ће при деформацији и даље бити равни. Због тога ће унутрашње силе по попречном пресеку бити равномерно распоређене, дакле исте у свакој тачки пресека. Како се сумирањем ових сила добија аксијална сила која је у правцу осе штапа, може се закључити да ће унутрашње силе имати исти тај правац. Дакле, уколико се на попречном пресеку на Слици 3.15, посматра бесконачно мала околина тачке P површине dA, тада ће на ову елементарну површину деловати елементарна сила dR, са правцем који се поклапа са осом штапа. Имајући у виду одељак 3.2, у овом случају ће и вектор напона бити у правцу осе штапа, дакле нормалан на попречни пресек и у правцу јединичног вектора нормале и имаће исти интензитет у свакој тачки пресека. Користећи израз (3.1) сада је:

$$d\mathbf{R} = \mathbf{p}_n dA \tag{3.3}$$



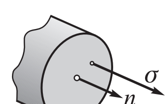
Слика 3.15: Елементарна сила

Имајући у виду разлагање вектора напона на компоненту у правцу нормале и на раван пресека дато изразом (3.2), у случају аксијално оптерећеног штапа постоји само нормални напон (Слика 3.16) док ће при томе тангенцијални напони бити једнак нули. О овом специјалном случају је већ раније било речи (видети Слике 3.7 а) и б)). Нормални напон је истог интензитета у свакој тачки пресека, дакле важиће да је $\sigma = \text{const.}$, па се на основу израза (3.3) елементарна сила на елементарној површини може написати као:

$$dR = \sigma dA. \tag{3.4}$$

Када се све елементарне силе на пресеку, који је укупне површине A, саберу добиће се резултујућа сила у пресеку која је једнака аксијалној сили у пресеку. Због константности напона је:

$$F_a = R = \sigma A,$$



Слика 3.16: Нормални напон

а одавде се напон при аксијалном оптерећењу одређује из:

$$\sigma = \frac{F_a}{A}. \tag{3.5}$$

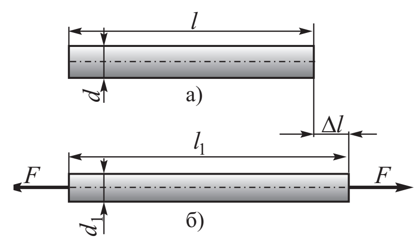
Према томе, нормални напон у попречном пресеку аксијално оптерећеног штапа зависи од аксијалне силе у пресеку и од површине попречног пресека.

Уздужна и попречна дилатација штапа

При дејству сила, које су истог интензитета F, на крајевима штапа долази до његове деформације. Нека је дужина недеформисаног штапа l, док је ширина попречног пресека d (Слика 3.17 а)). При деформацији штапа (Слика 3.17 б)), долази до издужења штапа па његова дужина износи l_1, док се ширина смањује на d_1. Сада се може дефинисати промена дужине и промена ширине, као разлика ових величина када је штап деформисан и када је недеформисан, па је:

$$\Delta l = l_1 - l; \quad \Delta b = d_1 - d.$$

Ове две величине се могу користити као мере деформације, али се лако показује да нису најпогодније за ту улогу. На пример уколико се уже дужине $1m$ и уже дужине $100m$, издуже за $1cm$, у оба случаја ће промена дужине бити иста, али је јасно да ова два тела неће бити једнако оптерећена. Мотивишући се овим разлогом много је боље као мере деформације увести бездимензијске релативне величине које се добијају дељењем промене дужине са дужином штапа, односно промену ширине са ширином штапа. Ове мере деформације се зову *уздужна* и *попречна дилатација* и дефинишу са:



Слика 3.17: Деформација штапа при аксијалном оптерећењу: а) недеформисан; б) деформисан

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}. \tag{3.6}$$

Између уздужне и попречне дилатације за конкретне материјале постоји повезаност која се може приказати са:

$$\varepsilon_q = -\nu\,\varepsilon,$$

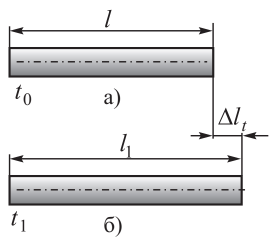
где је ν Поасонов коефицијент. За већи број материјала важних за примену овај коефицијент има вредност око 0.3. Знак минус потиче отуд што су уздужна и попречна дилатација различитих предзнака. При затезању штапа је уздужна дилатација позитивна, а попречна негативна. Уколико силе на Слици 3.17 б) промене смер, штап ће бити оптерећен на притисак, па ће уздужна дилатација бити негативна, а попречна позитивна.

Издужење штапа при загревању

При загревању штапа долази до промене његове дужине. Нека је при температури t_0 дужина штапа l (Слика 3.18 а)). Уколико се штап загреје тако да његова температура износи t_1, доћи ће до издужења штапа (Слика 3.18 б)). На основу експеримената је установљено да се промена дужине загрејаног штапа може исказати у облику израза:

$$\Delta l_t = l\,\alpha\,\Delta t,$$

где је α коефицијент топлотног ширења, који је карактеристичан за сваки материјал, док је $\Delta t = t_1 - t_0$ промена температуре.



Слика 3.18: Деформација штапа при загревању: а) незагрејан; б) загрејан

Пример 3.2 *Одредити издужење челичног моста чија дужина на температури* $10°C$ *износи* $210m$*, уколико се загреје на температуру од* $36°C$*. Коефицијент топлотног ширења за челик је* $1.25 \times 10^{-5} 1/K$*.*

▶ Промена температуре износи:

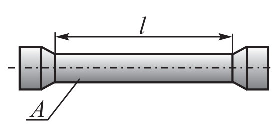
$$\Delta t = t_1 - t_0 = (36 + 273)K - (10 + 273)K = 26K,$$

тако да је промена дужине:

$$\Delta l_t = l\,\alpha\,\Delta t = 210m \cdot 1.25 \times 10^{-5}\frac{1}{K} \cdot 26K = 0.0682m = 68.2mm.$$

◀

Дијаграм нормалних напона у зависности од дилатације

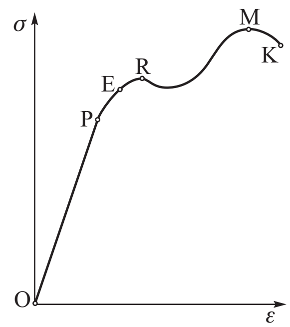


Слика 3.19: Епрувета

На основу искуства знамо да се два штапа једнаких димензија и направљени од челика и гуме неће исто деформисати при дејству истих сила. Очигледно је да за одређивање издужења аксијално оптерећеног штапа треба знати извесно физичко својство конкретног материјала од кога је штап направљен. Да би се оно одредило извршиће се експеримент који се назива тест на затезање. У ту сврху се од конкретног материјала израђује штап дефинисаног облика (епрувета), који је приказан на Слици 3.19. Епрувета се умеће у чељусти машине зване кидалица која је у стању да је затегне великом силом. При томе се прати веза између остварене силе и промене дужине епрувете. Да би се зависност између ових величина графички приказала, много је боље силу поделити са површином попречног пресека, а промену дужине епрувете са њеном првобитном дужином. Тако се добија дијаграм зависности нормалног напона у епрувети од њене дилатације, која за неке материјале, као што је челик, има изглед дат на Слици 3.20. Примећује се је у почетку оптерећивања зависност између напона и дилатације линеарна и да је таква од координатног почетка O до тачке P која се назива *граница пропорционалности*. Дакле, на том делу дијаграма се веза између нормалног напона и дилатације може исказати веома једноставним изразом:

$$\sigma = E\,\varepsilon, \tag{3.7}$$

где је E константа која се назива *модул еластичности* или Јангов модул. Модул еластичности има димензију напона па се изражава у Pa, или N/m^2. Једначина (3.7) је позната као *Хуков закон*.



Слика 3.20: Дијаграм зависности напона од дилатације

При даљем повећању напона, долази се до тачке E која представља *границу еластичности*. Уколико се епрувета, након што се достигне овај напон растерети, у епрувети неће наступити трајне деформације, односно све до тог напона деформације су еластичне. Међутим, уколико је напон већи од границе еластичности, деформације прелазе у пластичне, па ће у случају растерећења епрувете, она бити дужа него пре почетка експеримента. Повећањем напона достиже се тачка R која представља *границу развлачења*. Карактеристично за део дијаграма након ове тачке је да долази до повећања дилатације, без пораста напона, односно стиче се утисак као да је епрувета почела нагло да се развлачи. Ово подсећа на течење, па се за ову границу у литератури често користи и израз *граница течења*. Убрзо долази до очвршћавања материјала епрувете и престаје њено развлачење. Напон опет почиње да расте, па се долази до максималног напона који се јавља при овом експерименту и који је на дијаграму приказан тачком M. Одговарајући напон се назива *граница чврстоће*, или *затезна чврстоћа*. Ако се настави експеримент убрзо се долази до границе кидања, која је означена са K, при чему долази до прекида епрувете.

Тест на затезање даје врло битне информације о понашању конкретног материјала. Добијени график није општег типа и карактеристичан је за поједине челике, док код других материјала постоје мања, или већа одступања.

Издужење аксијално оптерећеног штапа

Посматраће се штап дужине l, константног попреченог пресека површине A, направљеног од материјала чији је модул еластичности E. При дејству затежућих сила F на крајевима штапа (Слика 3.17 б)), због којих је сваки попречни пресек оптерећен истом аксијалном силом $F_a = F$, доћи ће до издужења штапа Δl које треба одредити. Нормални напон у свакој тачки у попречном пресеку штапа рачуна се на основу израза (3.5):

$$\sigma = \frac{F_a}{A},$$

док је уздужна дилатација дефинисана изразом (3.6):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Заменом ова два израза у израз за Хуков закон (3.7) добија се:

$$\frac{F_a}{A} = E\frac{\Delta l}{l},$$

одакле следи да се промена дужине штапа рачуна на основу:

$$\Delta l = \frac{F_a l}{AE}. \tag{3.8}$$

Треба скренути пажњу на то да овај израз важи само у случају када је штап константног попречног пресека и када је аксијална сила у сваком пресеку иста. Уколико то није случај, већ се мења аксијална сила, или се попречни пресек штапа степенасто мења, штап треба поделити на више делова, тако да је за сваки од њих задовољено да су аксијална сила и попречни пресек константни. У том случају се уз помоћ обрасца (3.8) одређује промена дужине сваког појединог дела штапа, а њиховим сабирањем се добија промена дужине целог штапа.

Пример 3.3 *Штап од челика ($E = 2 \times 10^{11}$ Pa) дужине $l = 1m$, чији је попречни пресек правоугаоног облика са димензијама $a = 2mm$, $b = 2.5mm$, оптерећен је на крајевима затежућим силама интензитета $F = 1$ kN. Одредити напон у штапу и његово издужење.*

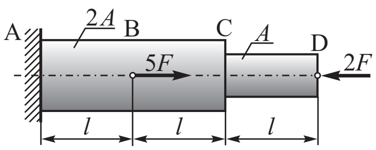
▶ У сваком пресеку штапа аксијална сила износи $Fa = F = 1kN$, тако да напон у сваком пресеку штапа износи:

$$\sigma = \frac{F_a}{A} = \frac{F}{ab} = \frac{1000N}{2 \cdot 2.5mm^2} = 200\frac{N}{mm^2} = 200MPa.$$

Ово је за уобичајене челике за конструкције значајно оптерећење, које за већину конструкција не треба прелазити. Издужење штапа износи:

$$\Delta l = \frac{F_a l}{AE} = \frac{Fl}{abE} = \frac{1000N \cdot 1000mm}{2 \cdot 2.5mm^2 \cdot 2 \times 10^5 \frac{N}{mm^2}} = 1mm.$$

Дакле, иако је штап оптерећен великим напонима, ипак је промена дужине хиљадити део дужине штапа, па уздужна дилатација износи $\varepsilon = 0.001$. Овај резултат потврђује исправност хипотезе о малим деформацијама. ◀

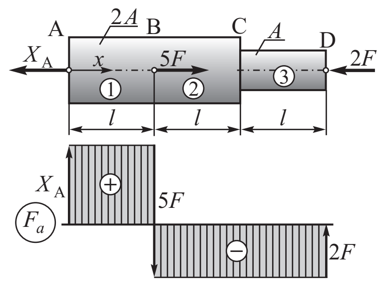


Пример 3.4 *За штап приказан на слици одредити максимални напон и промену дужине штапа. Модул еластичности материјала штапа је E.*

▶ Након замене утицаја уклештења реакцијом X_A може се написати једначина равнотеже:

$$\sum X_i = -X_A + 5F - 2F = 0,$$

па је $X_A = 3F$. На основу познатих оптерећења нацртан је и дијаграм аксијалних сила из кога се види да се аксијална сила мења у пресеку B. Будући да се попречни пресек мења у пресеку C штап ће се поделити на три дела (AB, BC и CD) за које ће се користити ознаке 1, 2 и 3. На тај начин је задовољен услов да је сваки од тих делова штапа константног попречног пресека и оптерећен константном аксијалном силом. Аксијалне силе у поменутим пресецима, гледано са леве стране пресека су:



$$F_{a1} = X_A = 3F; \quad F_{a2} = F_{a3} = X_A - 5F = -2F,$$

док су површине попречних пресека $A_1 = A_2 = 2A$ и $A_3 = A$. Напони у било ком пресеку поменутих делова штапа су:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{3F}{2A}; \quad \sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{-2F}{2A} = -\frac{F}{A}; \quad \sigma_3 = \frac{F_{a3}}{A_3} = -\frac{2F}{A}.$$

У првом делу штапа напон је позитиван што указује на то да је тај део штапа оптерећен на затезање. Други и трећи део штапа су оптерећени на притисак па је нормални напон негативан. При одређивању максималног напона упоредиће се интензитети напона (односно њихове апсолутне вредности) па се добија:

$$|\sigma_3| > \sigma_1 > |\sigma_2| \Rightarrow \sigma_{\max} = |\sigma_3| = 2\frac{Fl}{AE},$$

што значи да је максималани напон у пресеку трећег дела штапа.

Промена дужине појединих делова штапа је:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} l}{A_1 E} = \frac{3}{2}\frac{Fl}{AE}; \quad \Delta l_2 = \frac{F_{a2} l}{A_2 E} = -\frac{Fl}{AE}; \quad \Delta l_3 = \frac{F_{a3} l}{A_3 E} = -2\frac{Fl}{AE}.$$

Код другог и трећег дела штапа је промена дужине негативна, јер се ти делови скраћују, а што је у складу са ранијом констатацијом да су они притиснути. Промена дужине целог штапа је:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -\frac{3}{2}\frac{Fl}{AE},$$

па се штап под дејством оптерећења скраћује. ◀

Прорачун штапова изложених аксијалном оптерећењу

У практичним проблемима се веома често јавља следећи задатак: познато је оптерећење штапа и својства материјала од ког га треба направити, а треба одредити величину попречног пресека штапа, тако да је остварена потребна чврстоћа, односно да се штап под дејством оптерећења не сломи. Поступак одређивања попречног пресека се назива *димензионисање штапа.*

Да би се овај задатак решио потребно је дефинисати дозвољени напон (σ_d) који представља максимални напон којим материјала од ког је штап направљен сме бити оптерећен. Код штапова направљених од челика је појава развлачења (течења) (видети Слику 3.8.2) најчешће недопустива тако да се као дозвољени напон може дефинисати граница развлачења (σ_R). Међутим, пошто приликом одређивања оптерећења, напона, својства материјала, израде тела и других фактора, постоје могућности за грешку, дозвољени напон мора бити мањи од границе развлачења, што се записује као

$$\sigma_d = \frac{\sigma_R}{\nu_R},$$

где је ν_R коефицијент који се зове *степен сигурности.* Степен сигурности је обавезно већи од 1, а његове уобичајене вредности су од 1.5 до 3, али могу бити и знатно веће. Вредности које има степен сигурности при димензионисању су у директној вези са недовољном количином информација током процеса пројектовања и конструисања. На пример, степен сигурности морамо повећати ако нисмо сигурни у вредности оптерећења којима је тело изложено, или не познајемо у довољној мери својства материјала итд. Степен сигурности треба повећати и уколико је у питању део који је битан за функционисање неког механизма, или чијим отказом могу бити угрожени људски животи.

С друге стране, при изради авиона, ракета, или других веома одговорних конструкција се рачунски и експериментално врло тачно могу одредити сва оптерећења којима ће конструкција бити изложена, а затим се уз помоћ рачунара и експерименталним поступцима могу прецизно одредити напони у конструкцији. За израду се користе материјали који се стално проверавају у разним фазама израде и који поседују одређене атесте, а сви битни делови се снимају и проверавају различитим методама. Због тога је процес израде авиона, који је иначе скопчан са огромним материјалним издацима и ангажовањем стручне радне снаге, праћен познавањем свих битних чинилаца процеса тако да у том случају степен сигурности може имати вредности које су тек нешто веће од 1.

Када је, узимајући све претходно у обзир, дефинисан дозвољени напон, при димензионисању се полази од тога да напон у штапу σ не сме бити већи од дозвољеног, што се записује као

$$\sigma \leq \sigma_d.$$

Имајући у виду да се напон у аксијално оптерећеном штапу одређује на основу (3.5) заменом у претходни израз је:

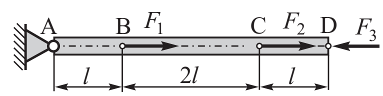
$$\frac{F_a}{A} \leq \sigma_d,$$

а одавде се тражена површина попречног пресека израчунава на основу:

$$A \geq \frac{F_a}{\sigma_d}$$

Према томе, површина попречног пресека мора бити већа, или у крајњем случају једнака одређеној израчунатој вредности.

Пример 3.5 *Штап приказан на слици је крајем A зглобно причвршћен за подлогу и оптерећен силама $F_1 = 3F$, $F_2 = 2F$ и $F_3 = 3F$. Извршити димензионисање штапа, ако је познат дозвољени напон материјала штапа (σ_d) уз услов да је у сваком попречном пресеку штапа напон једнак дозвољеном напону.*



► Будући да је штап крајем A зглобно везан за подлогу, уклањањем те везе би требало увести две реакције, једну силу у правцу осе штапа (X_A) и другу која је у правцу нормалном на осу штапа. Лако је показати да је ова друга реакција једнака нули и да зато није ни уцртана на слици. Према томе, ситуација у погледу реакција везе је иста као у случају када је веза укљештење. На основу једначине равнотеже је:

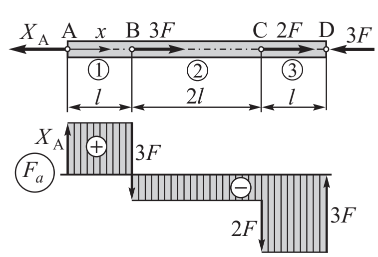
$$\sum X_i = -X_A + F_1 + F_2 - F_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = F_1 + F_2 - F_3 = 2F,$$

па су аксијалне силе:

$$F_{a1} = X_A = 2F; \quad F_{a2} = X_A - 3F = -F; \quad F_{a3} = X_A - 3F - 2F = -3F.$$

Због променљиве аксијалне силе штап ће се поделити на три дела (AB, BC и CD) чије ће, за сада непознате, површине попречног пресека бити означене са A_1, A_2 и A_3. Напони у поменутим деловима штапа су:

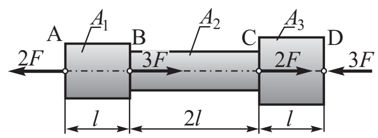
$$\sigma_1 = \frac{2F}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_2}; \quad \sigma_3 = \frac{3F}{A_3}.$$



Како треба задовољити услов:

$$|\sigma_i| = \sigma_d \quad \Rightarrow \quad \frac{|F_{ai}|}{A_i} = \sigma_d, \quad i = 1,2,3,$$

на основу њега су површине попречних пресека:



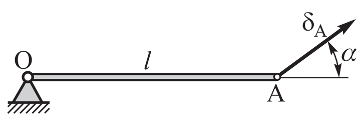
Слика 3.21: Изглед димензионисаног штапа

$$A_1 = 2\frac{F}{\sigma_d}; \quad A_2 = \frac{F}{\sigma_d}; \quad A_3 = 3\frac{F}{\sigma_d}.$$

Изглед штапа направљеног према задатом услову дат је на Слици 3.21. ◀

Став о издужењу штапа коме је један крај покретан, а други непокретан

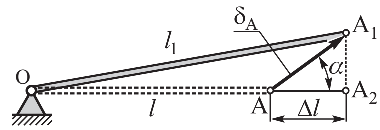
Посматраће се штап код кога је крај O зглобно везан за подлогу, тако да је омогућено обртање штапа око те тачке, док се други крај A може померати (Слика 3.22). Задатак је да се одреди како померање тачке A утиче на издужење штапа. При томе је са δ_A означено померање тачке A, а са α угао који вектор померања тачке заклапа са правцем осе недеформисаног штапа, који је дужине l.



Слика 3.22: Штап коме је један крај покретан, а други зглобно везан

Нека се тачка A преместила у положај A_1, при чему је дошло до деформације штапа (Слика 3.23). Штап, чији је недеформисани положај приказан испрекиданим линијама, се издужио тако да је његова нова дужина l_1. Уважавајући хипотезу о малим деформацијама, као и резултате добијене у Примеру 3.3, сматраће се да је δ_A много мање од дужине недеформисаног штапа, дакле да је $\delta_A \ll l$. На приложеним сликама је померање δ_A приказано карикирано, знатно веће него што је у стварности, да би се боље могли уочити извесни геометријски објекти. Дужина штапа у деформисаном стању се на основу правоуглог троугла OA_1A_2 може написати као:

$$l_1 = \overline{OA_1} = \sqrt{\overline{OA_2}^2 + \overline{A_2A_1}^2} = \sqrt{(l + \overline{AA_2})^2 + \overline{A_2A_1}^2}.$$



Слика 3.23: Одређивање издужења штапа

Како је на основу троугла AA_1A_2:

$$\overline{AA_2} = \delta_A \cos\alpha; \quad \overline{A_2A_1} = \delta_A \sin\alpha,$$

заменом у претходни израз добија се:

$$l_1 = \sqrt{(l + \delta_A \cos\alpha)^2 + (\delta_A \sin\alpha)^2} = \sqrt{l^2 + 2l\delta_A \cos\alpha + \delta_A^2}.$$

Квадрат померања тачке A је много мањи од l^2, тако да се последњи члан у изразу под кореном може занемарити. Издвајањем l испред корена је:

$$l_1 = l\sqrt{1 + 2\frac{\delta_A}{l}\cos\alpha}. \tag{3.9}$$

Из математичке анализе је познато да се развојем у Мак-Лоренов ред за мале величине x може написати да је:

$$\sqrt{1+2x} \approx 1 + x.$$

На пример ако је $x = 0.01$ и $x = 0.001$ тада се применом калкуратора добија:

$$\sqrt{1 + 2 \cdot 0.01} = 1.0099505; \quad \sqrt{1 + 2 \cdot 0.001} = 1.0009995,$$

па се види да су ове вредности веома блиске приближним које износе 1.01 и 1.001.

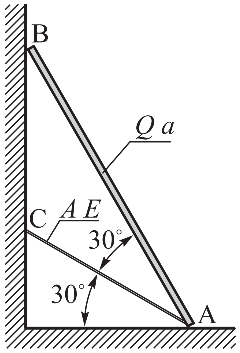
Користећи приказане могућности развоја у ред, као и имајућу у виду да је $\delta_A \;\cos\alpha\;/l$ мала величина, сада се израз (3.9) може приближно написати као:

$$l_1 \approx l\left(1 + \frac{\delta_A}{l}\cos\alpha\right) = l + \delta_A \cos\alpha. \tag{3.10}$$

Како се издужење штапа дефинише са $\Delta l = l_1 - l$ заменом израза (3.10) добија се:

$$\Delta l = \delta_A \cos\alpha. \tag{3.11}$$

Овим је доказан став из наслова, према ком је издужење штапа једнако $\delta_A \cos\alpha$, што представља пројекцију вектора померања покретне тачке A на правац осе недеформисаног штапа. Поменута пројекција је нацртана и на Слици 3.23.



Пример 3.6 *Крути штап тежине Q и дужине a постављен је својим крајевима A и B на идеално глатки под односно зид. За штап је у тачки A везано еластично уже, које је другим крајем везано за зид у тачки C. Површина попречног пресека ужета је A, док материјал од ког је уже направљено има модул еластичности E. Приликом везивања ужета штап је придржаван неким спољним узроком (на пример руком) који је након везивања ужета уклоњен. Одредити реакције везе и колико ће се због еластичности ужета померити тачка A.*

► Посматраће се равнотежа крутог штапа, који ће се учинити слободним, тако што ће се све везе уклонити и њихов утицај заменити са реакцијама веза. На тај начин ће штап, поред активне силе тежине Q, која делује у тежишту T (које је на средини штапа) бити оптерећен са три непознате реакције везе, силама N_A и N_B на местима додира крајева штапа са идеално глатком подлогом и силом S која је у правцу ужета. Уколико би наступиле велике деформације ужета, дошло би до великог померања крајева штапа, као што је то приказано на Слици 3.24 а). Писање једначина равнотеже за тај положај штапа би било врло компликовано. Међутим, у отпорности материјала се проучавају само мале деформације, што значи да ће у том случају померање тачака бити врло мало у односу на величину штапа. Ово нас наводи на фундаментално важан принцип који се користи у отпорности материјала:

Једначине равнотеже се пишу за положај тела који одговара недеформисаном систему.

Дакле, штап при ослобађању од веза треба нацртати у положају у ком је био пре деформације ужета, као што је приказано на Слици 3.24 б).

Како је под дејством овог раванског система сила штап у равнотежи могу се написати три једначине равнотеже које гласе:

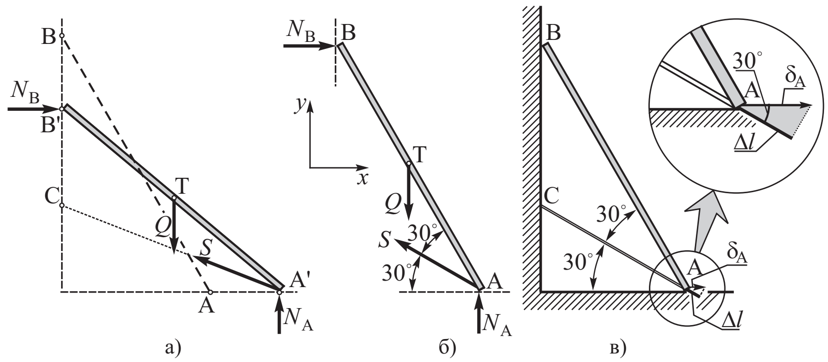
$$\sum X_i = N_B - S\cos 30^\circ = 0;$$
$$\sum Y_i = N_A + S\sin 30^\circ - Q = 0;$$
$$\sum M_A = Q\cos 60^\circ \frac{a}{2} - N_B \cos 30^\circ a = 0.$$

Из треће једначине се добија:

$$N_B = \frac{Q}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}Q,$$

а онда заменом ове вредности у прву једначину је:

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}}N_B = \frac{1}{3}Q.$$



Слика 3.24: Анализа равнотеже штапа: а) равнотежа при великим деформацијама; б) равнотежа при малим деформацијама; в) померања при малим деформацијама

Најзад сада се из друге једначине добија да је:

$$N_A = Q - S \sin 30^\circ = \frac{5}{6} Q.$$

Дужина ужета l пре деформације се одређује на основу једнакокраког троугла ABC па је:

$$2l \cos 30^\circ = a \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Како је позната сила S којом је уже оптерећено, може се одредити и његово издужење, тако да је:

$$\Delta l = \frac{Sl}{AE} = \frac{\sqrt{3} Qa}{9AE}.$$

Услед еластичности ужета, доћи ће до померања тачке A, а самим тим и читавог штапа. При том, због постојећих веза, тачка A се може померити само у хоризонталном правцу. Између померања тачке A (δ_A) и издужења ужета (Δl) постојаће према ставу о издужењу штапа следећа веза (погледати затамњен троугао на Слици 3.24 в)):

$$\Delta l = \delta_A \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta_A,$$

а одавде је померање тачке A:

$$\delta_A = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta l.$$

Заменом израза за Δl добија се:

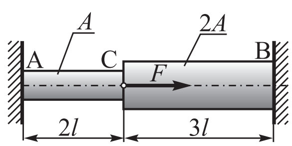
$$\delta_A = \frac{2Qa}{9AE}.$$

◀

Статички неодређени аксијално оптерећени штапови

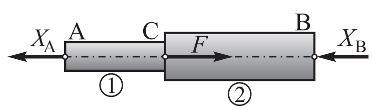
У досадашњем разматрању аксијално оптерећених штапова и при решавању задатака, могло се запазити да је број једначина равнотеже био једнак броју реакција везе. Због тога је систем једначина равнотеже био довољан да би се одредиле све реакције везе. Овакви проблеми се називају *статички одређени*. Међутим, постоје и проблеми код којих је број реакција везе већи од броја једначина равнотеже, што значи да ове једначине нису довољне за одређивање свих реакција везе. Проблеми овог типа се називају *статички неодређени*. Разлика између броја реакција везе и једначина равнотеже представља *степен статичке неодређености*. Очигледно да је за решавање оваквог проблема потребно написати додатне једначине, које се називају допунске и којих треба да буде онолико колики је степен статичке неодређености. Допунске једначине се формирају на основу услова који деформације морају задовољити и који су геометријске природе, па се називају *геометријски услови деформације*.

На следећим примерима ће се показати поступак решавања статички неодређених проблема.



Пример 3.7 *Нека је дат штап промењљивог попречног пресека, приказан на слици, коме су оба краја причвршћена за зидове. Штап је у тачки* C *оптерећен силом* F. *Део* AC *је дужине* $2l$ *и површине попречног пресека* A, *док је део* CB *дужине* $3l$ *и површине попречног пресека* $2A$. *Одредити реакције везе и максимални напон.*

► Штап је на оба краја причвршћен за зидове па ће се након уклањања ових веза увести две реакције везе, силе X_A и X_B. За дати систем сила може се написати само једна једначина равнотеже која гласи:



$$\sum X_i = -X_A + F - X_B = 0.$$

Имајући у виду да постоје две реакције везе, а само једна једначина равнотеже, дати проблем је једном статички неодређен, па је потребно написати једну допунску једначину. На основу анализе деформација штапа закључује се да, будући да су крајеви штапа причвршћени за подлогу те да се не могу померати, неће доћи до промене дужине штапа, то јест да је:

$$\Delta l = 0.$$

Овај израз је у датом задатку геометријски услов деформације. Штап ће се поделити на два дела, први од пресека A до пресека C, а други од C до B, тако да се промена дужине штапа може изразити и као:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F_{a1} l_1}{A_1 E} + \frac{F_{a2} l_2}{A_2 E}.$$

Како је:

$$F_{a1} = X_A; \quad F_{a2} = X_A - F; \quad l_1 = 2l; \quad l_2 = 3l; \quad A_1 = A; \quad A_2 = 2A,$$

заменом у претходни израз, као и имајући у виду геометријски услов деформације је:

$$\Delta l = 2\frac{X_A l}{AE} + \frac{3}{2}\frac{(X_A - F)l}{AE} = 0.$$

Ово је допунска једначина у овом задатку, која заједно са једначином равнотеже чини систем од две једначине са две непознате реакције везе. Решавањем ових једначина је:

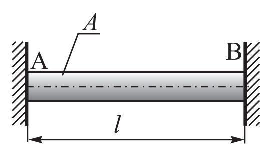
$$X_A = \frac{3}{7}F; \quad X_B = F - X_A = \frac{4}{7}F.$$

Најзад напони у првом и другом делу штапа су:

$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{X_A}{A} = \frac{3F}{7A}; \quad \sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{X_A - F}{2A} = -\frac{2F}{7A}.$$

Максимални напон је у првом делу штапа. ◀

Пример 3.8 *Штап од челика ($E = 2 \times 10^{11}$ Pa, $\alpha = 1.25 \times 10^{-5}$ $1/K$) има на температури $t_0 = 20°C$ дужину $l = 1$ m. Штап је својим крајевима причвршћен за зидове, између којих је растојање $1m$. Након тога, штап је изложен дејству Сунца услед чега се загрејао на температуру од $65°C$. Одредити напон у штапу.*



▶ Уколико се уклоне везе, штап ће на својим крајевима бити оптерећен реакцијама X_A и X_B. Претпоставиће се да су смерови ових реакција такви да оне затежу штап. Једначина равнотеже је:

$$\sum X_i = -X_A + X_B = 0,$$

па је проблем једном статички неодређен. Геометријски услов деформације је:

$$\Delta l = 0.$$

Штап је оптерећен силама и уз то је загрејан тако да за промену дужине важи:

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_t = \frac{X_A l}{AE} + l\,\alpha\,\Delta t = 0,$$

где је Δl_F промена дужине штапа када је незагрејан и оптерећен само силама, док је Δl_t промена дужине штапа уколико је загрејан и без дејства сила. Решењем ове допунске једначине се добија:

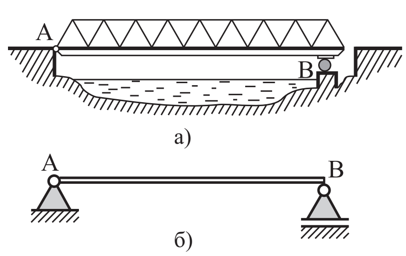
$$X_A = -AE\,\alpha\,\Delta t.$$

Предзнак минус указује на то да је смер реакција везе погрешно претпостављен. Одавде је напон у сваком пресеку штапа:

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{X_A}{A} &= -E\,\alpha\,\Delta t = -E\,\alpha(t_1 - t_0)\\ &= -2\times 10^{11} 1.25\times 10^{-5}(65-20) = -112,5 MPa.\end{aligned}$$

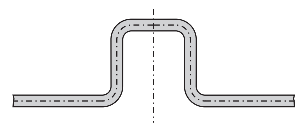
◄

У последњем примеру је штап оптерећен значајним напоном који се назива термички. *Термички напони* који се појављују код конструкција могу значајно угрозити њено функционисање па се на разне начине тежи да се овакви проблеми превазиђу. На пример (Слика 3.25), један крај металних мостова се обично ослања на непокретни ослонац (A), док се други крај моста ослања на један, или више покретних ослонаца (B). Ови ослонци се често технички изводе као ваљци, по којима се мост котрља. При загревању моста, он се издужује и како му је омогућено котрљање по ваљцима неће доћи до појаве термичких напона. На месту прелаза са покретног краја моста на обалу потребно је оставити простор за издужење где се умеђу дилатациони чешљеви који омогућавају несметан пролаз возила када се мост по хладном времену скрати.

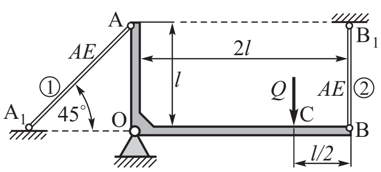


Слика 3.25: Техничко решење за елиминацију термичких напона: а) реална конструкција моста; б) еквивалентни механички модел

Спречавање настанка термичких напона код цевовода би, због неопходности заптивања, било компликовано извести путем покретних ослонаца, као што се то ради код мостова. Обично се то ради уметањем посебних закривљених делова, као што је то приказано на Слици 3.26. Ови додаци на цевима дозвољавају издужење и скраћење цеви, а самим тим утичу и на знатно смањење термичких напона.



Слика 3.26: Техничко решење за елиминацију термичких напона цевовода



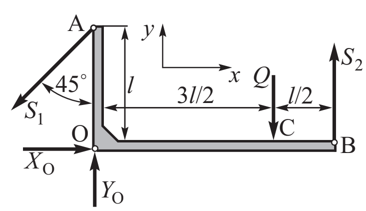
Пример 3.9 *Крути и лаки угаоник AOB, везан је зглобно у тачки O за ослонац и у тачки C оптерећен силом Q. За угаоник су у тачкама A и B везани лаки еластични штапови AA_1 и BB_1 који имају исту површину попречног пресека и модул еластичности . Одредити напоне у еластичним штаповима.*

► Након ослобађања угаоника од веза и увођења реакција везе може се констатовати да се за угаоник могу написати 3 једначине равнотеже, а да постоје 4 непознате реакције, па је дати проблем једном статички неодређен. Имајући у виду да треба одредити само напоне у штаповима, односно силе S_1 и S_2 написаће се само моментна једначина која гласи:

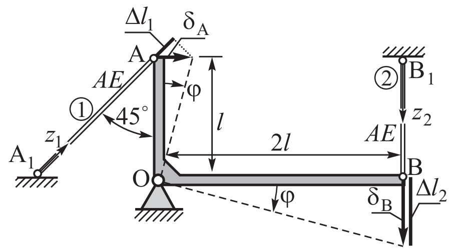
$$\sum M_O = S_1 l \sin 45^\circ + S_2 2l - Q\frac{3}{2}l = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}S_1 + 2S_2 = \frac{3}{2}Q. \qquad \text{(a)}$$

Преостале две једначине равнотеже се користе за одређивање реакција у тачки O па се неће ни написати.

За одређивање допунске једначине извршиће се анализа померања тачака. Под дејством оптерећења ће доћи до обртања угаоника за извесни мали угао φ око тачке O (Слика 3.27). Претпоставиће се да је смер обртања исти као смер кретања казаљке на сату и у сагласности са тим увести померања тачака A и B. За мали угао φ та померања су приближно у правцу који је нормалан на правац који спаја тачке A и B (на које са та померања односе) са тачком O. Смер померања тачака A и B одговара смеру обртања угаоника, док су интензитети померања:



$$\delta_A = \overline{OA}\varphi = l\varphi; \quad \delta_B = \overline{OB}\varphi = 2l\varphi.$$



Слика 3.27: Анализа померања

Издужења штапова 1 и 2, према (3.11), износе:

$$\Delta l_1 = \delta_A \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} l\varphi; \quad \Delta l_2 = \delta_B = 2l\varphi.$$

Међусобним делењем претходне две једначине се добија геометријски услов деформације:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{б}$$

Везе између сила у штаповима и издужења штапова су:

$$\Delta l_1 = \frac{F_{a1} l_1}{AE} = \sqrt{2}\frac{S_1\, l}{A\, E}; \tag{в}$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_{a2} l_2}{AE} = \frac{S_2\, l}{A\, E}, \tag{г}$$

при чему су се дужине штапова одредиле на основу Слике 3.12.7 и износе $l_1 = \sqrt{2}l$ и $l_2 = l$. Заменом (в) и (г) у услов (б) је:

$$\frac{\sqrt{2}S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad S_2 = 4S_1. \tag{д}$$

На основу допунске једначине (д) и једначине равнотеже (а) добија се:

$$S_1 = \frac{3Q}{16+\sqrt{2}}; \quad S_2 = \frac{12Q}{16+\sqrt{2}}.$$

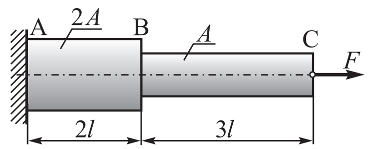
Позитивне вредности добијених сила указују на то да су штапови оптерећени на затезање. Напони у штаповима су:

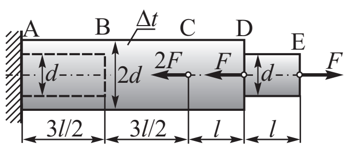
$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A} = \frac{S_1}{A} = \frac{3Q}{(16+\sqrt{2})\, A}; \quad \sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A} = \frac{S_2}{A} = \frac{12Q}{(16+\sqrt{2})\, A}.$$

◄

Задаци

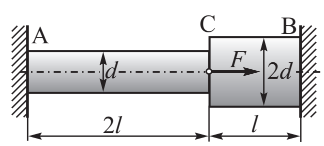
3.1 Штап дужине $5l$ је на дужини $2l$ попречног пресека површине 2, а преостали део штапа је површине попречног пресека A. Штап је укљештен левим крајем A за подлогу и оптерећен је силом интензитета F у тачки C. Одредити максимални напон у штапу. Одредити промену дужине целог штапа Модул еластичности материјала штапа је E.

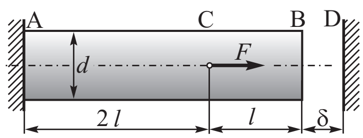




3.2 На слици је приказан штап укупне дужине $5l$, променљивог попречног пресека, који је крајем A укљештен за подлогу. Штап је од пресека A до пресека B прстенастог попречног пресека, унутрашњег пречника d, а спољашњег $2d$, од B до D је кружног попречног пресека пречника $2d$ и од D до E је кружног попречног пресека пречника d. Штап је оптерећен силама као што је то приказано на слици, а уз то је и загрејан при чему промена температуре износи Δt. Одредити напоне у штапу и промену дужине. Подаци: $l = 0.22\ m$, $d = 10\ mm$, $F = 30\ kN$, $\Delta t = 41\ K$, материјал је челик $E = 2.1 \times 10^{11}\ N/m2$, $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} K^{-1}$. Колико треба загрејати штап да он, под дејством сила не би променио своју дужину?

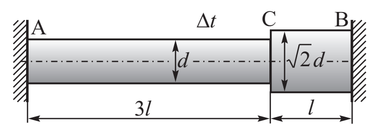
3.3 Штап дужине $3l$ је у првом делу који је дужине $2l$ кружног попречног пресека пречника d, а преостали део штапа је кружног попречног пресека пречника $2d$. Штап је крајевима A и B укљештен за подлогу и оптерећен је силом интензитета F у тачки C. Одредити реакције везе и максимални напон. Модул еластичности материјала штапа је E. Уколико би се штап направио тако да је константног кружног попречног пресека пречника d, како би се то одразило на напоне. Да ли би тада напон у делу штапа CB био четири пута већи, јер му се површина попречног пресека смањила за четири пута?

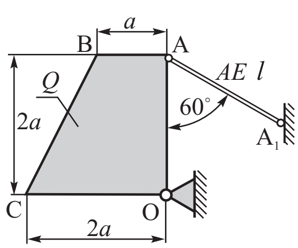




3.4 Еластични штап константног, кружног попречног пресека пречника d и дужине $3l$ причвршћен је својим крајем A за подлогу. На штап у пресеку C делује сила F у правцу осе штапа. Када је штап неоптерећен десни крај штапа B се налази на растојању δ од крутог зида D. При томе је δ много мање од дужине l. Одредити реакције везе под условом да је крај B додирнуо зид D.

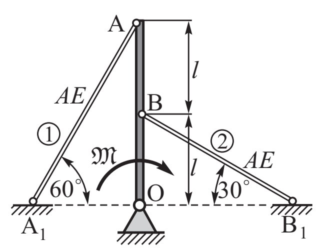
3.5 Приказани штап је на делу AC кружног попречног пресека пречника d, а преостали део штапа је пречника $\sqrt{2}d$. Штап је крајевима A и B причвршћен за круте зидове који су на растојању $4l$. При монтажи штапа је његова дужина $4l$, а температура t_0. Одредити реакције везе и напоне у штапу ако се штап загреје на температуру t_1. Модул еластичности штапа је E, а коефицијент топлотног ширења α.

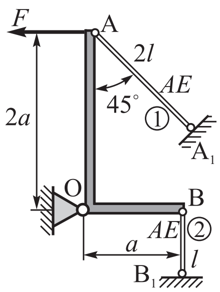




3.6 Крута плоча тежине Q облика приказаног на слици, зглобно је везана у тачки O за подлогу. У тачки A је зглобно причвршћен лаки и еластични штап дужине l, површине попречног пресека A и модула еластичности E који је крајем A_1 причвршћен за подлогу. Одредити напон у штапу и померање тачке B.

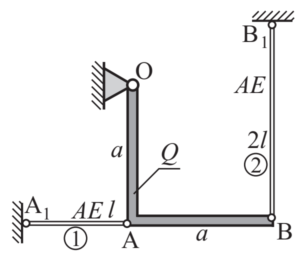
3.7 Крут и лак штап OA дужине $2l$ зглобно је везан у тачки O за подлогу и оптерећен спрегом $\mathfrak{M}$. За овај штап су зглобно, у тачкама A и B, везана два лака еластична штапа, оба исте површине попречног пресека и модула еластичности E. Ови штапови су преосталим крајевима зглобно везани за подлогу. Одредити напоне у еластичним штаповима.

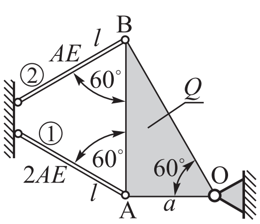




3.8 Лак и крут угаоник AOB са крацима дужине a и $2a$, зглобно је везан у тачки O за подлогу. У тачкама A и B су зглобно причвршћени лаки и еластични штапови који су крајевима A_1 и B_1 причвршћени за подлогу. Оба штапа имају исту површину попречног пресека, са дужином $2l$ (штап 1) и l (штап 2). Угаоник је у тачки A оптерећен силом F. Одредити напоне у еластичним штаповима.

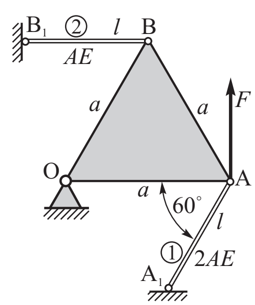
3.9 Крут угаоник OAB тежине Q направљен је крутим спајањем два једнака штапа исте дужине . Угаоник је зглобно везан за подлогу у тачки O, док су у тачкама A односно B зглобно причвршћени лаки и еластични штапови који су крајевима A_1 односно B_1 причвршћени за подлогу. Штап AA_1 је дужине l, док је штап BB_1 дужине $2l$. Оба еластична штапа су исте површине попречног пресека и направљени су од материјала чији је модул еластичности E, док је дозвољени напон σ_d. Извршити димензионисање еластичних штапова.

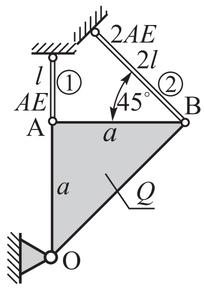




3.10 Крута плоча тежине Q, која има облик правоуглог троугла, зглобно је везана у тачки O за подлогу. За плочу су у тачкама A и B зглобно везана два лака еластична штапа, оба истог модула еластичности и дужине l. Површина попречног пресека штапа 1 је $2A$ док за штап 2 износи A. Штапови су направљени од материјала чији је дозвољени напон σ_d. Извршити њихово димензионисање.

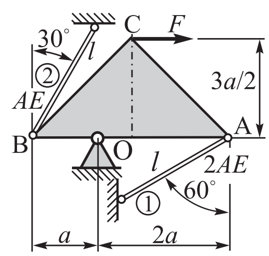
3.11 Лака и крута троугласта плоча OAB са странама једнаке дужине a, зглобно је везана у тачки O за подлогу. У тачкама A и B су зглобно причвршћени лаки и еластични штапови који су крајевима A_1 и B_1 причвршћени за подлогу. Плоча је оптерећена силом F. Одредити напоне у еластичним штаповима.

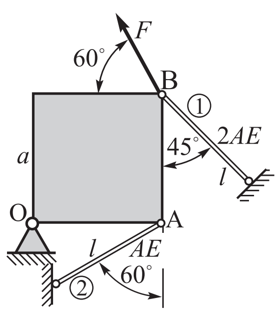




3.12 Крута плоча тежине Q у облику правоуглог, једнакокраког троугла са катетама дужине a, зглобно је везана у тачки O за подлогу. У тачкама A и B су зглобно причвршћени лаки и еластични штапови оба направљени од истог материјала са модулом еластичности E. Површина попречног пресека штапа 1 је , дужина је l, док је код штапа 2 површина попречног пресека $2A$, док је дужина $2l$. Одредити напоне у еластичним штаповима. Да ли је сврсисходно коришћење штапа 1? Предложити боље решење.

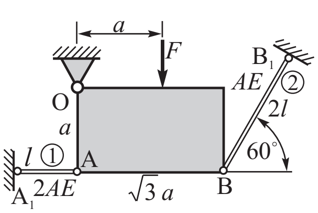
3.13 Крута плоча тежине Q која има облик једнакокраког правоуглог троугла зглобно је везана у тачки O за подлогу и оптерећена у тачки C силом F. За плочу су у тачкама A и B зглобно везана два лака еластична штапа, оба истог модула еластичности E и дужине l. Површина попречног пресека штапа 1 је $2A$ док за штап 2 износи A. Одредити напоне у еластичним штаповима.

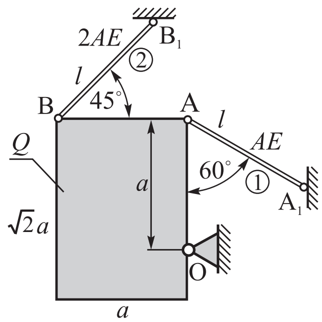




3.14 Лака и крута плоча која је у облику квадрата странице a, зглобно је везана у тачки O за подлогу. Плоча је у тачки B оптерећена силом F. За плочу су у тачкама A и B зглобно везана два лака еластична штапа, оба истог модула еластичности E и дужине l. Површина попречног пресека штапа 1 је $2A$ док за штап 2 износи A. Одредити напоне у еластичним штаповима.

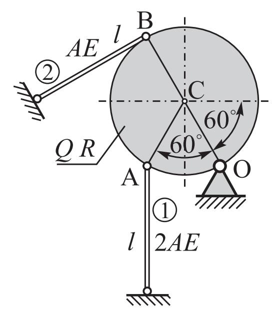
3.15 Лака крута плоча у облику правоугаоника са странама дужине a и $\sqrt{3}a$ зглобно је везана у тачки O за подлогу и оптерећена силом F. У тачкама A и B су зглобно причвршћени лаки и еластични штапови, оба од материјала модула еластичности E, који су крајевима A_1 и B_1 причвршћени за подлогу. Површина попречног пресека штапа AA_1 је $2A$, дужина је l док ове две величине код штапа BB_1 износе A и $2l$. Одредити напоне у еластичним штаповима.

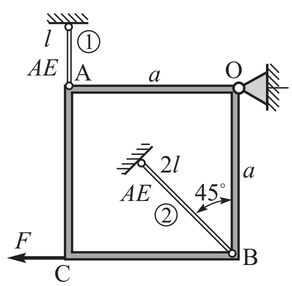




3.16 Плоча у облику правоугаоника са странама дужине a и $\sqrt{2}a$ и тежине Q зглобно је везана у тачки O за подлогу. У тачкама A и B су зглобно причвршћени лаки и еластични штапови оба дужине l и модула еластичности E, који су крајевима A_1 и B_1 причвршћени за подлогу. Површина попречног пресека птапа AA_1 је A, док код штапа BB_1 износи $2A$. Одредити напоне у еластичним штаповима.

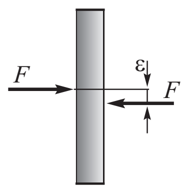
3.17 Крута плоча тежине Q која има облик круга полупречника R зглобно је везана у тачки O за подлогу. За плочу су у тачкама A и B зглобно везана два лака еластична штапа, оба истог модула еластичности E и дужине l. Површина попречног пресека штапа 1 је $2A$ док за штап 2 износи A. Одредити напоне у еластичним штаповима.





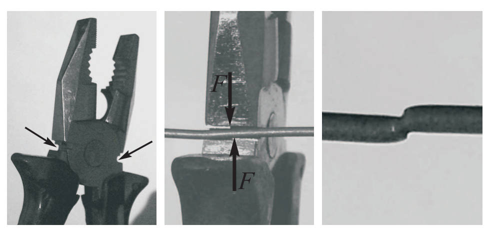
3.18 Лаки и крути оквир добијен спајањем четири штапа дужине , зглобно је везан у тачки O за подлогу и оптерећен у тачки C силом F. У тачки A је за оквир зглобно причвршћен лаки и еластични штап дужине l, док је у тачки B причвршћен лаки и еластични штап дужине $2l$. Површина попречног пресека оба штапа је A, док је модул еластичности E. Одредити напоне у еластичним штаповима.

3.5 Напони и деформације при смицању



Слика 3.28: Дефиниција смицања

Смицање се појављује код штапа који је оптерећен са две силе истог интензитета, а супротног смера чије су нападне линије паралелне и на малом растојању ε (Слика 3.28). Као пример оптерећења на смицање може се навести сечење жице, папира, или лима уз помоћ клешта и ручних или машинских маказа. У свим овим примерима постоје два сечива (од којих једно може бити и непокретно) која истовремено делују на тело које се сече. Сечива су међусобно врло блиска и њихово дејство на тело се може заменити паралелним силама, као што је приказано на на примеру клешта на Слици 3.29 Битно је да постоји одређено растојање између сечива, а на основу искуства се зна да превелико или премало растојање утиче на ефикасност сечења.

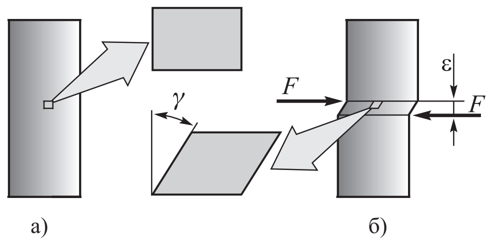


а) б) в)

Слика 3.29: Пример смицања код жице оствареног кљештима: а) делови кљешта за сечење жице; б) изглед при сечењу; в) деформисана жица

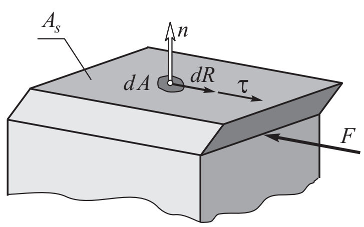
Напомена. Тело које је изложено смицању према претходној дефиницији не би било у равнотежи, јер без обзира на мало растојање између сила оне формирају спрег сила. Свако ко је резао картон маказама могао је да запази да при томе долази до обртања делова картона што је директна последица поменутог спрега сила. Ово обртање се у случају картона може спречити руком, односно, при томе је потребна мала сила. Дакле, да би тело било у равнотежи мора бити оптерећено још једним спрегом сила, али како се он у пракси остварује са силама малог интензитета његов утицај ће се занемарити.

При смицању долази до паралелног померања (клизања) равни у којима делују силе и које се називају равни клизања. На Слици 3.30 приказана је деформација до које при томе долази. Уколико се посматра елементарно мали део тела, чија је једна страна у облику правоугаоника, при деформацији ова страна прелази у ромбоид. Дакле, при деформацији супротне странице остају међусобно паралелне. Као мера деформације се при смицању користи угао за који се заокренула станица елементарног дела. Овај



Слика 3.30: Деформација штапа при смицању: а) недеформисан штап; б) деформисан штап

угао се означава са γ и назива *угао клизања*.



Слика 3.31: Пресек на телу које је изложено смицању

Да би се могли одредити напони при смицању користиће се метода пресека. Направиће се замишљени пресек тела (Слика 3.31) који се поклапа са равни клизања и посматрати равнотежа доњег дела тела. Површина попречног пресека, који се при томе добија, назива се површина смицања и означава се са A_s. Доњи део тела је оптерећен силом F и унутрашњим силама на пресеку. Како је овај део тела у равнотежи, онда унутрашње силе морају бити такве да одржавају равнотежу са силом F. То је могуће остварити уколико су унутрашње силе истог правца, а супротног смера у односу на силу F. Дакле, унутрашње силе, а самим тим и напони су у равни пресека, одакле се закључује, да се при смицању јављају искључиво тангенцијални напони τ. Овакав специјалан случај напона је већ раније приказан на Слици 3.7 в). Елементарана сила dR на елементарној површини dA је:

$$dR = \tau\, dA.$$

Експерименти показују да је тангенцијални напон приближно константно распоређен по површини пресека, тако да ће се усвојити да је $\tau = \text{const}$. У том случају, интензитет резултујуће силе на пресеку износи:

$$R = \tau\, A_s,$$

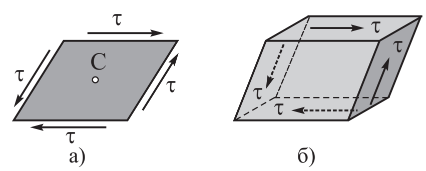
и да би се остварила равнотежа посматраног дела штапа мора бити задовољено $R = F$. На основу тога је тангенцијални напон у пресеку:

$$\tau = \frac{F}{A_s}.$$

Елементарни део, издвојен са попречног пресека штапа, приказан на Слици 3.32 у ортогоналној и косој пројекцији је са горње и доње стране оптерећен напонима τ. Уколико би на елементарни део деловали само ови напони, елементарне силе на горњој и доњој површини би формирале спрег због кога елементарни део не би био у равнотежи. Међутим, како је он у равнотежи, то је могуће због тога што и на бочним странама постоје тангенцијални напони τ, као што је то приказано на слици.

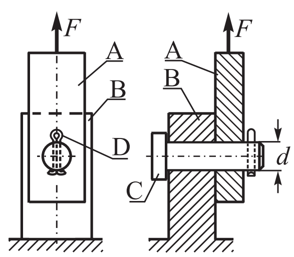
Да би се одредила веза између тангенцијалног напона и угла клизања као мере деформације за конкретни материјал, приступа се одређеним експериментима. На основу њих се добија да између тангенцијалног напона и угла клизања постоји линеарна зависност, која се може исказати са:

$$\tau = G\,\gamma, \qquad (3.12)$$

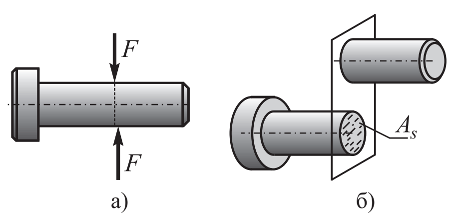


Слика 3.32: Напони на елементарном делу: а) ортогонална и б) коса пројекција

где је G физичка константа датог материјала која се назива *модул клизања.* Ова веза је слична вези између нормалног напона и уздужне дилатације (3.7), па се назива *Хуков закон за смицање.*



Пример 3.10 *На слици је дато техничко решење зглобног везивања штапа A са постољем B које је у склопу подлоге. Кроз кружне отворе на штапу и постољу увучена је цилиндрична осовиница C, чије је евентуално испадање спречено расцепком D. На тај начин је спречено померање штапа у правцу силе, али ова веза омогућава да се штап може закретати у односу на постоље. Осовиница је пречника d, а штап је оптерећен силом F. Одредити напон у осовиници.*



► При дејству силе F на штап постоји тежња да се он помери то јест "склизне" у односу на постоље у чему га спречава осовиница. Уколико се осовиница издвоји из приказаног склопа, потребно је заменити утицај штапа и постоља на њу. Штап делује на осовиницу силом истог интензитета F као што је и сам оптерећен, због чега постоји тежња да се осовиница помери ка горе. Међутим у томе је спречава постоље делујући на осовиницу силом истог интензитета F, али супротног смера (видети слику а)). Ова приближна анализа додводи до закључка да је осовиница оптерећена силама истог интензитета и супротног смера, чији су правци на малом растојању, што је дефиниција смицања. Према томе, у осовиници је јављају тангенцијални напони који износе:

$$\tau = \frac{F}{A_s},$$

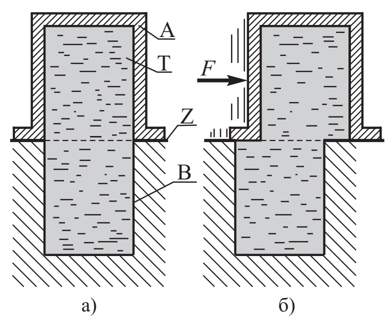
при чему је A_s површина на којој наступа смицање (површина смицања). Да би се она одредила поћи ће се од претпоставке да је дошло до лома штапа. У том случају површина на којој наступа лом је површина смицања. До лома би дошло на пресеку на којем би штап "склизнуо" по постољу (видети слику б)), па је површина смицања једнака површини попречног пресека штапа. Заменом у израз за напон добија се да је напон у осовиници:

$$\tau = \frac{4F}{d^2\pi}.$$

◄

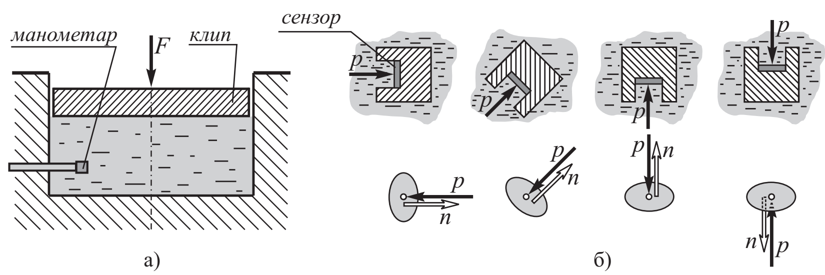
3.6 Напонско стање у течностима

За разлику од чврстих тела, у течностима које су у стању мировања се не могу појавити тангенцијални напони. Ово својство течности уједно служи и за њихово дефинисање. На Слици 3.33 је дат приказ апаратуре којом се може показати непостојање тангенцијалних напона у течностима. Унутар простора који формирају две посуде, од којих је једна покретна (A), а друга непокретна (B), налази се испитивана течност (T). На месту додира ових посуда налази се заптивач (Z), који не дозвољава истицање течности између посуда. При дејству силе F на покретну посуду доћи ће до њеног померања, а течност у посудама која је обликована као "штап", биће оптерећена на смицање (видети сличност са чврстим штапом у Примеру 3.10). Експеримент показује да модул клизања течности има врло мале, скоро занемарљиве вредности, односно да се у течностима готово уопште и не појављују тангенцијални напони. Ово својство течности се објашњава великом међусобном покретљивошћу молекула течности.



Слика 3.33: У течностима се не појављују тангенцијални напони

Да би се у потпуности размотрило напонско стање у течности посматраће се експеримент приказан на Слици 3.34 а) где је приказан клип који притиска течност која се налази у посуди. Течност ће се при томе одупрети



Слика 3.34: У течностима се појављују само нормални притисни напони: а) течност притиснута клипом; б) горњи ред—дејство течности на сензор манометра; доњи ред—дејство сензора манометра на течност

оптерећењу слично штапу који је аксијално оптерећен. Међутим, постојаће и једна битна разлика. Код штапа ће у некој произвољној тачки у различитим пресецима штапа бити различити напони. Да би се одредио напон у некој тачки течности користиће се манометар којим се мери притисак. Активни део манометра, који прихвата оптерећење од течности је сензор. При закретању манометра у истој тачки течности показује се да је сензор при било ком углу оптерећен истим притиском (горњи ред на Слици 3.34 б)). Истим овим притиском сензор оптерећује течност (доњи ред на Слици 3.34 б)).

На основу ових експеримената се може закључити да у сваком замишљеном пресеку кроз исту тачку течности постоје само нормални напони, који су истог интензитета, дакле не зависе од оријентације пресека. Ови напони су притисни јер су увек усмерени ка површини пресека, што одговара специјалном случају приказаном на Слици 3.7 б). Дакле, тело које се потопи у течност, притиснуто је са сваке стране, па и са доње.

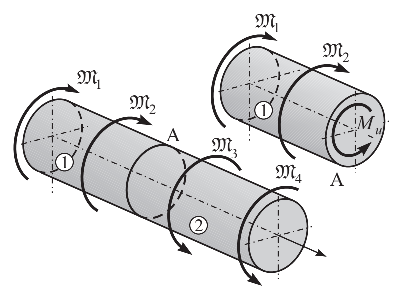
3.7 Увијање

Штап је оптерећен на увијање уколико је изложен дејству спрегова чије су равни нормалне на осу штапа. Будући да су вектори спрегова нормални на раван спрега, онда су при увијању вектори спрегова у правцу осе штапа, што може послужити као дефиниција увијања. У пракси се увијање доста често среће, на пример код ротирајућих штапова који преносе снагу од мотора ка радној машини и који се зову вратила.

На Слици 3.35 је дат пример штапа на који делује више спрегова. При проучавању увијања направиће се замишљени пресек A којим се штап дели на два дела који су означени са 1 и 2. Посматраће се равнотежа дела штапа који је означен са 1 и који је оптерећен спреговима $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Да би тај део штапа био у равнотежи неопходно је да унутрашње силе у пресеку A формирају спрег који је једнак збиру спрегова $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Овај спрег који делује на попречни пресек се означава са M_u и назива *момент увијања.* Он представља меру оптерећена датог пресека. Вредност момента увијања се одређује сабирањем спрегова само са леве, или само са десне стране пресека, па је:

$$M_u = \sum \mathfrak{M}_i^l \quad \text{или} \quad M_u = \sum \mathfrak{M}_i^d$$

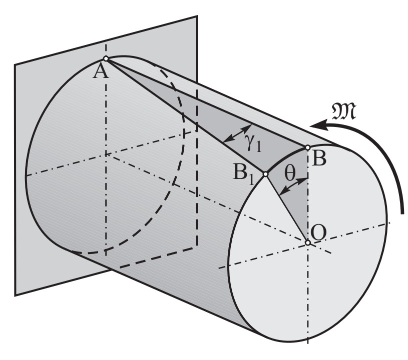
где се индексом l односно d упућује на то да су сабрани само спрегови са леве стране односно десне стране пресека. При томе је потребно увести конвенцију о предзнаку спрега који се сабира, па ће се сматрати да је позитиван онај спрег чији је вектор усмерен од пресека. Дакле, уколико се сабирају спрегови са леве стране пресека позитиван је спрег чији је вектор усмерен у лево, а са десне стране пресека позитиван је спрег чији је вектор усмерен у десно.



Слика 3.35: Увијање штапа и момент увијања: а) штап као целина; б) равнотежа дела 1

Напони при увијању

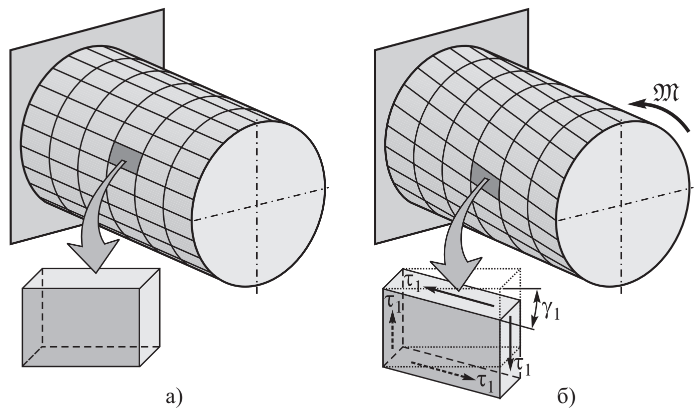
Посматраће се штап чији је један крај причвршћен за зид, док је други крај оптерећен спрегом $\mathfrak{M}$. Изводница на омотачу штапа, која је у неоптерећеном стању паралелна са осом штапа, при деформацији се заокреће за угао који ће се означити са γ_1, како је то приказано на Слици 3.36. Тачка A се при томе не помера, док тачка B прелази у положај B_1, померивши се при томе по луку круга чија је раван нормална на осу штапа. Угао BOB_1 за који је обрнуо полупречник десног краја штапа, представаља угао увијања и означава се са θ.



Слика 3.36: Угао закретања изводнице и угао увијања

Уочиће се низ изводница и кругова чије су равни нормалне на осу штапа као што је приказано на Слици 3.37. При увијању штапа, све изводнице на омотачу штапа се заокрећу за исти угао γ_1, док тачке на круговима, остају и даље на тим круговима. Уколико се издвоји један деформисани елементарни део штапа, може се запазити да при деформацији правоугаона страна елементарног дела прелази у ромбоид.

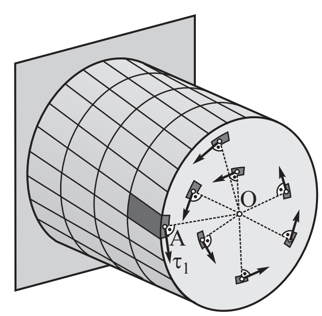
Упоређењем ове деформације са оном на Слици 3.32 где је приказана деформација елементарног дела при смицању, види се да је у питању иста врста деформације. Зато се може закључити да се при увијању штапа, слично као код смицања, појављују тангенцијални напони, који делују на четири стране елементарног дела. Будући да је у питању елементарни део на омотачу штапа, ови напони ће се означити са τ_1.



а) б)

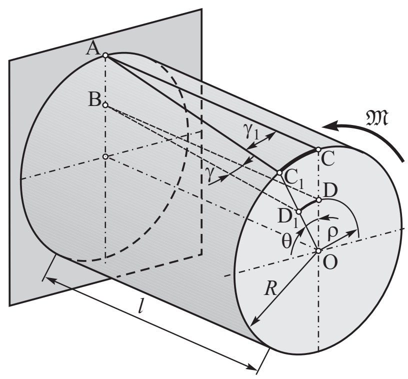
Слика 3.37: Деформације при увијању: а) недеформисани штап; б) деформисани штап

Деформације и напони при увијању се не појављују само на омотачу штапа, већ ће се појавити и код елементарних делова који су унутар штапа. Уколико се направи попречни пресек на штапу и уоче елементарни делови на пресеку (Слика 3.38) тада ће тангенцијални напон у свакој тачки пресека бити у правцу који је нормалан на линију која спаја поменуту тачку са центром попречног пресека O. На овај начин постаје позната оријентација напона у пресеку. Напон који се јавља на елементарном делу A (који је на омотачу штапа) је τ_1, док ће се распоред интензитета напона по попречном пресеку одредити у наставку излагања.



Слика 3.38: Оријентација тангенцијалних напона на попречном пресеку

Анализа лома вратила и других штапова оптерећених на увијање показује да почетак лома, у облику пукотине настаје на омотачу тела, да би се онда ова пукотина проширила кроз цео пресек штапа. Имајући у виду експерименталне податке, треба очекивати да ће при увијању највећи напон бити на омотачу штапа, односно да тангенцијални напон неће бити равомерно распоређен по попречном пресеку, као што је то случај код смицања. Да би се одредио распоред тангенцијалних напона по површини попречног пресека посматраће се изводница AC на омотачу штапа и линија BD која је у равни коју дефинишу оса штапа и изводница AC (Слика 3.39). Линија BD је паралелна са осом штапа и на растојању ρ од ње. Изводница AC ће се заокренути за угао γ_1, а линија BD за угао γ. Тачке C и D ће при деформацији штапа прећи у положај C_1 и D_1 при чему ће тачке O, C_1 и D_1 бити на истом правцу. Уколико се дужине лукова $\overset{\frown}{CC_1}$ и $\overset{\frown}{DD_1}$ изразе преко углова закретања γ_1 и γ добија се:



Слика 3.39: Деформације у унутрашњости штапа

$$\overset{\frown}{CC_1} = l\,\gamma_1; \quad \overset{\frown}{DD_1} = l\,\gamma,$$

док у случају да се изразе преко угла увијања θ биће:

$$\overset{\frown}{CC_1} = R\,\theta; \quad \overset{\frown}{DD_1} = \rho\,\theta.$$

Изједначавањем ових израза је:

$$l\,\gamma_1 = R\,\theta; \quad l\,\gamma = \rho\,\theta.$$

Међусобним делењем ова два израза и решавањем по γ добија се:

$$\gamma = \frac{\gamma_1 \rho}{R}. \tag{3.13}$$

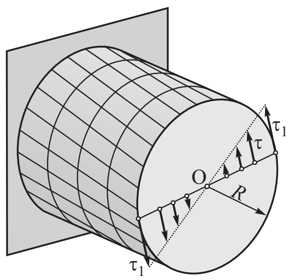
Како је према Хуковом закону за смицање (3.12):

$$\gamma = \frac{\tau}{G}; \quad \gamma_1 = \frac{\tau_1}{G},$$

заменом у (3.13) добија се да је тангенцијални напон:

$$\tau = \frac{\tau_1}{R}\rho. \tag{3.14}$$

Имајући у виду да су τ_1 и R за дати попречни пресек константне величине, израз (3.14) указује на то да интензитет тангенцијалног напона у некој тачки пресека линеарно зависи од ρ дакле од удаљености те тачке од осе штапа. Дакле, напон на самој оси штапа је једнак нули, док је максимални напон τ_1 у тачкама које су на омотачу штапа. На Слици 3.40 је графички приказано у ком односу стоје тангенцијални напони у тачкама које су на једном пречнику. У наставку ће се одредити колики је интензитет максималног напона τ_1.



Слика 3.40: Распоред напона по попречном пресеку штапа при увијању

Посматраће се попречни пресек увијеног штапа који је приказан на Слици 3.41. Већ је напоменуто да је у тачкама које су на истом растојању од осе штапа исти интензитет тангенцијалних напона. Уочиће се зато један прстенасти елементарни део штапа, који је полупречника ρ, а дебљине $d\rho$. У свакој тачки те танке прстенасте површине је исти напон τ. Елементарне силе, које делују на том прстену, биће распоређену у правцу тангенте и при томе ће (видети пример дат на Слици 2.14 у одељку 2.4) заједнички формирати елементарни спрег $d\mathfrak{M}$. Интензитет овог спрега ће се одредити множењем тангенцијалног напона са површином прстенасте површине и полупречником ρ па је:

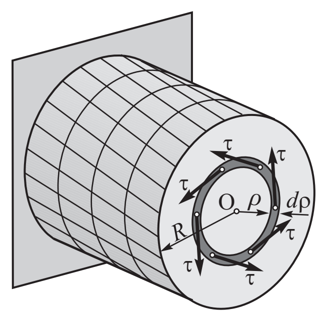
$$d\mathfrak{M} = \tau\, \rho\, dA.$$

Користећи израз (3.14) као и чињеницу да је $dA = 2\pi\rho d\rho$ добија се:

$$d\mathfrak{M} = \frac{2\pi\tau_1\rho^3 d\rho}{R}. \tag{3.15}$$

Ово је интензитет спрега који делује на једну елементарну површину. Укупан спрег $\mathfrak{M}$, који делује на читавој површини попречног пресека, а који је једнак моменту увијања M_u у датом пресеку, добија се интеграцијом елементарног спрега по координати ρ која је у границама од 0 до R, па је:

$$M_u = \mathfrak{M} = \int_0^R \frac{2\pi\tau_1\rho^3 d\rho}{R}.$$



Слика 3.41: Одређивање спрега елементарних сила

Како су τ_1 и R константне које се могу извући испред интеграла, као и уколико се дефинише посебна величина:

$$I_0 = \int_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi\, \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{2},$$

која се назива *поларни момент инерције*, онда се може написати да је:

$$M_u = \frac{\tau_1}{R} I_0.$$

Интензитет максималног тангенцијалног напона је:

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_u}{I_0} R. \tag{3.16}$$

Заменом овог израза у израз (3.14) и одговарајућим скраћењем, сада је напон у било којој тачки дат са:

$$\tau = \frac{M_u}{I_0} \rho. \tag{3.17}$$

Поларни момент инерције је у техници погодније изражавати преко пречника штапа који се може директно измерити, него преко полупречника. Тако, поларни момент инерције за кружни попречни пресек пречника d износи:

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}. \tag{3.18}$$

У случају прстенастог попречног пресека, са спољашњим пречником D и унутрашњим d, поларни момент инерције је:

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4). \tag{3.19}$$

Одређивање угла увијања

Посматраће се штап који је приказан на Слици 3.36. Штап је константног попречног пресека и на слободном крају је оптерећен спрегом због чега је момент увијања у сваком пресеку исти. За дужину лука BB_1 може се написати да је:

$$BB_1 = l\gamma_1 = R\theta,$$

одакле је:

$$\theta = \frac{l\gamma_1}{R} \tag{3.20}$$

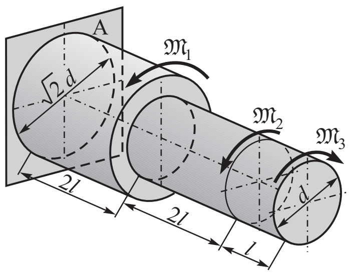
Заменом израза (3.16) за напон τ_1 у Хуков закон за смицање (3.12) је:

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{G} = \frac{M_u R}{I_0 G}. \tag{3.21}$$

Заменом (3.21) у (3.20) добија се да је угао увијања:

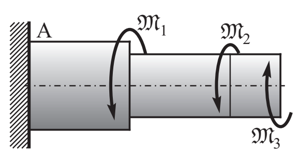
$$\theta = \frac{M_u l}{G I_0} \tag{3.22}$$

Имајући у виду услове под којима је овај образац изведен, он се може користити за штапове константног попречног пресека код којих је у сваком пресеку иста вредност момента увијања. Уколико код неког штапа то није случај, онда штап треба поделити на више делова, тако да је сваки од тих делова константног попречног пресека и оптерећен константним моментом увијања. Тада, на сваки од делова штапа треба применити образац (3.22) и на тај начин за сваки од њих одредити посебан угао увијања. Угао увијања целог штапа се добија сабирањем свих појединачних углова увијања.



Пример 3.11 *Штап приказан на слици је крајем A причвршћен за зид и оптерећен са три активна спрега интензитета* $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_2 = 3\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M}_3 = 2\mathfrak{M}$. *Штап је степенастог попречног пресека, у првом делу је пречника* $\sqrt{2}d$, *а у другом пречника* d. *Одредити максимални напон у штапу и угао увијања. Задатак решити за опште вредности, а затим и за конкретне које износе:* $\mathfrak{M} = 0.6\ Nm$, $d = 2\ cm$, $l = 2\ cm$, *материјал је гума* $G = 3\ MPa$.

► У техници је због једноставности знатно чешће коришћење специјалних ортогоналних, него просторних приказа као овај који је дат на основној слици. Зато се и при дефинисању задатака знатно чешће користи другачији приказ, при чему је штап приказан у ортогоналном погледу, док се спрегови, да би се ставило до знања да су им равни нормалне на осу штапа, цртају у косој пројекцији.



При решавању задатка прво се приступа уклањању везе и увођењу реакције везе, што је спрег означен са M_A. При томе је погодно цртати векторе спрегова, а не саме спрегове. За дати систем спрегова, чији су вектори у једном правцу, може се написати само једна једначина равнотеже и то сума вектора спрегова у правцу осе штапа x на основу које је:

$$\sum M_x = -\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = 0.$$

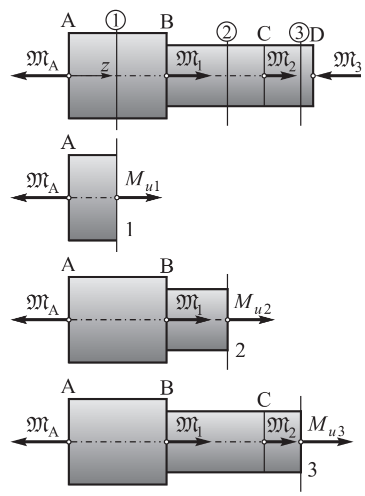
На основу ове једначине реакција везе је:

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M} + 3\mathfrak{M} - 2\mathfrak{M} = 2\mathfrak{M}.$$

Након одређивања реакције везе, приступиће се подели штапа на више делова, тако да је задовољено да је сваки од тих делова константног попречног пресека и оптерећен константним моментом увијања. Имајући у виду да се момент увијања мења у пресецима у којима делује спрег, онда овај штап треба поделити на три дела и то AB, BC и CD. Моменти увијања у овим деловима штапа су:

$$
\begin{aligned}
M_{u1} &= \mathfrak{M}_A = 2\mathfrak{M};\\
M_{u2} &= \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M};\\
M_{u3} &= \mathfrak{M}_A - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = -2\mathfrak{M}.
\end{aligned}
$$

Момент увијања у трећем делу штапа је негативан и има супротан смер од уцртаног.



Напон у $i-$том делу штапа у тачки која је на растојању ρ од осе штапа се одређује на основу формуле:

$$
\tau_i = \frac{M_{ui}}{I_{0i}}\rho.
$$

Како треба одредити максимални напон, а он ће за сваки део штапа бити у тачкама на омотачу, онда ће се прво одредити удаљеност $\rho_{\max\ i}$ тих тачака од осе штапа. У овом примеру је:

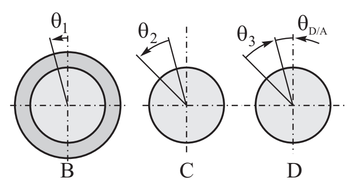
$$
I_{01} = \frac{\pi}{32}(\sqrt{2}d)^4 = \frac{\pi d^4}{8}; \quad I_{02} = I_{03} = \frac{\pi d^4}{32};
$$
$$
\rho_{\max 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}d; \quad \rho_{\max 2} = \rho_{\max 3} = \frac{d}{2},
$$

па су напони у тачкама на омотачу штапа:

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{u1}}{I_{01}}\rho_{\max 1} = \frac{8\sqrt{2}\mathfrak{M}}{\pi d^3};$$
$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{u2}}{I_{02}}\rho_{\max 2} = \frac{16\mathfrak{M}}{\pi d^3};$$
$$\tau_{\max 3} = \frac{M_{u3}}{I_{03}}\rho_{\max 3} = -\frac{32\mathfrak{M}}{\pi d^3}.$$

Упоређењем апслолутних вредности ових напона долази се до закључка да је максимални напон у трећем делу штапа.

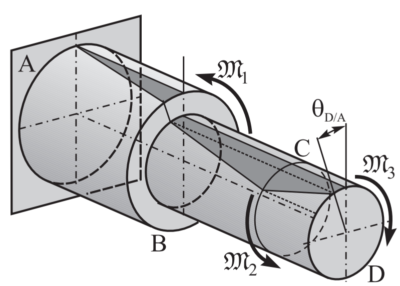
При одређивању угла увијања целог штапа потребно је опет штап поделити на три дела, па се углови увијања сваког од тих делова штапа добија као:



$$\theta_1 = \frac{M_{u1}l_1}{GI_{01}} = \frac{32\mathfrak{M}l}{G\pi d^4};$$
$$\theta_2 = \frac{M_{u2}l_2}{GI_{02}} = \frac{64\mathfrak{M}l}{G\pi d^4};$$
$$\theta_3 = \frac{M_{u3}l_3}{GI_{03}} = -\frac{64\mathfrak{M}l}{G\pi d^4}.$$

Заменом задатих конкретних података је:

$\tau_{\max 1} = 0.27MPa$; $\tau_{\max 2} = 0.38MPa$; $\tau_{\max 3} = 0.76MPa$;
$\theta_1 = 0.255rad = 14,6^\circ$; $\theta_2 = 0,509rad = 29,2^\circ$; $\theta_3 = -0.509rad = -29,2^\circ$.



На основу углова увијања закључује се да ће се пресек B обрнути за угао θ_1, док ће се пресек C у односу на B обрнути за угао θ_2. Међутим, како је дошло до обртања пресека B, онда ће укупан угао обртања пресека C или угао обртања пресека C у односу на непокретни пресек A бити:

$$\theta_{C/A} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{96\mathfrak{M}l}{G\pi d^4} = 0.764rad = 43,8^\circ.$$

Крајњи пресек D ће се у односу на пресек C обрнути за угао θ_3, а због обртања пресека C укупан угао обртања пресека D у односу на пресек A, што је и укупан угао увијања штапа износи

$$\theta_{D/A} = \theta_{C/A} + \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{32\mathfrak{M}}{G\pi d^3} = 0.255rad = 14,6^\circ.$$

При увијању штапа доћи ће и до закретања изводница на омотачу штапа. За конкретне податке је на слици приказан изглед једне изводнице на деформисаном штапу. Да би ови углови били јасно уочљиви изабран је пример у коме су деформације изузетно велике, што одступа од хипотезе о малим деформацијама. Због тога се добијена решења морају сматрати приближним. Код стварних конструкција су деформације много мање, што не би било погодно за графички приказ. ◄

Прорачун штапова изложених увијању

Код штапова који се увијају се димензионисање попречног пресека врши према критеријуму чврстоће, а у појединим случајевима и према критеријуму крутости.

Уколико се прорачун врши према критеријуму чврстоће, тада максимални напон у штапу не сме бити већи од дозвољеног тангенцијалног напона, који зависи од материјала од којег штап треба израдити, па је:

$$\tau_{\max} \leq \tau_d.$$

Како се максимални напон рачуна на основу:

$$\tau_{\max} = \frac{M_u}{I_0}\rho_{\max},$$

онда при димензионисању штапа мора бити задовољено

$$\frac{M_u}{I_0}\rho_{\max} \leq \tau_d. \tag{3.23}$$

На пример, у случају штапа константног кружног попречног пресека пречника d који је на крајевима оптерећен спреговима супротног смера, а истог интензитета $\mathfrak{M}$ је:

$$M_u = \mathfrak{M}; \quad I_0 = \frac{\pi d^4}{32}; \quad \rho_{\max} = \frac{d}{2}.$$

Тада је на основу израза (3.23):

$$\frac{16\mathfrak{M}}{\pi d^3} \leq \tau_d,$$

одакле пречник штапа мора задовољити услов:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16\mathfrak{M}}{\pi \tau_d}}.$$

Понекад се, посебно ако су у питању врло дугачка, а танка вратила, врши димензионисање на основу критеријума крутости, према ком се захтева да угао увијања штапа не буде већи од извесне задате дозвољене вредности, па је:

$$\theta \leq \theta_d.$$

Како се угао увијања одређује на основу (3.22), онда је:

$$\frac{M_u l}{G I_0} \leq \theta_d,$$

па се сада може извршити димензионисање. Уколико је штап кружног попречног пресека пречника d и дужине l и ако је оптерећен у сваком пресеку истим моментом увијања $\mathfrak{M}$, тада је:

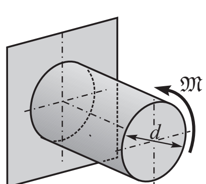
$$\frac{32\mathfrak{M} l}{G\pi d^4} \leq \theta_d,$$

а одавде је тражени пречник:

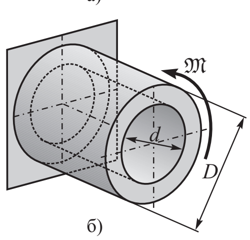
$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32\mathfrak{M} l}{G\pi\theta_d}}.$$

Уколико се димензионисање врши на основу оба критеријума, тада се као меродаван пречник мора усвојити онај који је већи.

Пример 3.12 *Упоредити утрошак материјала, максимални напон и угао увијања за два штапа, приказана на слици, која су исте дужине, направљена од истог материјала и оптерећена истим спрегом* $\mathfrak{M}$. *Први штап (слика а)) је кружног попречног пресека пречника* d*, док је други (слика б)) прстенастог попречног пресека, унутрашњег пречника* d*, а спољашњег* $D = \sqrt{2}d$.



а)



б)

► Штап кружног попречног пресека ће се означити са 1, а прстенастог са 2. Површине попречних пресека ова два штапа су:

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4}; \quad A_2 = \frac{\pi}{4}\left[(\sqrt{2}d)^2 - d^2\right] = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Дужина и површина попречног пресека ова два штапа су исте, па је иста и количина материјала утрошена за њихову израду.

Поларни моменти инерције ових штапова су:

$$I_{01} = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_{02} = \frac{\pi}{32}\left[(\sqrt{2}d)^4 - d^4\right] = 3\frac{\pi d^4}{32},$$

док удаљеност од осе штапа, тачака које су најудаљеније од ње износи:

$$\rho_{\max 1} = \frac{d}{2}; \quad \rho_{\max 2} = \frac{\sqrt{2}d}{2}.$$

Максимални напони су:

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{u1}}{I_{01}}\rho_{\max 1} = \frac{16\mathfrak{M}}{\pi d^3}; \quad \tau_{\max 2} = \frac{M_{u2}}{I_{02}}\rho_{\max 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{16\mathfrak{M}}{\pi d^3},$$

док су углови увијања:

$$\theta_1 = \frac{M_{u1}l}{GI_{01}} = \frac{32\mathfrak{M}l}{G\pi d^4}; \quad \theta_2 = \frac{M_{u1}l}{GI_{02}} = \frac{1}{3}\frac{32\mathfrak{M}l}{G\pi d^4}.$$

Иако је утрошак материјала за ова два штапа исти, цевасти штап (прстенастог попречног пресека) има боље карактеристике, тако да је код њега максимални напон 47% од максималног напона у првом штапу, док му је угао увијања три пута мањи. Због ових својстава и поред тога што га је теже направити, цевасти штап је у предности у ситуацијама где се тражи уштеда у тежини, на пример код авиона. ◀

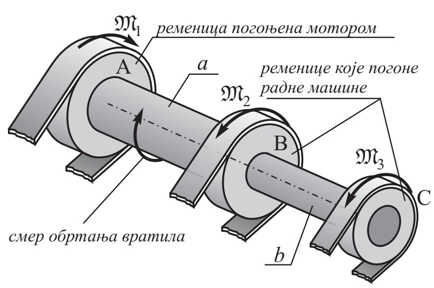
Примена теорије увијања на ротирајућа вратила

Тела која се проучавају у отпорности материјала се, исто као и у статици, налазе у равнотежи, дакле не крећу се. Тако се и приликом извођења израза који се односе на увијен штап, пошло од претпоставке да је тело у равнотежи. Међутим, штапови који су у практичним примерима оптерећени на увијање и који се називају вратила, обрћу се око своје осе, па очигледно нису у стању мировања. Зато се оправдано може поставити питање да ли се разматрана теорија увијања уопште и може применити у таквим случајевима? Да би се одговорило на то питање потребно је познавати извесне елементе динамике обртања тела око осе. Наиме, вратило које се обрће и које је изложено дејству спрегова, убрзаваће или успоравати у зависности од тога ког је знака резултанта (алгебарски збир) поменутих спрегова. Уколико је тај збир једнак нули вратило неће мењати брзину којом се обрће, дакле обртаће се константном угаоном брзином. Према томе, ако се вратило обрће константном угаоном брзином могуће је применити теорију увијања, која је изведена за тело које је у равнотежи. Одступања ће бити у случајевима брзоходних вратила, када до изражаја долазе и запреминске силе које настају због обртања, а о којима због обима овог курса неће бити речи.

Пример 3.13 *Вратило које је приказано на слици, обрће се константном угаоном брзином. За њега су причвршћене три ременице и то A коју покреће мотор и ременице B и C које покрећу радне машине. Ременице A и B су оптерећене спреговима:*

$$\mathfrak{M}_1 = 310Nm; \quad \mathfrak{M}_2 = 205Nm.$$

Извршити димензионисање вратила, користећи критеријум чврстоће, уколико је дозвољени напон челика од којег треба израдити вратило $\tau_d = 70MPa$. При томе занемарити губитке на лежајевима, који због упрошћавања скице нису ни приказани.



► Вратило се обрће константном угаоном брзином, па је неопходно да су сва три спрега у равнотежи. На основу овог услова је лако закључити да спрег на ременици C има вредност:

$$\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = 105Nm.$$

Момент увијања у делу штапа AB је $M_{u1} = \mathfrak{M}_1 = 310Nm$, док у делу BC износи $M_{u2} = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = 105Nm$. Пречник попречног пресека дела AB је:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{u1}}{\pi\tau_d}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 310 \cdot 10^3}{\pi \cdot 70}}mm = 28.3mm,$$

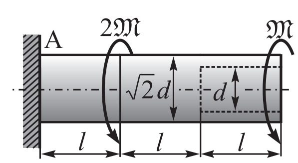
док за део BC износи:

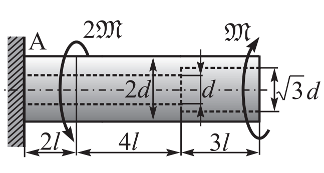
$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{u2}}{\pi\tau_d}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 105 \cdot 10^3}{\pi \cdot 70}}mm = 19.7mm.$$

◄

Задаци

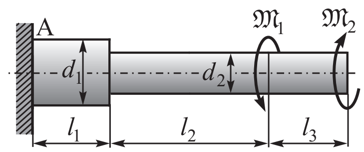
3.19 Штап промењљивог кружног и прстенастог попречног пресека је својим крајем A причвршћен за крути зид и изложен дејству спрегова интензитета $2\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$. Одредити максимални напон у штапу и угао увијања. Модул клизања материјала штапа је G.

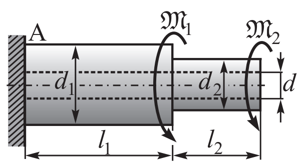




3.20 Штап промењљивог прстенастог попречног пресека је својим крајем A причвршћен за крути зид и изложен дејству спрегова интензитета $2\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$. Одредити максимални напон у штапу и угао увијања. Модул клизања материјала штапа је G.

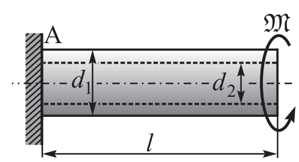
3.21 Штап промењљивог кружног попречног пресека пречника $d_1 = 32mm$ $d_2 = 20mm$ је својим крајем А причвршћен за крути зид. Штап је изложен дејству спрегова интензитета $\mathfrak{M}_1 = 100\ Nm$ и $\mathfrak{M}_2 = 60\ Nm$. Котиране дужине су: $l_1 = 200mm$, $l_2 = 500mm$, $l_3 = 250mm$. Одредити максимални напон у штапу и угао увијања. Штап је од челика чији је модул клизања $G = 7.5 \times 10^{10}\ N/m^2$.





3.22 Штап је својим крајем А причвршћен за крути зид и изложен дејству спрегова интензитета $\mathfrak{M}_1 = 80\ Nm$ и $\mathfrak{M}_2 = 110\ Nm$. Штап је пробушен тако да је отвор пречника $d = 25\ mm$. Димензионисати штап (одредити спољашње пречнике d_1 и d_2) ако је дозвољени напон материјала штапа $\sigma_d = 100\ N/mm^2$.

3.23 Штап од челика ($G = 7.5 \times 10^{10}\ N/m^2$) дужине $l = 1m$, причвршћен је својим крајем А за крути зид и изложен дејству спрега интензитета $\mathfrak{M} = 85\ Nm$. Спољашњи пречник штапа је $d_1 = 36\ mm$. Одредити унутрашњи пречник штапа d_2 уколико је услов да максимални угао увијања штапа не пређе вредност $\theta_g = 0,5°$. Колики би требао да буде пречник d_2 у случају да је интензитет спрега $\mathfrak{M} = 110\ Nm$?

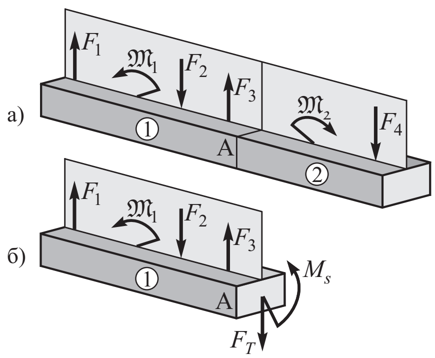


3.8 Савијање – дефиниција и основни појмови

Штап је оптерећен на савијање уколико је изложен дејству сила и спрегова који се налазе у једној равни која садржи осу штапа. При томе ће се разматрати само случајеви код којих је правац силе нормалан на осу штапа, као што је то приказано на Слици 3.42 а). Овакво савијање се назива и савијање силама, док се у случају да је штап оптерећен искључиво спреговима тада ради о чистом савијању.

Уколико се на штапу направи замишљени пресек А (Слика 3.42), штап ће се њиме поделити на делове 1 и 2, а на пресеку ће се појавити распоређене унутрашње силе. Посматраће се равнотежа дела штапа који је означен са

1. Уместо распоређених сила на пресеку, увешће се главни вектор и главни момент, који имају еквивалентно механичко дејство као и распоређене силе. Главни вектор и главни момент представљају меру оптерећења попречног пресека и називају се трансверзална сила и момент савијања. Будући да су ове две величине у равнотежи са оптерећењима која делују на леви (1) део штапа, онда се оне на основу познатих спољашњих оптерећења могу и израчунати. Исто разматрање се може применити и за десни (2) део штапа.



Слика 3.42: Штап оптерећен на савијање: а) штап као целина; б) равнотежа дела 1

Момент савијања се рачуна на основу:

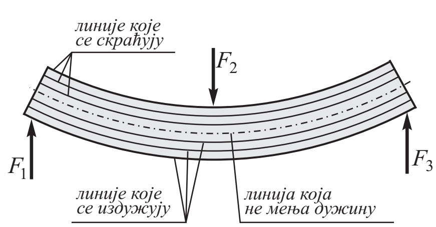
$$M_s = \sum M_i^l \quad \text{или} \quad M_s = \sum M_i^d,$$

где су M_i^l односно M_i^d моменти свих сила и спрегова који су са леве, односно десне стране пресека, у односу на сам пресек. При томе ће се користити конвенција о предзнаку момента према којој је момент силе или спрега са леве стране пресека позитиван уколико је смер момента исти као смер кретања казаљке на сату, док је са десне стране пресека момент супротног смера позитиван.

За трансверзалне силе важи:

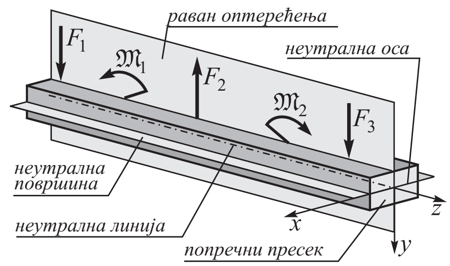
$$F_T = \sum F_i^l \quad \text{или} \quad F_T = \sum F_i^d,$$

што значи да треба сабрати силе које су са леве или са десне стране пресека. Према конвенцији о предзнаку силе, она ће у израз за трансверзалну силу ући као позитивна уколико је са леве стране пресека усмерена према горе, а са десне стране пресека према доле.



Слика 3.43: Линије паралелне са осом штапа мењају своју дужину

При савијању долази до деформације тако што оса штапа, која је у недеформисаном стању права, прелази у криву линију. При томе ће, уколико се посматрају линије на штапу, које су паралелне са осом штапа (Слика 3.43), доћи до промене њихових дужина. У приказаном случају ће се линије које су ближе горњем делу штапа скратити и у тачкама на тим линијама ће напон бити притисни, док ће се линије у доњем делу штапа издужити, па ће у тачкама на тим линијама напон бити затезни. Постојаће и линије које неће променити своју дужину, па тачке на њима неће бити ни оптерећене. Оне ће бити у једној површи која се назива *неутрална површина* (Слика 3.44). Раван у којој се налазе силе и спрегови се назива *раван оптерећења.* Линија која се добија пресеком равни оптерећења и неутралне површи назива се *неутрална линија.* Пресек посматраног попречног пресека са неутралном површином је неутрална оса. При проучавању савијања користиће се Декартов координатни систем, при чему ће оса z бити у правцу неутралне линије, оса x у правцу неутралне осе, док ће оса y бити у равни оптерећења.

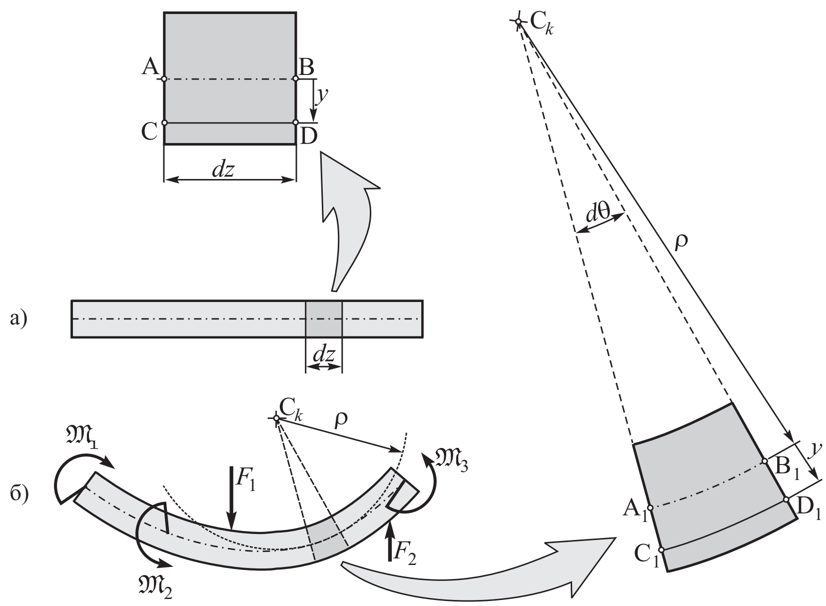


Слика 3.44: Основни геометријски појмови

Распоред нормалних напона по попречном пресеку штапа при савијању

При проучавању ломова, до којих долази при савијању у реалним условима, може се уочити да до почетне пукотине најчешће долази на горњој или доњој површини штапа и да се затим та пукотина проширује на цео попречни пресек. Овакви резултати указују на то да треба очекивати да је и напон највећи на тим местима, односно да он није равномерно распоређен по попречном пресеку.

Да би се одредило како су распоређени нормални напони по попречном пресеку, посматраће се елементарни део штапа издвојен из недеформисаног и деформисаног штапа (Слика 3.45). При савијању штапа ће се формирати неутрална линија и тада се свакој тачки те криве линије може приписати величина која се назива полупречник кривине ρ. Сваки елементарни део те линије се може представити као кружни лук врло мале дужине, а при томе је радијус тог лука управо полупречник кривине, док је центар кливине означен са C_k. На недеформисаном елементарном делу штапа ће се уочити тачке A и B, које припадају линији која ће при деформацији постати неутрална линија. Уочиће се и тачке C и D које су на линији паралелној са линијом коју дефинишу тачке A и B и на растојању y. Растојање између тачака A и B односно C и D износи dz. При деформацији елементарног дела, ове тачке прелазе у нове положаје који су означени са A_1, B_1, C_1 и D_1. Због хипотезе о равним пресецима (видети и Слику 3.11) тачке на бочним странама елементарног дела недеформисаног штапа ће и након деформације остати у равнима које су нормалне на неутралну линију. Трагови ових равни се секу у центру кривине C_k, на растојању ρ од неутралне линије, а угао између њих ће се означити са $d\theta$. Задатак је да се одреди колико ће се при савијању издужити дуж CD.



Слика 3.45: Деформације при савијању: а) недеформисани штап; б) деформисани штап

Полупречник кривине лука $\overset{\frown}{A_1B_1}$ је ρ, па је његова дужина:

$$\overset{\frown}{A_1B_1} = \rho \, d\theta.$$

Тачке A_1 и B_1 су на неутралној линији где нема деформација, па је дужина лука $\overset{\frown}{A_1B_1}$ иста као што је и растојање између тачака A и B, а самим тим и између тачака C и D. Према томе је:

$$\overline{CD} = \rho \, d\theta. \tag{3.24}$$

Лук C_1D_1, који има радијус $\rho + y$, има дужину:

$$\overset{\frown}{C_1D_1} = (\rho + y) d\theta. \tag{3.25}$$

Имајући у виду (3.24) и (3.25), издужење дужи CD је:

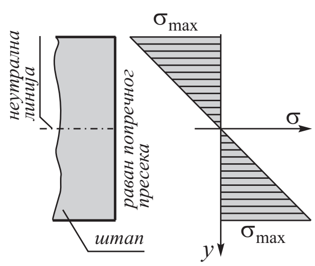
$$\Delta\overline{CD} = \overset{\frown}{C_1D_1} - \overline{CD} = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = y d\theta. \tag{3.26}$$

Уздужна дилатација (видети израз (3.6)) дужи CD је:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\overline{CD}}{\overline{CD}},$$

па се заменом (3.26) и (3.24) у овај израз и скраћивањем са $d\theta$ добија:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \tag{3.27}$$



Слика 3.46: Распоред нормалних напона по попречном пресеку

Користећи Хуков закон (3.7), на основу кога је:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

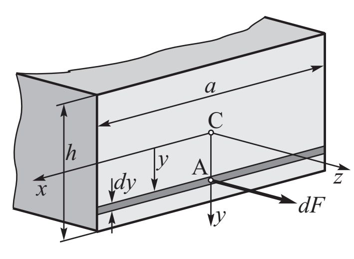
и заменом у (3.27) је коначно:

$$\sigma = \frac{E}{\rho}y. \tag{3.28}$$

Како је E физичка константа материјала од кога је штап направљен, а полупречник кривине ρ константна глобална величина за дати попречни пресек, онда се може закључити да ће нормални напон по попречном пресеку бити линеарна функција координате y (Слика 3.46). Дакле, што је тачка коју посматрамо удаљенија од неутралне површи, па самим тим има и већу координату y, у њој ће бити и већи интензитет напона, а највећи напон $\sigma_{\max}$ ће бити у тачкама које су најудаљеније од неутралне површи.

Одређивање интензитета нормалних напона

Посматраће се један попречни пресек штапа, који има правоугаони облик ширине a и висине h (Слика 3.47). Увешће се координатни систем $Cxyz$, где се оса x поклапа са осом симетрије, а тачка C тежиште попречног пресека. Раније је већ истакнуто да се као последица сабирања елементарних сила које делују на том пресеку добија трансверзална сила и момент савијања. У свакој тачки на попречном пресеку ће се појавити нормални и тангенцијални напон, али ће се у овом курсу пажња обратити само на нормалне напоне, који су у пракси најчешће знатно већи од тангенцијалних напона. Нормални напони σ за тачке у датом попречном пресеку зависе од координате y, а не и од координате x, што значи да је исти интензитет нормалних напона у тачкама које имају исту



Слика 3.47: Одређивање интензитета нормалних напона

координату y. Због тога ће се посматрати елементарна површина која је у облику бесконачно танке траке ширине dy. Напони у тачкама на овој елементарној површини су константни, па ће елементарна сила која делује на ту површину бити:

$$dF = \sigma \, dA = \sigma \, a \, dy.$$

Ова сила ће у односу на тачку C имати момент:

$$dM = y \, dF = y \, \sigma \, a \, dy,$$

који се коришћењем израза (3.28) може написати у облику:

$$dM = \frac{E}{\rho} a \, y^2 \, dy.$$

Добијени израз представља момент који стварају нормални напони са једне елементарне површине. Да би се одредио збирни момент који чине нормални напони са свих елементарних површина попречног пресека, потребно је извршити интеграцију претходног израза по координати y, која се мења у границама од $-h/2$ до $h/2$, па је:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{\rho} a \, y^2 \, dy = \frac{E}{\rho} \int_{-h/2}^{h/2} a \, y^2 \, dy. \tag{3.29}$$

Момент ових сила је једнак моменту савијања M_s у датом пресеку. Уколико се, поред тога уведе *аксијални момент инерције* за осу x који се дефинише са:

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} a \, y^2 \, dy, \tag{3.30}$$

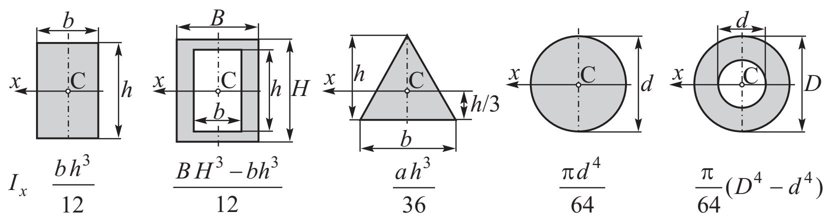
израз (3.29) прелази у:

$$M_s = \frac{E}{\rho} I_x.$$

Комбиновањем овог и израза (3.26) добија се да је интензитет нормалног напона:

$$\sigma = \frac{M_s}{I_x} y. \tag{3.31}$$

Решавањем интеграла у изразу (3.30) добија се да вредност аксијалног момента инерције за правоугаони пресек износи $I_x = a \, h^3/12$. Образац (3.31), на основу кога се одређује интензитет нормалних напона, може се применити и на штапове чији попречни пресек није правоугаони. У таквим случајевима се у поменути образац замењује вредност I_x која се налази у табели на Слици 3.48.



Слика 3.48: Аксијални моменти инерције за осу x за различите попречне пресеке

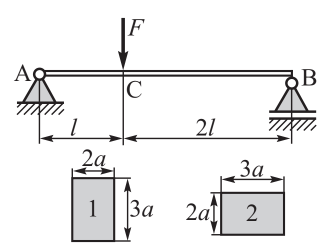
Максимални нормални напон при савијању

Момент савијања се у општем случају мења у зависности од посматраног попречног пресека, а његова највећа вредност се зове *максимални момент савијања* и биће означен са $M_{s\ \max}$. Код штапова који су константног попречног пресека максимални напон се јавља у пресеку у ком је максимални момент савијања. Поред тога, већ је истакнуто да је нормални напон утолико већи уколико су тачке на попречном пресеку удаљеније од неутралне осе, дакле уколико имају већу вредност координате y. Имајући ово у виду, и користећи израз (3.31), максимални напон ће се одредити применом обрасца:

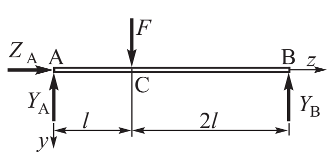
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{s\max}}{I_x} y_{\max}, \tag{3.32}$$

где је $y_{\max}$ удаљеност од неутралне осе тачака које су од ње најудаљеније.

Пример 3.14 *Штап AB, дужине 3l, ослоњен је крајевима A и B на непокретни, односно покретни ослонац и оптерећен концентрисаном силом у тачки C. Штап је правоугаоног попречног пресека са страницама дужине 2a и 3a. Одредити максимални нормални напон уколико је у првом случају штап постављен тако да је дужа страница попречног пресека (дужине 3a) вертикална, а у другом случају хоризонтална.*



▶ Штап ослоњен на приказани начин се назива *проста греда*. При решавању задатка ће се пре свега одредити реакције везе. Уклањањем веза и увођењем реакција веза, штап ће бити слободан, као што је приказано на слици, па се за њега могу написати три једначине равнотеже и то:



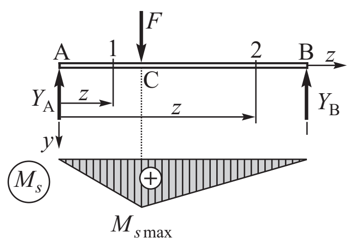
$$\sum Z_i = Z_A = 0;$$
$$\sum Y_i = -Y_A + F - Y_B = 0;$$
$$\sum M_A = -F\,l + 3Y_B\,l = 0.$$

На основу друге и треће једначине је:

$$Y_A = \frac{2F}{3}; \quad Y_B = \frac{F}{3}.$$

Да би се одредио момент савијања уочиће се један произвољан пресек на делу штапа АС, који ће се означити са 1. Удаљеност овог пресека од тачке А, а самим тим и од силе Y_A је дефинисана координатом z. Момент савијања у пресеку 1 је момент свих оптерећења у односу на пресек 1, која су са леве, или са десне стране пресека. Са леве стране пресека 1 је само сила Y_A, па је момент савијања:

$$M_{s1} = Y_A z = \frac{2F}{3} z.$$



Ово је момент савијања у пресецима који су на делу штапа АВ, односно за које важи да је $0 \leq z \leq l$. При томе се користила конвенција о знаку момента савијања, према којој је момент оптерећења која су са леве стране пресека позитиван уколико је смер исти као смер кретања казаљке на сату. Добијени момент савијања је линеарна функција од координате z и расте са порастом те координате. Вредности ове функције у тачкама А и С које представљају границе интервала су:

$$M_{sA} = M_{s1}(0) = 0; \quad M_{sC} = M_{s1}(l) = \frac{2Fl}{3}.$$

Уколико се уочи пресек 2, који је на делу штапа СВ, тада ће се при одређивању момента савијања са леве стране пресека увести и утицај силе F. Водећи рачуна о предзнаку момената ових сила, момент савијања у пресеку 2 је:

$$M_{s2} = Y_A z - F(z - l) = \frac{2F}{3} z - F(z - l) = F(l - \frac{z}{3}).$$

Добијени израз се користи у интервалу $l \leq z \leq 3l$ и он је линеарна функција од координате z. Вредности ове функције на границама интервала важења, у тачкама С и В су:

$$M_{sC} = M_{s2}(l) = \frac{2Fl}{3}; \quad M_{sD} = M_{s2}(3l) = 0.$$

Сада је могуће и нацртати дијаграм момента савијања за цео штап, који је приказан на слици. Дијаграм се по правилу црта испод штапа, тако да се позитивне вредности наносе надоле, испод нулте линије дијаграма. На основу дијаграма се закључује да је максимални момент савијања баш у пресеку С, односно да је:

$$M_{s\max} = M_{sC} = \frac{2Fl}{3}.$$

Аксијални моменти инерције за први и други случај попречног пресека су:

$$I_{x1} = \frac{2a(3a)^3}{12} = \frac{9}{2}a^4; \quad I_{x2} = \frac{3a(2a)^3}{12} = 2a^4,$$

док удаљеност најудаљенијих тачака од неутралне осе износи

$$y_{\max 1} = \frac{3}{2}a; \quad y_{\max 2} = a.$$

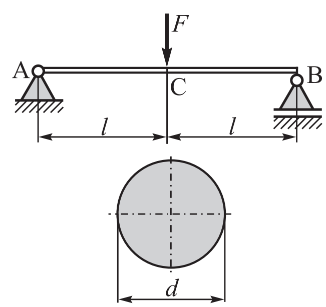
Дакле, максимални напони у првом и другом случају износе:

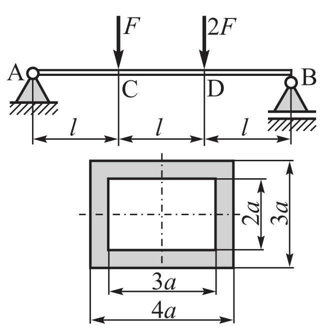
$$\sigma_{\max 1} = \frac{M_{s\max}}{I_{x1}} y_{\max 1} = \frac{2}{9}\frac{Fl}{a^3}; \quad \sigma_{\max 2} = \frac{M_{s\max}}{I_{x2}} y_{\max 2} = \frac{1}{3}\frac{Fl}{a^3}.$$

Упоређењем добијених вредности се може закључити да ће интензитет нормалног напона бити мањи у првом случају. Дакле, са становишта критеријума чврстоће погодније је попречни пресек оријентисати тако да је краћа страница хоризонтална, то јест нормална на раван оптерећења. ◄

Задаци

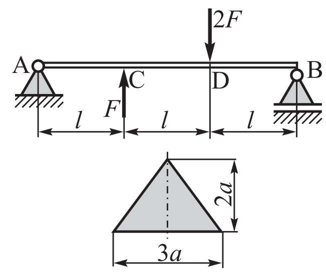
3.24 Носач AB приказан на слици, ослоњен је крајевима A и B на непокретни, односно покретни ослонац и оптерећен концентрисаном силом $F = 4\ kN$ у тачки C. Штап је кружног попречног пресека пречника $d = 5\ cm$ док је кота $l = 120\ cm$. Одредити максимални нормални напон.

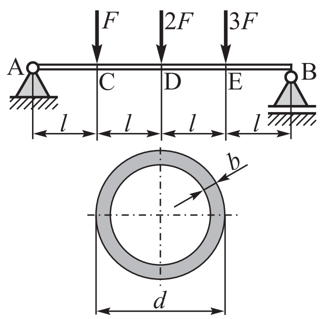




3.25 Носач AB приказан на слици, ослоњен је крајевима A и B на непокретни, односно покретни ослонац и оптерећен са концентрисаним силама интензитета F и $2F$ у тачкама C и D. Попречни пресек штапа је приказан на слици. Одредити максимални нормални напон.

3.26 Носач AB приказан на слици, ослоњен је крајевима A и B на непокретни, односно покретни ослонац и оптерећен са концентрисаним силама интензитета F и $2F$ у тачкама C и D. Попречни пресек штапа је у облику троугла приказаног на слици. Одредити максимални нормални напон.





3.27 Носач AB приказан на слици, ослоњен је крајевима A и B на непокретни, односно покретни ослонац и оптерећен са концентрисаним силама интензитета F, $2F$ и $3F$ у тачкама C, D и E, при чему је $F = 0,7\ kN$. Попречни пресек штапа је у облику цеви спољашњег пречника $d = 80\ mm$. Одредити дебљину зида цеви уколико је дозвољени напон $\sigma_d = 150\ N/mm^2$. Дужина l је $1100\ mm$.

Део II

Динамика

4

Кинематика тачке

Описивање процеса у природи подразумева праћење њихове временске еволуције и утврђивање законитости под којима се она одвија. Ове законитости су садржане у математичком моделу процеса. Када се оне утврде, пружа нам се могућност да на основу познавања стања проучаваног система на почетку процеса предвидимо како ће се он одвијати у будућности.

Да би се могао формирати математички модел неопходно је најпре уочити величине које су релевантне за посматрани процес. Њих ћемо звати *величине стања*. Промена величина стања током времена није спонтана– она је изазвана *дејствима*, узрочницима промене стања. Типичан пример дејства у механици јесу *силе*. Структура математичког модела се тада формално може приказати на следећи начин:

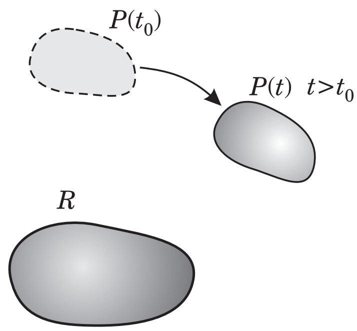
$$\frac{\Delta \textit{величине стања}}{\Delta t} = \textit{дејство}.$$

Исказано речима: прираштај (промена) величине стања током временског интервала Δt једнака је дејству оствареном током истог тог интервала. У даљем тексту ћемо видети да основни закони механике, али и модели других физичких и хемијских процеса, имају управо овакву структуру.

Циљ ове главе јесте упознавање са основним карактеристикама кретања материјалне тачке, односно величинама стања које су неопходне за њихово описивање. Део механике који се бави овом проблематиком–изучава кретање материјалних тела не узимајући у обзир дејства која утичу на њега–зове се *кинематика*.

4.1 Основни појмови кинематике

Механичко кретање представља најједноставнији вид кретања материје. Под механичким кретањем се подразумева *промена положаја једног тела у односу на друго, која се током времена одвија у простору*. Ова дефиниција нам говори да је за уочавање кретања неопходно имати *два тела*: тело чије кретање проучавамо, које ћемо звати *посматрано тело* (P), и тело у односу на које се посматра кретање[1] - њега ћемо звати *референтно тело* (R), видети Слику 4.1. Ако посматрано тело не мења свој положај у односу на референтно тело, онда кажемо да оно *мирује*.



Слика 4.1: Референтно тело (R) и посматрано тело (P)

Може се, наравно, поставити и питање кретања референтног тела. То мотивише и прву поделу кретања на:

- апсолутно кретање (код ког референтно тело мирује);
- релативно кретање (код ког се референтно тело креће).

Ову поделу треба схватити условно јер, као што је читаоцу сигурно познато, апсолутно непокретна тела у природи не постоје. Међутим, у техничким проблемима, којима ћемо се овде највише и бавити, може се сматрати да су непокретна сва тела која су везана за површину Земље.

Пошто се кретање посматраног тела одвија током времена, његов положај у математичком смислу представља функцију времена. Стога *време* t представља независно променљиву. Кретање се увек посматра од неког *почетног тренутка* t_0, па током кретања важи $t \geq t_0$. У механичким проблемима се усваја да је $t_0 = 0$, тако да ћемо сматрати да важи $t \geq 0$.

Кретање материјалне тачке. Током кретања[2] материјална тачка описује криву линију у простору која се зове *трајекторија*. С обзиром на облик трајекторије кретање материјалне тачке се грубо може поделити на:

- праволинијско (код ког је трајекторија права линија);
- криволинијско (чија је трајекторија крива линија).

[1] У механици се често каже да је *посматрач* везан за референтно тело.

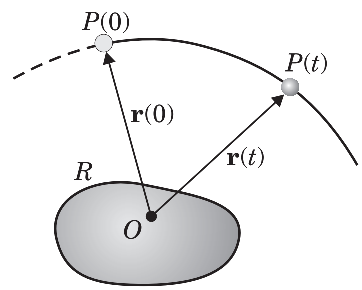
[2] У даљем тексту ћемо сматрати да је кретање посматраног тела апсолутно, ако се другачије не нагласи.

Иако праволинијско кретање може бити третирано као специјални случај криволинијског кретања, оно ће у наставку бити посебно проучено.

За описивање кретања материјалне тачке није неопходно имати на располагању цело референтно тело. Довољно је уочити једну његову тачку–*референтну тачку* O–и одредити положај посматране тачке P у односу на њу. Ово се чини помоћу *вектора положаја* $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ приказаног на Слици 4.2. Током кретања се овај вектор мења и по правцу, и по интензитету:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \tag{4.1}$$

па се може рећи да промена вектора положаја током времена описује кретање посматране материјалне тачке P, јер она представља његову крајњу тачку.



Слика 4.2: Кретање материјалне тачке

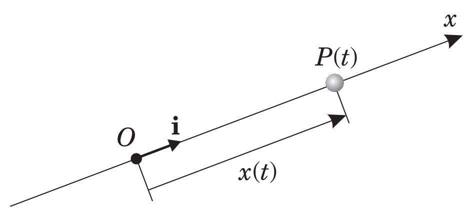
Када је у питању кретање материјалних тела, била она крута или деформабилна, у општем случају свака тачка тела описиваће другачију трајекторију. У случају крутих тела постоје одређена ограничења која трајекторије морају задовољити због услова крутости. Ипак, у наставку ћемо се осврнути и на кретање тела и упознаћемо се са одговарајућим поступцима његовог описивања.

4.2 Праволинијско кретање тачке

У овом делу текста ће се проучити праволинијско кретање материјалне тачке. По облику трајекторије оно представља најједноставнији вид кретања и зато ће нам послужити за увођење основних кинематичких појмова, који ће у наставку текста бити уопштени.

Параметарска једначина кретања

Нека материјална тачка P врши кретање по правој p. Да би се положај посматране тачке одредио на што једноставнији начин, референтна тачка O ће се усвојити као тачка на тој истој правој. Положај тачке P би тада могао бити одређен њеним растојањем $\overline{OP}$ од тачке O. То, међутим, није довољно за његово једнозначно одређивање. На основу податка о растојању није могуће одредити са које стране референтне тачке O на правој p се налази посматрана тачка. Стога се права p мора оријентисати–мора се усвојити координатна оса коју ћемо из традиционалних разлога означити са x. Тачка O ће тада представљати *координатни почетак*, а координата x тачке P, то јест растојање $\overline{OP}$ узето са одговарајућим знаком у зависности од тога на ком делу осе се тачка налази, једнозначно ће одредити положај тачке. Најзад, за потпуно одређивање координатне осе потребно је увести и јединични вектор који ћемо означити са $\mathbf{i}$. То је геометријски вектор јединичне дужине, $|\mathbf{i}| = 1$, који има правац координатне осе, а смер исти као смер осе. Овај вектор показује смер пораста координате коју меримо дуж уочене Ox-осе.



Слика 4.3: Положај материјалне тачке при праволинијском кретању

Током кретања положај посматране тачке се мења, па се са временом мења и координата која тај положај описује:

$$x = x(t). \tag{4.2}$$

Овом једначином, која се зове *параметарска једначина кретања*, у потпуности је описано праволинијско кретање материјалне тачке. Параметарска једначина кретања представља саставни део општијег, векторског описа кретања. Наиме, вектор положаја материјалне тачке која врши праволинијско кретање има следећи облик:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}. \tag{4.3}$$

На тај начин се већ код праволинијског кретања могу уочити све битне карактеристике кретања које имају векторски карактер.

Брзина материјалне тачке

Мада је познавање трајекторије материјалне тачке и параметарске једначине кретања (4.2) довољно за описивање кретања, постоје још неке карактеристике које употпуњују слику о њему.

Пример 4.1 *Кретање две материјалне тачке P_1 и P_2 описано је параметарским једначинама*

$$x_1(t) = v_0 t \quad и \quad x_2(t) = 3v_0 t,$$

где је $v_0 > 0$. *Одредити колико времена ће протећи од почетка кретања* $t_0 = 0$ *до тренутка када ће тачке стићи до положаја одређеног координатом* X.

► Приметимо најпре да обе тачке започињу кретање из координатног почетка, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, и да се током кретања удаљују од њега. Означимо са T_1 и T_2 тренутке времена у којима ће тачке P_1 и P_2 стићи до траженог положаја. Тада имамо:

$$x_1(T_1) = v_0 T_1 = X \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \frac{X}{v_0};$$
$$x_2(T_2) = 3v_0 T_2 = X \quad \Longrightarrow \quad T_2 = \frac{X}{3v_0}.$$

Очигледно је да је тачки P_1 потребно три пута више времена да стигне до наведеног положаја него тачки P_2. На пример, ако би било $X = 9m$, а $v_0 = 3m/s$, тада би тачке до крајњег положаја стигле за $T_1 = 3s$, односно $T_2 = 1s$. ◄

Овај пример показује да се две материјалне тачке дуж исте трајекторије не морају кретати на исти начин. Овде се може рећи да се тачка P_2 креће *брже* од тачке P_1, јер јој је за прелажење истог пута требало мање времена. Зато се као карактеристика кретања тачака може усвојити количник пређеног пута, у овом случају X, и времена потребног за његово прелажење, T_1 односно T_2:

$$v_1 = \frac{X}{T_1} = v_0; \quad v_2 = \frac{X}{T_2} = 3v_0.$$

Величине v_1 и v_2 ће представљати основу за увођење појма брзине.

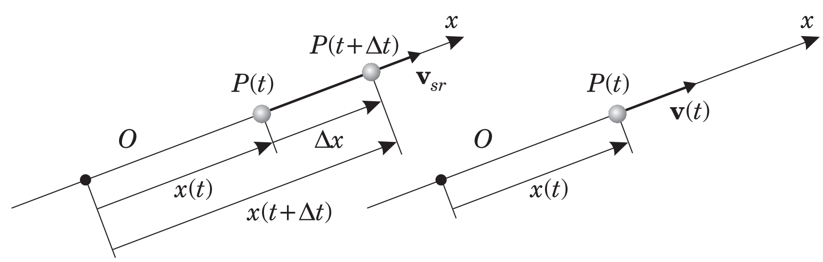
Брзина материјалне тачке је величина која карактерише промену положаја тачке током времена. Посматрајмо два положаја материјалне тачке $P(t)$ и $P(t + \Delta t)$ у два различита тренутка времена t и $t + \Delta t$ (Слика 4.4). Координате тачке P које одговарају овим временским тренуцима ће бити $x(t)$ и $x(t + \Delta t)$. Дефинишимо прираштај координате тачке P као:

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t).$$

Количник прираштаја координате Δx и временског интервала Δt у ком је он остварен зове се *средња брзина* материјалне тачке:

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Вредност средње брзине зависи од дужине временског интервала Δt током ког се посматра кретање. Зато она само *приближно* одређује промену положаја тачке. Са друге стране, пошто је $\Delta t > 0$ средња брзина нам говори о смеру кретања тачке: ако је $v_{sr} > 0$ ($v_{sr} < 0$), онда је и $\Delta x > 0$ ($\Delta x < 0$) па се тачка током интервала Δt креће у смеру пораста (опадања) координате x.



Слика 4.4: Брзина тачке при праволинијском кретању

Прецизнија информација о начину кретања тачке у неком тренутку времена се може добити ако се посматрају краћи временски интервали, односно ако се пређе на гранични процес $\Delta t \to 0$. На тај се начин долази до дефиниције *тренутне брзине*[3] тачке:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}. \tag{4.4}$$

Тачком изнад слова x означен је извод параметарске једначине (4.2) по времену, док количник диференцијала зависно и независно промењиве представља Лајбницову ознаку за први извод. Из једначине (4.4) се јасно види да брзина тачке представља први извод координате по времену. Као и код средње брзине, њен знак у неком тренутку времена говори, о смеру кретања тачке: ако је $v(t^*) > 0$ ($v(t^*) < 0$), онда се у тренутку t^* тачка креће у смеру пораста (опадања) координате. Брзина има димензије *дужина/време*, а јединица мере је m/s.

На овом месту се може увести и векторска дефиниција брзине. Пошто је положај материјалне тачке одређен вектором положаја $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}$, онда се *вектор брзине* материјалне тачке може дефинисати као први извод вектора положаја по времену[4]:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\mathbf{i} = v(t)\,\mathbf{i}. \tag{4.5}$$

Како је његова пројекција на $x-$осу $v(t)$, смер вектора брзине ће бити сагласан са смером кретања тачке у датом тренутку времена.

Убрзање материјалне тачке

Искуство је показало да брзина није једина величина која нам је потребна за описивање кретања материјалне тачке. Неопходно је, наиме, увести и величину која карактерише промену брзине током времена–*убрзање* материјалне тачке.

[3] У даљем тексту ће се изостављати придев тренутна.

[4] Приметимо да диференцирање вектора положаја по времену подразумева тражење извода производа $x(t)\,\mathbf{i}$. Пошто је јединични вектор $\mathbf{i}$ константан, извод се своди на производ константног вектора и извода координате.

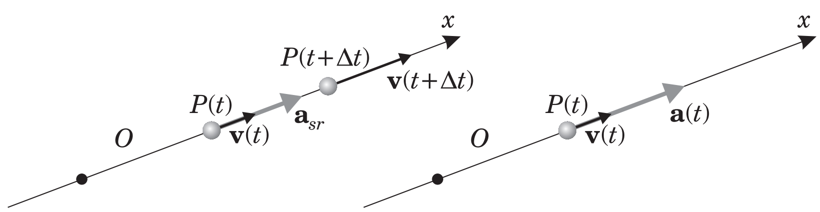
Посматрајмо опет два положаја материјалне тачке $P(t)$ и $P(t+\Delta t)$, приказана на Слици 4.5, у два различита тренутка времена t и $t+\Delta t$. Нека су брзине тачке P које одговарају овим временским тренуцима ће бити $v(t)$ и $v(t+\Delta t)$. Дефинишимо прираштај брзине тачке P током интервала Δt као:

$$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t).$$

Количник прираштаја брзине Δv и временског интервала Δt у ком је он остварен зове се *средње убрзање* материјалне тачке:

$$a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Као и код средње брзине, вредност средњег убрзања зависи од дужине временског интервала Δt током ког се посматра кретање. Међутим, за сада се не може донети суд о томе како се у том интервалу креће тачка, односно да ли се она креће убрзано или успорено[5].



Слика 4.5: Убрзање тачке при праволинијском кретању

Тренутно убрзање материјалне тачке се може одредити ако се пређе на гранични процес $\Delta t \to 0$. Тада се добија:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{4.6}$$

Из ове дефиниције се види да убрзање представља први извод брзине по времену, а други извод координате по времену. Убрзање има димензије *дужина/време*^{2}, а јединица мере је m/s^2.

По аналогији са векторском дефиницијом брзине може се увести и векторска дефиниција убрзања. Наиме, вектор убрзања се може дефинисати као први извод вектора брзине, односно други извод вектора положаја по времену:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{v}(t)\,\mathbf{i} \\ &= \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t)\,\mathbf{i} = a(t)\,\mathbf{i}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Овде се види да је убрзање $a(t)$ дефинисано једначином (4.6) заправо пројекција вектора убрзања $\mathbf{a}(t)$ на $x-$осу дуж које тачка врши кретање.

[5] На ово потање ће бити одговорено кроз анализу конкретног примера

Величине стања у механици. Да би се могао формирати математички модел неког процеса неопходно је идентификовати *величине стања* које га описују. У механичким проблемима величине које одређују стање кретања материјалне тачке јесу:

- вектор положаја и
- вектор брзине.

Вектор убрзања материјалне тачке не представља величину стања, већ описује промену стања система.

Пример 4.2 *Материјална тачка се креће сагласно следећој параметарској једначини:*

$$x(t) = 6t^2 - t^3.$$

а) Одредити брзину и убрзање тачке и нацртати дијаграме њихове промене (кинематичке дијаграме $x - t$, $v - t$ и $a - t$).

б) Одредити тренутак t^* у ком материјална тачка мења смер кретања.

в) Одредити пут који ће тачка прећи током првих 6 секунди кретања.

г) Одредити интервале времена током првих 6 секунди кретања у којима се тачка креће убрзано, односно успорено.

▶ За одређивање брзине и убрзања у неопходно је потражити први, односно други извод параметарске једначине кретања. У овом конкретном случају добија се:

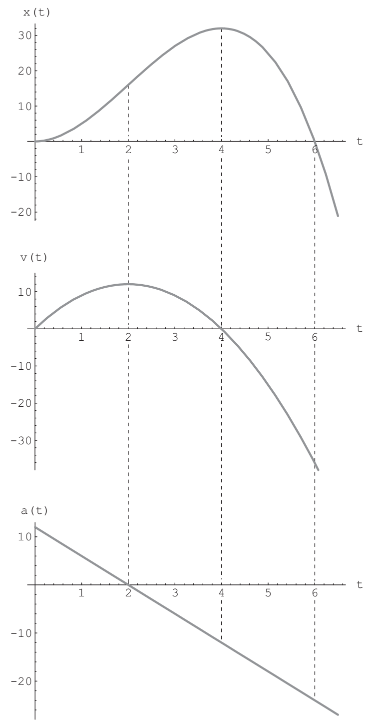
$$v(t) = \dot{x}(t) = 12t - 3t^2;$$
$$a(t) = \ddot{x}(t) = 12 - 6t.$$

Кинематички дијаграми овог кретања током првих 6 секунди дати су на Слици 4.6.

Тренутни смер кретања тачке одређен је смером вектора брзине. У случају праволинијског кретања, када је $\mathbf{v}(t) = v(t)\,\mathbf{i}$, смер кретања ће бити одређен знаком брзине $v(t)$. Ако тачка мења смер кретања, то значи да постоји интервал $[t_1, t_2]$ такав да је на његовом почетку брзина једног смера, на пример $v(t_1) > 0$ (или $v(t_1) < 0$), а на крају другог смера, $v(t_2) < 0$ (односно $v(t_2) > 0$). Будући да претпостављамо да се брзина мења непрекидно, мора постојати тренутак t^* у ком ће бити:

$$v(t^*) = 0.$$

Ако је то једини тренутак у интервалу $[t_1, t_2]$ који задовољава овај услов, онда можемо рећи да се материјална тачка у интервалу $[t_1, t^*)$ креће у једном смеру, док се у интервалу $(t^*, t_2]$ креће у супротном смеру. Тада се



Слика 4.6: Кинематички дијаграми праволинијског кретања тачке

каже да тачка мења смер кретања у тренутку t^*. У овом примеру тренутак промене смера кретања се одређује решавањем једначине:

$$v(t^*) = 12t^* - 3t^{*2} = 0.$$

Одавде се добијају два решења: прво, $t^* = 0$, одговара почетном тренутку кретања, док је друго, $t^* = 4s$, оно које се тражи у нашем случају. Добијени резултат се може потврдити и анализом $v - t$ кинематичког дијаграма на ком се јасно види тренутак промене знака брзине као тачка пресека графика функције $v(t)$ са $t-$осом.

Одређивање пређеног пута материјалне тачке се мора радити са посебном пажњом. Иако је тачка започела кретање из координатног почетка, $x(0) = 0$, пређени пут се не сме поистоветити са тренутном вредношћу координате која одређује њен положај. У овом примеру у тренутку $T = 6s$ имамо $x(T) = 0$, што може довести до исхитреног закључка да је пређени пут једнак нули[6]. Тренутна вредност координате не открива како се тачка кретала у интервалу $[0, T]$. Она је, као што се може видети на слици,

[6]Да би се уверили у неисправност закључка, замислимо следећу ситуацију: возач је сео у ауто, возио се 60 минута и вратио се на место са ког је пошао идући повратку истим

вршила кретање у смеру пораста координате у интервалу $[0, t^*)$, а потом у смеру њеног опадања у интервалу $(t^*, T]$. Зато се одређивање пређеног пута може поделити у следећа три корака:

1. одреде се подинтервали времена у којима тачка не мења смер кретања; рубне тачке подинтервала могу бити почетак и крај интервала у ком се рачуна пређени пут, као и тренуци у којима тачка мења смер кретања ($v(t^*) = 0$); у нашем примеру се укупни интервал $[0, T]$ може поделити на два подинтервала, $[0, t^*)$ и $(t^*, T]$, где је $t^* = 4s$;

2. одреди се пређени пут за сваки подинтервал истосмерног кретања; у случају праволинијског кретања он се израчунава као апсолутна вредност разлике координата на крају и на почетку интервала; овде то значи:

$$P_{[0,t^*)} = |x(t^*) - x(0)| = |32m - 0| = 32m;$$
$$P_{(t^*,T]} = |x(T) - x(t^*)| = |0 - 32m| = 32m;$$

3. укупни пређени пут се добија сабирањем путева пређених у подинтервалима истосмерног кретања; у нашем случају то даје резултат:

$$P_{[0,T]} = P_{[0,t^*)} + P_{(t^*,T]} = 64m.$$

Убрзано, односно успорено кретање се у механици дефинише на начин који је сагласан са нашом интуицијом. За кретање кажемо да је убрзано (успорено) када се повећава (смањује) интензитет брзине $|\mathbf{v}(t)| = |v(t)|$ без обзира на правац и смер кретања. То значи следеће[7]:

а) $|v(t)|$ расте $\Rightarrow$ кретање је *убрзано*;

б) $|v(t)|$ опада $\Rightarrow$ кретање је *успорено*.

Као што је познато, монотоност неке диференцијабилне функције се може утврдити анализом знака првог извода: ако је $\dot{f}(t^*) > 0$ ($\dot{f}(t^*) < 0$), онда је функција $f(t)$ монотоно растућа (опадајућа) у околини тачке t^*. Овај закључак се може проширити на интервале вредности независно промењиве у којима су задовољене горње неједнакости. Међутим, да би се избегло испитивање апсолутне вредности функције искористиће се чињеница да да су у погледу монотоности ненегативне функције $|v(t)|$ и $|v(t)|^2 = v^2(t)$

путем којим је ишао у одласку. Иако се вратио у "почетни положај" прешао је одређени пут. То се може уочити на два начина: а) показивач броја пређених километара ће показивати већу вредност на крају вожње него што је показивао на почетку; б) показивач нивоа горива у резервоару ће такође бити на нижем нивоу од оног на ком је био на почетку вожње–гориво се троши без обзира на смер кретања.

[7] Приметимо да критеријум убрзаног кретања даје интензитет брзине $|v(t)|$, а не њена пројекција $v(t)$.

потпуно еквивалентне[8]. Зато ће за испитивање карактера кретања бити коришћен први извод квадрата брзине који гласи:

$$\frac{d}{dt}v^2(t) = 2v(t)\dot{v}(t) = 2v(t)a(t).$$

Тада важи:

а) ако је $v(t)a(t) > 0$ кретање је *убрзано*;

б) ако је $v(t)a(t) < 0$ кретање је *успорено*.

Другим речима, кретање је убрзано ако су брзина и убрзање истог знака, а успорено ако су брзина и убрзање различитог знака. У нашем конкретном случају ће бити:

$$v(t) = \dot{x}(t) = 12t - 3t^2 \begin{cases} > 0 & t \in (0,4); \\ < 0 & t \in (4,6); \end{cases}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = 12 - 6t. \begin{cases} > 0 & t \in (0,2); \\ < 0 & t \in (2,6). \end{cases}$$

Одатле следи да ће кретање тачке бити убрзано у интервалима $(0,2)$ и $(4,6)$, а успорено у интервалу $(2,4)$. ◀

Инверзни проблем

У претходном примеру кретање материјалне тачке је било задато параметарском једначином кретања, а све остале кинематичке карактеристике (брзина и убрзање) у биле одређене њеним диференцирањем. Такав тип проблема се зове *директни* проблем. Ако је, међутим, задато убрзање тачке (или њена брзина), онда је за одређивање параметарске једначине кретања неопходно применити поступак интеграције који је инверзан поступку диференцирања. Овај тип проблема се зове *инверзни* проблем.

Нека је кретање материјалне тачке описано променом њеног убрзања током времена, $a = a(t)$. Пошто оно представља први извод брзине по времену, $\dot{v}(t) = a(t)$, брзина ће бити одређена интеграцијом убрзања:

$$v(t) = \int a(t)dt + C_1 = \hat{v}(t) + C_1. \tag{4.8}$$

Приметимо да је овде брзина добијена као неодређени интеграл убрзања, те да због тога у изразу (4.8) фигурише интеграциона константа C_1. У

[8] Ово тврђење се може доказати на следећи начин. Посматрајмо ненегативну функцију $f(t) \geq 0$. Њен квадрат ће такође бити ненегативна функција, $f^2(t) \geq 0$, а његов први извод ће бити $(f^2(t))^{\cdot} = 2f(t)\dot{f}(t)$. Пошто је $f(t) \geq 0$, а тачке у којима је $f(t) = 0$ представљају тачке локалног минимума, знак извода функције $f(t)$ биће исти као знак извода њеног квадрата $f^2(t)$.

следећем кораку је за одређивање кретања потребно извршити интеграцију израза за брзину, јер је $\dot{x}(t) = v(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)dt + C_2 = \int \hat{v}(t)dt + C_1 t + C_2 \\ &= \hat{x}(t) + C_1 t + C_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Једначине (4.8) и (4.9) описују сва могућа кретања материјалне тачке која су сагласна са убрзањем $a(t)$, зато што садрже интеграционе константе C_1 и C_2 које нису унапред одређене. Да би се оне одредиле неопходно је познавати стање кретања тачке у почетном тренутку времена t_0, тачније њен почетни положај $x(t_0) = x_0$ и почетну брзину $v(t_0) = v_0$. Ови подаци чине *почетне услове* проблема и неопходни су за једнозначно одређивање кретања тачке. За задате почетне услове интеграционе константе одређујемо решавањем система алгебарских једначина:

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \hat{v}(t_0) + C_1 = v_0; \\ x(t_0) &= \hat{x}(t_0) + C_1 t_0 + C_2 = x_0. \end{aligned}$$

Специјални случајеви праволинијског кретања

Од интереса за даљи рад је да проучимо неке специјалне случајеве праволинијског кретања. То ће бити једнолико (равномерно), једнакопроменљиво и хармонијско осцилаторно кретање.

Једнолико (равномерно) кретање

За материјалну тачки кажемо да врши једнолико кретање ако јој се брзина токо кретања не мења:

$$v(t) = v_0 = \text{const.} \tag{4.10}$$

Овај услов има неколико важних последица. Прво, током овог кретања тачка не мења смер кретања. Друго, убрзање тачке ће бити идентички једнако нули све време кретања:

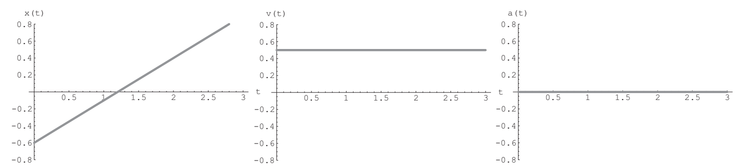
$$a(t) = \dot{v}(t) \equiv 0.$$

Најзад, параметарска једначина једноликог правилинијског кретања следи из једначина (4.8)-(4.9):

$$x(t) = v_0 t + x_0, \tag{4.11}$$

где је координатом $x_0 = x(0)$ одређен почетни положај тачке. На Слици 4.7 су приказани кинематички дијаграми једноликог праволинијског кретања за $x_0 = -0.6m$ и $v_0 = 0.5m/s$.

У литератури се често може срести формулација да је једнолико кретање оно при ком тачка у једнаким временским интервалима прелази иста растојања. Ово се може потврдити анлизом једначине (4.11). Ако са $\Delta t = t_2 - t_1$



Слика 4.7: Кинематички дијаграми једноликог кретања

означимо временски интервал у ком посматрамо кретање, онда следи:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = v_0(t_2 - t_1) = v_0 \Delta t,$$

што је и требало показати.

Једнолико кретање материјалне тачке је веома значајно и због чињенице да представља једно од два природна стања кретања[9]. Њега ће тачка вршити у одсуству било каквих сила, па се стога често назива и *инерцијално* кретање.

Једнакопроменљиво кретање

Под једнакопроменљивим кретањем се подразумева кретање које се врши константним убрзањем:

$$a(t) = a = \text{const.}$$

Током овог кретања брзина се равномерно мења:

$$v(t) = at + v_0,$$

а параметарска једначина кретања гласи:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0.$$

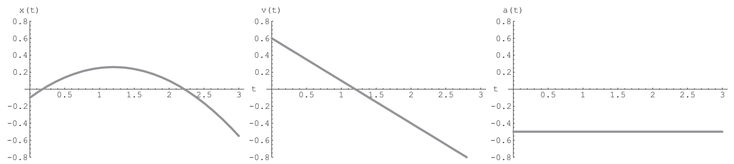
Ове релације се могу непосредно извести из једначина (4.8) і (4.9), а $v_0 = v(0)$ и $x_0 = x(0)$ представљају почетне вредности брзине и координате. Касније ће бити показано да у овај вид кретања спада кретање у хомогеном пољу силе Земљине теже када се занемаре отпори, а као специјални случај се јавља и слободни пад материјалне тачке. На Слици 4.8 су приказани кинематички дијаграми једнакопроменљивог праволинијског кретања за $x_0 = -0.1m$, $v_0 = 0.6m/s$ и $a_0 = -0.5m/s^2$.

За једнакопроменљиво кретање важи да се брзина тачке у једнаким временским интервалима има једнаке прираштаје:

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = a(t_2 - t_1) = a\Delta t,$$

где је $\Delta t = t_2 - t_1$.

[9]Друго природно стање је *мировање*.



Слика 4.8: Кинематички дијаграми једнакопроменљивог кретања

Хармонијско осцилаторно кретање

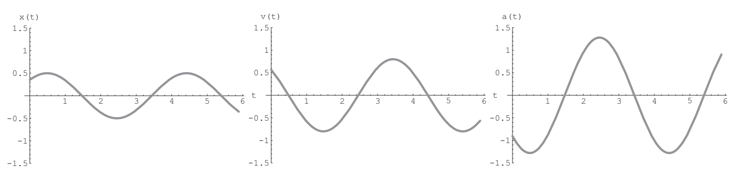
Када је кретање материјалне тачке описано параметарском једначином следећег облика[10]:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha),$$

каже се да тачка врши *хармонијско осциловање*[11]. Величине A, ω и α представљају *амплитуду*, *кружну фреквенцију* и *почетну фазу* осциловања, респективно. То су главне карактеристике овог вида кретања. Брзина и убрзање тачке при хармонијском осцилаторном кретању описане су следећим изразима:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha);$$
$$a(t) = \dot{v}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha).$$

Основно својство хармонијског осциловања јесте да се оно врши у ограниченој области, у овом случају $x \in [-A, A]$, и да се периодично понавља са периодом $T = 2\pi/\omega$. На Слици 4.9 приказани су кинематички дијаграми хармонијског осцилаторног кретања тачке за $A = 0.5m$, $\omega = 1.6s^{-1}$ и $\alpha = \pi/4$.



Слика 4.9: Кинематички дијаграми хармонијског осцилаторног кретања

4.3 Криволинијско кретање тачке

У овом делу текста пажња ће бити посвећена криволинијском кретању материјалне тачке у равни. Оно представља прво уопштење праволинијског

[10] Ово кретање еквивалентно може бити описано и косинусном функцијом, $x(t) = A\cos(\omega t + \beta)$, где је $\beta = \alpha - \pi/2$.

[11] Осцилаторно кретање не мора бити хармонијско.

кретања и појмови који буду били уведени приликом његове анализе могу се непосредно искористити и у анализи кретања материјалне тачке у простору.

Брзина и убрзање материјалне тачке

У претходном одељку је речено да је за описивање кретања материјалне тачке потребно увести вектор положаја $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ који одређује положај посматране тачке P у односу на референтну тачку O у било ком тренутку времена t. У контексту праволинијског кретања били су дефинисани вектори брзине и убрзања материјалне тачке (једначине (4.5) и (4.7)).

Код криволинијског кретања материјалне тачке, било да се оно врши у равни или у простору, *вектор брзине* материјалне тачке се дефинише као први извод вектора положаја по времену:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{4.12}$$

Будући да је трајекторија тачке у општем случају крива линија, поставља се питање правца и смера вектора брзине. Показаћемо да он има правац тангенте на трајекторију у посматраном положају материјалне тачке и да му је смер сагласан са тренутним смером кретања тачке. Посматрајмо два положаја материјалне тачке $P(t)$ и $P(t + \Delta t)$, приказана на Слици 4.10, која су одређена векторима положаја $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Дефинишимо вектор померања (прираштај вектора положаја) $\Delta\mathbf{r}$ материјалне тачке и вектор средње брзине $\mathbf{v}_{sr}$ на следећи начин:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t);$$
$$\mathbf{v}_{sr} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

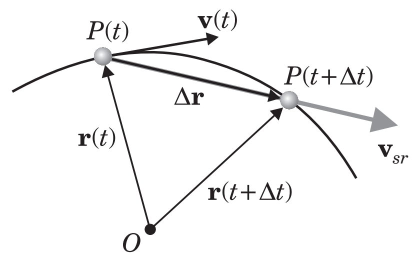
Вектор померања $\Delta\mathbf{r}$ има правац сечице на трајекторију, а вектор средње брзине $\mathbf{v}_{sr}$ се од њега разликује само по интензитету, јер у себи експлицитно садржи и информацију о временском интервалу током ког је остварено померање. Ако посматрамо гранични процес $\Delta t \to 0$ тачка $P(t + \Delta t)$ на трајекторији ће асимптотски тежити тачки $P(t)$, правац вектора средње брзине ће асимптотски тежити правцу тангенте на криву, а сам вектор средње брзине ће постати први извод вектора положаја:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Када је у питању убрзање материјалне тачке, *вектор убрзања* се дефинише као први извод вектора брзине, а други извод вектора положаја тачке по времену:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{4.13}$$

Пошто код криволинијског кретања вектор брзине мења и правац, и интензитет, вектор убрзања описује оба ова аспекта промене брзине током



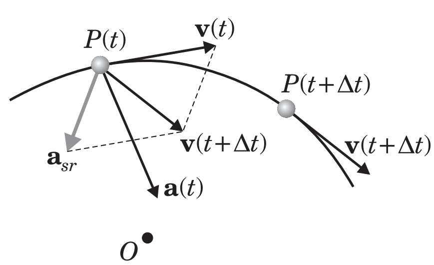
Слика 4.10: Брзина тачке при криволинијском кретању

времена. Покажимо зато да је вектор убрзања увек усмерен у удубљену (конкавну) страну трајекторије. Посматрајмо поново два положаја материјалне тачке, $P(t)$ и $P(t+\Delta t)$, и уочимо одговарајуће векторе брзина $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{v}(t+\Delta t)$, приказане на Слици 4.11. Дефинишимо прираштај вектора брзине $\Delta\mathbf{v}$ и вектор средњег убрзања $\mathbf{a}_{sr}$ на следећи начин:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t);$$
$$\mathbf{a}_{sr} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Ако се уочи правац тангенте на трајекторију у положају $P(t)$, онда се види да се лук трајекторије од ње до тачке $P(t+\Delta t)$, за довољно мало Δt, цео налази у једној полуравни чији је руб правац тангенте[12]. Очигледно, вектори $\Delta\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}_{sr}$ ће бити усмерени ка полуравни у којој се налази тачка $P(t+\Delta t)$. Овакво усмерење вектора средњег убрзања ће бити очувано и у граничном процесу $\Delta t \to 0$ када вектор $\mathbf{a}_{sr}$ постаје вектор тренутног убрзања:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}}(t).$$



Слика 4.11: Убрзање тачке при криволинијском кретању

[12] Може се рећи и да је тачка "скренула" ка тој полуравни, односно да се трајекторија "закривила" ка њој.

Брзина и убрзање у Декартовом координатном систему

Да би се криволинијско кретање материјалне тачке могло и квантитативно испитати неопходно је посматрати кретање у односу на неки координатни систем. Посматрајмо најпре кретање тачке у односу на Декартов правоугли координатни систем (Слика 4.12). Усвојимо да се координатни почетак поклапа са референтном тачком O и усвојимо координатне осе Ox и Oy са одговарајућим јединичним векторима $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Тада се вектор положаја материјалне тачке може описати на следећи начин:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}. \tag{4.14}$$

Пројекције вектора положаја на осе Декартовог координатног система представљају параметарске једначине кретања тачке:

$$x = x(t); \quad y = y(t). \tag{4.15}$$

Вектор брзине, као први извод вектора положаја по времену, има следећи облик[13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} \\ &= v_x(t)\,\mathbf{i} + v_y(t)\,\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Са $v_x(t)$ и $v_y(t)$ означене су пројекције вектора брзине на осе Декартовог координатног система које су једнаке изводима параметарских једначина кретања (4.15) по времену:

$$v_x(t) = \dot{x}(t); \quad v_y(t) = \dot{y}(t). \tag{4.17}$$

Интензитет брзине се одређује помоћу пројекција као модуо вектора брзине:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}. \tag{4.18}$$

Вектор убрзања се добија диференцирањем вектора брзине (4.16) и гласи:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \ddot{x}(t)\,\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\,\mathbf{j} \\ &= a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

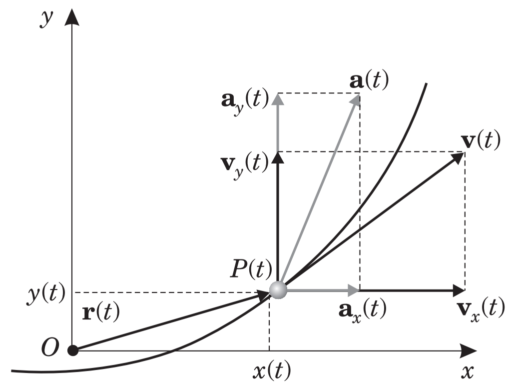
Пројекције убрзања $a_x(t)$ и $a_y(t)$ добијају се као први изводи пројекција брзина (4.17), односно други изводи параметарских једначина (4.15):

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t); \quad a_y(t) = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t). \tag{4.20}$$

Интензитет убрзања се, попут интензитета брзине, одређује помоћу пројекција као модуо вектора убрзања:

$$|\mathbf{a}(t)| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t)}. \tag{4.21}$$

[13] Овде су, као и код праволинијског кретања тачке, коришћена правила о изводу збира и изводу производа константе и функције.



Слика 4.12: Брзина и убрзање тачке у односу на Декартов координатни систем

Пример 4.3 *Кретање материјалне тачке је описано параметарским једначинама кретања:*

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - t; \quad y(t) = \frac{t}{2}.$$

Одредити:

а) трајекторију материјалне тачке;

б) тренутак $t^* > 0$ у ком ће се тачка наћи на $y-$оси;

в) векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у произвољном тренутку времена t;

г) векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у тренутку t^*.

▶ Да би се одредила трајекторија тачке неопходно је елиминисати време из параметарских једначина кретања. У овом примеру се то може лако извести јер је $t = 2y$. Уврштавањем ове релације у једначину за координату x добија се[14]:

$$x(y) = 2y^2 - 2y.$$

На овај начин добијена је једначина криве линије[15] дуж које се креће материјална тачка, али трајекторија, у општем случају, још није у потпуности описана. Наиме, под трајекторијом се подразумева крива линија коју тачка описује током кретања, а оно се посматра од тренутка $t_0 = 0$. Другим речима, треба утврдити које вредности могу имати координате[16] x и y за

[14]Елиминација времена из параметарских једнчина кретања није увек могућа. Ако се може извршити, онда се могу добити једначине кривих у три различита облика: два експлицитна, $y = y(x)$ или $x = x(y)$, и имплицитном, $F(x, y) = 0$.

[15]Ова крива се у домаћој литератури често назива *линија путање*.

[16]У математичком смислу овде се ради о одређивању области вредности (кодомена) функција $x(t)$ и $y(t)$ ако је област дефинисаности (домен) одређен неједнакошћу $t \geq 0$.

$t \geq 0$. У овом случају лако се види да важи $2y = t \geq 0$, одакле следи $y \geq 0$. Са друге стране, једначином $x(t) = t^2/2 - t$ описана је парабола у $x - t$ равни, одакле се лако може показати да важи $x \geq -1/2$. Неједнакостима:

$$x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad y \geq 0$$

одређена је *област кретања* материјалне тачке. Она заједно са једначином криве одређује трајекторију.

Положај тачке и тренутак времена у ком ће се она наћи на $y-$оси лако се може утврдити анализом графика трајекторије. Међутим, боље је формулисати *аналитички критеријум* којим ће се одредити овај тренутак. Пошто је у питању правоугли координатни систем, у тренутку t^* у ком ће се тачка наћи на $y-$оси важиће:

$$x(t^*) = 0.$$

Одавде се решавањем одговарајуће једначине добијају следећа решења:

$$\frac{t^{*2}}{2} - t^* = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1^* = 0;\ t_2^* = 2s.$$

Пошто нас интересује тренутак $t^* > 0$, усвојићемо $t^* = 2s$

Одредимо сада брзину и убрзање у призвољном тренутку времена. Пројекције брзине ће бити:

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = t - 1; \quad v_y(t) = \dot{y}(t) = \frac{1}{2},$$

па ће вектор брзине и његов интензитет бити:

$$\mathbf{v}(t) = (t-1)\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}\,\frac{m}{s};$$
$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{t^2 - 2t + \frac{5}{4}}\,\frac{m}{s}.$$

Пројекције убрзања су:

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = 1; \quad a_y(t) = \ddot{y}(t) = 0,$$

а вектор убрзања и његов интензитет гласе:

$$\mathbf{a}(t) = 1\,\mathbf{i}\,\frac{m}{s}; \quad |\mathbf{a}(t)| = 1\,\frac{m}{s}.$$

Брзина и убрзање у тренутку $t^* = 2s$ се добијају непосредним уврштавањем ове вредности у добијене резултате који важе у било ком тренутку времена. Тако се добија:

$$v_x(t^*) = \dot{x}(t^*) = 1\,\frac{m}{s}; \quad v_y(t^*) = \dot{y}(t^*) = \frac{1}{2}\frac{m}{s};$$
$$\mathbf{v}(t^*) = 1\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}\,\frac{m}{s}; \quad |\mathbf{v}(t^*)| = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\frac{m}{s},$$

док убрзање у том тренутку има следеће вредности:

$$a_x(t^*) = \ddot{x}(t^*) = 1\,\frac{m}{s^2}; \quad a_y(t^*) = \ddot{y}(t^*) = 0,$$
$$\mathbf{a}(t^*) = 1\,\mathbf{i}\,\frac{m}{s^2}; \quad |\mathbf{a}(t^*)| = 1\,\frac{m}{s^2}.$$

Приметимо да се пројекције убрзања, а самим тим и вектор убрзања и његов интензитет, не мењају током времена. Зато и у тренутку $t^* = 2s$ имају исте вредности као у сваком другом тренутку времена. Поред тога, лако се може показати да вектор брзине пада у правац тангенте на трајекторију. Пошто је $y'(x) = 1/x'(y)$, а $y^* = 1m$ када је $x^* = 0$, добија се да је $x'(y^*) = 2$, односно $y'(x^*) = 1/2 = \tan\varphi^*$, где је φ^* угао нагиба тангенте у односу на $x-$осу. У исто време угао нагиба вектора брзине у односу на $x-$осу је $\tan\theta^* = v_y(t^*)/v_x(t^*) = 1/2$, што значи да је $\theta^* = \varphi^*$. ◀

Природне компоненте убрзања тачке

Видели смо у претходној анализи да вектор брзине има правац тангенте на трајекторију у посматраној тачки, док је вектор убрзања усмерен у удубљену страну трајекторије. Истовремено, Декартов координатни систем се уводи *a priori* - пре било какве анализе саме трајекторије. У том смислу било би "природније" да се брзина и убрзање разлажу на компоненте од којих би једна имала правац тангенте на трајекторију, а друга правац нормалан на њу. Ово је основа за увођење *пратећег диедра*[17] јединичних вектора и *природних компонената убрзања.* Да би приближили ову идеју најпре ћемо анализирати један пример.

Пример 4.4 *Материјална тачка врши кретање по кругу полупречника R сагласно следећим параметарсим једначинама:*

$$x(t) = R\cos\varphi(t); \quad y(t) = R\sin\varphi(t),$$

где је $\varphi(t)$ два пута диференцијабилна функција времена t. Одредити векторе брзине и убрзања у призвољном тренутку времена и одредити њихове пројекције на правац тангенте и правац нормале на круг.

▶ Покажимо, најпре, да је трајекторија тачке заиста круг. Ако се параметарске једначине квадрирају и саберу добиће се:

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi = R^2,$$

што представља једначину круга полупречника R са центром у координатном почетку. Угао φ је угао који вектор положаја тачке образује са $x-$осом, видети Слику 4.13.

[17]Када тачка врши кретање у простору мора се увести *пратећи триедар* јединичних вектора.

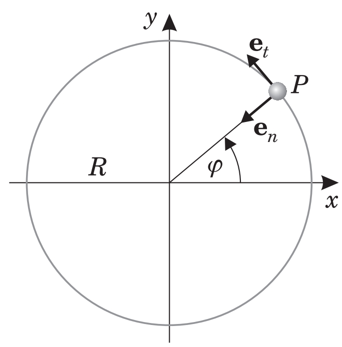
Диференцирањем параметарских једначина добијају се пројекције вектора брзине на осе Декартовог координатног система:

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -R\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t); \quad v_y(t) = \dot{y}(t) = R\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t),$$

а сам вектор брзине је облика (4.16), $\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j}$. Пројекције вектора убрзања гласе:

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -R\ddot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) - R\dot{\varphi}^2(t)\cos\varphi(t);$$
$$a_y(t) = \ddot{y}(t) = R\ddot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) - R\dot{\varphi}^2(t)\sin\varphi(t),$$

док је сам вектор описан изразом (4.19), $\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j}$.



Слика 4.13: Пратећи диједар тачке при кретању по кругу

Уочимо сада посматрану тачку P у произвољном положају и "вежимо" за њу два пратећа јединична вектора која се крећу заједно са њом: вектор $\mathbf{e}_t$ има правац тангенте на круг и усмерен је у страну пораста угла φ, а вектор $\mathbf{e}_n$ има правац нормале, односно полупречника, и усмерен је ка центру круга. Лако се показује да су њихове пројекције на осе Декартовог координатног система[18]:

$$\mathbf{e}_t = -\sin\varphi(t)\,\mathbf{i} + \cos\varphi(t)\,\mathbf{j};$$
$$\mathbf{e}_n = -\cos\varphi(t)\,\mathbf{i} - \sin\varphi(t)\,\mathbf{j},$$

а због ортогоналности имамо $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_n = 0$.

Разложимо вектор брзине на правце нормале и тангенте:

$$\mathbf{v} = v_t\mathbf{e}_t + v_n\mathbf{e}_n.$$

Пројекције v_t и v_n ће бити одређене коришћењем скаларног производа, а на основу пројекција вектора на осе Декартовог координатног система:

$$v_t = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_t = -v_x(t)\sin\varphi(t) + v_y\cos\varphi(t) = R\dot{\varphi}(t);$$
$$v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_n = -v_x(t)\cos\varphi(t) - v_y\sin\varphi(t) = 0.$$

[18]Приметимо да вектори $\mathbf{e}_t$ и $\mathbf{e}_n$ нису константни вектори: њима само интензитет остаје непромењен, док се правац мења током кретања. Може се показати да важе следеће релације између њихових извода: $\dot{\mathbf{e}}_t(t) = \dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_n$ и $\dot{\mathbf{e}}_n(t) = -\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_t$

Као што се и очекује, брзина има пројекцију само на правац тангенте, па имамо:

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{e}_t = R\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_t.$$

Ако се вектор убрзања разложи на исти начин:

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{e}_n,$$

онда се и пројекције убрзања a_t и a_n могу одредити помоћу скаларног производа:

$$a_t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_t = -a_x(t)\sin\varphi(t) + a_y\cos\varphi(t) = R\ddot{\varphi}(t);$$
$$a_n = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_n = -a_x(t)\cos\varphi(t) - a_y\sin\varphi(t) = R\dot{\varphi}^2(t).$$

Важно је уочити везу између брзине $v(t) = R\dot{\varphi}(t)$, тангентног убрзања $a_t(t)$ и нормалног убрзања $a_n(t)$:

$$a_t(t) = R\ddot{\varphi}(t) = \dot{v}(t); \quad a_n(t) = R\dot{\varphi}^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}.$$

Одавде се види да тангентно убрзање представља извод пројекције брзине на правац тангенте, док нормално је убрзање једнако количнику квадрата брзине и полупречника круга R. Имајући ово у виду може се рећи да тангентно убрзање одражава промену интензитета брзине, а нормално промену њеног правца.

Да бисмо јасно мотивисали даљу анализу, уочимо још једну интересантну релацију. Ако се уведе дужина кружног лука s која одговара централном углу φ, онда важи $s = R\varphi$, односно $\varphi = s/R$. Пошто је релација између s и φ линеарна, лако се показује да важи:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} = \kappa.$$

Величина κ се зове *кривина* криве линије. Код круга је она константна и једнака реципрочној вредности његовог полупречника. Полупречник круга се у литератури назива посебним именом - *полупречник (радијус) кривине.* ◀

Резултати добијени у анализи кретања тачке по кругу на природан начин се уопштавају на кретање тачке дуж било какве криволинијске трајекторије. Да би се овај поступак могао остварити неопходно је *знати трајекторију* посматране тачке. Затим се на самој трајекторији мора уочити референтна тачка, означимо је са O', односу на коју ће се одређивати положај посматране тачке. Он ће бити одређен дужином лука криве $O'P$. При томе се мора дефинисати позитивни и негативни део криве да би *лучна координата* $s = O'P$ једнозначно одредила положај тачке, као што је показано на Слици 4.14. Кретање тачке је тада описано само једном параметарском једначином:

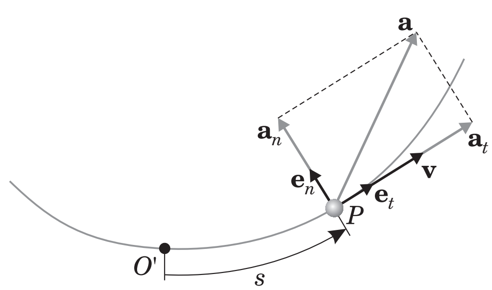
$$s = s(t). \tag{4.22}$$

Уочимо сада пратећи диедар посматране тачке код ког је динични вектор тангенте $\mathbf{e}_t$ има правац тангенте на трајекторију и оријентисан је у смеру пораста лучне координате s, док је јединични вектор нормале $\mathbf{e}_n$ усмерен у удубљену страну трајекторије. Тада се може показати да вектор брзине има следећи облик:

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\,\mathbf{e}_t = \dot{s}(t)\,\mathbf{e}_t. \tag{4.23}$$

Видимо да је пројекција вектора брзине на правац тангенте једнака првом изводу лучне координате по времену:

$$v(t) = \dot{s}(t). \tag{4.24}$$



Слика 4.14: Лучна координата и пратећи диједар тачке при криволинијском кретању

У исто време се и вектор убрзања може разложити на правце одређене јединичним векторима пратећег диедра. Тада се добија:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= a_t(t)\,\mathbf{e}_t + a_n(t)\,\mathbf{e}_n\\ &= \dot{v}(t)\,\mathbf{e}_t + \frac{v^2(t)}{R_k}\,\mathbf{e}_n = \ddot{s}(t)\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2(t)}{R_k}\,\mathbf{e}_n,\end{aligned} \tag{4.25}$$

а tангентно и нормално убрзање су одређени следећим релацијама:

$$a_t(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t); \quad a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R_k} = \frac{\dot{s}^2(t)}{R_k}. \tag{4.26}$$

Са R_k је у једначини (4.26) означен полупречник кривине трајекторије у посматраном положају. То је геометријска карактеристика криве и у околини одређеног положаја посматране тачке игра исту улогу коју је играо полупречник круга у Примеру 4.4.

Иако је у једначинама (4.23)-(4.26) наглашена експлицитна зависност од времена t само за изводе лучне координате, не треба заборавити да и јединични вектори $\mathbf{e}_t$ и $\mathbf{e}_n$, као и полупречник кривине R_k, такође зависе од t. Уочимо угао φ који вектор $\mathbf{e}_t$ образује са неким фиксираним правцем, на пример хоризонталом. Овај угао се може посматрати у функцији лучне координате, $\varphi = \varphi(s)$, или као функција времена, имајући у виду једначину (4.22), $\varphi = \varphi(s(t)) = \varphi(t)$. Тада се може показати да важи:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R_k(s)} = \kappa(s), \tag{4.27}$$

односно:

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\varphi}(t)\,\mathbf{e}_n = \frac{v}{R_k}\,\mathbf{e}_n; \quad \dot{\mathbf{e}}_n = -\dot{\varphi}(t)\,\mathbf{e}_t = -\frac{v}{R_k}\,\mathbf{e}_t.$$

И овде је, као и у примеру, са κ означена кривина криве линије.

Основна препрека у практичном одређивању природних компоненти убрзања јесте непознавање експлицитног облика параметарске једначине (4.22). Наиме, кретање је најчешће описано у односу на Декартов или неки други координатни систем, па се поставља питање могућности одређивања тангентног и нормалног убрзања и полупречника кривине трајекторије без претходног одређивања зависности $s = s(t)$. Зато треба приметити да у општем случају важи $\mathbf{v}(t)/|\mathbf{v}(t)| = \pm\mathbf{e}_t$. Ако усвојимо да је у посматраном тренутку времена $\mathbf{v}(t)/|\mathbf{v}(t)| = \mathbf{e}_t$, онда се тангентно убрзање може одредити на следећи начин:

$$a_t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_t = \mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \tag{4.28}$$

Са друге стране, пошто је интензитет вектора убрзања (4.25) одређен следећом релацијом:

$$|\mathbf{a}(t)| = \sqrt{a_t^2(t) + a_n^2(t)},$$

нормално се убрзање се може израчунати помоћу обрасца:

$$a_n(t) = \sqrt{|\mathbf{a}(t)|^2 - a_t^2(t)}. \tag{4.29}$$

Најзад, ако се знају брзина и нормално убрзање из једначине $(4.26)_2$ се може одредити и полупречник кривине трајекторије[19]:

$$R_k(t) = \frac{v^2(t)}{a_n(t)}, \tag{4.30}$$

имајући у виду да је $v^2(t) = |\mathbf{v}(t)|^2$.

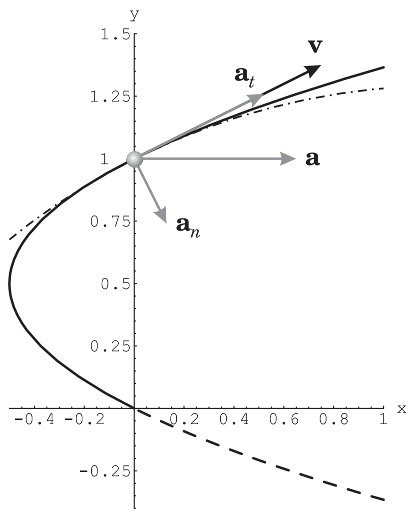
Поступак одређивања природних компонената убрзања и полупречника кривине трајекторије, описан једначинама (4.28)-(4.30), погодно је применити када кретање тачке није описано помоћу лучне координате. Најважнији корак у томе представља одређивање тангентног убрзања. На пример, ако је кретање описано у односу на Декартов координатни систем, онда се брзина, убрзање и њихови интензитети могу одредити помоћу једначина (4.16)-(4.21). Тада из (4.28) следи да је тангентно убрзање:

$$a_t(t) = \frac{v_x(t)a_x(t) + v_y(t)a_y(t)}{\sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}}.$$

[19]Овај поступак се у литератури зове *кинематичко одређивање* полупречника кривине.

Са овим резултатом се потом лако могу одредити нормално убрзање (4.29) и полупречник кривине трајекторије (4.30).

Пример 4.5 *За кретање материјалне тачке описано у Примеру 4.3 одредити природне компоненте убрзања и полупречник кривине трајекторије у тренутку t^* у ком се тачка нашла на $y-$оси.*



Слика 4.15: Кинематичка анализа криволинијског кретања тачке

► На основу резултата добијених у Примеру 4.3 знамо да пројекције брзине и убрзања и њихови интензитети у тренутку $t^* = 2s$ гласе:

$$v_x(t^*) = 1\,\frac{m}{s};\quad v_y(t^*) = \frac{1}{2}\,\frac{m}{s};\quad |\mathbf{v}(t^*)| = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\frac{m}{s};$$
$$a_x(t^*) = 1\,\frac{m}{s^2};\quad a_y(t^*) = 0;\quad |\mathbf{a}(t^*)| = 1\,\frac{m}{s^2}.$$

Тада се лако показује да је тангентно убрзање:

$$a_t(t) = \frac{v_x(t^*)a_x(t^*) + v_y(t^*)a_y(t^*)}{|\mathbf{v}(t^*)|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{m}{s^2}.$$

Сада се из једначине (4.29) може одредити нормално убрзање:

$$a_n(t^*) = \sqrt{|\mathbf{a}(t^*)|^2 - a_t^2(t^*)} = \left[1^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{m}{s^2}.$$

Најзад, помоћу једначине (4.30) се израчунава полупречник кривине:

$$R_k(t^*) = \frac{v^2(t^*)}{a_n(t^*)} = \frac{5\sqrt{5}}{4}\,m.$$

Смисао полупречника кривине је следећи: он одређује полупречник круга чији се центар налази на правцу нормале на трајекторију, има заједничку тангенту са трајекторијом и најбоље апроксимира криву у околини посматране тачке[20].

За вежбу читалац може одредити природне компоненте убрзања и полупречник кривине трајекторије у тренутку $t_1 = 1s$ у ком се тачка налази у темену параболе. ◀

Задаци

4.1 Материјална тачка врши праволинијско кретање које је описано следећом параметарском једначином:

$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40,$$

где је x у метрима m, а време t у секундама s. Ако је тачка започела кретање у тренутку $t_0 = 0$, одредити тренутак t_1 у ком је променила смер кретања. Одредити положај тачке $x(t_1)$ у тренутку промене смера, као и пут који је тачка прешла од почетка кретања до тог тренутка. Колико је убрзање тачке у тренутку t_1?

4.2 *Осцилаторно кретање материјалне тачке.* Кретање материјалне тачке описано је параметарском једначином:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Одредити брзину и убрзање тачке у произвољном тренутку времена t и нацртати кинематичке дијаграме. Одредити тренутке у којима тачка мења смер кретања, положаје тачке у тим тренуцима и њена убрзања.

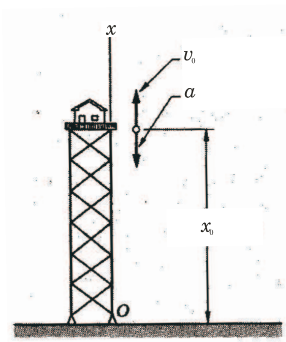
Нека је стање кретања тачке у тренутку t_1 одређено положајем x_1 и брзином v_1. Колико времена треба да протекне до тренутка t_2 у ком ће стање кретања тачке бити исто као у тренутку t_1, $x_2 = x_1$, $v_2 = v_1$ (овај временски интервал се зове *период осциловања*)?

4.3 Кретање материјалне тачке је описано истом параметарском једначином као у претходном задатку. Ако са x_0 означимо почетни положај тачке $x(0)$, а са v_0 њену почетну брзину $v(0)$, показати да важи:

$$\tan\alpha = \frac{x_0\omega}{v_0}; \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}.$$

[20] Зато је полупречник кривине круга једнак самом полупречнику круга, а полупречник кривине праве линије је бесконачно велик (односно кривина κ је једнака нули).

4.4 Лопта је бачена вертикално увис са платформе која се налази на висини $20m$ изнад површине земље. Почетна брзина лопте је била $v_0 = 15m/s$. Знајући да је убрзање тачке константно ($9.81m/s^2$) и усмерено на доле одредити:



а) брзину и положај тачке у произвољном тренутку времена t;

б) висину лета h тачке и тенутак t_1 у ком је она достигнута;

в) тренутак t_2 удара тачке о земљу и брзину приликом удара;

г) нацртати кинематичке дијаграме $x-t$ и $v-t$.

4.5 Праволинијско кретање материјалне тачке описано је следећом параметарском једначином:

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

Одредити:

а) тренутак t_1 у ком ће тачка први пут проћи кроз координатни почетак;

б) брзину и убрзање тачке у том тренутку;

в) пут који ће тачка прећи током првих 6 секунди кретања.

4.6 Материјална тачка се креће праволинијски и при томе се убрзање мења на следећи начин:

$$a(t) = a_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right),$$

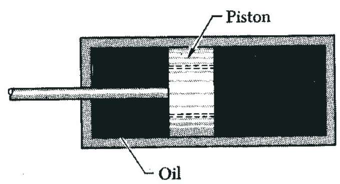
$a_0 - m/s^2$, $\tau - s$. Одредити кретање тачке (параметарску једначину) ако се зна да је тачка започела кретање у тренутку $t_0 = 0$ из координатног почетка и да је имала брзину v_0, $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Одредити положај и брзину тачке у тренутку у ком је њено убрзање једнако нули.

4.7 Лифт се креће вертикално навише једнакоубрзано и после $5s$ кретања стигао је на висину $6m$. Ако се зна да се убрзање лифта састоји од гравитационог убрзања $g = 9.81m/s^2$ усмереног на доле и убрзања a усмереног на горе, одредити колико је при овом кретању било убрзање a које је остварено помоћу електромотора.

4.8 Кретање клипа кроз цилиндар у кочионом систему описано је параметарском једначином:

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right),$$

$v_0 - m/s$, $k - s^{-1}$. Одредити:



а) брзину и убрзање клипа у произвољном тренутку времена;

б) брзину клипа у почетном тренутку t_0 и тренутак t_1 у ком ће брзина клипа пасти на половину почетне вредности;

в) пут који је клип прешао од почетка кретања до тог тренутка.

4.9 *Задатак за размишљање.* Камен је пуштен да пада у бунар без почетне брзине. Звук пада у воду се чуо $4.7s$ касније. Ако се зна да је гравитационо убрзање $g = 9.81m/s^2$, а брзина простирања звука $v_Z = 336m/s$, одредити дубину бунара h.

4.10 Кретање тачке описано је параметарским једначинама кретања:

$$x(t) = 4t - 2t^2; \quad y(t) = 3t - 1.5t^2.$$

Одредити област кретања и трајекторију материјалне тачке. Одредити положај, брзину и убрзање тачке у тренутцима $t_0 = 0$, $t_1 = 1s$ и $t_2 = 2s$.

4.11 За кретање тачке описано параметарским једначинама:

$$x(t) = at; \quad y(t) = bt^2,$$

одредити трајекторију тачке, векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у призвољном тренутку времена. Одредити тангентно и нормално убрзање и полупречник кривине трајекторије у тренутку $t_1 = 1s$ од почетка кретања.

4.12 Кретање тачке је описано параметарским једначинама:

$$x(t) = 5\cos t; \quad y(t) = 3 - 5\sin t.$$

Одредити:

а) трајекторију тачке;

б) положај, брзину и убрзање тачке у тренуцима $t_1 = \pi/2s$ и $t_2 = \pi s$;

в) тангентно и нормално убрзање и полупречник кривине трајекторије у произвољном тренутку времена t.

4.13 За кретање тачке описано параметарским једначинама:

$$x(t) = 3 + 4\sin t; \quad y(t) = 2 + 5\cos t,$$

одредити трајекторију, а затим одредити положај, брзину и убрзање, као и тангентно и нормално убрзање и полупречник кривине трајекторије у пошетном тренутку $t_0 = 0$.

4.14 Кретање тачке је описано параметарским једначинама:

$$x(t) = t^2 - 1; \quad y(t) = t.$$

Одредити:

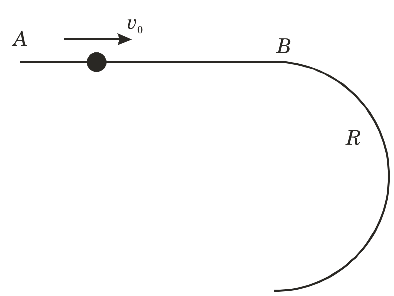
а) трајекторију тачке;

б) тренутак t^* у ком ће се тачка наћи на $y-$оси;

в) векторе брзине и убрзања у тренутку t^*;

г) тангентно и нормално убрзање и полупречник кривине трајекторије у тренутку t^*.

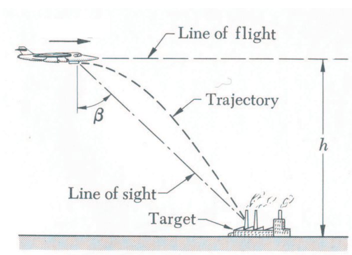
4.15 Воз се креће дуж правлинијског дела пруге AB једнолико брзином $v_0 = 65km/h$. У положају B прелази на криволинијски део пруге који је кружног облика полупречника $R = 1250m$. Колико је убрзање воза на криволинијском делу трајекторије ако се зна да је наставио да се креће без промене интензитета брзине v_0? Колико би било његово убрзање да је полупречник круга $R = 800m$? На коју вредност v_1 би требало смањити интензитет брзине да убрзање воза дуж кружне трајекторије полупречника $R = 800m$ буде истог интензитета као при кретању брзином v_0 по трајекторији полупречника $R = 1250m$?



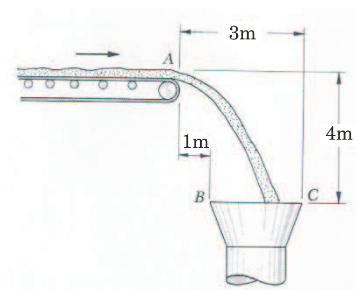
4.16 Пројектил избачен из авиона креће се сагласно следећим параметарским једначинама:

$$x(t) = v_0 t; \quad y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

Одредити брзину, убрзање, природне компоненте убрзања и полупречник кривине трајекторије у почетном тренутку $t_0 = 0$. Претпоставити да је $x-$оса везана за тло, а $y-$оса усмерена навише.



4.17 Песак се са тракастог транспортера избацује у левкасту посуду повезану са вертикалном цеви. Ако се зрнца песка крећу дуж трајекторија описаних у задатку 4.16, одредити у којим се границама може мењати брзина v_0 тракастог транспортера да би песак сигурно упао у посуду.



4.18 Материјална тачка се креће сагласно следећим параметарским једначинама:

$$x(t) = a \cos kt; \quad y(t) = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt).$$

Одредити трајекторију тачке, као и њену брзину и убрзање у тренутку t_1 у ком је први пут пресекла $y-$осу.

4.19 *Коси хитац - основни балистички проблем.* Пројектил избачен са површине земље се креће сагласно следећим параметарским једначинама:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha; \quad y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

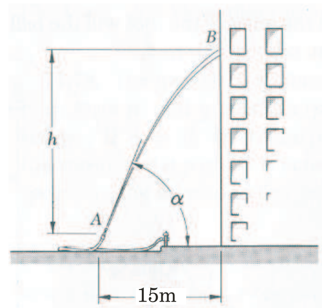
где је v_0 почетна брзина, α угао елевације, а g гравитационо убрзање.

а) Показати да је трајекторија тачка парабола чија је је једначина:

$$y(x) = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

б) Одредити навјећу висину лета тачке - y_{max}.

в) Одредити место на ком ће пројектил поново ударити у земљу (домет хица). Колики треба да буде угао елевације да би домет хица био максималан?



4.20 Ватрогасно црево избацује млаз воде брзином $v_0 = 25m/s$. Ако се зна да је црево од запаљене зграде удаљено $15m$, одредити максималну висину коју може да досегне млаз воде, као и одговарајући угао α.

5

Динамика тачке: Њутнови закони

Динамика је област механике која се бави проучавањем кретања материјалних објеката и дејствима која том приликом настају[1]. Највише простора ће бити посвећено динамици најједноставнијег модела материајлног објекта - динамици материјалне тачке. Основне идеје и концепти који ту буду били развијени касније ће бити уопштени и примењени у анализи кретања система материјалних тачака, крутих и деформабилних тела.

5.1 Њутнови закони механике

Основни закони динамике материјалне тачке су *Њутнови закони.* Они у оквирима класичне механике имају статус аксиома. Иако је већина читалаца упозната са њима, овде ћемо их поновити у облику који ће бити погодан и за даља уопштавања.

Основне динамичке величине

Уведимо најпре неке појмове и динамичке величине потребне за јасније разумевање Њутнових закона и њихове примене у динамичкој анализи.

Стање кретања и принцип одређености

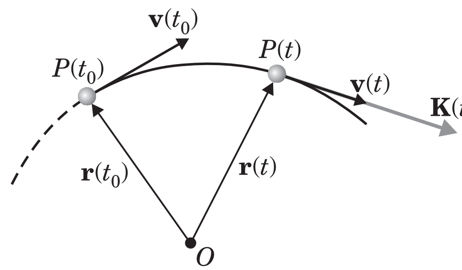
У анализи кинематике материјлне тачке је наговештено да су величине које одређују њено *стање кретања* било ком тренутку времена вектор положаја $\mathbf{r}(t)$ и вектор брзине $\mathbf{v}(t)$. Поред тога, кретање се увек проучавало

[1]Подсетимо се: у статици су проучавани услови равнотеже материјалних објеката под дејством сила, као и деформације тела које настају у стању мировања; у кинематици, као делу динамике, проучава се кретање материјалних објеката *независно* од дејстава која се током кретања јављају.

почев од почетног тренутка t_0, односно важило је $t \geq t_0$. Тиме је целокупна *предисторија кретања*, то јест кретање које се догодило пре почетног тренутка $t < t_0$ остала изван оквира анализе.

Овај поступак налази своје оправдање у *Њутн-Лапласовом принципу одређености.* У примени на материјалну тачку он тврди следеће:

Стање кретања материјалне тачке у почетном тренутку t_0, $\mathbf{r}(t_0)$ *и* $\mathbf{v}(t_0)$, *једнозначно одређује њено потоње кретање* $\mathbf{r}(t)$, $t > t_0$.



Слика 5.1: Илустрација принципа детерминизма

На Слици 5.1 је илустрован принцип детерминизма—испрекиданом линијом је приказан део трајекторије материјалне тачке који припада предисторији кретања. Принцип одређености се непосредно може уопштити на кретање система материјалних тачака и крутих тела[2]. Он нам говори и да саставни део формулације једног механичког проблема чини познавање почетног стања кретања[3]—*почетних услова* $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$.

Маса и количина кретања

Већ је напоменуто да маса представља један од основних концепата механике. Грубо говорећи, она одражава количину материје садржану у неком телу[4]. Јединица мере за масу је *килограм*, и то је основна јединица SI система.

Истакнимо овде два важна својства масе. Прво, сматраћемо да је маса једне материјалне тачке *константна*, $m = \text{const}$. Друго, ако се посматра *систем материјалних тачака* $P_1, \ldots, P_N$, чије су масе $m_1, \ldots, m_N$, онда ће

[2]Напоменимо да се код деформабилних тела допушта постојање модела који узимају обзир понашање система које је претходило почетном тренутку. Такви материјали се зову *материјали са меморијом.*

[3]Ово, између осталог, механику чини физичком науком - да би се почетни услови неког кретања познавали морају бити *измерени.*

[4]Иако се ова формулација може сматрати застарелом—под знак питања је могу ставити савремена сазнања о структури материје, као и релативистичка и квантна физика—она ће за наше потребе бити сасвим задовољавајућа

укупна маса система M бити једнака збиру маса појединих тачака:

$$M = m_1 + \cdots + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Другим речима, маса је *адитивна скаларна величина.*

Иако је речено да је брзина $\mathbf{v}(t)$ једна од величина стања кретања, мора се нагласити да га она описује само у кинематичком смислу - не садржи су себи информацију о материјалним својствима посматране тачке. Зато се уводи појам *количине кретања* као динамичке карактеристике стања кретања. Она се дефинише као производ масе материјалне тачке и њене брзине:

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}. \tag{5.1}$$

Из саме дефиниције је јасно да две материјалне тачке које имају једнаке брзине, а различите масе, неће имати једнаке количине кретања[5]. Ову величину је у динамику увео Њутн, а видећемо да ће она и њена уопштења играти кључну улогу у целокупној динамичкој анализи.

Њутнови закони

Формулишимо сада Њутнове законе механике. Иако се сматрају темељима класичне механике, они се односе само на материјалу тачку. Ослањајући се на њих, Ојлер је читав век после Њутна поставио основе кинематике и динамике крутог тела.

Први Њутнов закон—закон инерције

Први Њутнов закон, познат и као закон инерције, био је пре Њутна познат још Галилеју. Он гласи:

Тачка ће остати у стању мировања или једноликог праволинијског кретања све док под дејством силе не буде принуђена да то стање промени.

Њиме се постулирају два *природна стања кретања*—мировање и једнолико праволинијско кретање—која ће тачка вршити ако на њу не дејствују никакве силе. Понашање тачке ће зависити од њеног стања кретања у почетном тренутку: ако је у тренутку t_0 мировала, онда ће мировати и за $t > t_0$; ако се у тренутку t_0 кретала брзином $\mathbf{v}_0$, онда ће наставити да се креће константном брзином која је једнака почетној:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t,\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

[5] То се може илустровати једноставним примером. Замислите да сте искорачили на пешачки прелаз и у истом тренутку угледали како вам се једнаком брзином, рецимо $30km/h$, са леве стране приближавају бицикл и аутобус. Аутобус ћете несумњиво доживети као већу претњу за вашу безбедбост због неупоредиво веће количине кретања.

Иако је у стварности незамислива ситуација у којој на тачку не би дејствовале никакве силе, закон инерције се може применити на материјлну тачку изложену дејству система сила чија је резултанта једнака нули[6]:

$$\mathbf{F}_r = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}.$$

Најзад, треба рећи да *инерција* представља тенденцију тела да задржи своје тренутно стање кретања. У том смислу се *маса* може третирати као мера за инерцију тела. Да би се стање кретања променило мора постојати дејство које утиче на његову промену. На тај начин први Њутнов закон постулира силу као дејство које изазива промену стања кретања.

Други Њутнов закон—основни закон динамике

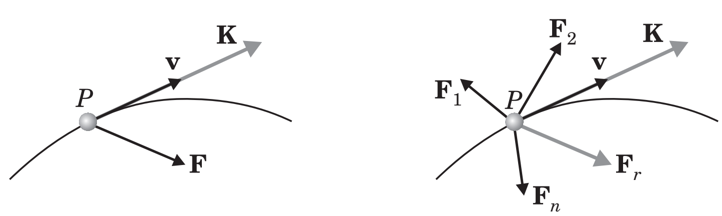
Други Њутнов закон представља основни закон—основни аксиом механике. Он постулира да је сила, као узрочник промене стања кретања, једнака промени количине кретања током времена:

Промена количине кретања материјалне тачке једнака је сили која на ту тачку дејствује:

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{5.2}$$

Имајући у виду дефиницију количине кретања (5.1) и претпоставку да је маса материјалне тачке константна, $m = \text{const}$. одакле следи $\dot{m} = 0$, извод количине кретања по времену се може записати у облику $\dot{\mathbf{K}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}$. Тада се други Њутнов закон може изразити на познати начин:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{5.3}$$



Слика 5.2: Илустрација другог Њутновог закона

Приметимо најпре да се закон инерције може добити као последица другого Њутновог закона. Ако на тачку не дејствују никакве силе, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,

[6] Ова чињеница је у статици материјалне тачке коришћена за формулисање основног услова равнотеже.

онда важи[7]:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = m\mathbf{v} = \text{const.}$$

Пошто је $m = \text{const.}$, одавде следи да ће се тачка под наведеним условима кретати константном брзином или ће мировати (ако је $\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

Ако је тачка изложена дејству система сила, као што је приказано на Слици 5.2, њихово дејство се може заменити резултантом, па ће се тачка кретати сагласно другом Њутновом закону под дејством резултанте:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i.$$

Трећи Њутнов закон—закон акције и реакције

Закон акције и реакције постулира силу као *узајамно* механичко дејство. Он гласи:

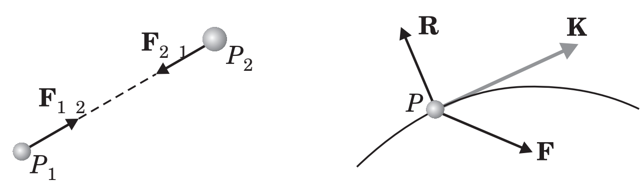
Две материјалне тачке дејствују једна на другу силама истог правца, једнаких интензитета, а супротних смерова:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \tag{5.4}$$

Ако се констатује да на неку материјалну тачку (тело) десјтвује сила, онда се мора указати на друго тело (тачку) која представља "извор" те силе[8]. Ово указује на два начина на која се може остварити дејство силе:

1. директни - непосредним контактом два тела;

2. индиректни - посредством физичког поља (типичан пример је дејство гравитационог поља Земље на тела у њеној близини).



Слика 5.3: Трећи Њутнов закон и везано кретање тачке

[7]Ова релација представља *први интеграл* једначине (5.3), јер је највиши извод за један ред нижи него у полазној једначини. О првим интегралима ће више речи бити касније.

[8]Изузетак чине само инерцијалне силе које настају приликом релативног кретања тачке у односу на неинерцијални координатни систем. Њихов се "извор" налази у преносном кретању покретног координатног система.

Напомена о везаном кретању тачке. Закон акције и реакције се налази у основи принципа ослобађања од веза. У случају непосредног контакта посматрано тело и веза (тело које ограничава или потпуно спречава његово кретање) узајамно дејствују једно на друго силама у сагласности са трећим Њутновим законом. Самим тим се и други Њутнов закон (5.3) за везано кретање тачке мора допунити:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \tag{5.5}$$

Са $\mathbf{F}$ је означена резултанта активних сила, а са $\mathbf{R}$ резултанта реакција веза.

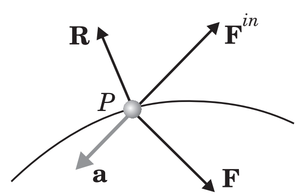
Даламберов принцип

Посматрајмо везано кретање материјалне тачке описано једначином (5.5) и дефинишимо *инерцијалну силу*:

$$\mathbf{F}^{in} = -m\mathbf{a}. \tag{5.6}$$

Она је по интензитету једнака производу масе тачке и њеног убрзања (изводу количине кретања), али је супротног смера. Инерцијална сила је специфична и по томе што, за разлику од активних сила и реакција веза, не одражава дејство других тела, већ представља последицу кретања. Коришћењем овог појма једначина (5.5) се може записати у облику:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{F}^{in} = \mathbf{0}. \tag{5.7}$$



Слика 5.4: Даламберов принцип

Добијена једначина представља математички запис Даламберовог принципа који гласи:

Ако у сваком тренутку кретања активним силама које дејствују на материјалну тачку и реакцијама веза додамо инерцијалну силу, онда ће тај систем сила бити у равнотежи и на њега се могу применити сви закони статике.

Као што се види, Даламберов принцип одражава тенденцију да се једначине динамике напишу у форми једначина статике и решавају методама карактеристичним за испитивање равнотеже тела[9].

Згодна илустрација примене Даламбервог принципа јавља приликом одређивања облика слободне површине течности у посуди која се обрће око вертикалне осе. У стању мировања слободна површина је равна и хоризонтална. Међутим, ако се посуда обрће константном угаоном брзином ω, могу се уочити инерцијалне силе у сваком делићу (елементарној запремини) течности. Тада је могуће мировање течности у односу на посуду (релативна равнотежа), али ће се услед присуства инерцијалних сила слободна површина течности закривити и имати облик обртног параболоида[10].

Инерцијални референтни системи

У свим наведеним тврђењима која су се односила на динамику материјалне тачке подразумевало се да она врши кретање у односу на непокретно референтно тело. Иако је идеја непокретног тела сама по себи проблематична, у техничким проблемима се тела везана за површину земље могу третирати управо тако.

Ово питање делимично може бити решено увођењем појма *инерцијалног референтног система*[11] (тела). За две референтна система кажемо да су инерцијални ако се један у односу на други крећу једнолико праволинијски. Оваквом дефиниијом се не издваја један—привилеговани референтни систем који називамо инерцијалним, већ читава класа референтних система која поседује ово својство.

Због чега су инерцијални референтни системи значајни? Посматрајмо кретање материјалне тачке P у односу на два инерцијална референтна система S са Декартовим осама $Oxyz$ и S' са осама $O'x'y'z'$. Без губитка општости можемо претпоставити да се систем S' креће константном брзином V у правцу $x-$осе у односу на референтни систем S, како је приказано на Слици. Вектори положаја материјалне тачке у односу на ове координатне системе су:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}' = \overrightarrow{OP'} = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k};$$

Између координата тачака у ова два координатна система постоји следећа релација:

$$x = x' + Vt; \quad y = y'; \quad z = z', \tag{5.8}$$

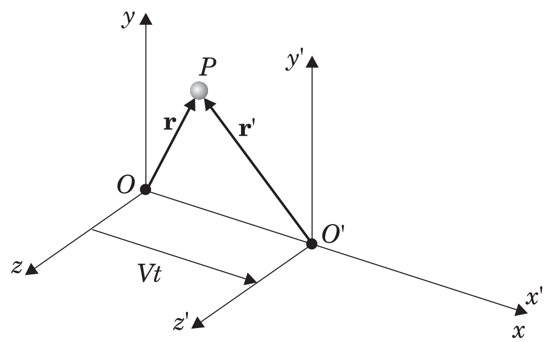
што се увођењем вектора брзине $\mathbf{V} = V\,\mathbf{i}$ може записати на следећи начин:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \tag{5.9}$$

[9] Обично се каже да се активне силе, реакције веза и инерцијалне силе током кретања налазе у *динамичкој равнотежи.*

[10] Обртни параболоид је површ која се добија ротацијом параболе око њене осе симетрије.

[11] Када се говори о референтном систему мисли се на координатни систем који је везан за референтно тело.



Слика 5.5: Инерцијални референтни системи

Диференцирањем релација (5.8), односно (5.9), добија се веза између брзина тачке у инерцијалним системима:

$$\dot{x} = \dot{x}' + V; \quad \dot{y} = \dot{y}'; \quad \dot{z} = \dot{z}' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Ако би се референтни систем S третирао као непокретни, онда би $\mathbf{v}$ представљала *апсолутну брзину*, а $\mathbf{v}'$ *релативну брзину*. Најзад, још једно диференцирање нас доводи до везе између убрзања тачке у унерцијалним координатним системима:

$$\ddot{x} = \ddot{x}'; \quad \ddot{y} = \ddot{y}'; \quad \ddot{z} = \ddot{z}' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \tag{5.10}$$

Одавде следи да су убрзања тачке у инерцијалним координатним системима једнака. Ова чињеница је од пресудног значаја у формулисању Галилејевог принципа релативности који важи у класичној механици. Трансформација (5.8) се зове *Галилејева трансформација*, а сам принцип тврди да закони механике имају исти облик у свим инерцијалним системима (системима повезаним Галилејевом трансформацијом).

Структура сила и основни задаци динамике

С обзиром на структуру другог Њутновог закона (5.2), односно (5.3), може се поставити структуре активних сила у динамици[12]. Ослањањем на Њутн-Лапласов принцип одређености може се показати да активне силе могу зависити од времена t, положаја тачке $\mathbf{r}$ и њене брзине $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}). \tag{5.11}$$

Силе не могу зависити од убрзања материјалне тачке. Иако се структура сила (5.11) следи из теоријских разматрања, она се може потврдити и експериментима. Штавише, аналитички облик конкретних активних сила се по

[12] У проблемима статике анализирали су се проблеми у којима су силе биле константне.

правилу одређује на основу експеримента, или се теоријски претпостављени модел верификује поређењем са експерименталним подацима.

Имајући у виду једначину (5.11) и други Њутнов закон (5.3), као и дефиниције брзине и убрзања материјалне тачке, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$, основни закон динамике се може записати у следећем облику:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \tag{5.12}$$

Полазећи од овог записа могу се формулисати два основна задатка динамике.

Први задатак—директни проблем

Директни проблем динамике се формучише на следећи начин: нека је задато кретање материјалне тачке $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; одредити силу $\mathbf{F}$ под чијим се дејством одвија кретање.

Пошто се за задато кретање тачке брзина и убрзање могу једнозначно одредити, $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ и $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$, тражена сила се може одредити непосредно из другог Њутновог закона (5.12):

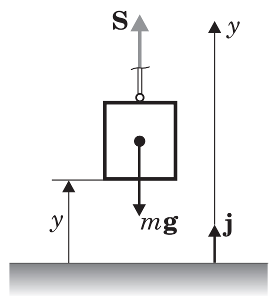
$$\mathbf{F}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Приметимо да се у овом случају сила, у принципу, одређује као функција времена, што значи да се не добија информација о њеној структури наговештеној једначином (5.11). Ипак, у проблемима везаног кретања тачке описаног једначином (5.5), ако је осим кретања позната и структура активних сила, онда се могу одредити реакције веза:

$$\mathbf{R}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)).$$

Пример 5.1 *Лифт, чија је маса заједно са путницима једнака m, започиње кретање из приземља без почетне брзине. Током првог интервала кретања $t \in [0, t_1]$ креће се једнакоубрзано константним убрзањем $a_1 > 0$. Потом, у интервалу $t \in [t_1, t_2]$, наставља кретање константном брзином $v_1 = v(t_1) = const.$ достигнутом на крају претходног интервала. У последњем периоду кретања, $t \in [t_2, t_3]$, лифт се креће једнакоуспорено константним "успорењем" $-a_3 < 0$ до заустављања у тренутку t_3, $v(t_3) = 0$. Одредити силу затезања сајле, којом је лифт повезан са електромотором, током овог кретања.*

► У овом проблему се посматра праволинијско кретање лифта. Зато ће се дуж правца кретања усвојити вертикална $Oy-$оса усмерена навише, а координатни почетак ће се сместити у почетни положај лифта—у приземље. Пошто је у питању везано кретање—веза је вертикална сајла—оно ће се вршити под дејством једне активне силе, силе тежине $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{j}$ усмерене на доле, и једне реакције везе, силе затезања сајле $\mathbf{R} = \mathbf{S} = S\mathbf{j}$. Убрзање материјалне тачке мења се на начин описан у тексту задатка, тако



Слика 5.6: Анализа сила које дејствују на лифт

да имамо[13]:

$$m\mathbf{a} = ma\mathbf{j} = \begin{cases} ma_1\mathbf{j}, & t \in [0, t_1]; \\ 0\mathbf{j}, & t \in [t_1, t_2]; \\ -ma_3\mathbf{j}, & t \in [t_2, t_3]. \end{cases}$$

Одатле следи да други Њутнов закон (5.5) за овај проблем гласи:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{S},$$

односно у скаларном облику

$$ma = -mg + S.$$

Због различите структуре убрзања током кретања, оно се мора анализирати за сваки интервал посебно.

1. интервал: $t \in [0, t_1]$. Током овог интервала важи $ma_1 = -mg + S_1$, одакле следи да је сила затезања ужета:

$$S_1 = mg + ma_1. \tag{а}$$

Овде се види да се током убрзавања лифт супротставља промени првобитног стања—стања мировања—што се манифестује већим интензитетом силе затезања сајле (у односу на силу тежине увећан је за ma_1).

2. интервал: $t \in [t_1, t_2]$. У овом интервалу лифт се креће једнолико, убрзање је једнако нули, а сила затезања сајле је једнака сили тежине лифта:

$$S_2 = mg. \tag{б}$$

3. интервал: $t \in [t_2, t_3]$. Током овог интервала лифт се креће успорено, па имамо $-ma_3 = -mg + S_3$, одакле се добија да је сајла затегнута силом:

$$S_3 = mg - ma_3. \tag{в}$$

[13]Пошто се током интервала $t \in [t_1, t_2]$ лифт креће једнолико, убрзање је једнако нули.

Овде је сила затезања сајле умањена за вредност ma_3. И ово је резултат тежње тела да задржи затечено стање кретања—у овом случају једнолико кретање током претходног интервала.

Аналаиза једначина (а), (б) и (в) показује да је сила затезања сајле једнака сили тежине лифта само током једноликог кретања. У интервалима убрзаног и успореног кретања он се разликује од силе тежине, што је последица инерције лифта—тенденције да задржи стање кретања у ком се налазио.

Овом проблему се може приступити и са становишта примене Даламберовог принципа (5.7). Наиме, инерцијална сила $\mathbf{F}^{in} = -m\mathbf{a}$, која уравнотежује силу тежине и силу затезања сајле, јавља се током првог и трећег интервала кретања. Тада из једначина (а) и (в) заиста видимо да се повећање, односно смањење интензитета силе затезања сајле у односу силу тежине јавља услед присуства инерцијалне силе. ◄

Други задатак—инверзни проблем

Инверзни проблем динамике гласи: задата је сила $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ која дејствује на материјалну тачку током кретања; одредити кретање тачке $\mathbf{r}(t)$. Овај задатак се често назива и основни проблем динамике.

Овај проблем је у математичком смислу сложенији од директног. Док се код првог задатка решавање своди на поступак диференцирања, у другом се мора вршити интеграција. Ако се погледа структура једначине (5.12), онда се може приметити да је кретање тачке "скривено" иза другог извода[14]. Зато је одговарајући систем диференцијалних једначина неопходно два пута интегрирати да би се одредило кретање.

Као што је познато, у процесу интеграције појављују се интеграционе константе. Да би кретање било једнозначно одређено морају се и ове константе одредити. За то је неопходно познавање *почетних услова* проблема, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$. Тек је њиховим задавањем инверзни проблем потпуно формулисан[15].

Аналитичко решавање проблема динамике подразумева одређивање кретања тачке у односу на неки координатни систем. Једначине које се на овај начин добијају из другог Њутновог закона (5.3) зову се *диференцијалне једначине кретања*. На пример, у Декартовом координатном систему, у ком убрзање гласи $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$, а пројекције силе су $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$, диференцијалне једначине кретања гласе:

$$m\ddot{x} = X; \quad m\ddot{y} = Y. \tag{5.13}$$

Ако се искористи природни координатни систем у ком убрзање има структуру $\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{e}_t + (v^2/R_k)\mathbf{e}_n$, а пројекције силе се могу приказати у облику

[14] У математичком смислу, други Њутнов закон даје диференцијалне једначине кретања материјалне тачке у виду система диференцијалних једначина другог реда.

[15] Ова врста проблема се у теорији диференцијалних једначина назива *почетним* или *Кошијевим* проблемом.

$\mathbf{F} = F_t\mathbf{e}_t + F_n\mathbf{e}_n$, диференцијалне једначине кретања гласе:

$$m\dot{v} = F_t; \quad m\frac{v^2}{R_k} = F_n. \tag{5.14}$$

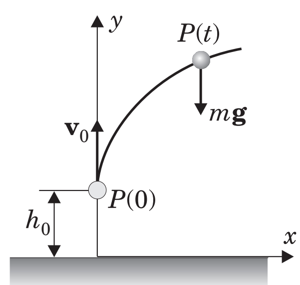
Пример 5.2 *Материјална тачка масе m креће се у хомогеном пољу силе Земљине теже. Са висине h_0 изнад површине земље бачена је вертикално увис брзином v_0. Занемарујући све силе осим силе тежине одредити:*

а) кретање материјалне тачке;

б) висину лета H тачке полазећи од параметарске једначине кретања;

в) брзину тачке у функцији положаја и полазећи од ове једначине одредити висину лета тачке;

г) као специјални случај анализирати слободни пад тачке ($v_0 = 0$) и одредити брзину тачке приликом удара о тло.



Слика 5.7: Динаимчка анализа кретања тачке

► Овај проблем је у механици познат под називом *вертикални хитац*. Будући да се ради о веома једноставном проблему допустићемо себи да га посматрамо у најопштијем могућем облику. Једина претпоставка, која се може и доказати, биће да се тачка креће у вертикалној Oxy равни.

Формирајмо најпре диференцијалне једначине кретања и формулишимо почетне услове. Посматрајмо тачку P масе m у произвољном положају[16], приказаном на Слици 5.7. Пошто се креће само под дејством силе тежине $m\mathbf{g}$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$, други Њутнов закон ће гласити:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g},$$

а диференцијалне једначине креатња (5.13) ће бити:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -mg. \tag{a}$$

[16] Ово је поступак који ће се увек примењивати. Он је нужан зато што приликом формулисања проблема није унапред познато кретање тачке.

Без губитка општости можемо претпоставити да се у почетном тренутку тачка налазила на $y-$оси, одакле следи да је почетно стање кретања описано следећим релацијама:

$$\mathbf{r}(0) = h_0\mathbf{j}; \quad \mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) = v_0\mathbf{j},$$

одакле следе почетни услови проблема:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0; \tag{б}$$
$$y(0) = h_0; \quad \dot{y}(0) = v_0. \tag{в}$$

Започнимо одређивање кретања анализом у правцу $x-$осе. Из једначине $(\text{а})_1$ следи[17]:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = C_1 = \text{const}.$$

Интеграцијом добијене једначине добија се опште решење за кретање у правцу $x-$осе:

$$x(t) = \int C_1 dt = C_1 t + C_2.$$

Интеграционе константе C_1 и C_2 одређују се из почетних услова (б):

$$x(0) = C_2 = 0; \quad \dot{x}(0) = C_1 = 0.$$

Одавде следи да материјална тачка неће вршити кретање у правцу $x-$осе јер је[18]:

$$x(t) = 0 = \text{const}. \tag{г}$$

Интеграцијом једначине $(\text{а})_2$ по времену добија се:

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = -\int g\,dt = -gt + D_1;$$
$$y(t) = \int \dot{y}(t)dt = \int (-gt + D_1)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + D_1 t + D_2.$$

Коришћењем почетних услова (в) одредиће се интеграционе константе D_1 и D_2:

$$y(0) = D_2 = h_0; \quad \dot{y}(0) = D_1 = v_0,$$

тако да параметарска једначина кретања у правцу $y-$осе гласи:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0. \tag{д}$$

Одавде се види да материјална тачка врши једнакопроменљиво кретање у вертикалном правцу.

[17] Ако је извод неке величине једнак нули, онда је та величина константна током времена.

[18] Одатле и потиче назив вертикални хитац.

Тачка ће се до достизања највишег положаја кретати навише, да би потом наставила кретање наниже. То значи да се у највишем положају врши промена смера кретања. Претпоставимо да је највиши положај достигнут у тренутку $t = T$. Тада имамо:

$$\dot{y}(T) = -gT + v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{v_0}{g},$$

одакле следи да је висина лета:

$$H = y(T) = \frac{v_0^2}{2g} + h_0. \tag{ђ}$$

Брзина тачке у функцији положаја се може одредити елиминацијом времена из једначина $y = y(t)$ и $\dot{y} = \dot{y}(t)$:

$$t = \frac{v_0 - \dot{y}}{g} \quad \Rightarrow \quad y(\dot{y}) = h_0 - \frac{\dot{y}^2 - v_0^2}{2g}$$

односно,

$$\frac{1}{2}(\dot{y}^2 - v_0^2) = -g(y - h_0). \tag{е}$$

Одавде се за $y = H$ и $\dot{y} = 0$ добија резултат (ђ).

До једначине (е) може се доћи и на други начин—*репараметризацијом*. Ако се претпостави да је брзина $\dot{y}$ уместо у функцији времена t изражена у функцији координате y, $\dot{y} = \dot{y}(y)$, онда се убрзање тачке може добити као извод сложене функције:

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}\dot{y}(y) = \frac{d\dot{y}}{dy}\frac{dy}{dt} = \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy}. \tag{ж}$$

Коришћењем резултата (ж) у диференцијалној једначини кретања за $y-$осу могу се раздвојити променљиве:

$$\ddot{y} = \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{y}\,d\dot{y} = -g\,dy,$$

одакле се интеграцијом добија:

$$\int \dot{y}\,d\dot{y} = -\int g\,dy \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{y}^2 = -gy + C.$$

Коришћењем почетних услова (в) добија се:

$$\frac{1}{2}v_0^2 = -gh_0 + C,$$

одакле следи релација (е).

Најзад, једначина слободног пада се добија када је $v_0 = 0$:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0.$$

Током овог кретања тачка се креће на доле, а тренутак пада тачке на тло се одређује из услова:

$$y(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Брзина тачке у тренутку пада је:

$$v_1 = \dot{y}(t_1) = -\sqrt{2gh_0}.$$

◄

5.2 Силе у механици

У општем случају силе које се јављају у механичким проблемима могу зависити од времена t, положаја $\mathbf{r}$ и брзине $\mathbf{v}$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Међутим, конкретне силе имају специфичну структуру која се обично утврђује опажањем (експериментом). Овде ће бити наведене неке од њих.

Силе као функције положаја

Типичан пример силе која зависи од положаја јесте *Њутнова гравитациона сила*. То је универзална привлачна сила која се јавља између свих материјалних тела. Ако посматрамо два тела (материјалне тачке) маса m_1 и m_2, онда је њихова сила узајамног привлачења пропорционална масама тела, а обрнуто пропорционална квадрату растојања r између њих:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Константа пропорционалности $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ јесте универзална гравитациона константа.

Напоменимо да је поље гравитационе силе неког тела централно симетрично, ако у његовој близини нема других тела сличне масе. Дејство гравитационог поља се може приказати и на упрошћен начин ако се посматрају тела малих димензија која врше кретање у непосредној близине Земљине површине. Тада се оно може третирати као хомогено поље паралелних сила које су пропорционалне маси тела:

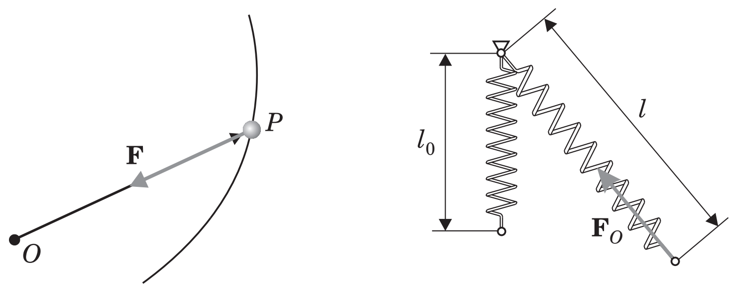
$$F = mg,$$

а $g \approx 9.81 m/s^2$ је гравитационо убрзање.

Сили универзалне гравитације врло је слична *Кулонова електрична сила.* Она се јавља између наелектрисаних честица, пропорционална је њиховим наелектрисањима q_1 и q_2, а обрнуто пропорционална квадрату растојања између честица:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

док је константа пропорционалности $k = 8.988 \times 10^9 Nm^2/C^2$. Електрична сила може бити и привлачна, и одбојна, у зависности од карактера наелектрисања.



Слика 5.8: Привлачна централна сила и сила у еластичној опрузи

Док гравитациона и електрична сила моделирају утицај физичког поља на посматрано тело, дотле еластичне силе, о којима је више речи било у првом делу текста, моделирају понашање одређених врста материјала. У контексту динамике материјалне тачке оне се могу третирати и као силе које зависе од положаја. То је резултат коришћења модела *еластичне опруге*—једноставног физичког модела који описује еластичну интеракцију материјалне тачке са другим материјалним објектима. У најједноставнијем случају малих деформација, који у потпуности одговара Хуковом закону, сила у опрузи је пропорционална њеном издужењу Δl, а константа пропорционалности је крутост опруге c:

$$F = -c\,\Delta l.$$

Силе као функције брзине

У механичком смислу најзначајнији пример силе која је функција брзине јесте *сила отпора кретању тела кроз флуид*[19]. Она има правац брзине, а смер супротан од смера кретања. Њен општи облик гласи:

$$F_w = -\kappa f(v)\frac{\mathbf{v}}{v}.$$

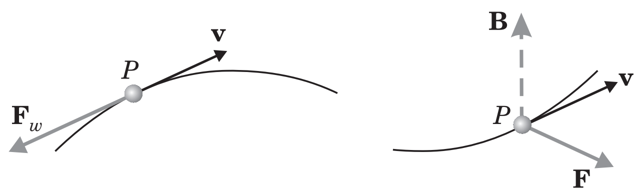
Константа пропорционалности κ се одређује експериментом. Функција $f(v)$, која описује механизам интеракције тела са флуидом, поред брзине тела

[19] Ова сила се често назива силом вискозног трења.

зависи и од његовог облика, као и од густине и вискозности флуида. Она се најчешће јавља у два облика:

$$f(v) = \alpha\, v \quad \text{и} \quad f(v) = \beta\, v^2.$$

Први случај је типичан за кретање мањим брзинама и ламинарно струјање флуида. Другим обликом се обично моделира кретање већим брзинама уз турбулентно струјање флуида. Ова сила је важан пример *дисипативне силе*, о чему ће више речи бити у наставку.



Слика 5.9: Сила отпора и Лоренцова сила

Друга карактеристична сила која зависи од брзине је *Лоренцова магнетна сила*. Она се јавља приликом кретања наелектрисане честице количине наелектрисана q кроз магнетно поље индукције $\mathbf{B}$. Лоренцова сила има следећи облик:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Силе као функције времена

Силе могу експлицитно зависити од времена t у различитим ситуацијама. Овде ћемо навести две карактеристичне.

Сила може бити функција времена ако се материјална тачка креће у *нестационарном физичком пољу*[20]. Један од примера је кретање тачке у временски промењивом електричном пољу, видети Задатак 5.8.

Други тип сила које зависе од времена јесу *управљачке силе*. Оне моделирају спољашње дејство које је нужно мењати током времена да би се остварио одређени циљ. Најчешће се јављају као погонске силе, на пример погонски момент на осовини код возила. Функционална завиност ових сила од времена може бити унапред задата или се одређује решавањем управљачког проблема. У овом другом случају динамички проблем представља саставни део задатка управљања.

Сила Кулоновог трења

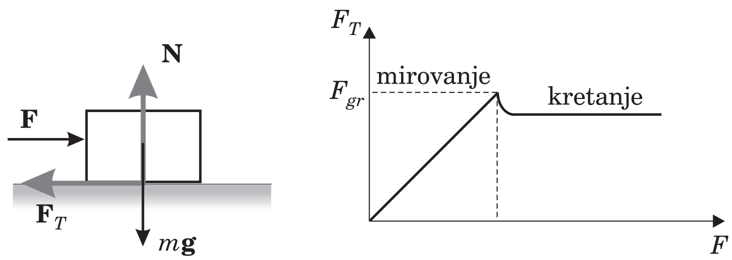
Кулоново или *суво трење* се јавља на местима додира два тела. Оно је последица храпавости тела. Због тога се осим силе узајамног притиска,

[20] Под нестационарним физичким пољем се подразумева оно поље које се мења са временом.

која има правац нормале на површине тела у тачки додира, јавља и сила трења која се налази у тангентној равни.

Експериментима је утврђено да ће тело које се налази на храпавој хоризонталној подлози, а изложено је дејству спољашње хоризонталне силе, остати у стању мировања све док спољашње сила не достигне одређену критичну вредност. Ову силу уравнотежује сила трења која има смер супротан смеру у ком тело тежи да се помери у односу на подлогу. Другим речима, *у стању мировања* интензитет силе трења се може кретати између нуле и граничне вредности:

$$0 \leq F_T \leq F_{gr}.$$



Слика 5.10: Анализа силе Кулоновог (сувог) трења

Гранична вредност силе трења се утврђује експериментом, а бројни опити су показали да је она у великом броју за праксу значајних случајева пропорционална сили узајамног притиска:

$$F_{gr} = \mu_S N.$$

Статички коефицијент трења μ_S се одређује експериментом и може зависити од стања површина (храпавости), влажности средине, температуре, коришћења средстава за подмазивање и других фактора.

Ако интензитет активне силе F постане већа од F_{gr}, тело ће се покренути, а интензитет силе трења ће током кретања пасти на вредност која је нешто мања од F_{gr} и одређена је релацијом:

$$F_T = \mu_D N.$$

Динамички коефицијент трења μ_D има вредност која је мања од вредности статичког коефицијента трења, $\mu_D < \mu_S$.

Пример 5.3 *Материјална тачка масе m бачена је вертикално увис брзином v_0. Током кретања на тачку осим силе сопствене тежине $m\mathbf{g}$, усмерене на доле, дејствује и сила отпора кретању пропорционална брзини тачке, $\mathbf{R} = -mk\mathbf{v}$, где је k коефицијент отпора.*

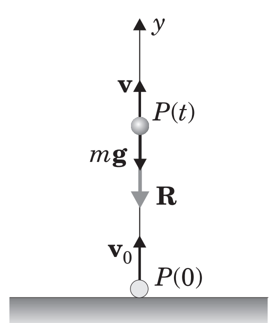
а) Одредити кретање тачке (параметарску једначину и брзину у функцији времена).

б) Одредити висину лета H тачке и анализирати је њену зависност од параметара који фигуришу у решењу.

в) Упоредити добијени резултат са висином лета тачке приликом кретања без отпора за различите нумеричке податке.

► Пошто је тачка бачена вертикално увис, а током кретања није претпостављено да постоје силе које би је скренуле са вертикалне путање, она ће се кретати само у вертикалном правцу[21]. Пошто је тада $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$, а $\mathbf{v} = \dot{y}\,\mathbf{j}$ и $\mathbf{a} = \ddot{y}\,\mathbf{j}$, други Њутнов закон (5.3):

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R},$$



Слика 5.11: Динамичка анализа хица у средини са отпором

ће нам дати следећу диференцијалну једначину кретања:

$$m\ddot{y} = -mg - mk\dot{y},$$

односно,

$$\ddot{y} = -g - k\dot{y}. \tag{а}$$

Ова једначина је праћена почетним условима проблема, $\mathbf{r}(0) = 0\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{j}$, односно:

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = v_0, \tag{б}$$

где је без губитка општости претпостављено да тачка започиње кретање из координатног почетка.

[21] ово се може и доказати, као у претходном примеру.

Како је $\ddot{y} = d\dot{y}/dt$, у једначини (а) се могу раздвојити променљиве. Ако уведемо ознаку $v = \dot{y}$ имаћемо:

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{g+kv} = -\int dt.$$

Одатле се после интеграције добија:

$$\frac{1}{k}\ln(g+kv) = -t + \frac{1}{k}\ln C,$$

односно,

$$v(t) = -\frac{g}{k} - \frac{C}{k}\,e^{-kt}.$$

Увршатавањем почетног услова $(б)_2$ одређује се интеграциона константа C:

$$v(0) = -\frac{g+C}{k} = v_0 \quad \Rightarrow \quad C = -g - kv_0,$$

а зависност брзине од времена тада гласи:

$$v(t) = \dot{y}(t) = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} + v_0\right)e^{-kt} \tag{в}$$

У другом кораку се непосредном интеграцијом долази до резултата:

$$y(t) = -\frac{g}{k}\,t - \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0\right)e^{-kt} + D.$$

Из почетног услова $(б)_1$ следи:

$$y(0) = -\frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0\right) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0\right),$$

одакле се добија параметарска једначина кретања:

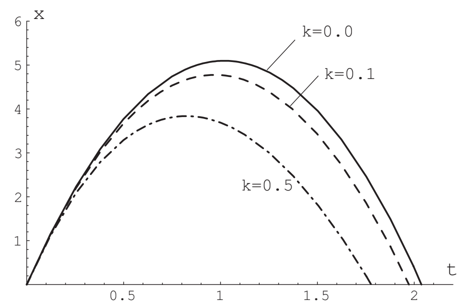
$$y(t) = -\frac{g}{k}\,t + \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0\right)\left(1 - e^{-kt}\right). \tag{г}$$

Највећа висина лета $H = y(T)$ достиже се у тренутку промене смера кретања, $v(T) = 0$. На тај се начин добија:

$$v(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{g}\right),$$

одакле следи,

$$H = y(T) = \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{g}\right). \tag{д}$$



Слика 5.12: Дијаграми верикалних хитаца у вакууму и средини са отпором

Два карактеристична параметра која фигуришу у резултату су почетна брзина v_0 и коефицијент отпора k. Види се да се са повећањем почетне брзине повећава и висина лета. Са друге стране, повећање коефицијента отпора утиче на њено смањење.

Да бисмо упредили овде добијену висину лета са висином која се достиже приликом кретања кроз средину без отпора подсетимо се да је она за $h_0 = 0$ (једначина (ђ) из Примера 5.2):

$$H_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Ако се усвоји $v_0 = 5m/s$ и $k = 0.1s^{-1}$ ($g \approx 9.81m/s^2$) добиће се:

$$H_0 = 1.27m; \quad H = 1.23m.$$

За други избор вредности параметара $v_0 = 10m/s$ и $k = 0.1s^{-1}$ добија се:

$$H_0 = 5.10m; \quad H = 4.77m.$$

Најзад, ако се усвоји $v_0 = 10m/s$ и $k = 0.5s^{-1}$ добиће се:

$$H_0 = 5.10m; \quad H = 3.84m.$$

Добијени резултати потврђују коментар о утицају почетне брзине и коефицијента отпора на висину лета. На Слици 5.12 приказани су (x, t) дијаграми вертикалних хитаца у вакууму ($k = 0.0$) и средини са отпором при почетној брзини $v_0 = 10m/s$. ◄

5.3 О математичким моделима у динамици

Примери 5.2 и 5.3 указују на проблем који се увек јавља приликом анализе динамичких задатака—проблем моделирања процеса, односно система. Диференцијалне једачине кретања (једначина (а) у оба примера) представљају *математичке моделе* приказаних механичких система. Иако је, наизглед, у оба примера био описан исти проблем, добијени математички модели се суштински разликују због различитих претпоставки о силама која се јављају током кретања. У Примеру 5.2 био је занемарен отпор ваздуха, док је у Примеру 5.3 претпостављено да је сила отпора пропорционална брзини тачке. Због тога је и кретање тачке било описано различитим параметарским једначинама, премда су у квалитативном смислу добијени резултати веома слични.

Питање адекватности неког математичког модела је веома важно, али и веома сложено. Оно је неизбежно усмерено на поређење резултата добијених његовом анализом са резултатима опажања стварних процеса. Због тога се претпоставке које се налазе у основи сваког модела морају врло пажљиво усвајати и прецизно навести.

У даљем тексту ће бити анализирано кретање математичког клатна као математичког модела везаног кретања тачке. Оно ће нам показати и разлику између линеарних и нелинеарних модела физичких процеса. Потом ће бити проучен сличан проблем, али у другом контексту—моделирању промене броја јединки популације.

Математичко клатно

Као што је већ напоменуто, везано кретање тачке се анализира на основу другог Њутновог закона, уз примену принципа ослобађања од веза (видети једначину (5.5)). При томе се подразумева да се поред одређивања кретања тачке, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, одређују и све реакције веза. Да би проблем могао бити "затворен"—то јест, да би се из расположивог система једначина могле одредити све непознате величине—неопходно је увести додатне претпоставке о структури реакција веза. Оне треба да одразе ограничења која веза намеће посматраној тачки. Погледајмо како то изгледа на примеру кретања математичког клатна.

Пример 5.4 *Тешка материјална тачка P масе m окачена је помоћу лаког нерастегљивог конца дужине l о непокретну тачку O (математичко клатно). Положај тачке у било ком тренутку времена је одређен углом φ који конац образује са вертикалним правцем. У почетном тренутку угао отклона клатна био је φ_0, а почетна брзина тачке била је v_0.*

а) *Анализирати силе које дејствују на материјалну тачку током кретања.*

б) *Формирати диференцијалне једначине кретања тачке у односу на природни координатни систем (пројектовати други Њутнов закон на правце пратећег диедра).*

в) *Одредити брзину тачке у зависности од положаја.*

г) *Одредити реакцију конца у зависности од положаја тачке.*

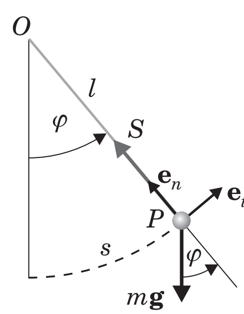
д) За случај малих осцилација ($\varphi \ll 1$) одредити кретање тачке (параметарску једначину кретања $\varphi = \varphi(t)$).

ђ) Упоредити решење тачне и линеаризоване диференцијалне једначине кретања у случају великих осцилација клатна.

► Посматрајмо тачку у произвољном положају који је одређен углом отклона клатна φ. Ако се претпостави да је конац све време кретања затегнут, онда ће трајекторија тачке P бити круг полупречника l са центром у тачки O. Тада се за одређивање положаја тачке може користити и лучна координата s уз увођење пратећег диедра $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$. Пошто важи релација $s = l\varphi$, брзина и убрзање тачке тада могу бити описани на следећи начин:

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t = \dot{s}\,\mathbf{e}_t = l\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_t; \tag{а}$$

$$\mathbf{a} = a_t\,\mathbf{e}_t + a_n\,\mathbf{e}_n = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{l}\,\mathbf{e}_n = l\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_t + l\dot{\varphi}^2\,\mathbf{e}_n. \tag{б}$$



Слика 5.13: Динамичка анализа математичког клатна

На тачку P осим силе тежине $m\mathbf{g}$ дејствује и реакција везе—сила затезања конца $\mathbf{S} = S\,\mathbf{e}_n$. Други Њутнов закон (5.5) се тада може записати у облику:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{S},$$

а диференцијалне једначине кретања у односу на природни кординатни систем гласе:

$$\begin{aligned} ml\ddot{\varphi} &= -mg\sin\varphi; \\ ml\dot{\varphi}^2 &= -mg\cos\varphi + S. \end{aligned} \tag{в}$$

Почетна вредност извода угла обртања одређује се из релације (а) посматране у почетном тренутку $t = 0$, $\mathbf{v}(0) = v_0\,\mathbf{e}_t = l\dot{\varphi}(0)\,\mathbf{e}_t$, па почетни услови проблема гласе:

$$\varphi(0) = \varphi_0; \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{l}. \tag{г}$$

За одређивање брзине тачке у зависности од положаја треба одредити функцију $\dot\varphi = \dot\varphi(\varphi)$. У том циљу ће бити извршена репараметризација:

$$\ddot\varphi = \dot\varphi\,\frac{d\dot\varphi}{d\varphi}.$$

Уводећи ознаку $\omega^2 = g/l$ једначина (в)$_1$ се може записати у облику:

$$\dot\varphi\frac{d\dot\varphi}{d\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi,$$

а одавде се раздвајањем променљивих и интеграцијом добија:

$$\int \dot\varphi d\dot\varphi = -\omega^2 \int \sin\varphi\, d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,\dot\varphi^2 = \omega^2\cos\varphi + C.$$

С обзиром на почетне услове (г) интеграциона константа C ће имати вредност:

$$C = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{l^2} - \omega^2\cos\varphi_0,$$

па се добија:

$$\dot\varphi^2 = \frac{v_0^2}{l^2} + 2\omega^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \tag{д}$$

Одавде следи тражени израз за брзину, односно њен квадрат, у функцији положаја (угла φ):

$$v^2(\varphi) = l^2\dot\varphi^2(\varphi) = v_0^2 + 2l^2\omega^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \tag{ђ}$$

Полазећи од једначине (в)$_2$, уз коришћење резултата (д), може се одредити сила затезања конца у функцији угла φ:

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= ml\dot\varphi^2(\varphi) + mg\cos\varphi \\ &= m\frac{v_0^2}{l} + mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0). \end{aligned} \tag{е}$$

Посматрајмо сада специјални случај *малих осцилација* математичког клатна. У овом случају важи претпоставка да је угао отклона клатна φ током кретања мали, односно $\varphi \ll 1$. Тада се у математичком моделу може искористити следећа апроксимација:

$$\sin\varphi \approx \varphi; \quad \cos\varphi \approx 1.$$

због чега се диференцијална једначина кретања (в)$_1$ може записати у облику:

$$\ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0, \tag{ж}$$

Добијени модел представља диференцијалну једначину хармонијског осцилатора чије опште решење гласи:

$$\varphi(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t),$$

а интеграционе константе C_1 и C_2 се одређују из почетних услова (г):

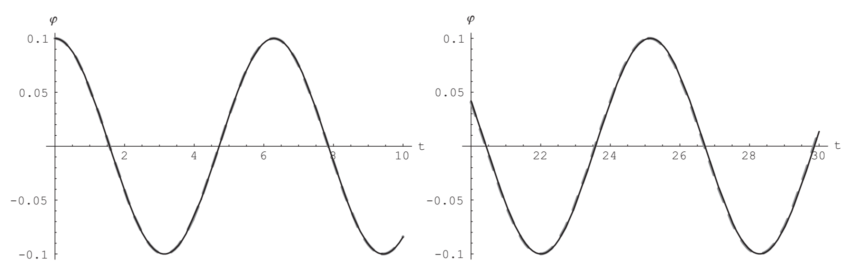
$$\varphi(0) = C_1 = \varphi_0;$$
$$\dot{\varphi}(0) = C_2\omega = \frac{v_0}{l} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{v_0}{l\omega},$$

тако да решење почетног проблема гласи:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{l\omega} \sin(\omega t). \tag{з}$$

Са овим резултатом се непосредно из једначине (в)$_2$ може одредити сила затезања конца у функцији времена t:

$$S \approx mg + ml\dot{\varphi}^2 = mg + ml\left(\frac{v_0}{l}\cos(\omega t) - \varphi_0\omega\sin(\omega t)\right)^2.$$



Слика 5.14: Дијаграм (φ, t) нумеричког решења за $\varphi_0 = 0.1$.

Приметимо да нам је претпоставка о малим осцилацијама и линеаризација диференцијалне једначине кретања омогућила решавање проблема у затвореној форми. Међутим, када клатно врши велике осцилације, односно када претпоставка $\varphi \ll 1$ не важи, решење линеаризоване диференцијалне једначине кретања (ж) неће дати коректно предвиђање понашања клатна током времена. Покажимо најпре како се може доћи до "решења" тачне диференцијалне једначине (в)$_1$, односно:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0.$$

Репараметризацијом је већ одређен њен први интеграл (д) који се може третирати као диференцијална једначина првог реда. Пошто је $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ у њој се могу раздвојити променљиве да би се добило:

$$dt = \left\{\frac{v_0^2}{l^2} + 2\omega^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\right\}^{-1/2} d\varphi.$$

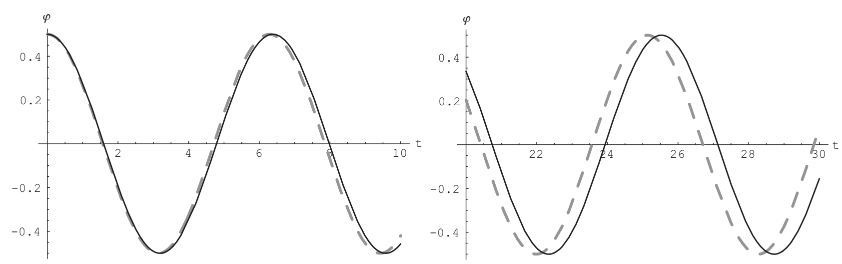
Одавде се интеграцијом и коришћењем почетног услова $\varphi(0) = \varphi_0$ може доћи до израза $t = t(\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
t = & \left\{ \frac{v_0^2}{l^2} + 2\omega^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \right\}^{-1/2} \\
& \times \sqrt{\frac{v_0^2 + 2l^2\omega^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{v_0^2 + 2l^2\omega^2(1 - \cos\varphi_0)}}\, F\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{4l^2\omega^2}{v_0^2 + 2l^2\omega^2(1-\cos\varphi_0)} \right) \qquad \text{(и)} \\
& - 2\sqrt{\frac{l^2}{v_0^2 + 2l^2\omega^2(1-\cos\varphi_0)}}\, F\left(\frac{\varphi_0}{2}, \frac{4l^2\omega^2}{v_0^2 + 2l^2\omega^2(1-\cos\varphi_0)} \right).
\end{aligned}
$$

У једначини (и) са $F(\varphi, m)$ је означен *елиптички интеграл прве врсте*[22] који се дефинише следећом релацијом:

$$
F(\varphi, m) = \int_0^{\varphi} \left(1 - m\sin^2\theta\right)^{-1/2} d\theta,
$$

где је $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$.



Слика 5.15: Дијаграм (φ, t) нумеричког решења за $\varphi_0 = 0.5$.

За особу неупућену у детаље везане за елиптичке интеграле решење (и) може деловати неразумљиво. Зато ћемо овде прибећи *нумеричкој интеграцији* тачне диференцијалне једначине кретања. Напоменимо само да се приликом нумеричког решавања проблема морају задати конкретне бројне вредности свих параметара и почетних услова проблема. Овде ћемо једначину решавати за случај кретања које је започето без почетне брзине, $v_0 = 0$, и где је $\omega = 1s^{-1}$. На Слици 5.14 се може приметити да се за малу почетну вредност угла $\varphi_0 = 0.1$ добија незнатно одступање решења (з) линеаризоване једначине, приказаног испрекиданом линијом, од нумеричког решења тачне једначине у интервалу $t \in [0, 30]$. Међутим, за велики почетни отклон, $\varphi_0 = 0.5$, разлика у решењима је очигледна, што се види на Слици 5.15. Иако су у квалитативном смислу решења слична—оба су периодична

[22] Елиптички интеграли припадају класи *специјалних функција*. Њихове вредности се могу наћи сврстане у табеле у одговарајућим књигама посвећеним овој проблематици. Међутим, савремени програмски пакети "лако" баратају овим функцијама јер су интерно дефинисане.

са константном амплитудом—уочљива је квантитативна разлика. У то се лако можемо уверити поређењем периода решења линеаризоване једначине T_L са периодом решења тачне једначине T_E:

$$T_L = 6.28s; \quad T_E = 6.38s.$$

Детаљна анализа проблема може показати да је период малих осцилација математичког клатна $T_L = 2\pi/\omega$ и не зависи од почетних услова. Насупрот томе за период великих осцилација T_E не постоји слична релација. Штавише, може се показати да период великих осцилација зависи од почетних услова, у шта се овде нећемо упуштати. ◄

Пример математичког клатна указује на значај моделирања физичких процеса. Претпоставка о малим осцилацијама је довела до решења проблема у затвореној форми, али смо видели и да то решење не даје добра предвиђања у квантитативном смислу у случају великих осцилација. Дакле, претпоставке које воде упрошћењу модела могу бити погодне, али се не смеју некритички примењивати.

Модели раста популације

Математички модели процеса који имају динамички, односно еволуциони карактер у општем случају имају структуру која је аналогна другом Њутновом закону (5.2), $d\mathbf{K}/dt = \mathbf{F}$. Разлика се јавља у избору величина стања чија се временска еволуција посматра и дејствима која на њу утичу. Ови модели се могу јавити у различитим дисциплинама, а структура им може бити врло једноставна, али и веома сложена. Овде ће бити приказан један такав модел који се јавља у анализи промене броја јединки неке популације.

Пример 5.5 *Нека је са y означен број јединки неке популације. Под претпоставком да се ради о масовној популацији може се сматрати да се број јединки током времена мења непрекидно. Анализирати основни математички модел раста популације:*

$$\dot{y} = ay; \quad a > 0, \tag{а}$$

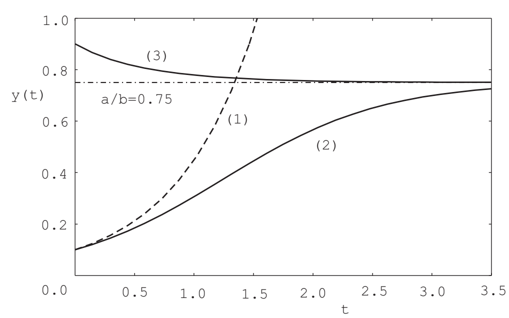
и упоредити га са нелинеарним математичким моделом (логистичком једначином):

$$\dot{y} = (a - by)y; \quad a, b > 0. \tag{б}$$

► Анализа структуре приказаних математичких модела указује да се приликом њиховог формирања пошло од различитих скупова претпоставки. У случају једначине раста популације (а) прираштај броја јединки у јединици времена пропорционалан је тренутном броју јединки. Иза ове структуре математичког модела стоји претпоставка да посматрана популација живи изоловано (не ступа у интеракцију са другим врстама које живе на истом простору, нити је оне на било који начин угрожавају), као и да су извори хране неограничени.

У случају логистичке једначине задржана је претпоставка о изолованости врсте, али је зато одбачена она о неограниченим изворима хране. Због тога се у моделу (б) појављује "корекциони" члан $-by^2$. Када је популација мала[23] утицај овог члана је занемарљив. Другим речима, расположиви извори хране могу да задовоље готово све јединке посматране популације. Међутим, са повећањем броја јединки утицај овог члана расте и он смањује њихов прираштај у јединици времена. То значи да извори хране не могу да задовоље потребе свих јединки, па оне ступају у међусобну борбу или умиру од глади.

Математичка структура посматраних модела показује да се једначина раста популације (а) добија као специјални случај логистичке једначине (б) за $b = 0$, односно ако се одбаци претпоставка о ограниченим изворима хране. Други начин за добијање једначине (а) из једначине (б) јесте одбацивање нелинеарног члана y^2.



Слика 5.16: Решења једначине раста популације (1) и логистичке једначине (2,3)

Проучимо сада решења ове две диференцијалне једначине. Претпоставимо да је у почетном тренутку $t = 0$ број јединки био $y(0) = y_0$. Тада се решење једначине раста популације добија у облику:

$$y(t) = y_0\, e^{at}, \tag{в}$$

док решење логистичке једначине (б) гласи:

$$y(t) = y_0 \frac{a\, e^{at}}{a - b\, y_0(1 - e^{at})}. \tag{г}$$

Може се приметити да се за $b = 0$ решење (г) своди на израз (в). Ипак, ова решења се одликују потпуно различитим понашањем при великим вредностима независно промењљиве ($t \to \infty$). Решење (в) једначине раста популације неограничено расте, што је у сагласности са препоставкама наведеним

[23]У овом случају се може сматрати да је популација "мала" ако важи $y \ll a/b$. У доказивање овог тврђења се нећемо упуштати.

за овај модел. Међутим, решење (г) логистичке једначине у граничном случају тежи константној вредности:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} y_0 \frac{a\, e^{at}}{a - b\, y_0(1 - e^{at})} = \frac{a}{b}. \tag{д}$$

Приметимо да ова гранична вредност не зависи од почетног броја јединки, већ само од вредности константи a и b које одређују математички модел. Број $y = a/b$ уједно предтавља и *равнотежни* број јединки популације—десна страна једначине (б) је тада једнака нули[24]. На Слици 5.16 су приказани графици функција (в) и (г) за вредности параметара $a = 3.0$ и $b = 4.0$ почетне услове $y_0 = 0.1$ и $y_0 = 0.9$. ◄

Задаци

5.1 Клип парне машине врши осцилаторно кретање у хоризонталном правцу по закону:

$$x(t) = R\left(\cos\omega t + \frac{R}{4L}\cos 2\omega t\right),$$

где је R дужина криваје, L дужина спојне полуге, а ω константна угаона брзина криваје. Ако је маса клипа m, одредити силу која дејствује на клип и показати да ће њен највећи интензитет бити:

$$P = mR\omega^2\left(1 + \frac{R}{L}\right).$$

5.2 Материјална тачка масе $m = 1kg$ креће се праволинијски под дејством силе $\mathbf{F} = 10(1-t)\,\mathbf{i}\,N$, где је време t изражено у секундама. Одредити кретање тачке (параметарску једначину) ако се зна да је оно започето из положаја $x(0) = 0$ почетном брзином $\dot{x}(0) = v_0 = 20m/s$. Одредити тренутак t_1 у ком тачка мења смер кретања и упоредити га са тренутком у ком сила мења смер свога дејства.

5.3 Лопта је бачена вертикално увис брзином $30m/s$. Један секунд касније је из истог почетног положаја вертикално увис бачена друга лопта. Одредити колика треба треба да буде почетна брзина друге лопте да би се сударила са првом кад ова доспе у највиши положај. Претпоставити да се лопте крећу само под дејством константне силе тежине ($g \approx 9.8m/s^2$).

5.4 Посматрач који седи у просторији и гледа кроз прозор висине $2m$ угледао је камен који пада вертикално. Камен се у оквиру прозора могао видети

[24] Ако би било $y_0 = a/b$, онда током времена не би дошло до промене броја јединки. То значи да би број новорођених јединки у неком временском интервалу био једнак броју угинулих.

током $0.1s$. Занемарујући све друге силе осим константне гравитационе силе ($g \approx 9.8m/s^2$), одредити висину, мерену од доње ивице прозора, са које је испуштен камен (без почетне брзине).

5.5 *Вертикални хитац у средини са отпором.* Материјалној тачки масе m саопштена је почетна брзина v_0 вертикално навише. На тачку дејствују сила тежине и сила отпора кретању кроз ваздух која је пропорционална првом степену брзине $\mathbf{R} = -mk\mathbf{v}$, $k = \text{const}$. Одредити кретање тачке (параметарску једначину.) Усвајајући да је $v_0 = 5m/s$, $k = 0.5s^{-1}$ и $g = 9.81m/s^2$ одредити висину лета h тачке и упоредити је са висином лета тачке у безваздушном простору (то јест, при кретању са занемарљивим отпором).

5.6 Материјална тачка је бачена вертикално на доле и креће се под дејством гравитационе сила интензитета g по јединици масе и силе отпора интензитета kv по јединици масе, која је смера супротног од смера кретања и где је v брзина тачке, а k позитивна константа. Показати да ће брзина материјалне тачке, независно од вредности почетне брзине, тежити вредности g/k (*терминална брзина*). Колика би терминална брзина била ако би интензитет силе отпора био kv^2 по јединици масе?

5.7 Материјална тачка масе m креће се у пољу дејства Земљине гравитационе силе која се мења по следећем закону $F = k/r^2$, где је r растојање тачке од центра привлачења. На површини Земље ($r = R$, R - полупречник Земље $F = mg$. Одредити закон промене брзине у зависности од растојања тачке од центра привлачења, ако се зна да је тачка започела кретање са површине Земље почетном брзином v_0 која има правац који спаја центар Земље са почетним положајем тачке. Колику би почетну брзину требало саопштити тачки да би напустила поље дејства Земљине гравитационе силе (друга космичка брзина)?

5.8 Честица масе m и наелектрисања q налази се у хомогеном електричном пољу промењљивог интензитета $\mathbf{E} = A \sin kt\, \mathbf{i}$. На честицу током кретања дејствује сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Показати да је кретање тачке описано једначином:

$$x(t) = \frac{qA}{mk^2}(kt - \sin kt),$$

ако се зна да је тачка започела кретање из координатног почетка из стања мировања. Утицај силе тежине занемарити.

5.9 Чамац чија је маса заједно са путницима m, креће се по стајаћој води. У тренутку $t_0 = 0$ престао је да ради мотор, а брзина чамца у том тренутку била је v_0. На чамац током кретања дејствује сила отпора пропорционална првом степену брзине, $\mathbf{R} = -mk\mathbf{v}$. Смештајући координатни почетак у почетни положај чамца и усвајајући $x-$осу у правцу и смеру почетне брзине тачке, одредити:

a) закон промене брзине тачке током времена;

б) параметарску једначину кретања;

в) време за које ће се брзина чамца смањити на половину почетне вредности;

г) показати да је највеће растојање које чамац може прећи, ако се услови проблема не промене, $x_{max} = v_0/k$ и да ће оно бити достигнуто за $t \to \infty$.

5.10 Материјална тачка масе m започела је кретање са врха стрме равни из стања мировања. Угао нагиба стрме равни је θ. По стрмој равни је просуто уље, па на тачку осим силе тежине $m\mathbf{g}$ дејствује и сила вискозног трења чији је интензитет пропорционалан другом степену брзине, $F_w = mkv^2$. Показати да је закон промене брзине тачке у функцији времена:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{e^{2\lambda kt} - 1}{e^{2\lambda kt} + 1},$$

где је $\lambda^2 = (g/k)\sin\theta$. Колику брзину тачка може достићи на бесконачној стрмој равни (када $t \to \infty$)?

5.11 Терет масе $m = 50kg$ налази се у стању мировања на храпавој хоризонталној подлози. Коефицијенти статичког и динамичког трења су $\mu_S = 0.25$ и $\mu_D = 0.20$, респективно.

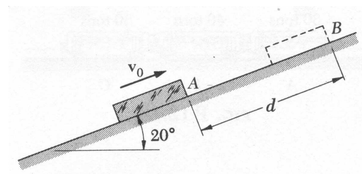
а) Одредити најмању потребну вредност силе P_{min} којом је треба вући терет да би он почео да клизи по подлози.

б) Ако на терет од почетка кретања дејствује константна сила 20% већег интензитета од P_{min}, одредити промену брзине $v(t)$ током времена и параметарску једначину кретања $x(t)$.

в) Одредити брзину коју ће терет имати када буде прешао пут дужине $l = 50m$.

5.12 Терет масе $m = 10kg$ налази се у стању мировања на врху стрме равни. Коефицијенти статичког и динамичког трења између терета и стрме равни су $\mu_S = 0.20$ и $\mu_D = 0.15$. да ли терет може да започне кретање низ стрму раван без почетне брзине ако је угао нагиба стрме равни $\theta = 10°$? Колика ће бити брзина терета у подножју стрме равни угла нагиба $10°$ и висине $h = 3m$ ако му је саопштена почетна брзина $v_0 = 5m/s$ усмерена ка подножју.

5.13 Терету масе m који се креће уз храпаву стрму раван угла нагиба $20°$ саопштена је почетна брзина $v_0 = 8m/s$. Терет се креће уз стрму раван до положаја B, а затим се враћа у полазну тачку A. Ако се зна да је растојање између тачака A и B $d = 6m$, одредити:



а) коефицијент динамичког трења између терета и стрме равни;

б) брзину коју терет има на повратку у тачку A.

5.14 *Коси хитац у безваздушном простору.* Материјална тачка масе m креће се у вертикалној равни под дејством силе сопствене тежине $m\mathbf{g}$. Започела је кретање брзином v_0 која је образовала угао α са хоризонталним правцем. Усвајајући да се тачка у почетном тренутку налазила у координатном почетку одредити параметарске једначине кретања $x(t)$ и $y(t)$ и показати да трајекторија описана кривом $y(x)$ има облик параболе.

5.15 *Коси хитац у средини са отпором.* Материјална тачка масе m, која је започела кретање брзином v_0 под углом α према хоризонту, креће се у вертикалној равни под дејством силе сопствене тежине $m\mathbf{g}$ и силе отпора пропорционалне првом степену брзине $\mathbf{R} = -mk\mathbf{v}$.

а) Показати да су параметарске једначине кретања тачке:

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \quad \text{и} \quad y(t) = \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{k} + \frac{g}{k^2}\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t.$$

б) Показати да је максимални домет хица $x_{max} = v_0 \cos\alpha/k$ и да се остварује када $t \to \infty$.

5.16 *Задатак за размишљање.* Претпоставимо да је кишна кап сфера полупречника r и константне густине ρ. Падајући кроз облак њена се маса током времена повећава пропорционално површини попречног пресека нормалној на правац кретања. Ако кап улази у облак у тренутку $t_0 = 0$ са полупречником r_0 и брзином v_0 и на њу током кретања дејствује само гравитациона сила, показати:

а) да ће се полупречник кишне капи током кретања кроз облак повећавати линеарно са временом по закону $r(t) = r_0 + (k/4\rho)t$, где је $k > 0$ константа пропорционалности;

б) да ће под претпоставком да је $r_0 \approx 0$ и $v_0 \approx 0$ брзина тачке током кретања кроз облак расти линеарно са временом по закону $v(t) = gt/4$.

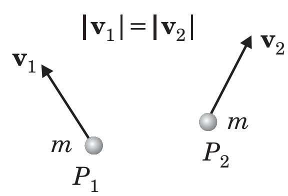
Упутство: Кишну кап третирати као материјалну тачку. Осу дуж које се креће усмерити вертикално наниже. Користити други Њутнов закон у изворном облику $d\mathbf{K}(t)/dt = d(m(t)\mathbf{v}(t))/dt = \mathbf{F}$.

6

Динамика тачке: енергија, рад и снага

6.1 Кинетичка енергија материјалне тачке

Видели смо да у Њутновим законима централну улогу игра *количина кретања* као динамичка величина стања. Њена промена током времена узрокована је дејством сила на материјалну тачку.



Слика 6.1: Кинетичка енергија материјалне тачке

Упоредо са овим векторским приступом развијен је и други приступ у динамици. Његов творац је био Лајбниц, а у њему *кинетичка енергија* служи као основна динамичка величина стања. Она се код материјалне тачке дефинише као половина производа масе и квадрата брзине материјалне тачке:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \tag{6.1}$$

Приметимо да је кинетичка енергија *скаларна величина*, за разлику од количине кретања која је *векторска величина*. То значи да две материјалне тачке једнаких маса m чије су брзине једнаких интензитета, а различитих праваца, имају једнаке кинетичке енергије (видети Слику 6.1):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 & & \mathbf{K}_1 = m\mathbf{v}_1 \neq m\mathbf{v}_2 = \mathbf{K}_2 \\ & \Rightarrow & \\ |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| & & E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = E_{k2}. \end{array}$$

Структура израза за кинетичку енергију

Да би се у наставку лакше "баратало" кинетичком енергијом анализираће се њена структура за различите видове кретања. Приметимо најпре да се квадрат брзине може добити као скаларни производ вектора брзине самим собом:

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \tag{6.2}$$

Одатле се лако показује да важе следеће релације[1]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}; \\ d\left(\frac{1}{2}v^2\right) &= \frac{1}{2}d\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

На тај начин кинетичка енергија, њен извод по времену и елементарни прираштај могу бити приказани у облику:

$$E_k = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}; \quad \frac{dE_k}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}; \quad dE_k = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}. \tag{6.4}$$

Кинетичка енергија при праволинијском кретању

Ако материјална тачка врши праволинијско кретање, онда ће њена брзина бити описана једначином (4.5), $\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\,\mathbf{i}$, па ће кинетичка енергија гласити:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \tag{6.5}$$

Имајући у виду једначине (6.3) може се показати да ће извод кинетичке енергије по времену, као и њен прираштај, бити:

$$\frac{dE_k}{dt} = m\,\dot{x}\,\ddot{x}; \quad dE_k = m\,\dot{x}\,d\dot{x}.$$

Кинетичка енергија при криволинијском кретању

Код израчунавања кинетичке енергије при криволинијском кретању треба имати на уму да оно може бити описано у односу на различите координатне системе. Брзина у Декартовом координатном систему има облик

[1] Приликом њиховог извођења се користи Лајбницово правило о изводу производа, примењено на скаларни производ два вектора, и својство комутативности скаларног производа.

(4.16), док је у природном описана релацијом (4.23). Кинетичка енергија се тада израчунава на следећи начин:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Имајући у виду структуру израза за убрзање у Декартовом и природном координатном систему, (4.19) и (4.25), извод кинетичке енергије по времену и њен прираштај описани су на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= m\left(v_x a_x + v_y a_y\right) = m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}\right) \\ &= mv\dot{v} = m\dot{s}\ddot{s}; \\ \\ dE_k &= m\left(v_x dv_x + v_y dv_y\right) = m\left(\dot{x}d\dot{x} + \dot{y}d\dot{y}\right) \\ &= mvdv = m\dot{s}d\dot{s}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.2 Рад и снага

Рад силе је скаларна величина која представља меру дејства силе на материјалну тачку. Он карактерише њено дејство током померања тачке из почетног положаја P_1 у крајњи положај P_2. За разлику од кинетичке енергије која описује стање кретања материјалне тачке, рад силе је величина која се односи на *процес кретања*[2].

Рад силе на праволинијском кретању

Појам рада силе ће бити поступно анализиран. Најпре ће се проучити рад на праволинијском кретању, а потом рад на криволинијском кретању.

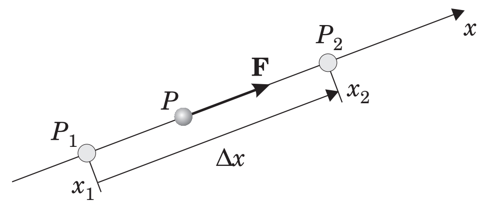
Рад константне силе

Посматрајмо константну силу $\mathbf{F} = F\,\mathbf{i}$ која дејствује на материјалну тачку током њеног кретања у правцу $x-$осе. Нека су у почетном положају P_1 и крајњем положају P_2 координате тачке x_1 и x_2 респективно, а прираштај координате $\Delta x = x_2 - x_1$. Тада се рад силе $\mathbf{F}$ на померању тачке из положаја P_1 у положај P_2 дефинише изразом:

$$A_{12} = F\,\Delta x. \tag{6.8}$$

Јединица мере за рад силе је *Џул*, $1J = 1Nm = 1kgm^2/s^2$. Приметимо да рад силе има исте димензије као кинетичка енергија.

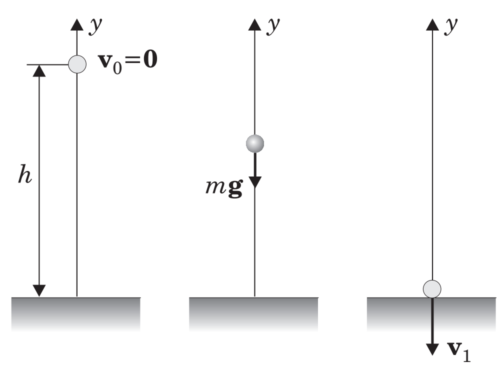
[2] Нема смисла говорити о раду силе у неком положају тачке, већ само о раду извршеном током померања из једног положаја у други.



Слика 6.2: Рад константне силе на праволинијском кретању

Ако сила дејствује у смеру померања материјалне тачке, њен ће рад бити позитиван. Ако дејствује у смеру супротном од смера кретања тачке, рад ће јој бити негативан. Приметимо да за рад константне силе није битно време које протекне током кретања тачке између почетног и крајњег положаја, већ само однос та два положаја изражен прираштајем Δx. Ово својство ће бити присутно и код рада константних сила $\mathbf{F} = \text{const.}$ дуж криволинијске трајекторије.

Пример 6.1 *Израчунати рад силе тежине током слободног пада материјалне тачке масе m са висине h. Показати да ће извршени рад бити једнак прираштају кинетичке енергије материјалне тачке.*



Слика 6.3: Рад силе тежине током слободног пада

► У случају слободног пада материјална тачка започиње кретање из положаја P_0 са висине h без почетне брзине, $y(0) = y_0 = h$, $\dot{y}(0) = v_0 = 0$. Током кретања на њу дејствује само сила тежине $m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{j}$ која је константна. На крају кретања, у положају P_1 у ком је $y(T) = y_1 = 0$, брзина тачке је $\dot{y}(T) = v_1 = -\sqrt{2gh}$. Одавде следи да је прираштај координате:

$$\Delta y = y_1 - y_0 = -h.$$

То значи да је тражени рад силе тежине:

$$A_{01} = -mg\Delta y = mgh. \tag{а}$$

Дефинишимо прираштај кинетичке енергије као $\Delta E_k = E_{k1} - E_{k0}$. Он ће током слободног пада бити:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh. \tag{б}$$

Поређењем једначина (а) и (б) долазимо до траженог резултата:

$$\Delta E_k = A_{01}.$$

◀

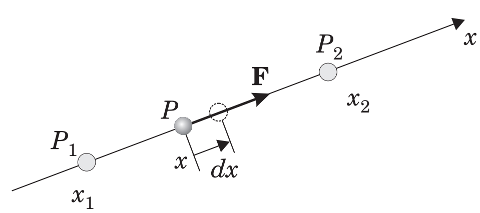
Рад промењливе силе

Видели смо да сила у општем случају може бити функција времена, положаја и брзине, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. У случају праволинијског кретања то значи:

$$F = F(t, x, \dot{x}), \tag{6.9}$$

где је F пројекција силе на $x-$осу. У ситуацији у којој се сила мења током кретања тачке из почетног у крајњи положај рад силе није коректно дефинисати на начин описан једначином (6.8). Ипак, овај израз пружа јасну мотивацију: трајекторију тачке треба поделити на подинтервале у којима ће сила имати приближно константну вредност. Прецизније речено, мора се посматрати бесконачно мало—елементарно померање тачке dx из положаја $P(t)$ у положај $P(t + dt)$, како је показано на Слици 6.4—па се *елементарни рад* силе може дефинисати као производ силе и елементарног померања[3]:

$$dA = F\,dx. \tag{6.10}$$



Слика 6.4: Рад промењливе силе на праволинијском кретању

[3]Иако није наглашено, у овој једначини се подразумева да је сила промењлива и описана изразом (6.9)

Очигледно је да се за израчунавање рада променљиве силе на коначном померању из положаја P_1 у положај P_2 мора извршити интеграција израза (6.10) да би се добило:

$$A_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} F(t, x, \dot{x})\, dx. \tag{6.11}$$

Да би се рад силе на коначном померању могао израчунати у општем случају се мора знати кретање тачке, $x = x(t)$. Тада (6.11) постаје:

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x(t), \dot{x}(t))\, dx(t), \tag{6.12}$$

где су t_1 и t_2 тренуци времена који одговрају положајаима P_1 и P_2.

Пример 6.2 *Материјална тачка масе $m = 1kg$ креће се праволинијски под дејством силе $\mathbf{F} = F(t) = 10(1-t)\,\mathbf{i}N$ (Задатак 5.2). Тачка је започела кретање из координатног почетка брзином $\dot{x}(0) = v_0 = 20m/s$. Одредити рад силе $\mathbf{F}$ од почетка кретања до тренутка t_1 у ком сила мења смер свог дејства и до тренутка t_2 у ком тачка мења смер кретања. Показати да ће рад силе бити једнак прираштају кинетичке енергије материјалне тачке.*

▶ Решавањем диференцијалне једначине кретања $m\ddot{x} = F(t) = 10(1-t)$ може се показати да ће параметарска једначина кретања и брзина тачке бити:

$$x(t) = 20t + 5t^2 - \frac{5}{3}t^3; \tag{а}$$

$$\dot{x}(t) = 20 + 10t - 5t^2. \tag{б}$$

Одавде се лако показује да сила мења смер дејства у тренутку $t_1 = 1s$, док тачка мења смер кретања у тренутку $t_2 = 1 + \sqrt{5}s$. Елементарно померање материјалне тачке је:

$$dx(t) = \dot{x}(t)dt = (20 + 10t - 5t^2)dt.$$

На основу тога ће рад силе $F(t)$ тренутка промене смера дејства бити:

$$\begin{aligned} A_{01} &= \int_0^{t_1} F(t)dx(t) = \int_0^{t_1} 10(1-t)(20 + 10t - 5t^2)dt \\ &= 10\left(20t - 5t^2 - 5t^3 + \frac{5}{4}t^4\right)\Bigg|_0^{t_1} = 112.5J \end{aligned} \tag{в}$$

На исти начин се одређује и рад силе до тренутка промене смера кретања тачке:

$$A_{02} = \int_0^{t_2} F(t)dx(t) = -200J. \tag{г}$$

Брзина тачке у тренутку промене смера дејства силе се одређује помоћу једначине (б):

$$v_1 = \dot{x}(t_1) = 25m/s,$$

а у тренутку промене смера кретања је $v_2 = \dot{x}(t_2) = 0$. Одавде следи да је у првом случају прираштај кинетичке енергије:

$$\Delta E_{k1} = E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 112.5J, \tag{д}$$

док је у другом,

$$\Delta E_{k2} = E_{k2} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -200J. \tag{ђ}$$

Поређењем једначина (в) и (г) са једначинама (д) и (ђ) добијају се жељени резултати:

$$\Delta E_{k1} = A_{01} \quad \text{и} \quad \Delta E_{k2} = A_{02}.$$

◀

Када се рад силе може унапред израчунати? Овде се може поставити и једно веома важно питање: може ли се рад силе израчунати без претходног познавања кретања тачке? Потврдан одговор се може дати само у два специјална случаја:

1. ако је сила константна—тада се рад силе на коначном померању своди на једначину (6.8):

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = F(x_2 - x_1) = F\,\Delta x;$$

2. ако је сила функција положаја, $F = F(x)$—тада се рад силе своди на израчунавање одређеног интеграла:

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = U(x)|_{x_1}^{x_2} = U(x_2) - U(x_1), \tag{6.13}$$

   где је $U(x)$ примитивна функција функције $F(x)$; приметимо да у овом случају рад силе неће зависити од начина кретања тачке између почетног и крајњег положаја, него искључиво од самих тих положаја[4].

[4]Ово је карактеристично за *потенцијалне силе*, о којима ће касније бити више речи.

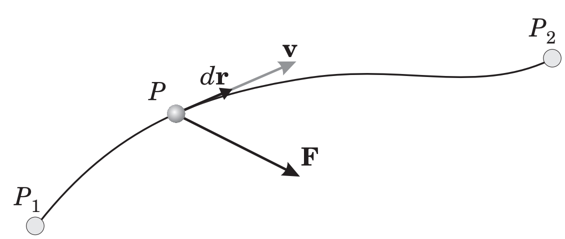
Рад силе на криволинијском кретању

Једначина (6.10) за елементарни рад силе може се интерпретирати на следећи начин: F је пројекција силе $\mathbf{F} = F\,\mathbf{i}$ на $x-$осу, док је dx пројекција вектора елементарног померања $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i}$ на исту осу. Тада се овај израз може записати у облику:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{6.14}$$

Посматрајмо кретање материјалне тачке из положаја P_1 у положај P_2 дуж криволинијске трајекторије, приказане на Слици 6.5, која је описана параметарском једначином кретања $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Нека на тачку током кретања дејствује промењљива сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. *Елементарни рад* силе $\mathbf{F}$ јесте рад извршен током бесконачно малог померања у односу на положај $P(t)$ током бесконачно малог временског интервала dt:

$$dA = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r}. \tag{6.15}$$



Слика 6.5: Рад силе на криволинијском кретању

Може се приметити да је овај израз био мотивисан једначином (6.14) коју смо видели код праволинијског кретања. Пошто је $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, лако се показује да је вектор елементарног померања колинеаран са вектором брзине:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt.$$

Зато га на једноставан начин можемо изразити у различитим координатним системима:

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} = ds\,\mathbf{e}_t. \tag{6.16}$$

Ако се и сила која дејствује на тачку прикаже у одговарајућем координатном систему:

$$\mathbf{F} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} = F_t\,\mathbf{e}_t + F_n\,\mathbf{e}_n, \tag{6.17}$$

онда се елементарни рад (6.15) може изразити на следећи начин:

$$dA = X\,dx + Y\,dy = F_t\,ds. \tag{6.18}$$

Одавде следи један важан закључак:

Ако је сила све време кретања нормална на трајекторију, $\mathbf{F} = F_n\,\mathbf{e}_n$, $F_t = 0$*, онда ће њен рад бити једнак нули:*

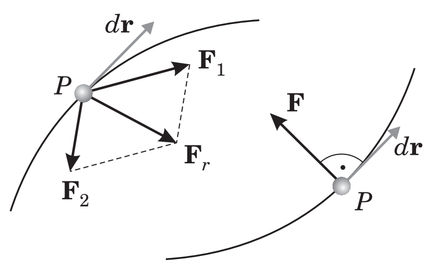
$$\mathbf{F} \perp d\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Рад силе на коначном померању из положаја P_1 у положај P_2 дуж криволинијске трајекторије јесте израз:

$$A_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} dA = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{6.19}$$

Овај интеграл у математичком смислу представља *криволинисјки интеграл*. Да би се он израчунао мора се познавати трајекторија, односно кретање тачке $\mathbf{r}(t)$. Поред тога, у општем случају рад "исте" силе[5] дуж две различите трајекторије са заједничким крајњим тачкама неће бити исти. Ово открива друго важно својство рада силе:

Рад силе зависи од облика трајекторије дуж које се креће материјална тачка.



Слика 6.6: Рад резултанте две силе и случај када је рад једнак нули

Ако на материјалну тачку дејствују две силе $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, онда ће елементарни рад резултанте $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ бити једнак збиру елементарних радова компонената:

$$dA^{\mathbf{F}_r} = \mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = dA^{\mathbf{F}_1} + dA^{\mathbf{F}_2}.$$

Одатле следи да ће елементарни рад резултанте система сила које дејствују на материјалну тачку бити једнак збиру елементарних радова компонената:

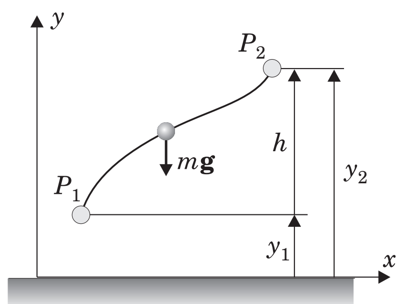
$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \quad \Rightarrow \quad dA^{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{n} dA^{\mathbf{F}_i} \tag{6.20}$$

[5] Овде се под "истом" силом подразумева сила која има истфункционалну зависност од величина стања и времена. Она се, међутим, дуж различитих трајекторија може мењати на различите начине.

Исто важи и за укупни рад, што се може показати непосредном интеграцијом последње једначине:

$$A_{12}^{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{n} A_{12}^{\mathbf{F}_i}. \tag{6.21}$$

Пример 6.3 *Одредити рад силе тежине на померању материјалне тачке масе m из положаја $P_1(x_1, y_1)$ у положај $P_2(x_2, y_2)$. Да ли рад силе тежине зависи од облика трајекторије?*



Слика 6.7: Рад силе тежине на криволинијском кретању

► Сила тежине је у Декартовом координатном систему описана на следећи начин $m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{j}$. У исто време елементарно померање материјалне тачке је $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$. Одатле следи да је елементарни рад силе тежине:

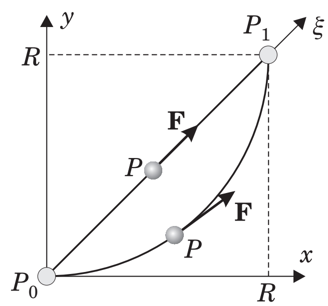
$$dA = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = -mg\,dy. \tag{a}$$

Укупни рад силе тежине током померања тачке из положаја P_1 у положај P_2 биће:

$$A_{12} = -\int_{(P_1)}^{(P_2)} mg\,dy = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1) = -mgh. \tag{б}$$

Видимо да рад зависи само од вертикалног растојања између крањег и почетног пложаја, а *не зависи* од облика путање дуж које се тачка кретала. Приметимо да ће рад силе тежине бити негативан ако је $y_2 > y_1$ (тачка се креће на горе), односно позитиван ако је $y_2 < y_1$ (тачка се креће на доле). ◄

Пример 6.4 *Материјална тачка се креће од координатног почетка $P_0(0,0)$ до тачке $P_1(R,R)$ на два начина: први пут дуж праволинијске трајекторије, а други пут дуж тракеторије облика четвртине круга са центром у тачки $C(0,R)$. Током кретања на тачку десјтвује "пратећа" сила чији* *је интензитет константан, $F = const.$, и која увек има правац тангенте на трајекторију $\mathbf{F} = F\,\mathbf{e}_t$. Одредити рад ове силе током кретања тачке дуж сваке од ових трајекторија.*



► У првом случају материјална тачка врши праволинијско кретање. Ако уведемо осу $O\xi$ која се поклапа са правцем кретања, онда није тешко утврдити да ће крајњим положајима одговарати следеће вредности координате ξ:

$$\xi_0 = 0; \quad \xi_1 = \sqrt{2}R; \quad \Delta\xi = \xi_1 - \xi_0 = \sqrt{2}R.$$

Пошто сила $\mathbf{F}$ дејствује у правцу кретања тачке, њен рад се може израчунати као рад константне силе на праволинијском кретању (6.8):

$$A_{01}^{(1)} = F\,\Delta\xi = \sqrt{2}FR. \tag{а}$$

У другом случају, када се тачка креће дуж криволинијске трајекторије, може се увести природни координатни систем, односно лучна координата s, која ће се између тачака P_0 и P_1 мењати у границама $s \in [0, R\pi/2]$. То значи да се рад ове силе може израчунати као рад дуж криволинијске трајекторије (6.19):

$$A_{01}^{(2)} = \int_0^{R\pi/2} F\,ds = \frac{\pi}{2}FR. \tag{б}$$

Поређењем резултата (а) и (б) лако се долази до закључка да рад пратеће силе зависи од облика трајекторије дуж које се тачка креће између положаја P_1 и P_2. ◄

Снага

Упоредо са радом силе може се увести још једна вличина која описује дејство силе на материјалну тачку. То је *снага* и она представља брзину вршења рада. Имајући у виду једначину (6.15) снага силе се дефинише следећим изразом:

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{6.22}$$

Снага има димензије рада у јединици времена, а јединица мере је *Ват*, $1W = 1J/s$. Попут рада силе (једначина 6.20) и снага је адитивна величина—укупна снага сила које дејствују на материјалну тачку, односно снага њихове резултанте $\mathbf{F}_r = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$, једнака је збиру снага компонената:

$$P_r = \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \right) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} P_i \tag{6.23}$$

За разлику од рада силе који је био везан за процес кретања, снага силе је величина која зависи о стања кретања.

6.3 Закон о промени енергије

Примери којима су илустровани различити аспекти рада силе показали су да између њега и прираштаја кинетичке енергије постоји дубока веза. Она ће бити потврђена кроз *закон о промени енергије*, који ћемо називати и *енергијском једначином*.

Посматрајмо израз за други Њутнов закон (5.3):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

и скаларно га помножимо брзином материјалне тачке $\mathbf{v}$, користећи при томе правило комутативности за скаларни производ вектора:

$$m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Израз са леве стране знака једнакости представља извод кинетичке енергије по времену (једначина $(6.4)_2$) док је са десне стране знака једнакости снага силе:

$$\frac{dE_k}{dt} = P. \tag{6.24}$$

Ово је први облик закона о промени енергије који гласи:

Промена кинетичке енергије током времена једнака је снази силе под чијим се дејством тачка креће.

Други облик закона о промени енергије се добија трансформацијом израза (6.24). Пошто се први извод може третирати као количник две бесконачно мале величине, ова једначина се може записати као:

$$dE_k = P\,dt.$$

Из дефиниције снаге (6.22) следи $P\,dt = dA$, одакле добијамо други облик закона о промени енергије:

$$dE_k = dA. \tag{6.25}$$

Ова релација се речима може исказати на следећи начин:

Елементарни прирараштај кинетичке енергије материјалне тачке једнак је елементарном раду силе која дејствује на њу.

Једначина (6.25) се често назива и теорема о промени кинетичке енергије у диференцијалном облику.

Трећи облик енергијске једначине се добија интеграцијом израза (6.25) дуж трајекторије од почетног положаја тачке P_1 до крајњег положаја P_2:

$$\int_{(P_1)}^{(P_2)} dE_k = \int_{(P_1)}^{(P_2)} dA.$$

При томе треба имати на уму да је кинетичка енергија *величина стања*, па се њеном интеграцијом добија коначни прираштај:

$$\int_{(P_1)}^{(P_2)} dE_k = E_k\big|_{(P_1)}^{(P_2)} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k.$$

Са друге стране рад силе је карактеристика процеса кретања, тако да са десне стране знака једнакости имамо укупни рад силе (6.19). На основу ове анализе добијамо:

$$\Delta E_k = A_{12}, \tag{6.26}$$

одакле следи:

Прираштај кинетичке енергије материјалне тачке на коначном померању једнак укупном раду силе која дејствује на њу.

Треба напоменути да се други и трећи облик енергијске једначине у динамици материјалне тачке чешће користе од првог, али је зато први облик погоднииjи за уопштавање и примене у случају деформабилних тела и непрекидних средина. Иако се у формулацијама закона о промени енергије говори о снази и раду силе, подразумева се да се у случају дејства више сила, било да су у питању активне силе или реакције веза, рачунају снага и рад свих сила које дејствују на тачку.

Пример 6.5 *За математичко клатно анализирано у Примеру 5.4 применом закона о промени енергије одредити брзину тачке у функцији положаја, угла φ, као и брзину промене кинетичке енергије.*

► Полазећи од израза за брзину, $\mathbf{v} = \dot{s}\,\mathbf{e}_t = l\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_t$, можемо израчунати елементарни рад силе тежине $m\mathbf{g}$ и силе затезања конца $\mathbf{S}$. Пошто је:

$$m\mathbf{g} = -mg\sin\varphi\,\mathbf{e}_t - mg\cos\varphi\,\mathbf{e}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{S} = S\mathbf{e}_n,$$

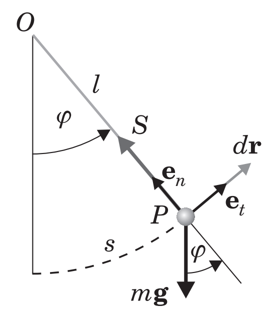
а елементарно померање гласи:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt = ld\varphi\,\mathbf{e}_t,$$

добијамо следеће резултате:

$$dA^{m\mathbf{g}} = m\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r} = -mgl\sin\varphi d\varphi; \quad dA^{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{a}$$

Приметимо да је рад силе затезања конца једнак нули због ортогоналности вектора $\mathbf{S}$ и $d\mathbf{r}$, што се може видети на Слици 6.8. Овај резултат није специфичан само за посматрани проблем. Реакције идеалних веза су по природи такве да су ортогоналне на вектор брзине, односно елементарног померања тачке[6]. Стога је *рад реакција идеалних веза* увек једнак нули.



Слика 6.8: Анализа сила код математичког клатна

Ако се изврши интеграција израза (а) за елементарни рад од почетног положаја φ_0 до произвољног положаја φ, онда ће се добити укупни рад сила које дејствују на материјалну тачку:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (-mgl \sin\theta) d\theta = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \tag{б}$$

Тада се применом трећег облика закона о промени енергије (6.26) може добити прираштај кинетичке енергије материјалне тачке:

$$\Delta E_k = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = A.$$

Одатле се добија брзина у функцији положаја:

$$v^2 = v_0^2 + 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \tag{в}$$

која је еквивалентна једначини (ђ) из Примера 5.4.

За одређивање брзине промене кинетичке енергије неопходно је применити први облик закона о промени енергије (6.24) и одредити снагу свих сила које дејствују на тачку[7]:

$$P = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = -mgl\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi.$$

Тада се лако добија:

$$\frac{dE_k}{dt} = P = -mgl\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi.$$

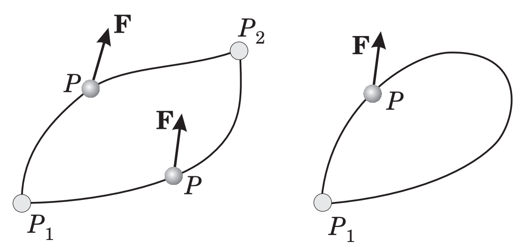
◀

[6] Ово је последица основне карактеристике реакција веза: оне одражавају ограничења која везе намећу посматраном телу.

[7] Снага реакције конца је, као и њен рад, једнака нули.

Потенцијалне силе и потенцијална енергија. Укупна механичка енергија

У Примеру 6.4 видели смо како рад силе може зависити од облика трајекторије тачке. У исто време уочено је да рад силе тежине не зависи од облика трајекторије (Пример 6.3). Да ли осим силе тежине постоје и друге силе које поседују ово својство? Одговор је потврдан, а ове силе се називају *потенцијалним силама*.



Слика 6.9: Потенцијалне силе

Посматрајмо тачку P која се од положаја P_1 до положаја P_2 креће дуж две различите трајекторије, означене са (1) и (2). Нека на тачку током кретања дејствује сила $\mathbf{F}$. Ако рад силе $\mathbf{F}$ на померању тачке од положаја P_1 до положаја P_2 не зависи од облика трајекторије дуж које се тачка креће, већ само од њених крајњих тачака, онда се каже да је сила $\mathbf{F}$ *потенцијална*:

$$A_{12}^{(1)} = A_{12}^{(2)}. \tag{6.27}$$

Потенцијалне силе се могу дефинисати и на други начин. Услову (6.27) еквивалентан је услов да је рад силе $\mathbf{F}$ на затвореној путањи[8] једнак нули:

$$A^{\circ} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{6.28}$$

Будући да рад потенцијалне силе зависи само од крајњих тачака путање, морала би постојати нека *функција* која би зависила само од положаја (координата) и чији би прираштај био једнак извршеном раду[9]. Ова функција би, ако постоји, у потпуности описала дејство потенцијалне силе. Њена егзистенција се може доказати, а из традиционалних разлога се усваја да је њен *негативни прираштај* једнак извршеном раду силе[10]:

$$A_{12} = -(\Pi(\mathbf{r}_2) - \Pi(\mathbf{r}_1)). \tag{6.29}$$

[8] За путању кажемо да је затворена ако се њена крајња тачка поклапа са почетном.

[9] Ово својство је мотивисано једначином (6.13) добијеном приликом анализе сила чији се рад дуж праволинијске трајекторије може унапред израчунати.

[10] Са $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ су означени вектори положаја крајњих тачака пуатње, P_1 и P_2.

Функција $\Pi(\mathbf{r})$ се зове *потенцијална енергија.* Ако реалција (6.29) важи независно од трајекторије дуж које се тачка креће, онда се може успоставити веза између елементарног рада потенцијалне силе, коју ћемо даље означавати са $\mathbf{F}^{\Pi}$, и елементарног прираштаја потенцијалне енергије $\Pi(\mathbf{r})$:

$$dA^{\Pi} = \mathbf{F}^{\Pi} \cdot d\mathbf{r} = -d\Pi. \tag{6.30}$$

Једначина (6.29) се може добити непосредном интеграцијом једначине (6.30):

$$A_{12}^{\Pi} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{F}^{\Pi} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{(P_1)}^{(P_2)} d\Pi = -\left.\Pi(\mathbf{r})\right|_{(P_1)}^{(P_2)} = \Pi(\mathbf{r}_1) - \Pi(\mathbf{r}_2).$$

Иако се у једначини (6.30) наизглед изједначују два *диференцијала*, мора се подвући разлика између елементарног рада dA^{Π} и елементарног прираштаја потенцијалне енергије $d\Pi$. Рад силе је у општем случају величина која описује дејство силе и *зависи од процеса кретања* посматране тачке. Потенцијална енергија је функција која такође описује дејство силе, али *зависи само од стања кретања тачке*, а не од процеса кретања. Стога она у математичком смислу представља *тотални диференцијал*, па је и интеграција која је спроведена у последњој једначини могућа.

Укупна механичка енергија. До сада смо упознали два вида механичке енергије—кинетичку и потенцијалну. За прву се често каже да представља енергију кретања. Друга пак даје информацију о резерви енергије која би се могла утрошити на вршење рада. Њихов збир је *укупна механичка енергија*:

$$E = E_k + \Pi. \tag{6.31}$$

Она ће играти централну улогу у нашој даљој анализи.

Пример 6.6 *Одредити потенцијалну енергију силе тежине, силе у еластичној опрузи и Њутнове гравитационе силе.*

▶ Елементарни рад силе тежине $m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{j}$ на бесконачно малом померању $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$ биће:

$$dA^{g} = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = -mg\,dy.$$

Користећи једначину (6.30) добићемо:

$$d\Pi^{g} = -dA^{g} = mgdy,$$

одакле после интеграције следи:

$$\Pi^{g} = mg \int dy = mgy + C,$$

где је C интеграциона константа. Овде се мора дати важна напомена о интеграционој константи. Она је за одређивање потенцијалне енергије *небитна.* Прво, не постоји универзална калибрација потенцијалне енергије. То значи да не постоји јединична потенцијална енергија која би могла послужити као еталон и на основу које би се конструисали одговарајући мерни уређаји. Друго, у случају силе тежине ова константа зависи од избора *референтног нивоа.* Пошто овај избор може бити произвољан[11], константа неће бити једнозначно одређена. Треће, за кретање ће од значаја бити само промена—прираштај потенцијалне енергије, а тада адитивна константа неће играти никакву улогу. Ова разматрања се могу применити на било коју потенцијалну силу, па ћемо их у наставку примењивати без посебног наглашавања.

Посматрајмо опругу крутости c чија је дужина у ненапргенутом стању l_0. Претпоставимо да се правац опруге не мења приликом деформисања и нека је дужина опруге у деформисаном стању l. Ради лакше рачунице усвојимо референтну тачку O на месту покретног краја опруге у недеформисаном стању и нека његов тренутни положај буде одређен координатом x. Тада ће издужење и сила затезања опруге бити:

$$\Delta l = l - l_0 = x; \quad \mathbf{F}_O = F_O\,\mathbf{i} = -c\Delta l\,\mathbf{i} = -cx\,\mathbf{i}.$$

Пошто је елементарно померање $\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i}$, елементарни прираштај потенцијалне енергије силе у опрузи биће једнак:

$$d\Pi^O = -dA^O = -\mathbf{F}_O \cdot d\mathbf{r} = cx\,dx.$$

Одатле следи да је потенцијална енергија силе у опрузи:

$$\Pi^O = c\int x\,dx = \frac{1}{2}cx^2.$$

Овај резултат се може непосредо уопштити на случај промене правца деформисане опруге. Тада је потенцијална енергија:

$$\Pi^O = \frac{1}{2}c(\Delta l)^2.$$

У случају Њутнове гравитационе силе посматраћемо рад силе на радијалном померању материјалне тачке—померању у правцу дејства силе $\mathbf{e}_r$. Тада се гравитациона сила може описати релацијом $\mathbf{F} = -(\kappa/r^2)\,\mathbf{e}_r$, док је елементарно померање $d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{e}_r$. Елементарни прираштај потенцијалне енергије ће бити:

$$d\Pi = -dA = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\kappa}{r^2}\,dr,$$

одакле се добија потенцијална енергија Њутнове гравитационе силе:

$$\Pi = -\frac{\kappa}{r}.$$

◀

[11] Избор референтног нивоа је само условно произвољан. Он мора бити хоризонталан (нормалан на правац силе тежине) и непокретан.

Закон о промени и одржању укупне механичке енергије

Увођењем потенцијалних сила ствара се могућност да се све силе поделе на потенцијалне $\mathbf{F}^{\Pi}$ и оне које то нису $\mathbf{F}^*$. Њих ћемо звати непотенцијалним силама[12]. Тада се резултанта свих сила које дејствују на материјалну тачку може приказати у виду збира резултанти ове две класе сила:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\Pi} + \mathbf{F}^*.$$

Као последица, рад и снага сила такође могу бити приказани у виду збира, јер се ради о адитивним величинама. За елементарни рад важи:

$$\begin{aligned} dA &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{F}^{\Pi} + \mathbf{F}^*) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{F}^{\Pi} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{r} = -d\Pi + dA^*, \end{aligned} \tag{6.32}$$

док се за снагу добија аналогни резултат:

$$\begin{aligned} P &= \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{F}^{\Pi} + \mathbf{F}^*) \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{F}^{\Pi} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{v} = -\frac{d\Pi}{dt} + P^*. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Укупни рад свих сила ће се такође састојати од укупног рада потенцијалних сила, једнаког негативном прираштају потенцијалне енергије, и укупног рада непотенцијалних сила:

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\int_{(P_1)}^{(P_2)} d\Pi + \int_{(P_1)}^{(P_2)} dA^* \\ &= -(\Pi_2 - \Pi_1) + A_{12}^* = -\Delta\Pi + A_{12}^* \end{aligned} \tag{6.34}$$

Приметимо још да ће прираштај и извод укупне механичке енергије (6.31) по времену бити:

$$dE = d(E_k + \Pi) = dE_k + d\Pi;$$

$$\Delta E = \Delta(E_k + \Pi) = \Delta E_k + \Delta\Pi \tag{6.35}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(E_k + \Pi) = \frac{dE_k}{dt} + \frac{d\Pi}{dt}.$$

Добијени резултати омогућују да се закон о промени енергије, у сва три облика (6.24), (6.25) и (6.26), запише и интерпретира на нов начин. Из једначина (6.24) и (6.33) следи:

$$\frac{dE_k}{dt} = P = -\frac{d\Pi}{dt} + P^*.$$

[12]Непотенцијалне силе могу бити и активне, и реакције веза.

Груписањем кинетичке и потенцијалне енергије на левој страни једнакости, и коришћењем једначине $(6.35)_3$, добија се први облик *закона о промени укупне механичке енергије*:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = P^*. \tag{6.36}$$

Он се може формулисати на следећи начин:

Промена (извод) укупне механичке енергије током времена једнака је снази непотенцијалних сила.

Ако се, међутим, пође од једначине (6.25) и искористи релација (6.32), онда се добија:

$$dE_k = dA = -d\Pi + dA^*.$$

Одавде се груписањем енергијских чланова на левој страни добија други облик закона:

$$dE = dE_k + d\Pi = dA^*, \tag{6.37}$$

који се речима може исказати на следећи начин:

Елементарни прираштај укупне механичке енергије једнак је елементарном раду непотенцијалних сила.

Најзад, полазећи од једначине (6.26), уз помоћ релације $(6.35)_2$, добија се:

$$\Delta E_k = -\Delta\Pi + A^*_{12}.$$

Истим поступком као у претходним случајевима може се доћи до трећег облика закона о промени укупне енергије:

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta\Pi = A^*_{12}, \tag{6.38}$$

што се може формулисати овако:

Прираштај укупне механичке енергије на коначном померању једнак је укупном раду непотенцијалних сила.

Закон одржања енергије

Важан специјални случај закона о промени укупне механичке енергије јесте *закон одржања енергије.* Када је рад непотенцијалних сила једнак нули дуж целе трајекторије, $dA^* = 0$ односно $A^*_{12} = 0$, и њихова снага ће бити једнака нули, $P^* = 0$. Тада из једначине (6.36) следи:

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Одатле добијамо да ће укупна механичка енергија током кретања тачке бити константна:

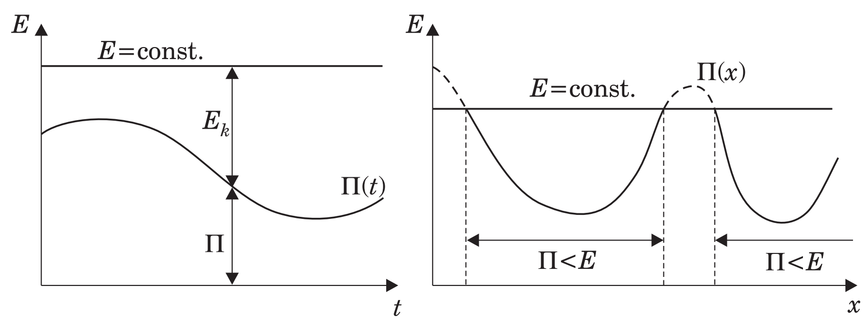
$$E = E_k + \Pi = \text{const.} \tag{6.39}$$

Константа која фигурише у закону одржања представља интеграциону константу и одређује се из почетних услова. До аналогне релације, врло корисне приликом решавања задатака, долази се ако се пође од једначине (6.38):

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0.$$

Тада видимо да укупна механичка енергија на почетку и на крају кретања мора имати исту вредност:

$$E_1 = E_{k1} + \Pi_1 = E_{k2} + \Pi_2 = E_2. \tag{6.40}$$



Слика 6.10: Закон одржања енергије и енергијски дијаграм

На Слици 6.10 је илустрован закон одржања енергије. Током времена укупна механичка енергија E остаје непромењена, док се кинетичка и потенцијална енергија могу мењати. Оне се, заправо, током кретања трансформишу једна у другу.

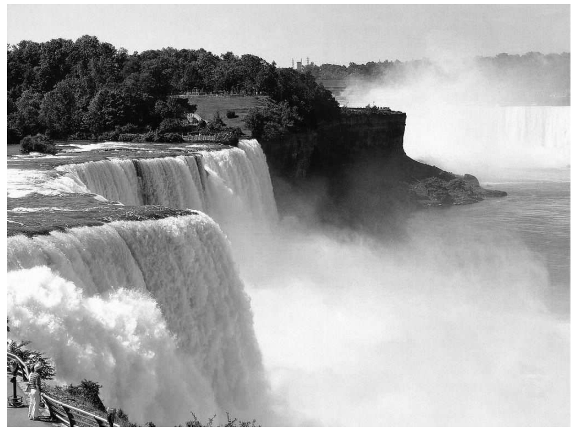
Упечатљиви примери трансформације једног вида механичке енергије у други могу се видети на Слици 6.11. У атлетици, приликом скока с мотком, потенцијална енергија еластичне деформације мотке се трансформише у кинетичку енергију такмичара, захваљујући којој он лети увис. Код водопада се потенцијална енергија воде током пада претвара у кинетичку, која се потом може искористити у друге сврхе, на пример производњу електричне енергије.

Енергијски дијаграми. Ако закон одржања енергије (6.39) важи за неко кретање, онда је могуће извршити његову једноставну квалитативну анализу. Наиме, пошто је кинетичка енергија ненегативна функција:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0,$$

важиће следећа неједнакост која следи из (6.39):

$$E - \Pi = E_k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E \geq \Pi. \tag{6.41}$$

Слика 6.11: Илустрације примене закона одржања енергије

Другим речима, потенцијална енергија Π не може током кретања бити већа од укупне механичке енергије E (видети Слику 6.10). Ова неједнакост може бити од користи приликом анализе појединих карактеристика кретања, нарочито у случају преволинијског кретања материјалне тачке, или криволинијског кретања дуж задате путање (везе).

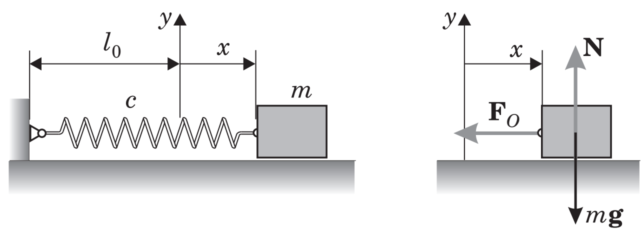
Пример 6.7 *Терет масе m може да се креће по глаткој хоризонталној подлози. За терет је закачена опруга крутости c и дужине l_0 у ненапрегнутом стању. Други крај опруге је фиксиран. У почетном тренутку терет се налазио у положају одређеном координатом x_0 и имао је брзину v_0.*

а) *Одредити кретање терета и показати да ће његов период осциловања бити $T = 2\pi/\omega$, где је $\omega = \sqrt{c/m}$.*

б) *Показати да за ово кретање важи закон одржања укупне механичке енергије.*

в) *Помоћу енергијског дијграма одредити амплитуду осциловања терета.*

▶ Пошто терет врши праволинијско кретање усвојићемо Декартов координатни систем чија се $x-$оса поклапа са правцем кретања, а координатни почетак одговара положају терета у ком је опруга ненапрегнута. На терет током током кретања дејствују две активне силе: сила тежине $m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{j}$ и сила еластичне опруге $\mathbf{F}_O = -cx\,\mathbf{i}$. Будући да је кретање терета ограничено глатком хоризонталном подлогом, на терет ће дејствовати реакција подлоге, сила $\mathbf{N} = N\,\mathbf{j}$. Имајући ово у виду други Њутнов зако за кретање терета ће бити $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_O + \mathbf{N}$, а диференцијалне једначине кретања ће гласити:



$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -cx; \\
m\ddot{y} &= -mg + N.
\end{aligned} \tag{а}
$$

Пошто се терет креће праволинијски, у хоризонталном правцу, важиће $y(t) = 0 = \text{const.}$, одакле следи $\dot{y} \equiv 0$ и $\ddot{y} \equiv 0$. На тај начин једначина $(\text{а})_2$ постаје обична статичка једначина из које се одређује реакција везе, $N = mg$. Приметимо да се из једначине $(\text{а})_1$ могу одредити положаји равнотеже тачке. Наиме, у стању мировања важи $x(t) = \text{const.}$, одакле следи $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$. Тада у положају равнотеже важи $-cx = 0$, односно $x = 0$. Дакле, једини положај равнотеже терета је у координатном почетку.

Једначина $(\text{а})_1$ је права диференцијална једначина кретања која се увођењем *кружне фреквенције* ω:

$$
\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{б}
$$

може записати на следећи начин:

$$
\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{в}
$$

Ово је обична диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима чије опште решење гласи:

$$
x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t. \tag{г}
$$

Да би оно било сагласно са почетним условима:

$$
x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0, \tag{д}
$$

интеграционе константе морају имати следеће вредности:

$$
C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}. \tag{ђ}
$$

Решење једначине (в) се често приказује у једном другом облику, погоднијем за анализу. Уместо константи C_1 и C_2 уведу се константе A и α следећим релацијама:

$$
\begin{matrix} C_1 = A\sin\alpha \\ C_2 = A\cos\alpha \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \tan\alpha = \frac{C_1}{C_2}. \end{matrix}
$$

На тај начин се, уз коришћење адиционе теореме, решење (г) може записати у облику:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha). \tag{е}$$

Као што се види, терет врши осцилаторно кретање у околини координатног почетка (положаја равнотеже), а константе A и α представљају *амплитуду* и *почетну фазу* осциловања које се могу одредити у зависности од почетних услова:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}; \quad \alpha = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right). \tag{ж}$$

У исто време кружна фреквенција ω, одређена једначином (б), и *период осциловања* T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \tag{з}$$

који је једнак периоду синусне функције, јесу величине које *не зависе* од почетних услова, него представљају карактеристике система.

Да бисмо извршили енергијску анализу приметимо најпре да је елементарно померање терета $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i}$. У том случају сила тежине и реакција везе не врше рад због ортогоналности са вектором елементарног померања:

$$dA^{m\mathbf{g}} = m\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r} = 0; \quad dA^{\mathbf{N}} = \mathbf{N}\cdot d\mathbf{r} = 0,$$

а сила $\mathbf{F}_O$ је потенцијална, па је укупна потенцијална енергија једнака:

$$\Pi = \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}cx^2. \tag{и}$$

Кинетичка енергија терета је:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \tag{ј}$$

Пошто је снага непотенцијалних сила једнака нули[13] укупна механичка енергија ће током кретања бити константна:

$$E = E_k + \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 = \text{const}. \tag{к}$$

Уврштавањем решења (е) у једначину (к) ово се може лако потврдити:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}cA^2\sin^2(\omega t + \alpha) \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}cx_0^2 = \text{const}. \end{aligned} \tag{л}$$

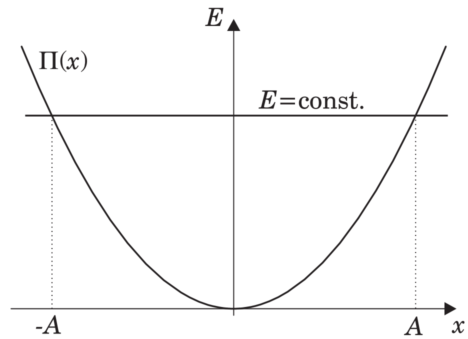
Закон одржања енергије се може потврдити и рачунањем извода укупне механичке енергије по времену:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + cx\dot{x}.$$

[13] Њу у овом случају чини једино снага реакције идеалне везе $\mathbf{N}$.

Он, међутим, мора бити израчунат *дуж трајекторије* терета одређене диференцијалном једначином (в), $\ddot{x} = -\omega^2 x$, уз коришћење релације (б):

$$\frac{dE}{dt} = -m\omega^2 x\dot{x} + cx\dot{x} \equiv 0.$$



Посматрајмо сада услов (6.41) који закон одржања енргије намеће потенцијалној енергији. Укупна механичка енергија, која је током кретања константна, одређује се из почетних услова (д) и дата је изразом (л). Тада важи:

$$E \geq \Pi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}cx_0^2 \geq \frac{1}{2}cx^2. \tag{љ}$$

Ако се нацрта график функције $\Pi(x)$ види се да је неједнакост (љ) задовољена на ограниченом интервалу вредности променљиве $x \in [x_1, x_2]$. У тој области се тачно може одредити кинетичка енергија у функцији положаја јер је $E_k = E - \Pi(x)$. У рубним тачкама ове области важи $\Pi(x_1) = \Pi(x_2) = E$, што значи да је кинетичка енергија, а самим тим и брзина тачке једнака нули, $v(x_1) = v(x_2) = 0$. То су, дакле, тачке у којима терет мења смер кретања и оне нам могу послужити за одређивање амплитуде осциловања. Како је у рубним тачкама задовољена једнакост:

$$x^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

добијају се два симетрична решења која одговарају амплитуди осциловања терета:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \pm A. \tag{м}$$

Приметимо да је резултат енергијске анализе—једначина (м)—еквивалентан резултату који је добијен анализом параметарске једначине кретања (једначина (ж)). ◄

На први поглед се чини да енергијска анализа само представља други начин да се дође до истог резултата до ког се може доћи анализом параметарске једначине. Међутим, у иоле сложенијим проблемима кретање није могуће одредити у затвореној форми, па се управо енергијском анализом може доћи до драгоцених информација.

6.4 Дисипација механичке енергије

Веома важан феномен у механичким системима јесте дисипација (расипање) механичке енергије. То је појава губитка механичке енергије, односно њене трансформације у друге видове енергије. Једначина (6.36) нам говори о услову под којим се овај феномен јавља:

$$\frac{dE}{dt} = P^* = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{v} \leq 0. \tag{6.42}$$

Одавде је јасно да снага непотенцијалних сила током кретања треба да буде непозитивна функција да би укупна механичка енергија била монотоно нерастућа функција.

Силе $\mathbf{F}_D$ за које важи:

$$P_D = \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{v} \leq 0, \tag{6.43}$$

зову се *дисипативне силе*. Типични примери дисипативних сила су силе вискозног и Кулоновог (сувог) трења. При њиховом дејству највећи део изгубљене механичке енергије се претвара у топлотну енергију.

Покажимо да је линеарна сила вискозног трења дисипативна. Претпоставимо да се материјална тачка креће под дејством потенцијалних активних сила $\mathbf{F}^\Pi$ чија је потенцијална енергија Π, силе вискозног трења $\mathbf{F}_w = -mk\mathbf{v}$, $k > 0$, као и да је кретање ограничено идеалним везама чија је резултанта $\mathbf{R}$:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^\Pi + \mathbf{F}_w + \mathbf{R}.$$

Закон о промени укупне механичке енергије (6.36) у овом случају се своди на следећи облик:

$$\frac{dE}{dt} = P^* = \mathbf{F}_w \cdot \mathbf{v} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}.$$

Ако су везе идеалне, онда је снага реакција веза једнака нули, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = 0$. У исто време снага силе вискозног трења ће бити:

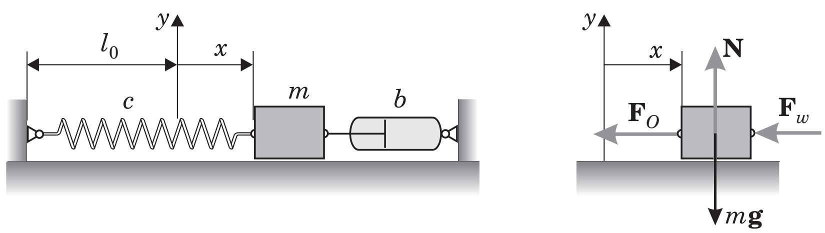
$$\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{v} = -mk\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -mkv^2 \leq 0.$$

Одавде следи да ће, под наведеним претпоставкама, постојати дисипација укупне механичке енергије услед дејства силе вискозног трења:

$$\frac{dE}{dt} = -mkv^2 \leq 0.$$

Пример 6.8 *Показати да се код линеарних пригушених осцилација јавља дисипација механичке енергије и одредити закон промене енергије са временом за различите односе вредности параметара система.*

► Најједноставнији механички модел који описује линеарне пригушене осцилације представља осцилатор, анализиран у Примеру 6.7, коме је додата пригушница (амортизер). Она се састоји од клипа који се креће кроз цилиндар испуњен флуидом. Њено присуство се манифестује силом отпора—вискозног трења—која је пропорционална првом степену брзине, $\mathbf{F}_w = -b\mathbf{v}$. На овај начин други Њутнов закон, који сада гласи $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_O + \mathbf{F}_w + \mathbf{N}$, даје следеће две једначине:



$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -cx - b\dot{x}; \\ m\ddot{y} &= -mg + N. \end{aligned} \tag{а}$$

Као и код хармонијског осцилатора, једначина $(а)_2$ је статичка једначина и из ње следи $N = mg$. Једначина $(а)_1$ се може трансформисати ако се поред кружне фреквенције $\omega = \sqrt{c/m}$ уведе и *коефицијент пригушења* $\beta = b/2m$:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 = 0. \tag{б}$$

Може се показати да једначина (б) има следећа решења у зависности од односа параметара ω и β:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\beta t}\cos\Omega t + C_2 e^{-\beta t}\sin\Omega t && \text{за} \quad \omega > \beta; \\ x(t) &= C_1 e^{-(\beta+\kappa)t} + C_2 e^{-(\beta-\kappa)t} && \text{за} \quad \omega < \beta; \\ x(t) &= e^{-\omega t}(C_1 + C_2 t) && \text{за} \quad \omega = \beta. \end{aligned} \tag{в}$$

У једначинама $(в)_{1,2}$ искоришћене су ознаке:

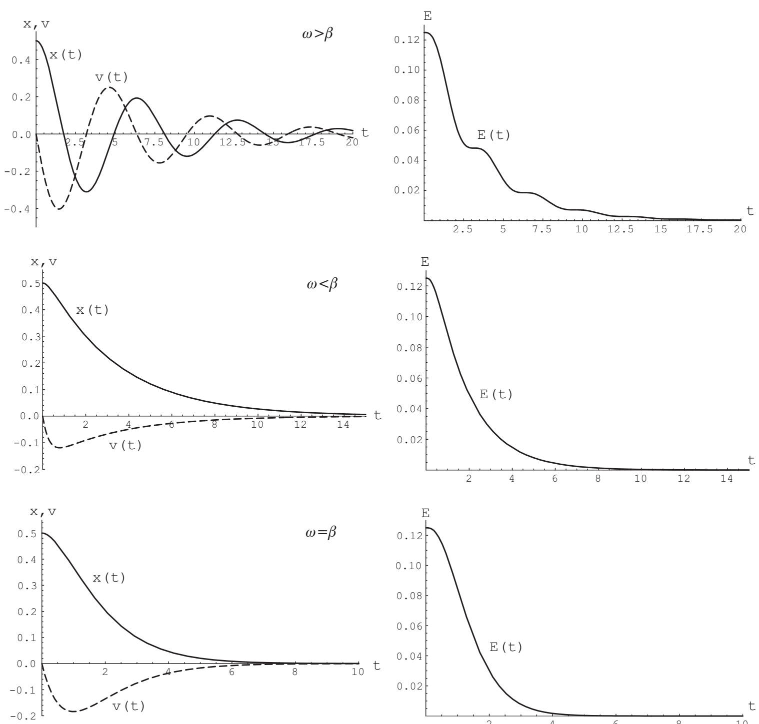
$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad \text{и} \quad \kappa = \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Ако се искористе почетни услови:

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

добијају се следеће вредности за интеграционе константе:

$$\begin{aligned}
\omega > \beta: &\quad C_1 = x_0; & C_2 &= \frac{x_0\beta + v_0}{\Omega}; \\
\omega < \beta: &\quad C_1 = \frac{x_0\kappa - (x_0\beta + v_0)}{2\kappa}; & C_2 &= \frac{x_0\kappa + x_0\beta + v_0}{2\kappa}; \\
\omega = \beta: &\quad C_1 = x_0; & C_2 &= x_0\omega + v_0.
\end{aligned} \tag{г}$$



Укупна механичка енергија у овом проблему ће бити иста као код хармонијског осцилатора:

$$E = E_k + \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2, \tag{д}$$

али ће овог пута њен извод по времену, који је једнак снази непотенцијалних сила, бити једнак снази силе отпора $\mathbf{F}_w$:

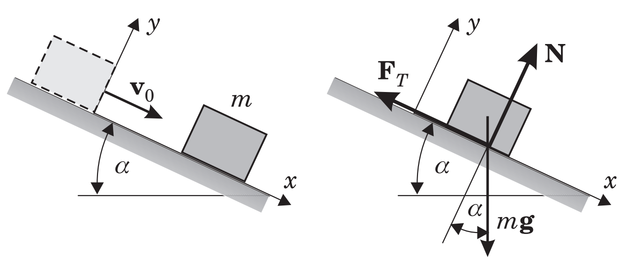
$$\frac{dE}{dt} = P^* = \mathbf{F}_w \cdot \mathbf{v} = -bv^2 \leq 0. \tag{ђ}$$

Коришћењем резултата (в) и (г) добијају се закони промене енергије током времена:

$$\begin{aligned}
\omega > \beta: \quad & \frac{dE}{dt} = -2\frac{m\beta}{\Omega^2}e^{-2\beta t}\left(v_0\Omega\cos\Omega t - (v_0\beta + x_0\omega^2)\sin\Omega t\right)^2;\\
\omega < \beta: \quad & \frac{dE}{dt} = -2m\beta\left(\frac{\beta+\kappa}{2\kappa}(v_0 + x_0\beta - x_0\kappa)e^{-(\beta+\kappa)t}\right.\\
& \qquad\left. -\frac{\beta-\kappa}{2\kappa}(v_0 + x_0\beta + x_0\kappa)e^{-(\beta-\kappa)t}\right)^2; \qquad \text{(e)}\\
\omega = \beta: \quad & \frac{dE}{dt} = -2m\omega e^{-2\omega t}\left(x_0\omega^2 t + v_0(\omega t - 1)\right)^2.
\end{aligned}$$

На дијаграмима су приказане параметарске једначине кретања терета и промене брзине и енергије током времена при истим почетним условима, $x(0) = 0.5$ и $v(0) = 0$, за $\omega = 1.0$, а за различите вредности коефицијента пригушења $\beta = 0.15; 1.8; 1.0$. ◄

Пример 6.9 *Материјална тачка масе m мирује на храпавој стрмој равни угла нагиба α ($\tan\alpha < \mu_S$). У почетном тренутку саопштена јој је брзина v_0 усмерена ка подножју стрме равни. Одредити кретање тачке ако је коефицијент динамичког трења између тачке и стрме равни μ_D. Колики ће пут l прећи тачка док се поново не заустави? Који услов треба да задовољи коефицијент трења μ_D да би овакво кретање било могуће? Колики је губитак механичке енергије током овог кретања?*



► Посматрајмо стрму раван угла нагиба α и усвојимо Декартов координатни систем са почетком који се поклапа са почетним положајем тачке и $x-$осом усмереном ка подножју стрме равни. Ако посматрамо материјалну у тачку у произвољном положају, онда можемо уочити да на њу дејствују сила тежине $m\mathbf{g}$, реакција стрме равни $\mathbf{N}$ и сила трења $\mathbf{F}_T$:

$$\begin{aligned}
m\mathbf{g} &= mg\sin\alpha\,\mathbf{i} - mg\cos\alpha\,\mathbf{j};\\
\mathbf{N} &= N\,\mathbf{j}; \quad \mathbf{F}_T = -F_T\,\mathbf{i}.
\end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Из другог Њутновог закона, који у овом случају гласи $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_T$, следе диференцијалне једначине кретања:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - F_T; \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\alpha + N. \end{aligned} \tag{б}$$

Пошто је координатни систем усвојен тако да важи $y(t) = \text{const.}$, односно $\dot{y} \equiv 0$ и $\ddot{y} \equiv 0$, једначина $(б)_2$ ће бити статичка и из ње следи $N = mg\cos\alpha$. Са друге стране, из Кулоновог закона следи да ће сила трења током кретања бити:

$$F_T = \mu_D N = \mu_D mg\cos\alpha. \tag{в}$$

Тада се једначина $(б)_1$, после дељења са m, своди на следећи облик:

$$\ddot{x} = -g(\mu_D\cos\alpha - \sin\alpha) = -a = \text{const.}, \tag{г}$$

где је усвојена ознака $a = g(\mu_D\cos\alpha - \sin\alpha)$.

Једначина (г) описује једнакопроменљиво кретање тачке. Њеном интеграцијом, уз задовољавање почетних услова:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0,$$

долази се до закона промене брзине и параметарске једначине кретања:

$$\dot{x}(t) = v(t) = v_0 - at; \quad x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2. \tag{д}$$

Пут l који је тачка прешла до поновног заустављања биће одређен на два начина. Најпре ћемо га одредити анализирајући једначине (д). Наиме, из једначине $(д)_1$ може се одредити тренутак времена t_1 у ком се тачка зауставила:

$$v(t_1) = v_0 - at_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{a}. \tag{ђ}$$

Уврштавањем добијеног резултата у израз $(д)_2$ добија се пређени пут тачке:

$$l = x(t_1) = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\mu_D\cos\alpha - \sin\alpha)}. \tag{е}$$

Поред тога, из једначине (ђ), односно услова $t_1 > 0$, се може одредити ограничење које мора задовољити коефицијент трења да би овакво кретање било могуће:

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_D > \tan\alpha. \tag{ж}$$

Другим речима, да би се тачка могла зауставити кретање мора бити успорено.

Други начин за одређивање пређеног пута јесте примена закона о промени енергије. Уочимо прво да елементарно померање материјалне тачке има облик $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i}$. Стога ће елементарни рад сила (б) бити:

$$\begin{gathered} dA^{m\mathbf{g}} = m\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r} = mg\sin\alpha\,dx; \quad dA^{\mathbf{N}} = \mathbf{N}\cdot d\mathbf{r} = 0; \\ dA^{\mathbf{F}_T} = \mathbf{F}_T\cdot d\mathbf{r} = -F_T\,dx = -\mu_D mg\cos\alpha\,dx. \end{gathered} \tag{и}$$

Пошто су и сила тежине, и сила трења константне, могуће је израчунати њихов рад на путу дужине l:

$$A^{m\mathbf{g}} = \int_0^l dA^{m\mathbf{g}} = mgl\sin\alpha; \quad A^{\mathbf{F}_T} = \int_0^l dA^{\mathbf{F}_T} = -\mu_D mgl\cos\alpha. \tag{j}$$

Промена кинетичке енергије током кретања износи:

$$\Delta E_k = E_k(l) - E_k(0) = \frac{1}{2}mv^2(l) - \frac{1}{2}mv^2(0) = -\frac{1}{2}mv_0^2, \tag{к}$$

јер је $v(l) = 0$ по претпоставци. Тада из закона о промени енергије $\Delta E_k = A$ следи:

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha),$$

одакле непосредно добијамо тражени пређени пут (е).

Губитак укупне механичке енергије током кретања се одређује на основу закона о промени укупне механичке енергије (6.38), $\Delta E = A^*$. У овом проблему је само сила тежине потенцијална, па имамо:

$$d\Pi = -dA^{m\mathbf{g}} = -mg\sin\alpha\, dx \quad \Rightarrow \quad \Pi = -mgx\sin\alpha, \tag{л}$$

док је укупна механичка енергија:

$$E = E_k + \Pi = \frac{1}{2}mv^2 - mgx\sin\alpha. \tag{љ}$$

Пошто реакција идеалне везе $\mathbf{N}$ не врши рад, укупан рад непотенцијалних сила ће се свести на рад силе Кулоновог трења (j)$_2$, $A^* = A^{\mathbf{F}_T}$. Тако се, уз коришћење једначине (е), долази до следећег израза за губитак укупне механичке енергије:

$$\Delta E = A^* = A^{\mathbf{F}_T} = -\mu_D mgl\cos\alpha = -\frac{1}{2}mv_0^2\frac{\mu_D\cos\alpha}{\mu_D\cos\alpha - \sin\alpha} < 0. \tag{м}$$

◀

6.5 Напомене о енергијској анализи

Енергијска анализа се ослања на величине скаларног карактера—кинетичку енергију, рад силе и њену снагу. Иако су енергијске једначине (6.24) и (6.36) изведене из другог Њутновог закона оне се налазе у основи једног потпуно еквивалентног пута у механици.

Однос енергијске једначине и другог Њутновог закона

Посматрајмо енергијску једначину (6.24) и запишимо је у развијеној форми:

$$\frac{dE_k}{dt} = P \quad \Leftrightarrow \quad m\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}.$$

Пребаце ли се сви изрази на леву страну знака једнакости, и при томе искористи комутативност скаларног производа и закон дистрибуције, добиће се следећа релација:

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F})\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{6.44}$$

Ако она важи за било коју брзину $\mathbf{v}$ током кретања тачке, онда из једначине (6.44) следи други Њутнов закон $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Приказана трансформација у грубом облику наговештава да су енергијски и векторски приступ (други Њутнов закон) еквивалентни. Њихов однос је ипак много деликатнији и дубљи него што се из ове анализе може наслутити. На пример, *реакције идеалних веза* чији су рад и снага једнаки нули, $dA^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cdot d\mathbf{r} = 0$ и $P^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{v} = 0$, представљају саставни део другог Њутновог закона за везано кретање (5.5), док у исто време не фигуришу у енергијској једначини.

Структура потенцијалних сила

Да бисмо се ближе упознали са структуром потенцијалних сила посматрајмо израз за елементарни рад (6.32):

$$dA = \mathbf{F}^{\Pi}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}^{*}\cdot d\mathbf{r} = -d\Pi + dA^{*},$$

и претпоставимо да је потенцијална енергија, као функција положаја $\mathbf{r}$, изражена у односу на Декартове координате[14], $\Pi = \Pi(x, y, z)$. Рад потенцијалних сила је једнак негативном прираштају потенцијалне енергије, а он у матетематичком смислу представља *тотални диференцијал* функције. На тај начин се добија:

$$\begin{aligned} dA^{\Pi} = \mathbf{F}^{\Pi}\cdot d\mathbf{r} &= X^{\Pi}\,dx + Y^{\Pi}\,dy + Z^{\Pi}\,dz \\ &= -\frac{\partial\Pi}{\partial x}\,dx - \frac{\partial\Pi}{\partial y}\,dy - \frac{\partial\Pi}{\partial z}\,dz. \end{aligned}$$

Одавде следи да су пројекције потенцијалних сила на осе Декартовог координатног система једнаке негативним парцијалним изводима (градијентима) потенцијалне енергије по одговарајућој координати:

$$X^{\Pi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}; \quad Y^{\Pi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}; \quad Z^{\Pi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}. \tag{6.45}$$

Уобичајено је да се за описивање потенцијалних сила користи појам *градијента* функције. Он се у математичком смислу представља векторским

[14] Овде ћемо ради општости посматрати силе које дејствују на тачку у простору.

оператором:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k},$$

па се потенцијалне силе могу приказати као негативни градијенти потенцијалне енергије:

$$\mathbf{F}^{\Pi} = -\nabla\Pi = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial\Pi}{\partial y}\,\mathbf{j} - \frac{\partial\Pi}{\partial z}\,\mathbf{k}. \tag{6.46}$$

Тада се други Њутнов закон може записати у следећем облику:

$$m\mathbf{a} = -\nabla\Pi + \mathbf{F}^{*}.$$

Закон одржања енергије као први интеграл

Под првим интегралом се у механици подразумева израз—функционална релација—која повезује време и величине стања (вектор положаја и вектор брзине), а чија се вредност не мења током кретања. Због тога се он назива и *константом кретања* или *законом одржања.* Први интеграл може бити скаларног и векторског карактера.

Закон одржања енергије представља први интеграл једначина кретања. То је показано у Примеру 6.7 у случају хармонијског осцилатора. Исто се може показати и у случају математичког клатна. Пример векторског првог интеграла је *закон одржања количине кретања*, односно први Њутнов закон. Наиме, ако је резултанта свих сила које дејствују на материјалну тачку једнака нули, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, онда је $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F} = \mathbf{0}$, одакле следи $\mathbf{K} = m\mathbf{v} = \mathrm{const}$.

Посматрајмо праволинијско кретање тачке. Ако је први интеграл описан релацијом:

$$f(t, x, \dot{x}) = \mathrm{const.},$$

онда његов извод дуж трајекторије тачке, описане другим Њутновим законом $m\ddot{x} = X(t, x, \dot{x})$, мора бити једнак нули:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{1}{m}X(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Закон одржања енергије има много ширу примену него што се на први поглед може наслутити. Он се на природан начин јавља у оквиру анализе кретања деформабилних тела, односно непрекидних средина. Вероватно најпознатији пример закона одржања енергије јесте чувена *Бернулијева једначина.* Она важи за *стационарно*[15] струјање *идеалног—невискозног*[16] флуида. Под овим претпоставкама трајекторије тачака (честица флуида),

[15] Под стационарним процесом се подразумева онај при ком се величине стања не мењају током времена. У овом случају величине стања као што су густина, брзина и притисак не зависе од времена, али зависе од тачке простора у којој се посматрају.

[16] Код ове идеализације понашања флуда занемарује се вискозност, односно унутрашње трење.

које се зову струјне линије или струјнице, не мењају облик током времена. Тада дуж сваке струјне линије важи следећа релација:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{const.}, \tag{6.47}$$

где је ρ густина флуида, а p притисак. Може се показати да се Бернулијева једначина (6.47) добија као први интеграл *Ојлерове једначине* написане за струјницу:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin\alpha, \tag{6.48}$$

где је s лучна координата мерена дуж струјнице.

О дисипацији механичке енергије

Показано је (једначина (6.42)) да у присуству дисипативних непотенцијалних сила, које задовољавају услов $\mathbf{F}_D \cdot \mathbf{v} \leq 0$, укупна механичка енергија опада (не расте) током времена. Два основна и најважнија примера дисипативних сила су биле сила вискозног трења и сила Кулоновог трења. Није, међутим, речено шта се догађа са "ишчезлим" делом механичке енергије. Он се претвара у друге видове енергије—топлотну и електричну.

Иако понуђено објашњење делује логично, механизми трансформације једног вида енергије у други могу бити сложени и зависе од природе средине у којој се одвија овај процес. Зато се мора нагласити да је енергијска једначина у чисто механичким проблемима еквивалентна једначини кретања—другом Њутновом закону. Међутим, у проблемима у којима до изражаја долази промена температуре она представља *независну* једначину која се не може свести на једначину кретања, нити поистоветити са њом. Тада у енергијски биланс мора ући и *унутрашња енергија* која непосредно зависи од температуре.

6.6 Стабилност положаја равнотеже

У етимолошком смислу појам стабилности означава *сталност*, *постојаност* или *непромењивост*. Ако бисмо тај појам желели да применимо на техничке проблеме могли бисмо рећи да је неко стање (режим рада) система стабилно ако се неће битно променити под дејством спољашњих утицаја. Ово својство није од значаја само за понашање техничких система—оно је у непосредној вези са нашом перцепцијом процеса у природи: ако је процес стабилан, мали поремећаји неће битно променити његове главне одлике и ми ћемо моћи да их откријемо и проучимо; ако је нестабилан, мали поремећаји, којих увек има, моћи ће да изазову његове драстичне промене и нећемо бити у стању да га сагледамо иако математички модел предвиђа његову егзистенцију. Овде ћемо посредством једног елементарног примера видети како се проблем стабилности може третирати у механичким проблемима и како се он потом повезује са малим осцилацијама механичких система.

Стабилност равнотеже математичког клатна

Посматрајмо математичко клатно које је сачињено од материјалне тачке P масе m и глатке жице кружног облика полупречника l. Ако је положај тачке одређен углом φ, онда знамо да ће диференцијална једначина кретања математичког клатна бити[17]:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \tag{6.49}$$

где је $\omega = \sqrt{g/l}$. Положаји равнотеже клатна су описани релацијом:

$$\varphi(t) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t) = 0;\, \ddot{\varphi}(t) = 0,$$

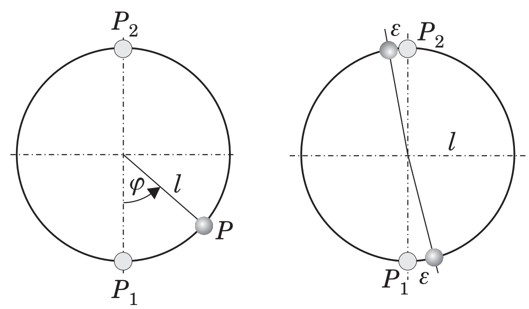
која мора представљати партикуларно решење диференцијалне једначине кретања (6.49). Лако се показује да услов равнотеже гласи:

$$\sin\varphi = 0,$$

одакле следе два положаја равнотеже[18]:

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi. \tag{6.50}$$

Ови положаји равнотеже одговарају и очекивањима која би била заснована на нашој интуицији.



Слика 6.12: Положаји равнотеже математичког клатна и њихови мали поремећаји

Да бисмо испитали стабилност положаја равнотеже (6.50) претпоставићемо да су они поремећени у неком тренутку времена који ћемо прогласити за почетни. На пример, у случају положаја $\varphi_1 = 0$, за који важи и $\dot{\varphi}_1 = 0$, *почетни поремећаји* ће бити уведени на следећи начин:

$$\varphi(0) = \varphi_1 + \varepsilon_0 = \varepsilon_0; \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_0.$$

[17] Овде ћемо се бавити само проблемом стабилности положаја равнотеже без анализе реакције веза.

[18] У математичком смислу једначина $\sin\varphi = 0$ има бесконачно много решења облика $\varphi = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Сва та решења описују свега два физички различита положаја равнотеже дата једначином (6.50).

За почетне поремећаје ε_0 и $\dot{\varepsilon}_0$ се претпоставља да су *мали по модулу* (апсолутној вредности). Кључно питање је да ли ће поремећаји који су у почетном тренутку били мали остати мали, односно ограничени, и током времена. Одговор на питање о *временској еволуцији поремећаја* се добија анализом једначине кретања клатна (6.49). Зато се мора увести поремећај $\varepsilon(t)$ који ће нам омогућити да опишемо поремећено кретање клатна:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varepsilon(t) = \varepsilon(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t) = \dot{\varepsilon}(t);\, \ddot{\varphi}(t) = \ddot{\varepsilon}(t).$$

Његовим уврштавањем у једначину кретања добија се:

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \sin\varepsilon = 0. \tag{6.51}$$

Ова једначина представља тачну *диференцијалну једначину поремећаја.* Приметимо да *непоремећено кретање* $\varepsilon(t) = 0$, које описује положај равнотеже, представља једно њено решење. Пошто је у питању нелинеарна једначина решавање је по правилу повезано са великим математичким тешкоћама. Зато ћемо покушати до прве, грубе информације о понашању поремећаја да дођемо анализом *линеаризоване једначине поремећаја.* Ако нелинеарни члан $\sin\varepsilon$ развијемо у Маклоренов ред и задржимо се на првом члану у развоју добићемо:

$$\sin\varepsilon \approx \varepsilon,$$

а сама једначина (6.51) ће постати:

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0. \tag{6.52}$$

Једначина (6.52) јесте једначина хармонијског осциловања чије је опште решење:

$$\varepsilon(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t,$$

а решење које је сагласно са почетним условима (почетним поремећајима) гласи:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t + \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\omega} \sin\omega t.$$

Као што се види, решење представља линеарну комбинацију ограничених тригонометријских функција, а амплитуда осциловања ће бити $A = \{\varepsilon_0^2 + (\dot{\varepsilon}_0/\omega)^2\}^{1/2}$. То значи да ће поремећај током времена остати ограничен. У том случају можемо рећи да је положај равнотеже $\varphi_1 = 0$ *стабилан* у односу на мале поремећаје у почетним условима.

Аналогна анализа се може спровести и у другом случају, $\varphi_2 = \pi$. Тада се почетни поремећаји уводе на следећи начин:

$$\varphi(0) = \varphi_2 + \varepsilon_0 = \pi + \varepsilon_0; \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_2 + \dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_0,$$

а поремећено кретање је описано изразима:

$$\varphi(t) = \varphi_2(t) + \varepsilon(t) = \pi + \varepsilon(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t) = \dot{\varepsilon}(t);\, \ddot{\varphi}(t) = \ddot{\varepsilon}(t).$$

Уврштавањем ових израза у једначину (6.49) добиће се диференцијална једначина поремећаја:

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \sin(\pi + \varepsilon) = 0. \tag{6.53}$$

Линеаризована једначина поремећаја за мале вредности ε добиће се развијањем у Тејлоров ред нелинеарног члана:

$$\sin(\pi + \varepsilon) \approx \sin\pi + \cos\pi\,\varepsilon = -\varepsilon,$$

одакле следи:

$$\ddot{\varepsilon} - \omega^2 \varepsilon = 0. \tag{6.54}$$

Опште решење ове једначине гласи:

$$\varepsilon(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t},$$

а решење које је сагласно са почетним условима $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ и $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_0$ има облик:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 - \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\omega}\right) e^{-\omega t} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 + \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\omega}\right) e^{\omega t}.$$

Одавде се види да је решење описано линеарном комбинацијом експоненцијалних функција при чему једна од њих, $e^{\omega t}$, неограничено расте. То значи да поремећај током времена неће остати ограничен[19], па зато кажемо да је положај равнотеже $\varphi_2 = \pi$ *нестабилан* у односу на мале поремећаје у почетним условима.

Принцип минимума потенцијалне енергије

Испитивању стабилности положаја равнотеже се може приступити и на други начин. Идеју за овај поступак ћемо такође развити на примеру математичког клатна. Приметимо да материјална тачка врши кретање само под дејством потенцијалних сила—у овом случају силе тежине. Пројектујући други Њутнов закон $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{S}$ на правац тангенте пратећег диедра добија се једначина (в)$_1$ из Примера 5.4:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi.$$

До аналогне једначине се може доћи и применом закона о промени енергије $dE_k/dt = P$:

$$ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -mgl\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

уз претпоставку да је $\dot{\varphi} \neq 0$. У Примеру 5.4 је показано да снази доприноси само сила тежине. Имајући у виду да је њена потенцијална енергија:

$$\Pi = -mgl\cos\varphi,$$

[19] Иако је решење линеаризоване једначине поремећаја неограничено, то у општем случају не можемо рећи и за решење тачне једначине поремећаја. Једино се може констатовати да мали почетни поремећаји током времена неће остати мали, а о њиховом понашању информацију може дати само тачна једначина поремећаја.

израз за снагу се може приказати у следећем облику:

$$P = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = -\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi}. \tag{6.55}$$

Одатле следи да се диференцијална једначина кретања математичког клатна може записати на следећи начин:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\,\sin\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \tag{6.56}$$

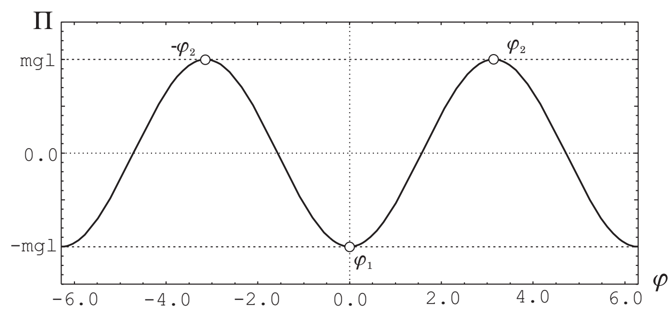
Сама дефиниција стања мировања, односно положаја равнотеже (6.6), заједно са једначином кретања (6.56) даје нам услов који у овом положају мора бити задовољен:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}(\varphi^*) = 0. \tag{6.57}$$

Другим речима, ако координата φ^* одређује положај равнотеже, онда она море бити стационарна тачка потенцијалне енергије. Овај услов представља само потребан услов екстремума и може нам послужити за одређивање могућих положаја равнотеже. У случају математичког клатна имамо:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl\,\sin\varphi = 0,$$

одакле се добијају оба положаја равнотеже дата у једначини (6.50).



Слика 6.13: Потенцијална енергија и њен карактер у околини стационарне тачке

Суд о стабилности положаја равнотеже се може донети на основу карактера стационарне тачке потенцијалне енергије. За то нам служи други извод:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mgl\,\cos\varphi.$$

Лако се показује да је у стабилном положају равнотеже $\varphi_1 = 0$ други извод потенцијалне енергије позитиван:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi_1) = mgl\,\cos\varphi_1 = mgl > 0, \tag{6.58}$$

одакле следи да потенцијална енергија у тој тачки има *локални минимум.* Са друге стране, у нестабилном положају равнотеже $\varphi_2 = \pi$ имамо:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi_2) = mgl\,\cos\varphi_2 = -mgl < 0,$$

што значи да у тој тачки потенцијална енергија има *локални максимум.* У општем случају, само се први део тврђења (6.58) може непосредно уопштити. То је наговестио још италијански физичар Торичели, а егзактан доказ су дали француски научници Дирихле и Лагранж у XVIII веку. Ово тврђење је у литератури познато као *Лагранж-Дирихлеова теорема* или *принцип минимума потенцијалне енергије*:

Ако је положај равнотеже материјалног система изолован и ако у њему потенцијална енергија има локални минимум, онда је тај положај равнотеже стабилан.

Нестабилност положаја равнотеже није непосредно повезана са локалним максимумом потенцијалне енергије, како би се на први поглед могло учинити из претходне анализе. То се лако може утврдити код сложенијих механичких система чији је положај одређен са више од једне координате[20]. За доказивање нестабилности довољно је показати да потенцијална енергија у посматраном положају равнотеже *нема минимум.* Ово тврђење познато је као *инверзна Лагранжева теорема.*

Асимптотска стабилност. Положај равнотеже, односно стање мировања материјалне тачке је стабилно ако мали почетни поремећаји изазивају, током времена, мала одступања од овог стања. Тачније, поремећаји равнотежног стања током времена остају ограничени.

Могуће је, међутим, да поремећаји током времена не буду само ограничени, већ да ишчезавају, $\varepsilon(t) \to 0$ када $t \to \infty$. Тада се каже да је положај равнотеже *асимптотски стабилан.* Типичан пример за то је положај равнотеже опружног осцилатора који је анализиран у Примеру 6.8. Приметимо да је пресудну улогу у асимптотској стабилности у том случају одиграла сила вискозног трења.

Погледајмо какав утицај на стабилност положаја равнотеже математичког клатна има сила вискозног трења $\mathbf{F}_w = -mb\mathbf{v} = -mbl\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_t$. Диференцијална једначина кретања се у том случају своди на:

$$\ddot{\varphi} = -b\dot{\varphi} - \omega^2 \sin\varphi.$$

Уочимо да присуство вискозног трења не мења положаје равнотеже (6.50). Ако се уведу поремећаји, као што је то било учињено у претходној анализи, онда се после линеаризације у околини положаја равнотеже $\varphi_1 = 0$ добија следећа линеаризована једначина поремећаја:

$$\ddot{\varepsilon} + b\dot{\varepsilon} + \omega^2\varepsilon = 0.$$

[20] За такве системе кажемо да имају више *степени слободе.*

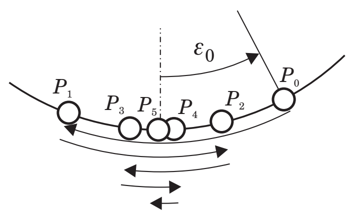
Да би се конструисало њено решење неопходно је формирати карактеристичну једначину и одредити њене корене. У овом случају она гласи:

$$\lambda^2 + b\lambda + \omega^2 = 0,$$

одакле се добија:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4\omega^2}\right).$$

Асимптотско понашање поремећаја током времена, у смислу њихове ограничености, одређују реални делови корена карактеристичне једначине[21]. Ако је $b^2 < 4\omega^2$, корени карактеристичне једначине су коњуговано-комплексни, али је $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = -b/2 < 0$, па ће положај равнотеже бити асимптотски стабилан. Када је $b^2 \geq 4\omega^2$, корени карактеристичне једначине ће бити релани, али ће оба бити негативна, тако да ће и у овом случају положај равнотеже бити асимптотски стабилан.



Слика 6.14: Асимптотска стабилност равнотежног положаја математичког клатна

Ова анализа сугерише да је за испитивање стабилности довољно испитати корене карактеристичне једначине. Тачније, за асимптотску стабилност неког стања довољно је показати да ће сви реални делови корена карактеристичне једначине бити негативни. Ако постоји бар један корен са позитивним реалним делом, онда ће непоремећено стање бити нестабилно. То је већ показано за положај равнотеже $\varphi_2 = \pi$ математичког клатна, а може се показати да се до истог резултата долази и када је присутна сила вискозног трења. Случај у ком међу коренима карактеристичне једначине нема оних са позитивним реалним делом, али има оних чији је реални део једнак нули, у теорији стабилности се посебно испитује[22].

6.7 Анализа система у простору стања

Понашање динамичких система може бити описано на један наизглед апстрактан, али веома користан начин. Погледајмо о чему се ради када су у питању механички системи.

---

[21] Имагинарни делови корена карактеристичне једначине генеришу периодичне ограничене функције као делове општег решења.

[22] У ову категорију спада испитивање стабилности доњег положаја равнотеже математичког клатна.

Решено је да је стање кретања материјалне тачке у било ком тренутку времена одређено вектором положаја $\mathbf{r}(t)$ и вектором брзине $\mathbf{v}(t)$. Ако се ограничимо на праволинијско кретање, стање ће бити одређено координатом $x(t)$ брзином $v(t)$. Пошто је током кретања $v(t) = \dot{x}(t)$, други Њутнов закон $m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$ може бити записан у виду система од две обичне диференцијалне једначине првог реда:

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = \frac{1}{m} F(t, x, v). \tag{6.59}$$

Пошто је стање система одређено величинама стања (x, v), каже се да овај систем представља математички модел механичког система у *простору стања*[23]. Решење система (6.59), $x = x(t)$ и $v = v(t)$, одређује параметарску једначину криве линије у простору стања (x, v) која се зове *фазна трајекторија* или *орбита* динамичког система. Скуп свих фазних трајекторија добијених за све допустиве почетне услове[24] образује *фазни портрет* динамичког система. Илуструјмо ова разматрања неким примерима.

Математичко клатно

Посматрајмо диференцијалну једначину математичког клатна:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

и користећи ознаке $\varphi = x$ и $\dot{\varphi} = y$ запишимо их у виду система једначина у простору стања:

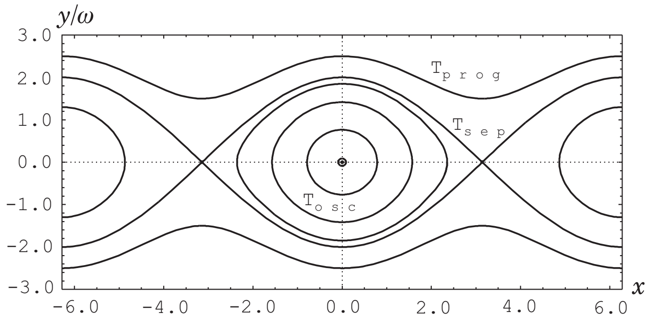
$$\dot{x} = y; \quad \dot{y} = -\omega^2 \sin x. \tag{6.60}$$

Приметимо, најпре, да положаји равнотеже математичког клатна $\varphi = x = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\dot{\varphi} = y = 0$, одређују стационарне тачке динамичког система (6.60), јер су тада десне стране система једнаке нули и важи $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

Ако се динамички систем (6.60) подвргне детаљној нумеричкој анализи решења, може се уочити да постоје три категорије фазних трајекторија. Прву чине затворене трајекторије које описују периодична—осцилаторна решења, било да се ради о малим или великим осцилацијама. Она су на Слици 6.15 означена са T_{osc}. Другу класу образују отворене трајекторије које одговарају прогресивном кретању математичког клатна током ког се материјална тачка креће по кругу у вертикалној равни без промене смера кретања (T_{prog}). Трећа класа трајекторија раздваја прве две у равни (x, y) и зато се називају сепаратрисе (T_{sep}). Оне описују асимптотска кретања математичког клатна при којима се тачка асимптотски, када $t \to \infty$, приближава највишем положају клатна. Ово кретање је оствариво само при тачно одређеном односу почетног положаја и почетне брзине.

[23] Простор стања је апстрактни, математички простор и не треба га поистоветити са физичким, опажајним простором у ком се посматра кретање.

[24] Овде се говори о допустивим почетним условима зато неки од њих, иако математички могући, не морају имати никаквог физичког смисла.



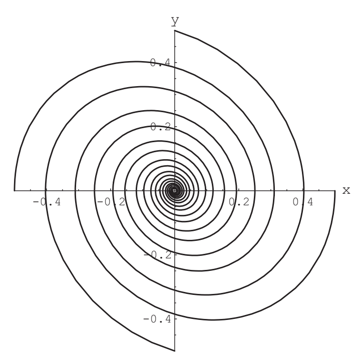
Слика 6.15: Фазни портрет математичког клатна

Математичко клатно поседује једно погодно својство—све његове фазне трајекторије су имплицитно описане законом одржања енергије:

$$\frac{1}{2}y^2 - \omega^2 \cos x = E = \text{const.}$$

Оне се добијају за различите вредности константе E. Згодно је приметити да се у случају малих осцилација може искористити развој у Маклоренов ред $\cos x \approx 1 - x^2/2$, па се добија да фазне трајекторије представљају елипсе:

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = E + \omega^2.$$



Слика 6.16: Фазни портрет пригушених осцилација математичког клатна

Уопштење проблема математичког клатна се може добити ако се претпостави да у систему постоји пригушење и да се математички модел своди на:

$$\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0.$$

Одговарајући модел у простору стања има облик:

$$\dot{x} = y; \quad \dot{y} = -\omega^2 \sin x - by. \tag{6.61}$$

Структура стационарних тачака у овом моделу остаје непромењена у односу на (6.60), али је зато измењена структура фазних трајекторија. Наиме, нумеричком анализом се може показати да се репрезентативна тачка у простору стања увек креће тако да асимптотски тежи стационарној тачки $(x, y) = (0, 0)$. Овај резултат је потпуној сагласности са закључком о асимптотској стабилности добијеним у претходном одељку.

Лотка-Волтераов модел

Анализа у простору стања може бити веома погодна и код система који нису механичког карактера. Овде ће бити проучен Лотка-Волтераов модел који су, независно један од другог, предложили амерички физико-хемичар Лотка 1925. и италијански математичар Волтера 1926. године. Први га је применио за описивање хомогених хемијских реакција, а други за опис промене броја јединки у две популације.

Означимо са x број јединки популације биљоједа која живи на неком простору, а са y број јединки популације месоједа која живи на истом простору и храни се популацијом биљоједа. Основна претпоставка приликом формирања математичког модела била је да се ове две популације могу третирати као честице хомогене мешавине гасова или течности које могу ступити у хемијску реакцију. При томе се још претпоставило да је брзина "реакције" између ових популација једнака производу броја јединки[25] xy. Лотка-Волтераов модел гласи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\,x - b\,xy; \\ \dot{y} &= -m\,y + c\,b\,xy. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Константа a представља стопу рађања (наталитет) биљоједа у одсуству популације месоједа, док је m стопа смртности (морталитет) месоједа у одсуству популације биљоједа. Константа b одређује брзину којом месоједи "конзумирају" биљоједе, а c је фактор пропорционалности између брзине конзумирања биљоједа и брзине пораста популације месоједа. Све наведене константе су позитивне.

Погледајмо сада како се могу интерпретирати поједини чланови у Лотка-Волтераовом моделу:

1. $a\,x$ је брзина раста популације биљоједа у одсуству месоједа; под том претпоставком се прва једначина своди на једначину раста популације $\dot{x} = a\,x$, чије решење $x(t) = x_0 e^{at}$ предвиђа експоненцијални раст популације;

[25] Овај закон се у проучавању хомогених хемијских реакција зове *закон масеног дејства.*

2. $b\,xy$ је стопа смртности биљоједа због присуства месоједа који се њима хране;

3. $c\,b\,xy$ је стопа рађања месоједа која непосредно зависи од броја конзумираних биљоједа;

4. $m\,y$ је брзина опадања популације месоједа у одсуству хране (популације биљоједа); под претпоставком да месоједи немају чиме да се хране једначина раста (опадања) њихове популације се своди на $\dot{y} = -m\,y$ која предвиђа њено експоненцијално опадање, $y(t) = y_0 e^{-mt}$.

Следећи корак у анализи јесте одређивање *стационарних тачака*[26]. За њих је крактеристично да се величине стања током времена неће мењати ако су у почетном тренутку имале вредности које одговарају стационарним тачкама:

$$\begin{matrix} x(0) = x_E \\ y(0) = y_E \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x(t) = x_E \\ y(t) = y_E \end{matrix} \quad \text{за } t > 0.$$

Оне се одбијају изједначавањем десних страна једначина (6.62) са нулом:

$$\begin{aligned} a\,x - b\,xy &= 0; \\ -m\,y + c\,b\,xy &= 0, \end{aligned}$$

одакле следе два независна решења:

$$(x_0, y_0) = (0, 0); \quad (x_E, y_E) = \left(\frac{m}{c\,b}, \frac{a}{b}\right). \tag{6.63}$$

Прво решење (x_0, y_0) се може одбацити јер је за анализу од интереса само ситуација у којој је $x, y > 0$. Друго решење (x_E, y_E) описује стационарно стање у погледу броја јединки посматраних популација. То значи да се број јединки током времена не мења, али не значи да јединке нису у међусобној интеракцији. У овом случају је наталитет биљоједа једнак њиховој стопи смртности због присуства месоједа, односно број месоједа остаје непромењен зато што је њихова стопа смртности једнака броју новорођених јединки.

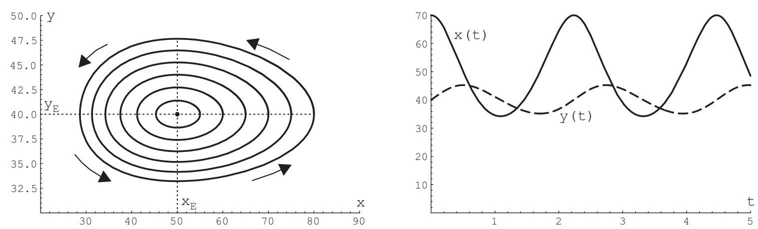
Поред одређивања стационарних тачака важно је проучити *динамику система*, односно његово понашање у случају да почетно стање одступа од стационарног. Будући да је модел (6.62) нелинеаран анализа се може спровести на два начина:

а) може се проучити понашање система у *малој околини стационарне тачке*;

б) нумеричком интеграцијом једначина (6.62) се могу анализирати фазне трајекторије система.

[26] Стационарне тачке у математичким моделима су еквивалентне положајима равнотеже механичког система.

Оба приступа доводе до истоветног закључка: током времена се број јединки обе популације мења периодично, са истим периодом за биљоједе и месоједе, осцилујући између минималне и максималне вредности. Ова констатација је илустрована на Слици 6.17 где је приказан фазни портрет система (6.62) и један пример временске еволуције броја јединки обе популације.



Слика 6.17: Фазни портрет и графици решења Лотка-Волтераовог модела

На фазном портрету се могу уочити четири области—четири квадранта. Када је $x > x_E$ и $y > y_E$ број месоједа расте због увећаних извора хране—биљоједа x—док број биљоједа у исто време опада. У области у којој је $x < x_E$, а $y > y_E$, број месоједа почиње да опада смањене количине хране, а број биљоједа наставља да опада јер је број месоједа и даље већи од равнотежног. У наставку, када је $x < x_E$ и $y < y_E$, број месоједа наставља да опада због умањених извора хране, а број биљоједа почиње да расте зато што је број месоједа пао испод равнотежног. Најзад, при $x > x_E$ и $y < y_E$ број месоједа ће почети да расте због повећане количине хране—број биљоједа је постао већи од равнотежног—а број биљоједа наставља да расте јер је број месоједа још увек мањи од равнотежног.

Задаци

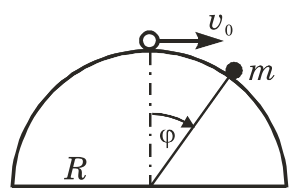
6.1 Материјалној тачки масе m, која се налази у највишој тачки глатке полукугласте куполе полупречника R, саопштена је почетна брзина v_0 у хоризонталном правцу.

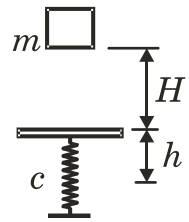
а) Одредити реакцију куполе у зависности од положаја тачке одређеног углом φ.

б) На ком месту ће тачка напустити куполу?

в) Колика би требала да буде почетна брзина да тачка напусти куполу у почетном тренутку?

г) Да ли тачка може стићи до подножја куполе без одвајања?





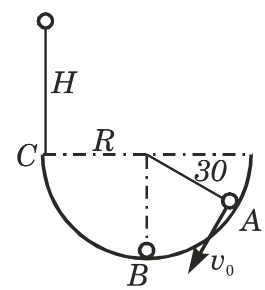
6.2 Терет масе m пао је на плочу занемарљиве масе подупрту опругом крутости c. Кретање је започео без почетне брзине са висине H изнад плоче.

а) Одредити највеће скраћење опруге h после пада терета и упоредити га са статичким издужењем (скраћењем) опруге $f_{st} = mg/c$.

б) Колико би било највеће скраћење опруге ако би терет био пуштен из положаја $H = 0$.

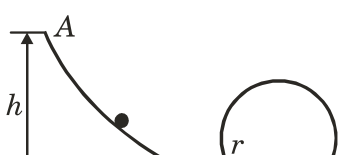
6.3 Показати да за кретање математичког клатна, анализираног у Примеру 5.4, важи закон одржања енергије. Применом закона одржања одредити брзину клатна у функцији положаја, угла φ, и показати да се добија исти резултат као у поменутом примеру (једначина (ђ)).

6.4 Материјална тачка масе m креће по унутрашњости глатке цилиндричне површи полупречника R. Кретање је започела из положаја A почетном брзином v_0, како је на слици показано. У положају C напустила је цилиндричну површ и наставила да се креће слободно.



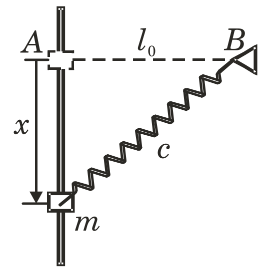
а) Колика је сила притиска тачке на цилиндричну површ у најнижем положају B?

б) На коју висину H ће тачка доспети после напуштања цилиндра?



6.5 *Roller coaster.* Материјална тачка масе m пуштена је без почетне брзине да се креће по глаткој површи AB. Од положаја B наставља да се креће по унутрашњости цилиндра полупречника r. Са које висине h треба пустити куглицу да би могла прећи цео обим цилиндра без одвајања?

6.6 Клизач масе m пуштен је из положаја A без почетне брзине да клизи дуж глатке вертикалне шине. За клизач је закачена опруга крутости c и дужине l_0 у ненапрегнутом стању. Други крај опруге везан је за тачку B. Одредити брзину клизача и реакцију шине (вођице) у зависности од положаја, координате x.



6.7 Материјална тачка (тело) масе m креће се у пољу дејства Земљине гравитационе силе $F = k/r^2$, r—растојање тачке од центра Земље. Започела је кретање са површине Земље почетном брзином v_0 која је имала правац одређен средиштем Земље и њеним почетним положајем.

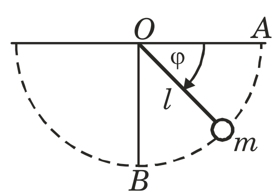
а) Применом закона одржања енергије одредити брзину тела у зависности од положаја r.

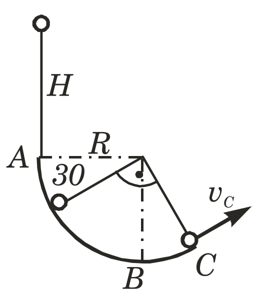
б) Колика треба да буде почетна брзина v_0 да би се тело попело на висину H изнад површине Земље?

в) Коришћењем добијеног резултата одредити другу космичку брзину—почетну брзину неопходну за напуштање поља дејства Земљине гравитационе силе.

г) Показати како се дуга космичка брзина може одредити помоћу енергијског дијаграма.

6.8 Терет масе m обешен је помоћу нерастегљивог конца дужине l за непокретну тачку O. Започео је кретање из положаја A без почетне брзине. Применом закона одржања енергије одредити брзину терета у функцији положаја, угла φ. Користећи добијени резултат одредити силу затезања ужета у најнижем положају B.



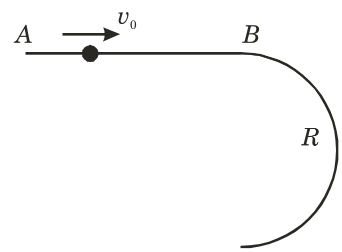


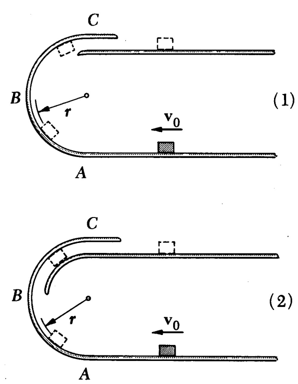
6.9 Тело масе m пуштено је да пада са висине H без почетне брзине. Од положаја A наставило је да се креће по унутрашњости глатког круга полупречника R.

а) Одредити брзину тачке и реакцију круга у најнижем положају B.

б) Којом брзином ће тачка напустити круг у положају B?

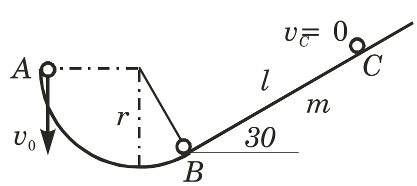
6.10 Материјална тачка масе m креће се по глаткој жици, приказаној на слици, која се налази у вертикалној равни. На праволинијском делу жице тачка се креће константном брзином v_0 (доказати!). Одредити реакцију жице на праволинијском делу путање AB и на криволинијском делу путање полупречника R. Упоредити реакцију жице која се јавља непосредно по преласку на криволинијски део путање (положај B) са реакцијом на праволинијском делу.

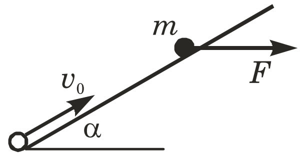




6.11 Пакету масе m, који се налази на глаткој хоризонталној платформи, саопштена је почетна брзина v_0. Он ће у положају A прећи на глатку полукружну површ полупречника r, да би у положају C доспео на горњу хоризонталну платформу. За оба типа полукружних вођица, приказана на слици, одредити најмању потребну вредност почетну брзине v_0 да би пакет доспео у до горње платформе (положаја C). За тако одређене почетне брзине одредити реакцију цилиндричне површи у положају B.

6.12 Материјална тачка масе m започела је кретање из положаја A почетном брзином v_0. Креће се у вертикалној равни по унутрашњости глатке цилиндричне површи радијуса r до положаја B, а затим наставља кретање по храпавој стрмој равни угла нагиба 30°. Коефицијент динамичког трења између тачке и стрме равни је μ. Колика треба да буде почетна брзина тачке да би она по стрмој равни до заустављања прешла пут дужине l? Колики је губитак механичке енергије током овог кретања?



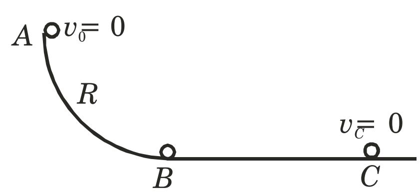


6.13 Материјална тачка масе m започела је кретање брзином v_0 уз храпаву стрму раван угла нагиба α. Коефицијент динамичког трења између тачке и стрме равни је μ. На тачку дејствује и хоризонтална сила F константног интензитета.

а) Колики треба да буде интензитет силе F да би се тачка уз стрму раван кретала константном брзином?

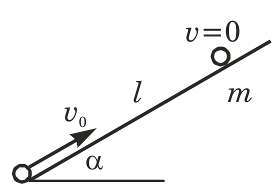
б) Колики је прираштај механичке енергије током кретања уз стрму раван на путу дужине l? Колики ће прираштај бити ако сила F има вредност одређену под а)?

6.14 Тачка масе m пуштена је из положаја A без почетне брзине да се креће по глаткој цилиндричној површи радијуса R. У положају B тачка напушта ову површ и наставља да се креће по храпавој хоризонталној равни. Коефицијент динамичког трења између тачке и равни је μ. Одредити пут који ће тачка прећи по стрмој равни до заустављања и губитак механичке енергије током кретања од положаја A до зауставног положаја C.



6.15 Материјална тачка масе $m = 1kg$ започела је кретање по глаткој хоризонталној подлози брзином $v_0 = 5m/s$. Током кретања на тачку дејствује сила отпора пропорционална првом степену брзине $\mathbf{F}_w = -m\beta\mathbf{v}$, где је $\beta = 0.5s^{-1}$. Колика ће бити брзина тачке после $t_1 = 10s$ од почетка кретања? Колики ће бити губитак механичке енергије током овог временског интервала?

6.16 Материјална тачка масе m упућена је навише из подножја храпаве стрме равни угла нагиба α почетном брзином v_0. Тачка је до заустављања прешла пут дужине l. Колики је коефицијент динамичког трења μ између тачке и стрме равни? Одредити губитак механичке енергије током овог кретања.



6.17 Терет масе m окачен је о вертикалну опругу крутости c и дужине l_0 у ненапрегнутом стању.

а) Анализирати силе које дејствују на терет.

б) Показати да важи закон одржања укупне механичке енергије.

в) Усвајајући референтну тачку у положају терета у ком је опруга ненапрегнута одредити кретање терета које ће бити сагласно почетним условима $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = v_0$.

г) Показати да ће терет вршити хармонијско осцилаторно кретање око положаја равнотеже $x^* = mg/c$.

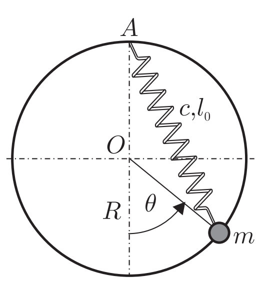
6.18 *Принудне осцилације.* Терет масе m који може да клизи по глаткој непокретној подлози везан је за непокретни зид опругом крутости c и дужине l_0 у ненапрегнутом стању. На терет у правцу кретања дејствује периодична принудна сила $\mathbf{F}_p = F_0 \cos \Omega t$.

а) Формирати диференцијалну једначину кретања терета.

б) Одредити решење једначине које је сагласно са почетним условима $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = v_0$.

в) Анализирати зависност амплитуде принудних осцилација од кружне фреквенције принудне силе Ω.

г) Анализирати кретање терета у сличају резонанације $\Omega = \omega$, подрхтавања $\Omega \approx \omega$ и виброизолације $\Omega \gg \omega$.

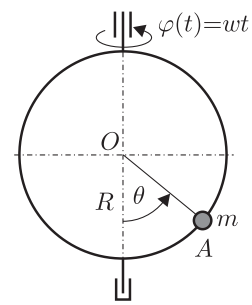


6.19 По глаткој непокретној кружној жици радијуса R, која се налази у вертикалној равни, може да клизи материјална тачка масе m. Она је са највишом тачком жице повезана опругом крутости c чија је дужина у ненапрегнутом стању једнака l_0. Положај тачке на жици је одређен углом θ.

а) Анализом стационарних тачака потенцијалне енергије одредити могуће положаје равнотеже тачке.

б) Применом принципа минимума потенцијалне енергије испитати стабилност тако одређених положаја равнотеже.

6.20 Материјална тачка масе m може да клизи по глаткој жици полупречника R која се у исто време обрће константном угаоном брзином ω око свог вертикалног пречника. Диференцијална једначина кретања тачке је:



$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\theta\right) \sin\theta = 0.$$

а) Одредити могуће положаје релативне равнотеже који представљају решења диференцијалне једначине облика $\theta(t) = \text{const}$.

б) Увести поремећаје, формирати линеаризоване једначине поремећаја и на основу њиховог решења дискутовати стабилност положаја релативне равнотеже.

7

Динамика тачке: количина кретања и момент количине кретања

У овом делу текста ћемо се упознати са још неким елементима векторског приступа у динамици. У његовој основи лежи вектор количине кретања, али ће овде бити речи и о моменту количине кретања и његовој примени у анализи неких посебних видова кретања материјалне тачке.

7.1 Закон о промени количине кретања

Већ је напоменуто да количина кретања, $\mathbf{K} = m\mathbf{v}$, и кинетичка енергија, $E_k = mv^2/2$, представљају две равноправне динамичке величине стања, односно мере механичког кретања. У том смислу се други Њутнов закон $\dot{\mathbf{K}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ и закон о промени кинетичке енергије $\dot{E}_k = P$ могу доживети као, на известан начин, паралелни закони. До сада, међутим, нисмо видели аналогон другог и трећег облика закона о промени енергије, $dE_k = dA$ и $\Delta E_k = A_{12}$. Да би се до њега дошло мора се увести једна нови појам који ће бити аналоган раду силе.

Посматрајмо други Њутнов закон у облику $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F}$ и помоножимо га са dt:

$$d\mathbf{K} = \mathbf{F}\,dt. \tag{7.1}$$

Дефинишимо *елементарни импулс* силе $\mathbf{F}$ као:

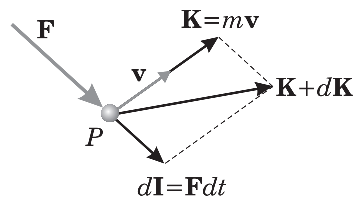
$$d\mathbf{I} = \mathbf{F}\,dt. \tag{7.2}$$

То је величина која карактерише дејство силе на материјалну тачку током бесконачно малог временског интервала dt. На овај начин једначина (7.1) се може записати у облику:

$$d\mathbf{K} = d\mathbf{I}. \tag{7.3}$$

То је уједно први облик теореме о промени количине кретања који гласи:

Елементарни прираштај количине кретања материјалне тачке једнак је елементарном импулсу силе која дејствује на њу.



Слика 7.1: Илустрација закона о промени количине кретања

Други облик закона се добија интеграцијом израза (7.3) у интервалу $t \in [t_1, t_2]$. При томе треба имати на уму да између количине кретања и импулса силе постоји иста разлика као између кинетичке енергије и рада силе: количина кретања зависи од стања кретања тачке, а импулс силе је величина која зависи од процеса кретања. Зато се у првом случају интеграцијом добија:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{K} = \mathbf{K}\big|_{t_1}^{t_2} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \Delta\mathbf{K}.$$

У другом случају, међутим, интеграл зависи од начина кретања тачке током посматраног интервала, па се добија:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{I} = \mathbf{I}_{12}.$$

Ова величина се зове *импулс силе*. Одатле следи други облик закона о промени количине кретања:

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \mathbf{I}_{12}, \tag{7.4}$$

који се може исказати на следећи начин:

Прираштај количине кретања током коначног временског интервала једнак импулсу силе током кретања у истом интервалу.

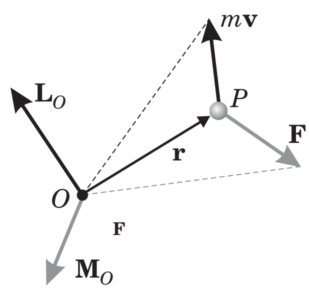
Када се импулс силе може унапред израчунати? Као и закон о промени енергије, закон о промени количине кретања може бити интересантан за анализу кретања ако је импулс силе могуће унапред израчунати. На жалост, то се у општем случају не може извршити. Ипак, то је могуће учинити у два специјална случаја:

1. ако је сила константна, $\mathbf{F} = \text{const.}$, тада се интеграцијом добија:
$$\mathbf{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{F}(t_2 - t_1) = \mathbf{F}\Delta t.$$
2. ако је сила експлицитна функција времена, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$, тада су и њене пројекције функције времена, те се у принципу може извршити интеграција.

Закон о промени количине кретања ће посебно бити интересантан у теорији удара. Тада ће једначина (7.4) представљати основну једначину која ће се користити у анализи.

7.2 Закон о промени момента количине кретања

Као што се момент силе за тачку дефинише у векторском облику као:
$$\mathbf{M}_O^{\mathbf{F}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{7.5}$$
тако се и момент количине кретања материјалне тачке P за референтну тачку O дефинише изразом:
$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{K} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \tag{7.6}$$



Слика 7.2: Момент силе и момент количине кретања

Погледајмо чему ће бити једнак извод момента количине кретања по времену[1]:
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}.\end{aligned}$$

[1] Приликом диференцирања је на векторски производ два двектора примењено Лајбницово правило о изводу производа.

Векторски производ $\mathbf{v} \times m\mathbf{v}$ једнак је нули због колинеарности вектора.

Ако сада са леве стране вектором положаја векторски помножимо израз за други Њутнов закон добићемо:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

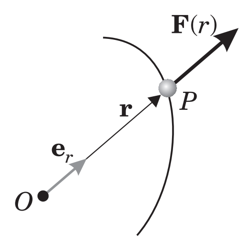
Имајући у виду управо добијене резултате можемо формулисати закон о промени моемента количине кретања:

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O^{\mathbf{F}}. \tag{7.7}$$

Речима се ово тврђење може исказати на следећи начин:

Извод момента количине кретања по времену једнак је моменту силе за исту референтну тачку.

Пример 7.1 *Материјална тачка масе m креће се под дејством централне силе $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$, где је r растојање тачке од центра дејства силе, а $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ јединични вектор радијалног правца. Показати да за ово кретање важи закон одржања момента количине кретања, $\mathbf{L}_O = const$. На основу овог резултата показати следеће:*



а) *тачка врши кретање у једној равни (Лапласова инваријабилна раван);*

б) *тачка обилази центар дејства силе крећући се увек у истом смеру;*

в) *секторска брзина тачке $\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$ је константна (други Кеплеров закон).*

▶ Други Њутнов закон за кретање тачке у пољу дејства централне силе гласи:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r. \tag{a}$$

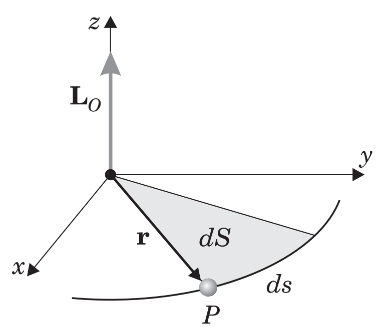
Векторским множењем ове једначине вектором положаја $\mathbf{r}$ са леве стране добија се закон о промени момента количине кретања (7.7). У овом случају момент централне силе за референтну тачку O ће бити једнак нули све време кретања зато што правац силе пролази кроз њу. То се може доказати и коришћењем тврђења да је векторски производ колинеарних вектора једнак нули:

$$\mathbf{M}_O^{\mathbf{F}} = \mathbf{r} \times F(r)\mathbf{e}_r = \mathbf{r} \times F(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{F(r)}{f}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}. \tag{б}$$

У сваком случају добија се да важи закон одржања момента количине кретања за референтну тачку O:

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_O = \text{const.} \tag{в}$$

Једначина (в) представља векторски први интеграл диференцијалних једначина кретања, односно другог Њутновог закона. Стога вектор момента количине кретања $\mathbf{L}_O$ мора бити константан у свим аспектима који карактеришу један вектор, а то су правац, смер и интензитет. Погледајмо какве ће нам информације то пружити.



Ако је правац вектора $\mathbf{L}_O$ константан, онда компоненте векторског производа које чине овај вектор, а то су $\mathbf{r}$ и $\mathbf{K} = m\mathbf{v}$, морају све време кретања припадати равни која је нормална на тај правац. Другим речима, материјална тачка се креће у равни нормалној на вектор $\mathbf{L}_O$. Ту раван зовемо *Лапласова инваријабилна раван*.

Пошто се смер вектора момента количине кретања не мења, однос вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, односно $\mathbf{K}$, мора бити такав да се посматрано из врха вектора $\mathbf{L}_O$ ротација првог вектора до поклапања са другим, најкраћи путем, врши увек у истом смеру. То значи да се смер обилажења материјалне тачке око центра дејства силе не мења. Ако би се смер обилажења тачке око центра дејства променио, онда би се променио и смер вектора $\mathbf{L}_O$, што је у контрадикцији са векторским првим интегралом.

Претпоставимо да се кретање врши у $Oxy-$равни. Будући да је тада $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ и $\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$, добија се следећи израз за момент количине кретања:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathbf{k}. \tag{г}$$

Пошто интензитет овог вектора мора бити константан, а знамо да је $m =$ const., важиће:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.} \tag{д}$$

Елементарна површ dS коју вектор положаја "пребрише" током бесконачно малог временског интервала dt једнака је:

$$dS = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|dt,$$

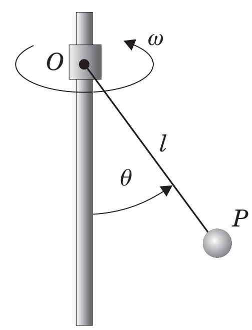
одакле због резултата (д) следи да је секторска брзина dS/dt константна:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const.}$$

Овај резултат представља други Кеплеров закон који тврди да вектор положаја у једнаким временским интервалима пребрише једнаке површине.

Анализа закона одржања момента количине кретања открила нам је општа својства кретања материјалне тачке у пољу дејства централне силе. Само кретање тачке, међутим, зависи од карактера централне силе. Може се показати, што овде неће бити учињено, да се под дејством Њутнове гравитационе силе $F(r) = \kappa/r^2$, $\kappa =$ const., материјална тачка може кретати по трајекторији која има облик конусног пресека[2]. ◄

Пример 7.2 *Материјлна тачка P масе m везана је за тачку O помоћу нерастегљивог ужета дужине l. Тачка O се налази на вертикалној осовини која се обрће константном угаоном брзином ω. Положај тачке у односу на осовину је одређен углом θ који уже образује са осовином. Под претпоставком да се угао θ током кретања не мења, одредити његову стационарну вредност у зависности од угаоне брзине ω.*



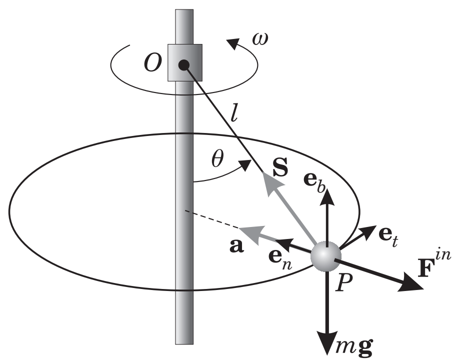
► Иако нећемо улазити у детаљну анализу, може се показати да је претпостављено кретање, при ком је угао θ константан, заиста могуће. Оно се у динамици назива *релативна равнотежа* зато што угао θ описује релативно кретање тачке P у вертикалној равни која се у исто време обрће константном угаоном брзином ω око вертикалне осе[3]. Ако је он константан, онда се тачка налази у стању релативног мировања у односу на осовину.

У стању релативне равнотеже трајекторија тачке P је круг који се налази у равни нормалној на осовину. Центар круга се налази у пресеку ове равни са осовином, а полупречник му је $h = l\sin\theta$. Пошто је трајекторија

[2] Конусни пресеци су круг, елипса, парабола и хипербола.

[3] У динамичком смислу њему је потпуно еквивалентан Задатак 6.20, код ког су само везе физички остварене на другачији начин.

тачке позната, за даљу анализу је погодно увести *пратећи триедар*. Он представља уопштење пратећег диедра који су чинили јединични вектори тангенте $\mathbf{e}_t$ и нормале $\mathbf{e}_n$. У анализи кретања тачке у простору њима се додаје и јединични вектор *бинормале* $\mathbf{e}_b$, дефинисан изразом $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$. Ова три вектора образују триедар ортонормираних вектора. У овом проблему вектор $\mathbf{e}_b$ ће бити нормалан на раван у којој се креће тачка, односно биће паралелан са осом обртања.



За решавање овог задатка ће бити примењен закон о промени момента количине кретања (7.7). При томе ће се извод момента количине кретања израчунати по обрасцу $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$, док ће момент резултанте свих сила које дејствују на материјалну тачку бити једнак збиру момената њених компонената[4], $\mathbf{M}_O^{\mathbf{F}} = \sum_i \mathbf{M}_O^{\mathbf{F}_i}$. За одређивање извода момента количине кретања требају нам вектор положаја тачке P и њено убрзање:

$$\mathbf{r} = -l\sin\theta\,\mathbf{e}_n - l\cos\theta\,\mathbf{e}_b; \quad \mathbf{a} = h\omega^2\,\mathbf{e}_n = l\omega^2\sin\theta\,\mathbf{e}_n.$$

На овај начин се добија:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_O &= \mathbf{r} \times m\mathbf{a}(-l\sin\theta\,\mathbf{e}_n - l\cos\theta\,\mathbf{e}_b) \times ml\omega^2\sin\theta\,\mathbf{e}_n\\ &= -ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta(\mathbf{e}_b\times\mathbf{e}_n) = ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_t. \qquad \text{(а)}\end{aligned}$$

Са друге стране, после ослобађања од веза на материјалну тачку, осим активне силе тежине $m\mathbf{g}$, дејствује сила затезања ужета $\mathbf{S}$, па је резултанта $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{S}$. Пошто правац силе $\mathbf{S}$ пролази кроз тачку O, њен момент за исту тачку ће бити једнак нули, $\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$. Одатле следи да ће момент сила за тачку O бити:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_0^{\mathbf{F}} &= \mathbf{r} \times m\mathbf{g} = (-l\sin\theta\,\mathbf{e}_n - l\cos\theta\,\mathbf{e}_b) \times (-mg\,\mathbf{e}_b)\\ &= mgl\sin\theta\,(\mathbf{e}_n\times\mathbf{e}_b) = mgl\sin\theta\,\mathbf{e}_t. \qquad \text{(б)}\end{aligned}$$

[4]Овај став је у механици познат као *Варињонова теорема.*

Коришћењем релација (а) и (б) и пројектовањем једначине (7.7) на правац $\mathbf{e}_t$ добија се израз:

$$ml^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta = mgl \sin\theta,$$

одакле се груписањем чланова добија:

$$\sin\theta \,(gl - l^2\omega^2 \cos\theta) = 0. \tag{в}$$

Добијена једначина има два независна решења. Прво се добија из услова $\sin\theta = 0$, одакле због карактера везе следи решење $\theta = 0$ које представља тривијални положај апсолутне равнотеже. Осим њега постоји и решење:

$$\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}, \tag{г}$$

које одређује нетривијални положај равнотеже. Приметимо да ће он постојати само по условом $g/l\omega^2 < 1$, јер у супротном неће постојати решење једначине (г) јер је скуп вредносто косинусне функције $\cos\theta \in [-1, 1]$. Из исте једначине се види да се са повећањем угаоне брзине ω смањује вредност израза $\cos\theta$, а самим тим се повећава тражена вредност угла θ. Дакле, са порастом угаоне брзине расте вредност равнотежног угла.

До истог се резултата могло доћи и на други начин. Наиме, ако се уведе инерцијална сила:

$$\mathbf{F}^{in} = -m\mathbf{a} = -ml\omega^2 \sin\theta \, \mathbf{e}_n,$$

онда се сила тежине $m\mathbf{g}$, сила затезања ужета $\mathbf{S}$ и инерцијална сила налазе у равнотежи и може се применити Даламберов принцип. Било да се формирају скаларне једначине равнотеже, које следе из услова:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{F}^{in} = \mathbf{0},$$

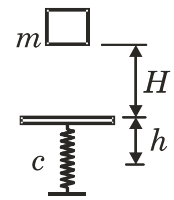
или формира одговарајућа моментна једначина за тачку O, доћи ће се до истог резултата. Ова интерпретација, међутим, пружа увид у узрок појаве "бочног" положаја релативне равнотеже $\theta \neq 0$: он се јавља због дејства инерцијалне силе, односно ротационог кретања система око вертикалне осе. Без ротационог кретања овај положај не би могао да постоји. Штавише, што је већа угаона брзина, већи је интензитет инерцијалне силе $|\mathbf{F}^{in}| = ml\omega^2 \sin\theta$, услед чега ће бити већа и вредност равнотежног угла θ. ◄

Задаци

7.1 Материјална тачка масе $m = 1kg$ креће се праволинијски под дејством силе $\mathbf{F}(t) = 10(1 - t)\mathbf{i}N$, где је време t изражено у секундама. Ако се зна да је тачка започела кретање из положаја $x(0) = 0$ почетном брзином $\dot{x}(0) = v_0 = 20m/s$, применом закона о промени количине кретања одредити тренутак t_1 у ком ће тачка променити смер кретања.

7.2 У тренутку у ком је возач почео да кочи аутомобил масе $1800 kg$ кретао се брзином $95 km/h$ по путу који се налази под нагибом од $5°$. Константна кочиона сила која је дејствовала на аутомобил износила је $6500 N$. Одредити време које је било потребно аутомобилу да се заустави.

7.3 Терет масе m пада са висине H на лаку плочу подупрту опругом крутости c. Одредити највеће скраћење h опруге после пада терета на плочу и примоном закона о промени количине кретања одредити импулс силе у опрузи.



8

Динамика система материјалних тачака

Систем материјалних тачка чини скуп материјалних тачака код ког кретање сваке тачке система зависи од кретања осталих тачака које чине тај систем. Другим речима, то значи да код материјалног система узимамо у обзир узајамна дејства која јављају између тачака.

Анализа понашања система материјалних тачака може, у принципу, бити извршена на два начина. У првом случају се посматра кретање сваке појединe тачке система[1], а у другом се посматрају карактеристике кретања које описују систем као целину и њихова промена нам онда пружа информацију о понашању система.

8.1 Карактеристике кретања система материјалних тачака

Маса система и центар масе

Посматрајмо систем који чини N материјалних тачака $P_1, \ldots, P_N$ чије су масе $m_1, \ldots, m_N$. Нека су положаји тачака у произвољном тренутку t одређени векторима положаја:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(t),$$

а њихове брзине су:

$$\mathbf{v}_1(t) = \dot{\mathbf{r}}_1(t), \ldots, \mathbf{v}_N(t) = \dot{\mathbf{r}}_N(t).$$

Као што је речено, маса је адитивна скаларна величина која, по претпоставци, за једну материјалну тачку има константну вредност, $m_i = \text{const.}$,

[1] Овај поступак може бити изузетно сложен, нарочито када систем чини велики број тачака.

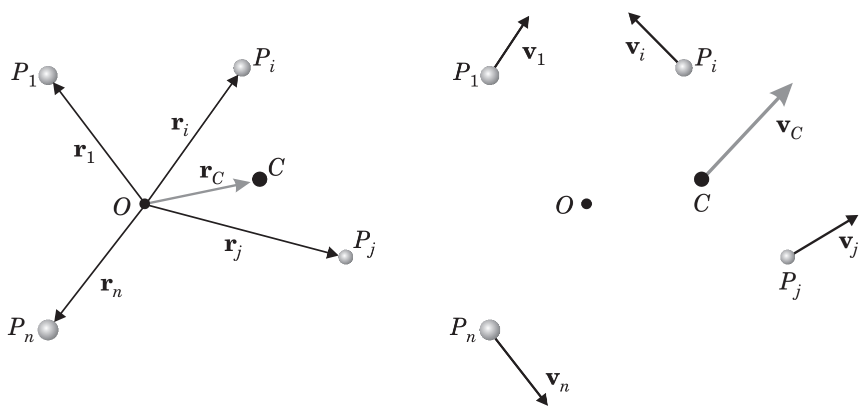
$i = 1, \ldots, N$. *Укупна маса* система се дефинише као збир маса свих тачака које тај систем чине:

$$M = m_1 + \cdots + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i. \tag{8.1}$$

Ако је систем *непромењљив*, то јест ако се његов састав не мења (нема тачака које напуштају систем, нити му се нове придружују), онда је укупна маса система константна:

$$M = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \dot{M} = \frac{dM}{dt} = 0. \tag{8.2}$$

Ова релација представља *закон одржања масе* материјалног система. Једначина (8.2) представља грубу верзију овог закона који је један од најзначајнијих закона у природи. На пример, у динамици нестишљивог флуида он је познат као *једначина континуитета*.



Слика 8.1: Положај и брзина центра масе система материјалних тачака

Маса система нам говори о укупној маси система, али нам не пружа информацију о распореду маса у простору. Наиме, може се догодити да током кретања највећи број тачака буде груписан у једној области простора, док их врло мало има ван ње. То имплицира специфичну структуру инерцијалних својстава материјалног система. Да би се ипак добила одређена информација о распореду маса увешће се појам *центра масе* система материјалних тачака. То је тачка простора чији је положај дефинисан следећом релацијом:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{M}. \tag{8.3}$$

Количина кретања и кинетичка енергија

Две динамичке величине стања које су играле централну улогу у динамици материјалне тачке, количина кретања и кинетичка енергија, на природан начин се уопштавају код система материјалних тачака. Наиме, свакој тачки система се може придружити њена количина кретања, односно кинетичка енергија:

$$\mathbf{K}_i = m_i \mathbf{v}_i; \quad E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2; \quad i = 1, \ldots, N.$$

Количина кретања материјалног система се тада дефинише као векторски збир количина кретања свих тачака које образују систем:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i. \tag{8.4}$$

Аналогно се дефинише укупна *кинетичка енергија материјалног система* као збир кинетичких енергија тачака које чине систем:

$$E_k = \sum_{i=1}^{N} E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2. \tag{8.5}$$

Количина кретања и кинетичка енергија материјалног система се на једноставан начин могу повезати са величинама које карактеришу кретање центра масе. Ако се једначина (8.3) запише у облику $M\mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$, онда се лако показује да важи:

$$M\mathbf{v}_C = M\dot{\mathbf{r}}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{K},$$

односно, количина кретања система материјалних тачака једнака производу укупне масе система и брзине центра масе[2].

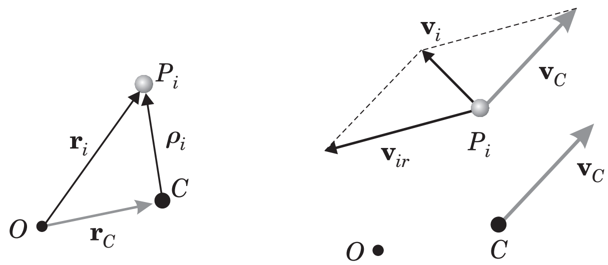
За трансформацију израза за кинетичку енергију (8.5) неопходно је дефинисати *релативну брзину* тачака система у односу на центар масе. Посматрајмо положај произвољне тачке P_i и изразимо њен вектор положаја $\mathbf{r}_i$ посредно—помоћу вектора положаја центра масе $\mathbf{r}_C$ и релативног вектора положаја тачке $\boldsymbol{\rho}_i$ у односу на центар масе:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\rho}_i.$$

Диференциарањем овог израза добија се:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{ir} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{ir} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C, \tag{8.6}$$

[2] Ова величина се често назива количина кретања центра масе.



Слика 8.2: Релативни положај и релативна брзина тачке у односу на центар масе

где је $\mathbf{v}_{ir} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ тражена релативна брзина. Тада се кинетичка енергија система (8.5) може трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{ir}) \cdot (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{ir}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{ir}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_{ir}. \\
&= \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{ir}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_C \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_{ir}.
\end{aligned}$$

Лако се може показати да ће сума у последњем сабирку бити једнака нули, јер је:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_{ir} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C) &= \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C \sum_{i=1}^{N} m_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i - M\mathbf{v}_C = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Одатле следи да важи:

$$E_k = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{ir}^2, \tag{8.7}$$

односно, кинетичка енергија материјалног система једнака је збиру кинетичке енергије центра маса и кинетичке енергије релативног кретања у односу на центар масе.

Момент количине кретања

Момент количине кретања материјалног система може бити дефинисан на два еквивалентна и подједнако корисна начина. У првом случају дефинише се момент количине кретања сваке материјалне тачке у односу на референтну тачку O:

$$\mathbf{L}_{Oi} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i,$$

а укупни момент количине кретања материјалног система представља суму момената количина кретања тачака које образују систем:

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \tag{8.8}$$

Са друге стране може се дефинисати и момент количине кретања сваке тачке у односу на центар масе C. При томе се узима у обзир релативна количина кретања одређена производом масе и релативне брзине тачке у односу на центар масе $m_i \mathbf{v}_{ir}$:

$$\mathbf{L}_{Ci} = \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{v}_{ir}.$$

Укупни момент количине кретања система у односу на центар масе се тада дефинише као сума момената количина кретања свих тачака система:

$$\mathbf{L}_C = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{Ci} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{v}_{ir}. \tag{8.9}$$

Може се показати, што нећемо доказивати, да важи следећа веза између момената количина кретања материјалног система:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C + \mathbf{L}_C.$$

Класификација сила

Код система материјалних тачака неопходно је извршити једну специфичну класификацију сила. Наиме, овде се разликују две врсте сила:

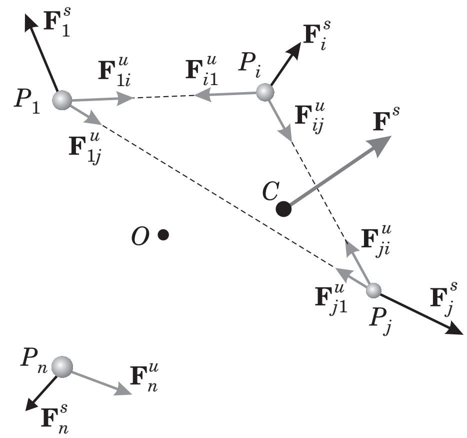
1. спољашње и

2. унутрашње.

Спољашње силе настају као резултат интеракција тачака система са објектима који се налазе ивзан њега. Унутрашње силе представљају узајамна дејства која се остварују међу тачкама које образују систем. Претпоставићемо да се ове силе јављају у паровима сила сагласно закону акције и реакције. И једне, и друге силе могу у себи садржати и активне силе, и реакције веза.

Ако са $\mathbf{F}_i^s$ означимо резултанту спољашњих сила које дејствују на $i-$ту тачку, а са $\mathbf{F}_i^u$ резултанту унутрашњих сила које дејствују на исту тачку, онда ће она бити изложена дејству силе:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^s + \mathbf{F}_i^u. \tag{8.10}$$



Слика 8.3: Спољашње и унутрашње силе код система материјалних тачака

Због претпоставке да унутрашње силе остварују дејство сагласно трећем Њутновом закону, резултујућа унутрашња сила за цео материјални систем ће бити једнака нули:

$$\mathbf{F}^u = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^u = \mathbf{0}. \tag{8.11}$$

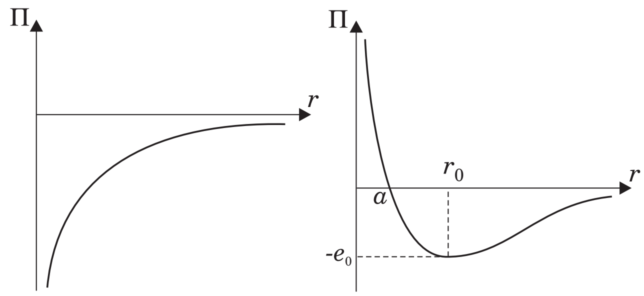
Уједно ће и резултујући спрег бити једнак нули, било да се рачуна за непокретну референтну тачку или центар масе:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^u &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^u = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_O^{\mathbf{F}_i^u} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{M}_C^u &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i^u = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_C^{\mathbf{F}_i^u} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Унутрашње силе су веома значајне јер одређују унутрашњи механизам понашања система. Оне могу бити најразличитије природе: могу бити силе које постоје све време кретања, а могу се јавити и само приликом контакта тачака система[3]. Ове силе најчешће зависе од међусобног растојања између тачака. Један од типичних примера је Њутнова гравитациона сила. Међутим, понашање честица на молекуларном нивоу може бити описано и силама које имају другачији аналитички облик. Типичан пример је сила која је описана *Ленард-Џонсовим потенцијалом*:

$$\Pi(r) = 4e_0 \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^{6} \right],$$

[3] У ову категорију сила осим реакција веза спадају и *ударне силе*.



Слика 8.4: Њутнов и Ленард-Џонсов потенцијал

где је са r означено међусобно растојање између честица. Није тешко уочити разлику између овог потенцијала и потенцијала Њутнове гравитационе силе $\Pi = -\gamma/r$: Њутнов потенцијал је монотоно растући, а сила монотоно опадајућа; Ленард-Џонсов потенцијал има локални минимум за $r_0 = \sqrt[6]{2}a$, $\Pi(r_0) = -e_0$, па је за $r < r_0$ монотоно опадајући, што значи да је сила одбојна, док је за $r > r_0$ монотоно растући при чему је сила привлачна.

8.2 Једначине кретања система материјалних тачака

Кретање система материјалних тачака може бити описано на два суштински различита начина. Први начин се заснива на анализи кретања сваке тачке система. На први поглед је јасно да овај приступ може бити изузетно сложен ако систем чини велики број материјалних тачака.

Други начин се заснива на формирању једначина које описују промену карактеристика кретања система, као што су центар масе, количина кретања, кинетичка енергија и момент количине кретања. У овом приступу систем материјалних тачака се третира у глобалном смислу—са становишта величина које описују стање система као целине. У проблемима класичне механике овај приступ је знатно заступљенији.

Диференцијалне једначине кретања материјалног система

Посматрајмо систем који се састоји од N материјалних тачака. Кретање сваке тачке система описано је другим Њутновим законом ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}$). При томе треба имати на уму да су током кретања тачке изложене дејству спољашњих и унутрашњих сила, како је описано једначином (8.10). То значи да је кретање материјалног система описано следећим системом једначина:

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1^s + \mathbf{F}_1^u; \\ m_2\mathbf{a}_2 &= \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2^s + \mathbf{F}_2^u; \\ &\vdots \\ m_N\mathbf{a}_N &= \mathbf{F}_N = \mathbf{F}_N^s + \mathbf{F}_N^u. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Задавењем почетног стања кретања свих материјалних тачака, $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{i0}$ и $\dot{\mathbf{r}}_i(0) = \mathbf{v}_{i0}$, у потпуности је формулисан проблем кретања материјалног система.

Приметимо да једначине (8.13) у општем случају, када се материјални систем креће у простору, образују систем од $3N$ скаларних диференцијалних једначина другог реда, који треба решавати заједно са $6N$ почетних услова. То довољно дочарава сложеност формулисаног проблема већ и за $N = 2$.

Закон о кретању центра масе

Ако се све једначине (8.13) саберу добиће се следећа релација:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^s + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^u. \tag{8.14}$$

Ако се једначина центра масе (8.3), $M\mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i$, диференцира два пута добија се:

$$M\mathbf{a}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{a}_i.$$

Са друге стране знака једнакости се налазе резултујућа спољашња сила, $\mathbf{F}^s = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^s$ и резултујућа унутрашња сила за коју је констатовано да је једнака нули (једначина (8.11)). Са овим резултатима долази се до *закона кретања центра масе*:

$$M\mathbf{a}_C = \mathbf{F}^s. \tag{8.15}$$

који се речима може исказати на следећи начин:

Центар масе се креће као материјална тачка чија је маса једнака укупној маси система, а под дејством резултујуће спољашње силе.

Треба уочити да на кретање центра масе не утичу унутрашње силе.

Закон о промени количине кретања

Посматрајмо опет једначину (8.14), али сада обратимо пажњу на израз за количину кретања материјалног система, $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i$. Његовим диференцирањем се добија промена количине кретања у облику:

$$\dot{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i.$$

Одатле, уз истоветну анализу сила, следи *закон о промени количине кретања*:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F}^s, \tag{8.16}$$

који гласи:

Промена (извод) количине кретања материјалног система једнака је резултујућој спољашњој сили.

Овај закон је у извесном смислу аналоган закону о кретању центра масе, што се може закључити и из релације $\dot{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i = M\mathbf{a}_C$, а види се и да на промену количине кретања унутрашње силе такође немају никакав утицај.

Закон о промени енергије

За закон о промени енергије неопходно је видети чему је једнак извод по времену укупне кинетичке енергије (8.5) материјалног система:

$$\frac{dE_k}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{E}_{ki} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{a}_i.$$

Са друге стране, снагу сила које дејствују на материјалне тачке чине снага спољашњих P^s и снага унутрашњих сила P^u:

$$P^s = \sum_{i=1}^{N} P_i^s = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^s \cdot \mathbf{v}_i; \quad P^s = \sum_{i=1}^{N} P_i^u = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^u \cdot \mathbf{v}_i.$$

Ако се сада свака једначина кретања (8.13) скаларно помножи одговарајућим вектором брзине:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{F}_1^s \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_1^u \cdot \mathbf{v}_1; \\ m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{F}_2^s \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_2^u \cdot \mathbf{v}_2; \\ &\vdots \\ m_N \mathbf{a}_N \cdot \mathbf{v}_N &= \mathbf{F}_N^s \cdot \mathbf{v}_N + \mathbf{F}_N^u \cdot \mathbf{v}_N, \end{aligned}$$

а потом се све једначине саберу добиће се:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^s \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^u \cdot \mathbf{v}_i.$$

Коришћењен претходно добијених израза за извод кинетичке енергије и снагу свих сила које дејствују на материјални систем добијамо први облик закона о промени енергије:

$$\frac{dE_k}{dt} = P^s + P^u, \tag{8.17}$$

којие речима може исказати:

Извод кинетичке енергије по времену једнак је снази свих сила, и спољашњих и унутрашњих, које дејствују на материјални систем.

У вези са овим законом морају се дати неке напомене. Ово је једини закон динамике система у ком фигурише мера дејства унутрашњих сила. У овом случају то је снага, односно рад унутрашњих сила. Она је у општем случају различита од нуле:

$$P^s \neq 0.$$

Иако ово тврђење нећемо доказивати, навешћемо његове кључне елементе. Најпре, унутрашње силе се јављају у паровима супротних сила сагласно закону акције и реакције. При томе оне имају правац који је одређен тачкама чије узајамно дејство описују. Због тога снага било ког оваквог пара унутрашњих сила зависи од релативне брзине посматраних тачака. Уколико она са правцем унутрашњих сила образује угао који је различит од $90°$, онда ће снага посматраног пара унутрашњих сила бити различита од нуле. Ово се може догодити у системима у којима се растојање између тачака може мењати. Ако је оно непромењиво, онда ће и снага унутрашњих сила бити једнака нули[4].

Из једначине (8.17) лако се могу извести други и трећи облик закона о промени енергије. У другом облику се тврди да је елементарни прираштај кинетичке енергије материјалног система једнак збиру елементарних радова спољашњих и унутрашњих сила:

$$dE_k = dA^s + dA^u. \tag{8.18}$$

Трећи облик закона, такозвани интегрални облик, говори да је прираштај кинетичке енергије система током померања из почетне у крајњу конфигурацију једнак укупном раду спољашњих и унутрашњих сила:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = A^s_{12} + A^u_{12}. \tag{8.19}$$

Закон одржања енергије

Ако су све силе које врше рад потенцијалне, било да су спољашње или унтрашње, онда ће важити закон одржања укупне механичке енергије. Тада, наиме, имамо:

$$dA^s + dA^u = -d\Pi^s - d\Pi^u = -d\Pi,$$

[4]Такав је случај, на пример, са крутим телима.

односно,

$$P^s + P^u = -\frac{d\Pi^s}{dt} - \frac{d\Pi^u}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt},$$

где је $\Pi = \Pi^s + \Pi^u$ укупна потенцијална енергија спољашњих и унутрашњих сила. Ако дефинишемо укупну механичку енергију као $E = E_k + \Pi$, онда из једначина (8.17)-(8.18) следи:

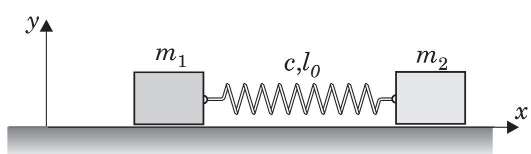
$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = 0; \quad dE = dE_k + d\Pi = 0.$$

Тада важи:

$$E = E_k + \Pi = \text{const.} \tag{8.20}$$

што потврђује констатацију о одржању укупне механичке енергије.

Пример 8.1 *Две материјалне тачке P_1 і P_2, маса m_1 и m_2 респективно, налазе се на глатком хоризонталном столу и међусобно су повезане опругом крутости c чија је дужина у ненапрегнутом стању l_0. Претпостављајући да је сила у опзи пропорционална њеном издужењу формирати диференцијалне једначине кретања овог система и анализирати кретање применом општих закона динамике система.*

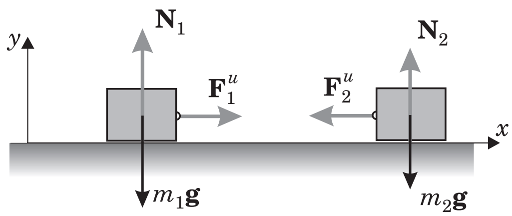


► На материјалне тачке које образују систем дејствују силе тежина $m_1\mathbf{g}$ и $m_2\mathbf{g}$ и реакције глатког стола $\mathbf{N}_1$ і $\mathbf{N}_2$ као спољашње силе. Једина унутрашња сила је сила која потиче од еластичне опруге. Ако усвојимо непокретни координатни систем везан за сто, код ког је y оса вертикална, онда ће на тачку P_1 дејствовати сила $\mathbf{F}_1^{(u)} = c\,(x_2 - x_1 - l_0)\,\mathbf{i}$, док ће на тачку P_2 дејствовати сила $\mathbf{F}_2^{(u)} = -\mathbf{F}_1^{(u)}$. Пошто је $y_1 = y_2 = \text{const.}$, диференцијалне једначине кретања ће гласити:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= c\,(x_2 - x_1 - l_0); \\ 0 &= -m_1 g + N_1; \\ m_2\ddot{x}_2 &= -c\,(x_2 - x_1 - l_0); \\ 0 &= -m_2 g + N_2. \end{aligned} \tag{a}$$

Јасно је да једначине $(\text{a})_2$ и $(\text{a})_4$ служе за одређивање реакција веза, док $(\text{a})_1$ и $(\text{a})_3$ описују динамику проблема.

Приметимо да спољашње силе дејствују само у правцу нормалном на сто, што значи да је њихова пројекција на правац $x-$осе једнака нули, а



самим тим ће и пројекција извода вектора количине кретања материјалног система на исти правац бити једнака нули, $\dot{K}_x = 0$. Стога из једначине (8.16) следи закон одржања количине кретања материјалног система за $x-$osu:

$$K_x = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = \text{const.} \tag{б}$$

Овом закону одржања еквивалентан је први интеграл који следи из једначине (8.15). Како је $F_x^s = 0$, важиће:

$$a_{Cx} = \dot{v}_{Cx} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{Cx} = \text{const.} \tag{в}$$

Другим речима, центар масе се креће једнолико праволинијски у правцу $x-$осе.

Са друге стране, може се уочити да су све силе које врше рад потенцијалне. При томе је потенцијал гравитационих сила константан, због чега потенцијалну енергију чини само потенцијал еластичне силе. Како је издужење опруге $\Delta l = l - l_0 = x_2 - x_1 - l_0$, добија се:

$$\Pi = \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}c\,(x_2 - x_1 - l_0)^2. \tag{г}$$

Стога за кретање овог материјалног система важи закон одржања енергије у облику:

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}c\,(x_2 - x_1 - l_0)^2 = \text{const.} \tag{д}$$

◀

Закон о промени момента количине кретања

Закон о промени момента количине кретања се јавља у два подједнако значајна и корисна облика. Први се односи на промену момента количине кретања за непокретну референтну тачку O и гласи:

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O^s, \tag{8.21}$$

где је $\mathbf{M}_O^s$ резултујући спрег спољашњих сила за тачку O:

$$\mathbf{M}_O^s = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_O^{\mathbf{F}_i^s} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^s.$$

То значи да извод момента количине кретања за непокретну референтну тачку једнак резултујућем спрегу спољашњих сила за исту тачку.

Други облик закона као моментну тачку користи центар масе C материјалног система и тврди:

$$\dot{\mathbf{L}}_C = \mathbf{M}_C^s, \tag{8.22}$$

где је $\mathbf{M}_C^s$ резултујући спрег спољашњих сила за тачку C:

$$\mathbf{M}_C^s = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_C^{\mathbf{F}_i^s} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i^s.$$

Исказано речима:

Извод момента количине кретања материјалног система за центар масе једнак је резултујућем спрегу спољашњих сила за исту тачку.

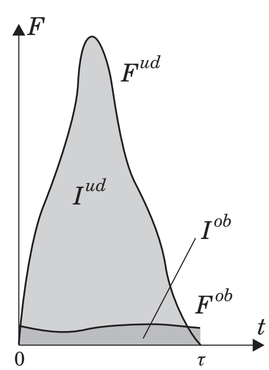
Доказ ових тврђења ће бити изостављен. Само ћемо напоменути да се он ослања на својства извода момента количине кретања система, закон о кретању центра масе и својства унутрашњих сила изражена једначинама (8.12).

8.3 Основи теорије удара

Удар је физичко-механички процес при ком материјални објекти остварују краткотрајни узајамни контакт. Главна одлика овог процеса јесте појава *ударних сила*. Њихов је интензитет је веома велики, знатно већи од интензитета уобичајених сила попут силе тежине. Са друге стране, њихово дејство се остварује само током процеса удара—ни пре, ни после њега оне не утичу на кретање материјалних објеката између којих је остварен удар.

Претпоставимо да је процес удара трајао током временског интервала $t \in [0, \tau]$ и одредимо импулсе ударних и обичних сила:

$$\mathbf{I}^{ud} = \int_0^\tau \mathbf{F}^{ud}(t)\, dt; \quad \mathbf{I}^{ob} = \int_0^\tau \mathbf{F}^{ob}(t)\, dt.$$



Слика 8.5: Ударне и обичне силе

Основна последица велике разлике у интензитетима ударних и обичних сила:

$$\max_{t\in[0,\tau]} |\mathbf{F}^{ob}(t)| \ll \max_{t\in[0,\tau]} |\mathbf{F}^{ud}(t)|,$$

јесте велика разлика у интезитетима њихових импулса током процеса удара:

$$|\mathbf{I}^{ob}| \ll |\mathbf{I}^{ud}|. \tag{8.23}$$

Због тога се задовољавајућа тачност резултата у анализи процеса удара може постићи и ако се импулси обичних сила занемаре:

$$\mathbf{I}^{ob} \approx \mathbf{0}. \tag{8.24}$$

Једначине (8.23)-(8.24) представљају основу приближне теорије удара која се може користити као прва апроксимација за његово даље проучавање.

Основне једначине теорије удара

Посматрајмо, најпре, удар код материјалне тачке. Пошто је удар процес који траје веома кратко, разумно је кретање тачке поделити на интервале у којима се оно одвија без удара и интервале који одговарају процесу удара. Анализирајмо два интервала кретања без удара, $t \in [0, t_1]$ и $t \in [t_2, t_3]$, који су радвојени ударом у интервалу $t \in [t_1, t_2]$, $t_2 - t_1 = \tau$. Стање кретања тачке $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ на крају првог интервала јесте почетно стање за процес удара, а стање кретања тачке на крају процеса удара $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$ представља почетно стање за други интервал кретања. Проучавање процеса удара је показало да теоријска анализа даје добре резултате ако се претпостави да тачка током процеса удара врши занемарљиво померање:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \approx \mathbf{0}. \tag{8.25}$$

Са друге стране, главна последица процеса удара, односно постојања ударних сила, јесте коначна промена брзине материјалне тачке у кратком временском интервалу:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$$

Зато се као основна једначине теорије удара користи *закон о промени количине кретања*:

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \mathbf{I}_{12} = \mathbf{I}_{12}^{ob} + \mathbf{I}_{12}^{ud}.$$

Имајући у виду претпоставку (8.24), ова једначина ће се свести на:

$$\Delta \mathbf{K} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{I}_{12}^{ud}. \tag{8.26}$$

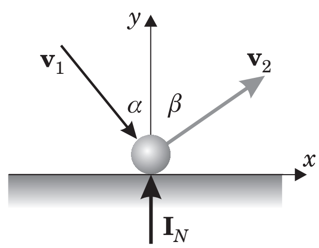
Иако је (8.26) основна једначина теорије судара показало да она није довољна за одређивање свих непознатих величина које се јављају у овом опису феномена судара. Неопходно је, наиме, узети у обзир информације које се односе на понашање материјала од којих су сачињена тела која се сударају. Покажимо ово на једном примеру.

Удар материјалне тачке у масивну глатку преграду

Посматрајмо материјалну тачку масе m која је у неком тренутку ударила у масивну преграду[5]. Претпоставимо да је у тренутку ступања у контакт

[5] Атрибут *масивна* сугерише да процес удара не утиче на промену стања овог тела—оно ће остати у стању мировања и после судара.

са преградом брзина тачке била v_1 и да је вектор брзине образовао угао α са правцем нормале на преграду у тачки додира. Потребно је одредити брзину тачке v_2 после судара, угао β који вектор ове брзине образује са правцем нормале на преграду и вредност ударног импулса који дејствује на материјалну тачку.



Слика 8.6: Удар тачке у масивну глатку преграду

Брзина тачке пре судара, изражена у односу на координатни систем приказан на слици, гласи:

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \sin\alpha\,\mathbf{i} - v_1 \cos\alpha\,\mathbf{j},$$

док је брзина тачке после судара:

$$\mathbf{v}_2 = v_2 \sin\beta\,\mathbf{i} + v_2 \cos\beta\,\mathbf{j}.$$

Пошто се масивна преграда за време судара може третирати као веза, њено дејство на тачку се описује одговарајућом ударном силом[6]. Због претпоставке да је преграда глатка ударна сила ће бити нормална на површ у тачки додира, $\mathbf{F}_N^{ud} = F_N^{ud}\,\mathbf{j}$, па ће и одговарајући импулс ударне силе имати исту структуру, $\mathbf{I}_N = I_N\,\mathbf{j}$. Основна једначина теорије судара (8.26) тада гласи:

$$\Delta\mathbf{K} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{I}_N,$$

а одговарајуће скаларне једначине имају облик:

$$\begin{aligned} &m(v_2 \sin\beta - v_1 \sin\alpha) = 0;\\ &m(v_2 \cos\beta + v_1 \cos\alpha) = I_N. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Приметимо да овде имамо две скаларне једначине, а да треба одредити три величине: v_2, β и I_N. Зато је неопходно увести *допунску једначину* која би требало да садржи додатне информације о механизму интеракције тела која остварују контакт.

[6]Приметимо да је ударна сила која представља реакцију везе и једина ударна сила у овом проблему. Пошто се импулс силе тежине у овој апроксимацији занемарује, за анализу удара је ирелевантно да ли се процес одвија у вертикалној или хоризонталној равни.

Испитивања су показала да груба, али у многим случајевима сасвим задовољавајућа информација о интеракцији два тела током судара добија коришћењем једног нумеричког податка—*коефицијента успостављања* k. То је неименован број који у нашем конкретном примеру представља однос апсолутних вредности пројекција брзина после и пре судара на правац нормале на преграду:

$$k = \left|\frac{v_{2y}}{v_{1y}}\right| = \frac{v_2 \cos\beta}{v_1 \cos\alpha}. \tag{8.28}$$

Ова величина на посредан начин пружа информацију о материјалима од којих су сачињена тела која се сударају, као и о њиховим динамичким својствима[7]. Иако се ради о релативно грубој информацији, она се може третирати као прва апроксимација стварне ситуације са којом се суочавамо у проблему. Вредности коефицијента успостављања су ограничене:

$$0 \leq k \leq 1.$$

Екстремне вредности се односе на две идеализације које се јављају у теорији судара: када је $k = 0$ каже се да је удар *идеално нееластичан* или *пластичан*, а када је $k = 1$ удар је *идеално еластичан*.

Једначине (8.27)-(8.28) образују сада затворен систем једначина који служи за решавање нашег проблема. Из једначине (8.28) следи:

$$v_2 \cos\beta = k v_1 \cos\alpha,$$

а уврштавањем овог резултата у $(8.27)_2$ добијамо вредност ударног импулса I_N:

$$I_N = m(1 + k) v_1 \cos\alpha.$$

Решавањем једначине $(8.27)_1$ долази се до релације:

$$v_2 \sin\beta = v_1 \sin\alpha.$$

Овај резултат нам заједно са једначином (8.28) омогућује да одредимо брзину после удара v_2 и одбојни угао β:

$$v_2 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + k^2 \cos^2\alpha};$$

$$\tan\beta = \frac{1}{k} \tan\alpha.$$

Пошто је за реалне процесе $k < 1$ биће и $\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha < 1$, па је $v_2 < v_1$. Дакле, брзина после судара има мањи интензитет од брзине пре судара. Осим тога важиће $\tan\beta > \tan\alpha$, па ће бити[8] $\beta > \alpha$. То значи да је одбојни угао већи од упадног.

[7] Материјали се у општем случају не понашају на исти начин подејством статичког и динамичког оптерећења. Неки модели деформабилних тела, на пример Хуков закон, ово не узимају у обзир, али постоје и модели који предвиђају различите одзиве материјала на различите врсте оптерећења.

[8] Ова неједнакост је последица монотоности функције $y = \tan x$.

Удар система материјалних тачака

Посматрајмо систем који чини N материјалних тачака чије су масе m_i, $i = 1, \ldots, N$. Већ је показано да је у анализи његовог кретања погодно извршити класификацију сила на спољашње и унутрашње. Исто важи и за проблеме у којима се јавља судар у систему. У даљој анализи ћемо стога посматрати само импулсе ударних сила, било да су оне спољашње или унутрашње.

Удар код материјалног система се може јавити услед краткотрајног контакта са објектима који се налазе изван система. Тада су ударне силе спољашње. Међутим, удар се може јавити и услед узајамног контакта тачака које образују систем. У том случају су ударне силе унутрашње. У наставку ћемо се ослонити на релације (8.23) и (8.24) и занемарити импулсе спољашњих и унутрашњих обичних сила. Приметимо још да се унутрашње ударне силе јављају у паровима сагласно закону акције и реакције, $\mathbf{F}_{ij}^{ud} = -\mathbf{F}_{ji}^{ud}$. Исто ће важити и за одговарајуће импулсе, $\mathbf{I}_{ij} = -\mathbf{I}_{ji}$, па ће резултујући импулс унутрашњих ударних сила бити једнак нули:

$$\mathbf{I}^u = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{I}_i^u = \mathbf{0}; \quad \mathbf{I}_i^u = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{I}_{ij}^u. \tag{8.29}$$

Основне једначине. Једначине које описују удар система материјалних тачака биће исте као код једне тачке—закони о промени количине кретања. При томе се мора узети у обзир да промена количине кретања сваке тачке система настаје услед дејства спољашњих и унутрашњих импулса:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{K}_1 &= m_1\mathbf{v}_{1(2)} - m_1\mathbf{v}_{1(1)} = \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1^s + \mathbf{I}_1^u;\\
\Delta\mathbf{K}_2 &= m_2\mathbf{v}_{2(2)} - m_2\mathbf{v}_{2(1)} = \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2^s + \mathbf{I}_2^u;\\
&\vdots\\
\Delta\mathbf{K}_N &= m_N\mathbf{v}_{N(2)} - m_N\mathbf{v}_{N(1)} = \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_N^s + \mathbf{I}_N^u.
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Промена количине кретања центра масе и система. Сабирањем једначина (8.30) и узимањем у обзир релација (8.4) и $M\mathbf{v}_C = \mathbf{K}$, долази се до закона о промени количине кретања приликом судара материјалног система:

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_{(2)} - \mathbf{K}_{(1)} = \mathbf{I}^s = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{I}_i^s, \tag{8.31}$$

односно закона о промени количине кретања центра масе:

$$M\Delta\mathbf{v}_C = M(\mathbf{v}_{C(2)} - \mathbf{v}_{C(1)}) = \mathbf{I}^s.$$

Овде видимо да је промена количине кретања материјалног система приликом удара једнака резултујућем импулсу спољашњих ударних сила. Такође је и промена количине кретања центра масе система приликом удара једнака резултујућем импулсу спољашњих ударних сила. Може се уочити паралелизам са основним законима динамике система материјалних тачака: у њима нису фигурисале резултујуће унутрашње силе, а у једначинама теорије удара за систем као целину не фигуришу резултујћи импулси унутрашњих ударних сила.

Моделирање хемијских реакција помоћу теорије судара

Једна од интересантних примена теорије удара се јавља у моделирању хемијских реакција. Претпоставимо да у хемијској реакцији учествују три врсте молекула које ће бити представљене материјалним тачкама A, B и C. Тада се модел хемијске реакције, током које се врши рекомбинација атома реактаната уз одржање укупне масе, може описати следећом једначином:

$$A + BC \to B + AC.$$

То значи да су пре судара атоми B и C образовали један молекул који учествује у судару, а да се током реакције, односно после судара, атоми A и C спајају у молекул AC.

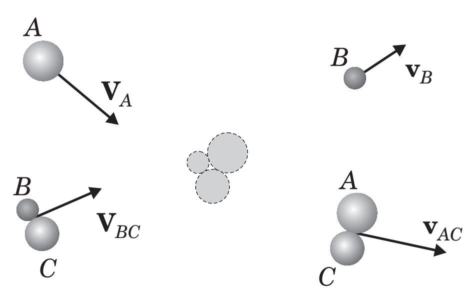
Претпоставићемо да су током судара импулси спољашњих сила занемарљиво мали, у поређењу са ударним импулсом унутрашње силе $\mathbf{I}^u$, као и да се ради о иделано еластичном судару. Тада из једначине (8.31) следи да ће количина кретања система пре и после судара остати непромењена:

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_{(2)} - \mathbf{K}_{(1)} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_{(1)} = \mathbf{K}_{(2)}.$$

Овај резултат се у равијеном облику може записати на следећи начин:

$$m_A\mathbf{V}_A + (m_B + m_C)\mathbf{V}_{BC} = m_B\mathbf{v}_B + (m_A + m_C)\mathbf{v}_{AC},$$

где су са $\mathbf{V}_A$ и $\mathbf{V}_{BC}$ означене брзине молекула пре судара, а са $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_{AC}$ брзине молекула после судара.



Слика 8.7: Моделирање хемијске реакције помоћу теорије удара

Енергијска анализа, у чије детаље нећемо улазити, показује да ће важити следећа релација између механичких енергија реактаната и продуката реакције (пре и после судара):

$$\frac{1}{2}m_A V_A^2 + \frac{1}{2}(m_B + m_C)V_{BC}^2 = \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}(m_A + m_C)v_{AC}^2 + \Delta\epsilon.$$

Ова релација је наизглед некоректна, јер се при иделано еластичном судару очекује одржање механичке (кинетичке) енергије. Међутим, члан $\Delta\epsilon$ *није механичке природе*: он описује прираштај енергије током судара услед промене енергије везе у молекулима који учествују у судару. Када је $\Delta\epsilon > 0$ енергија међумолекуларних веза реактаната (пре судара) је већа од енергије веза продуката реакције (после судара), што значи да се током судара ослобађа одређена количина енергије. Такве хемијске реакције се зову *егзотермне* реакције. Ако је $\Delta\epsilon < 0$, енергија везе реактаната је мања од енергије везе продуката. Да би се овакве реакције могле одвијати систему је неопходно *довести* одређену количину енергије, због чега се и зову *ендотермне* реакције.

8.4 Основне једначине динамике непрекидних средина

Досадашња анализа је била посвећена динамици *дискретног* система материјалних тачака. Подразумевало да је број тачака коначан и непромењлив—тачке нису напуштале систем, нити су му се нове придруживале.

Замислимо сада област простора која је *непрекидно* испуњена материјом. Такву смо област у Уводу назвали телом. Тај је назив, међутим, уобичајен када се ради о објекту који заузима коначну и ограничену област простора. Како је наша намера да анализу усмеримо и на деформабилна тела која попут флуида испуњавају велике области простора, овде ће се користити назив *непрекидна средина* или *континуум* који су уобичајени и прикладан за ову класу проблема.

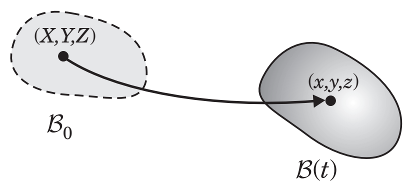
Густина и кретање

Природно је поставити питање које величине ће и на који начин описивати непрекидну средину? Пођимо од тога да се свакој елементарној запремини ΔV непрекидне средине може придружити одговарајућа елементарна маса Δm. Тада *густина* непрекидне средине представља масу по јединици запремине и дефинише се изразом:

$$\rho(x,y,z,t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{8.32}$$

Јединица мере за густину је kg/m^3. Приметимо да густина зависи од тачке у којој је посматрамо, дакле од *положаја*, и од *времена*. Ово је нова ситуација која се није појављивала код дискретних система. Зато се каже да густина представља *скаларно поље*, зато што је функција положаја, које у општем случају није стационарно, јер је и функција времена.

Уочимо сада област простора која је у почетном тренутку $t_0 = 0$ заузимала запремину V_0. За ову област се каже да представља *референтну конфигурацију* $\mathcal{B}_0$ чије ћемо даље кретање проучавати. Координате тачака у референтној конфигурацији се означавају са (X, Y, Z).



Слика 8.8: Опис кретања непрекидне средине: референтна и тренутна конфигурација

Током кретања тачке из референтне конфигурације прелазе у неку нову, тренутну конфигурацију $\mathcal{B}(t)$ која испуњава запремину $V(t)$. Координате тачака у тренутној конфигурацији биће означене са (x, y, z). При томе се полази од претпоставке да материја током кретања не пролази кроз рубне тачке области $V(t)$. Другим речима, количина материје садржана у областима V_0 и $V(t)$ је иста[9].

Кретање сваке тачке непрекидне средине се, у принципу, може описати параметарским једначинама следећег облика:

$$x = x(X, Y, Z, t); \quad y = y(X, Y, Z, t); \quad z = z(X, Y, Z, t). \tag{8.33}$$

Оне описују промену положаја тачке која се у референтној конфигурацији налазила на месту чије координате биле (X, Y, Z). Овакав опис кретања непрекидне средина се назива *Лагранжевим*.

Други опис кретања непрекидне средине, који је са аспекта механике флуида погоднији, јесте *Ојлеров*. Он се састоји у уочавању фиксиране области простора запремине V кроз чији руб ∂V може пролазити материја[10]. Тада се понашање непрекидне средине прати кроз промену физичких поља у посматраној области. За проблеме механичког карактера довољно је посматрати поље густине $\rho(x, y, z, t)$ и поље *брзине* $\mathbf{v}(x, y, z, t)$[11]. За поље брзине је карактеристично да пада у правац тангенте на трајекторију тачке која се у посматраном тренутку налази у положају одређеном координатама

[9] Област простора која испуњава наведене услове зове се *материјална запремина*, а њен руб се зове *материјална површ*.

[10] Област простора која испуњава ове услове зове се *контролна запремина*, а њен руб *контролна површ*

[11] У случају анализе феномена у којима су изражени топлотни ефекти, пољима густине и брзине додаје и поље *температуре* $T(x, y, z, t)$.

(x, y, z)[12].

Основне једначине динамике непрекидних средина су *закон одржања масе* и *закон о промени количине кретања*. Њима се могу додати закон о промени момента количине кретања и закон о промени енергије, али њих нећемо анализирати у овом кратком прегледу.

Закон одржања масе

у Лагранжевом опису кретања непрекидне средине закон одржања масе се описује изразом:

$$m = \int_{V(t)} \rho(x, y, z, t) dV = \int_{V_0} \rho_0(X, Y, Z) dV_0, \tag{8.34}$$

где су са $dV = dx\,dy\,dz$ и ρ, односно $dV_0 = dX\,dY\,dZ$ и ρ_0 означене елементарне запремине и густине у тренутној и референтној конфигурацији, респективно.

У Ојлеровом опису, међутим, маса материје у контролној запремини не мора бити константна током времена због протока материје кроз руб области ∂V. Тада ће маса у фиксираној запремини V бити одређена релацијом:

$$m(t) = \int_V \rho(x, y, z, t) dV, \tag{8.35}$$

док ће брзина њене промене масе бити:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t}\, dV. \tag{8.36}$$

Да бисмо одредили чему ће бити једнак прираштај масе у контролној запремини ограничићемо се на један специјални случај. Иако ће ова анализа бити крајње упрошћена, омогућиће нам да сагледамо кључне идеје које се јављају у овом проблему.

Посматрајмо хоризонталну цилиндричну цев, константног попречног пресека A, која је непрекидно испуњена материјом. Нека је са x означена координата мерена дуж осе цеви. Уочимо у цеви једну фиксирану запремину V чији је руб одређен површином цеви и равнима $x = x_0$ и $x = x_1$. Претпоставићемо да густина и брзина материје и запремини V представљају функције само координате x и времена t, као и да се кретање врши само у правцу осе цеви:

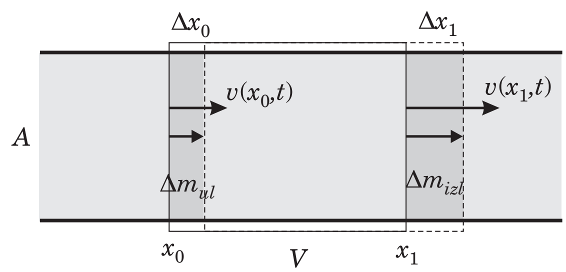
$$\rho = \rho(x, t); \quad \mathbf{v}(x, t) = v(x, t)\,\mathbf{i}.$$

Тада ће, сагласно једначинама (8.35) и (8.36), маса и брзина њене промене

[12] Приметимо да се у различитим временским тренуцима на истом месту могу наћи тачке које су референтној конфигурацији заузимале различите положаје.

у запремини V бити:

$$m(t) = \int_V \rho(x,t)dV = \int_{x_0}^{x_1} \rho(x,t)\,A\,dx;$$
$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\,A\,dx.$$



Слика 8.9: Анализа закона одржања масе

Одредимо сада прираштај масе због протока материје кроз руб области ∂V. Током временског интервала Δt он ће бити једнак разлици количине материје Δm_{ul} која је ушла у област и количине материје Δm_{izl} која је изашла из ње:

$$\Delta m = \Delta m_{ul} - \Delta m_{izl}.$$

Ове величине ће приближно бити једнаке:

$$\Delta m_{ul} \approx \rho(x_0,t)\,A\,\Delta x_0; \quad \Delta m_{izl} \approx \rho(x_1,t)\,A\,\Delta x_1,$$

где су са Δx_0 и Δx_1 означена померања тачака на рубу обласи током интервала Δt. Пошто се ове величине приближно могу изразити преко брзине у пресецима x_0 и x_1:

$$\Delta x_0 \approx v(x_0,t)\,\Delta t; \quad \Delta x_1 \approx v(x_1,t)\,\Delta t,$$

прираштај масе током временсокг интервала Δt ће приближно бити једнак:

$$\Delta m = \rho(x_0,t)\,A\,v(x_0,t)\,\Delta t - \rho(x_1,t)\,A\,v(x_1,t)\,\Delta t.$$

Када се пређе на гранични процес $\Delta t \to 0$ добиће се брзина промене масе због протока (флукса) материје:

$$\left(\frac{dm(t)}{dt}\right)_{flux} = -\left\{\rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_0,t)v(x_0,t)\right\}A.$$

Пошто представља разлику функција у рубним тачкама области, последњи израз се може трансформисати у одређени интеграл:

$$\left(\frac{dm(t)}{dt}\right)_{flux} = -\rho(x,t)v(x,t)\,A\big|_{x_0}^{x_1} = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}(\rho(x,t)v(x,t))A\,dx.$$

Како промена масе у фиксираној запремини настаје само због протока материје кроз руб области, важиће:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \left(\frac{dm(t)}{dt}\right)_{flux},$$

односно:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,A\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}\,A\,dx.$$

Будући да добијена релација важи у сваком тренутку времена и у свакој тачки контролне запремине, биће задовољена ако су подинтегралне функције једнаке, односно ако важи:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \tag{8.37}$$

Последња једначина представља закон одржања масе у Ојлеровом облику.

Закон о промени количине кретања

Свака елементарна запремина ΔV, чија је маса Δm, која се налази у стању кретања поседује количину кретања $\Delta \mathbf{K} = \mathbf{v}\,\Delta m$ која у граничном процесу постаје:

$$d\mathbf{K} = \mathbf{v}\,dm = \mathbf{v}\rho\,dV.$$

Укупна количина кретања материје која испуњава фиксирану контролну запремину V добија се интеграцијом овог израза:

$$\mathbf{K}(t) = \int_V \rho(x,y,z,t)\mathbf{v}(x,y,z,t)\,dV, \tag{8.38}$$

а њена промена током времена је:

$$\frac{d\mathbf{K}(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\big(\rho(x,y,z,t)\mathbf{v}(x,y,z,t)\big)\,dV, \tag{8.39}$$

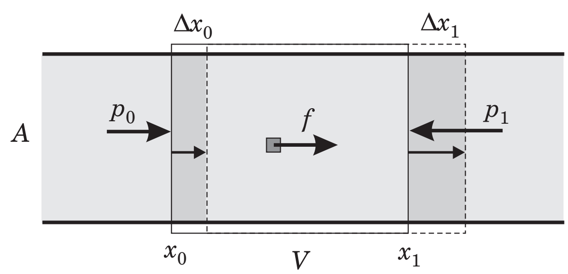
У складу са претпоставкама уведеним приликом анализе закона одржања масе ограничићемо се на кретање које се врши само у правцу осе цеви, па ћемо имати:

$$\mathbf{K}(t) = K(t)\,\mathbf{i},$$

односно,

$$K(t) = \int_{x_0}^{x_1} \rho(x,t)v(x,t)\, A\, dx;$$
$$\frac{dK(t)}{dt} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t}\big(\rho(x,t)v(x,t)\big)\, A\, dx$$

Промена количине кретања током времена ће, за разлику од промене масе, имати двојак узрок. Са једне стране она настаје због протока материје кроз руб области ∂V, а са друге због дејства сила на њу. Анализирајмо сваки од ових утицаја посебно.



Слика 8.10: Анализа закона о промени количине кретања

Прираштај количине кретања ΔK током временског интервала Δt, настао због протока масе кроз руб области може се одредити по аналогији са одговарајућим прираштајем масе:

$$\Delta K = \Delta K_{ul} - \Delta K_{izl},$$

где су количине кретања материје која је ушла, односно изашла из контролне запремине приближно једнаке:

$$\Delta K_{ul} \approx \rho(x_0,t)v(x_0,t)\, A\, \Delta x_0; \quad \Delta K_{izl} \approx \rho(x_1,t)v(x_1,t)\, A\, \Delta x_1.$$

Применом истог поступка као код одређивања прираштаја масе долази се до релације:

$$\Delta K = \rho(x_0,t)v^2(x_0,t)\, A\, \Delta t - \rho(x_1,t)v^2(x_1,t)\, A\, \Delta t.$$

У граничном случају $\Delta t \to 0$ добиће се да је промена количине кретања услед протока материје једнака:

$$\left(\frac{dK(t)}{dt}\right)_{flux} = -\big\{\rho(x_1,t)v^2(x_1,t) - \rho(x_0,t)v^2(x_0,t)\big\}\, A,$$

што се може трансформисати у одређени интеграл:

$$\left(\frac{dK(t)}{dt}\right)_{flux} = -\rho(x,t)v^2(x,t)\,A\big|_{x_0}^{x_1} = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho(x,t)v^2(x,t)\big)A\,dx.$$

Силе које утичу на промену количине кретања се могу поделити на *запреминске*, које дејствују на сваку тачку непрекидне средине у запремини V, и *површинске* које дејствују у рубним тачкама области ∂V. Запремиске силе се изражавају посредством специфичне силе по јединици масе $\mathbf{f}$, која се у овом случају своди на $\mathbf{f} = f\,\mathbf{i}$. Тада на сваки делић непрекидне средине дејствује елементарна запреминска сила:

$$dF_V = f\,dm = f\rho\,dV,$$

па ће укупна дејство запреминских сила бити једнако:

$$F_V = \int_V \rho f\,dV = \int_{x_0}^{x_1} \rho f\,A\,dx.$$

Дејство површинских сила на руб области ∂V описано је векторима напона у одговарајућим тачкама. У овој анализи ограничићемо се на случај када у рубним тачкама имамо само притисни напон p равномерно распоређен по површини попречног пресека A. Пошто је напон по претпоставци функција положаја, $p = p(x)$, резултујућа површинска сила се може описати на следећи начин:

$$\begin{aligned} F_{\partial V} &= p_0 A - p_1 A = -\big(p(x_1) - p(x_0)\big)A \\ &= -p(x)\big|_{x_0}^{x_1} A = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial p(x)}{\partial x}\,A\,dx. \end{aligned}$$

Сада се закон о промени количине кретања може записати у облику:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \left(\frac{dK(t)}{dt}\right)_{flux} + F_V + F_{\partial V},$$

или у развијеном облику:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t}\big(\rho v\big)\,A\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho v^2\big)A\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \rho f\,A\,dx - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial p}{\partial x}\,A\,dx.$$

Како добијена релација важи у сваком тренутку времена и у свакој тачки контролне запремине, биће задовољена ако важи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\rho v\big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho v^2 + p\big) = \rho f. \tag{8.40}$$

Ова једначина представља закон о промени количине кретања у Ојлеровом опису кретања.

Дифузија

Као прву илустрацију примене основних једначина динамике непрекидних средина извешћемо *једначину дифузије*. Она се заснива на закону одржања масе (8.37), али се уместо густине ρ појављује концентрација хемијске супстанце c изражена у mol/m^3, а уместо протока масе ρv флукс хемијске супстанце q изражен у mol/s. На тај начин основна једначина дифузије гласи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{8.41}$$

Њој се мора придружити једначина која успоставља везу између протока q и прираштаја концентрације c. Ова релација, која је у литератури позната као *Фиков закон*, гласи:

$$q = -D\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{8.42}$$

и тврди да ће флукс бити усмерен у смеру опадања концентрације супстанце, односно да ће супстанца тежити да се креће из области веће концентрације ка области мање концентрације. Константа пропорционалности $D > 0$ зове се коефицијент дифузије. Комбиновањем ове две једначине добија се једначина дифузије:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right). \tag{8.43}$$

У општем случају коефицијент дифузије може зависити од концентрације, $D = D(c)$, па је једначина (8.43) нелинеарна парцијална диференцијална једначина другог реда. Када је коефицијент дифузије константан она се своди на линеарну једначину дифузије:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \tag{8.44}$$

Једначином дифузије (8.43), или (8.44), се моделирају процеси преношења материје кроз непрекидну средину. Због тога је нашла широку примену у анализи проблема *загађења ваздуха*. Поред тога, исти математички модел описује и проблеме провођења топлоте.

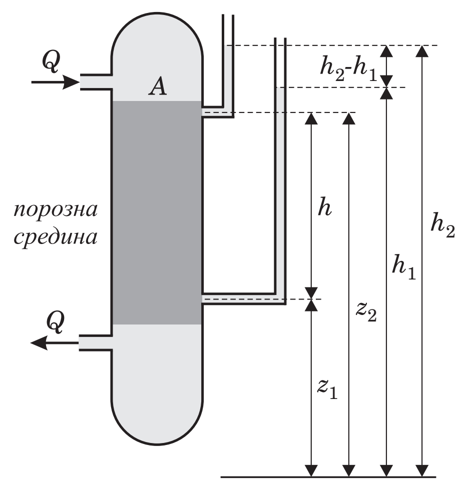
Струјање флуида кроз порозну средину

За непрекидну средину у чврстом агрегатном стању се каже да је *порозна* ако сеу њој налази и "празан" простор кроз који може струјати флуид у течном или гасовитом стању. Наравно, да би струјање било могуће ове поре морају бити повезане, а не изоловане. Овде ћемо, без улажења у сву сложеност ове проблематике, приказати основну једначину за ламинарно струјање флуида кроз хомогену порозну средину.

Једначину која описује струјање флуида кроз порозну средину први је извео Дарси 1856. године на основу резултата експеримената. Он је посматрао кретање нестишљивог флуида кроз хомогену порозну средину—филтер—висине h. При томе је помоћу отворених манометара мерио притисак течности на горњој и доњој граници филтра. Мерећи нивое течности у манометрима утврдио је да је запремински проток Q директно пропорционалан разлици измерених висина $h_2 - h_1$, а обрнуто пропорционалан висини филтра h:

$$Q = -KA\,\frac{h_2 - h_1}{h}. \tag{8.45}$$

Са A је означена константна хоризонтална површина пресека филтра, а K је константа која зависи од својстава флуида и порозне средине. Ова релација је у литератури позната као *Дарсијев закон*.



Слика 8.11: Дарсијев експеримент

Дарсијев закон се може изразити и у функцији притиска p и густине ρ флуида. Користећи релације:

$$p_1 = \rho g(h_1 - z_1); \quad p_2 = \rho g(h_2 - z_2),$$

и чињеницу да је $z_2 - z_1 = h$, може се показати да важи:

$$Q = -K'A\,\frac{p_2 - p_1 + \rho g h}{h}, \tag{8.46}$$

где је $K' = K/(\rho g)$. Нова константа пропорционалности успоставља непосредну везу између својстава флуида и порозне средине јер је $K' = k/\mu$, где је μ вискозност флуида, а k специфична пермеабилност порозне средине. Због тога се Дарсијев закон (8.46) често записује у облику:

$$q = \frac{Q}{A} = -\frac{k}{\mu}\,\frac{p_2 - p_1 + \rho g h}{h}. \tag{8.47}$$

где q представља запремински проток по јединици површине филтра[13].

Једначине (8.45) и (8.47) се могу применити само за филтер коначне дебљине h и стога су ограниченог домета. Њихов диференцијални еквивалент, који има много ширу примену, има следећу форму:

$$q = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right), \tag{8.48}$$

која се у случају струјања кроз филтер у хоризонталном правцу своди на:

$$q = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right),$$

Међутим, овај облик Дарсијевог закона није довољан за опис струјања кроз непрекидну средину јер садржи три непознате величине: q, p и ρ. За коначну формулацију проблема неопходно је познавати релацију између ρ и p—конститутивну једначину $\rho = \rho(p)$. Најзад, једначина која описује проток флуида и која "затвара" наш систем јесте закон одржања масе:

$$P\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho q), \tag{8.49}$$

који је модификован увођењем константе P која се зове порозност средине и предтавља однос запремине "празног" простора у контролној запремини и саме контролне запремине. Једначине (8.48) и (8.49) нас доводе до коначног облика једначине струјања флуида кроз хомогену порозну средину:

$$P\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right)\right\} \tag{8.50}$$

Математичко моделирање струјања флуида кроз порозну средину нашло је своју примену у анализи кретања подземних вода. Овај проблем је од изузетног значаја јер се подземним токовима може ширити загађење земљишта. Осим тога, ови феномени су присутни и у проблемима филтрације—пречишћавања воде које врши у уређајима предвиђеним за ту намену.

Простирање звучних таласа

Звучни таласи представљају поремећаје мале амплитуде који се простиру кроз непрекидну средину. Овде ћемо посматрати простирање звука кроз цев испуњену ваздухом и занемарићемо утицај запреминских сила, $f = 0$. Математички модел овог проблема ће чинити закон одржања масе (8.37) и закон о промени количине кретања (8.40):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0;\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = 0
\end{aligned} \tag{8.51}$$

[13] *Иако има димензију брзине, проток q не представља брзину струјања флуида кроз поре.*

Једначине (8.51) образују систем од две једначине чијим решавањем треба одредити поље густине $\rho(x,t)$ и поље брзине $v(x,t)$. Да би се систем могао "затворити" притисак p се мора описати у функцији ових величина стања. Може се показати да он зависи само од густине:

$$p = p(\rho). \tag{8.52}$$

Ова врста релација се у механици непрекидних средина назива *конститутивним једначинама*. Док закон одржања масе и закон о промени количине кретања представљају законе понашања свих непрекидних средина, конститутивним једначинама се прецизира понашање сваке појединe средине.

Уочимо најпре да једначине (8.51 поседују стационарно решење:

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}; \quad v = v_0 = \text{const.}; \quad p = p_0 = p(\rho_0) = \text{const.}$$

За анализу простирања звучних таласа је неопходно увести мале поремећаје стационарног решења, као код испитивања стабилности положаја равнотеже:

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t); \quad v(x,t) = v_0 + \tilde{v}(x,t), \tag{8.53}$$

док ће мали поремећај притиска бити одређен са тачношћу до малих величина првог реда:

$$p(\rho_0 + \tilde{\rho}) \approx p(\rho_0) + \frac{dp(\rho_0)}{d\rho}\,\tilde{\rho}. \tag{8.54}$$

Уврштавањем израза (8.53)-(8.54) у једначине (8.51) добиће се једначине које описују промену поремећаја $\tilde{\rho}(x,t)$ и $\tilde{v}(x,t)$. Пошто су они мали по претпоставци, прва информација о њиховом понашању се може добити анализом линеаризованих једначина. То значи да се задржавамо на члановима првог степена у односу на поремећаје. Другим речима, добиће се:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \tilde{\rho}) = \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t};\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = \frac{\partial}{\partial x}\big((\rho_0 + \tilde{\rho})(v_0 + \tilde{v})\big) \approx v_0\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x};\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) \approx v_0\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x};\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) \approx \frac{\partial}{\partial x}\left((\rho_0 + \tilde{\rho})(v_0 + \tilde{v})^2 + p_0 + \frac{dp(\rho_0)}{d\rho}\,\tilde{\rho}\right)\\
&\qquad \approx v_0^2\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x} + 2\rho_0 v_0\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \frac{dp(\rho_0)}{d\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x};
\end{aligned}$$

Друга важна претпоставка која се уводи јесте претпоставка да се звучни таласи простиру као *путујући таласи* брзином c. Путујући таласи су таласи који простиру кроз непрекидну средину не мењајући при томе свој облик. Математичка последица ове претпоставке јесте да се поремећаји $\tilde{\rho}$ и $\tilde{v}$ могу приказати као функције једне независно промењиве $\xi = x - ct$. У том случају се сви парцијални изводи претварају о обичне изводе по новој промењљивој:

$$\frac{\partial\tilde\rho}{\partial t} = \frac{d\tilde\rho}{d\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial t} = -c\,\tilde\rho'(\xi); \quad \frac{\partial\tilde\rho}{\partial x} = \frac{d\tilde\rho}{d\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x} = \tilde\rho'(\xi);$$
$$\frac{\partial\tilde v}{\partial t} = \frac{d\tilde v}{d\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial t} = -c\,\tilde v'(\xi); \quad \frac{\partial\tilde v}{\partial x} = \frac{d\tilde v}{d\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x} = \tilde v'(\xi).$$

Коришћењем добијених резултата линеаризоване једначине поремећаја, изведене из система (8.51), могу се свести на следећи облик:

$$\begin{aligned}&(v_0 - c)\tilde\rho'(\xi) + \rho_0\tilde v'(\xi) = 0;\\ &\left(v_0^2 - cv_0 + \frac{dp(\rho_0)}{d\rho}\right)\tilde\rho'(\xi) + \big(2\rho_0 v_0 - c\rho_0\big)\tilde v'(\xi) = 0.\end{aligned} \tag{8.55}$$

Добијене једначине се могу третирати као хомогени систем линеарних алгебарских једначина по непознатим промењљивим $\tilde\rho'(\xi)$ и $\tilde v'(\xi)$. Као што је познато, овај систем увек има тривијално решење, $\tilde\rho'(\xi) = 0$, $\tilde v'(\xi) = 0$, које са становишта простирања путујућих таласа није интересантно. Са друге стране, услов егзистенције нетривијалног решења се своди на изједначавање детерминанте система са нулом:

$$\begin{vmatrix} v_0 - c & \rho_0 \\ v_0^2 - cv_0 + \frac{dp(\rho_0)}{d\rho} & 2\rho_0 v_0 - c\rho_0 \end{vmatrix} = 0,$$

чијим се развијањем добија карактеристична једначина која се своди на облик:

$$(v_0 - c)^2 - \frac{dp(\rho_0)}{d\rho} = 0. \tag{8.56}$$

Њеним решавањем се одређује брзина простирања путујућег таласа:

$$c = v_0 \pm \sqrt{\frac{dp(\rho_0)}{d\rho}}. \tag{8.57}$$

Овај резултат говори да постоје два путујућа таласа (поремећаја)—један који се простире испред тачака непрекидне средине, а други иза њих. Брзина простирања звука је заправо релативна брзина простирања поремећаја у односу на средину:

$$v_{zv} = \sqrt{\frac{dp(\rho_0)}{d\rho}}. \tag{8.58}$$

Колика је брзина звука у ваздуху? Мерења показују да она у уобичајеним условима износи $v_{zv} \approx 340 m/s$. Да ли се резултат (8.58) слаже са измереном вредношћу? Да би се ово проверило мора се познавати структура конститутивне једначине $p = p(\rho)$, као и врста процеса—промене стања гаса која се одвија током простирања звука. Претпоставимо да је стање гаса одређено једначином идеалног гаса:

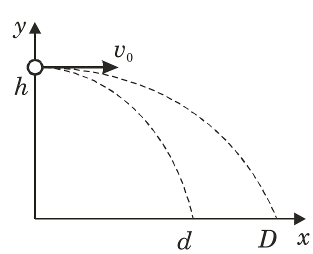
$$p = \frac{R}{m}\,\rho T, \tag{8.59}$$

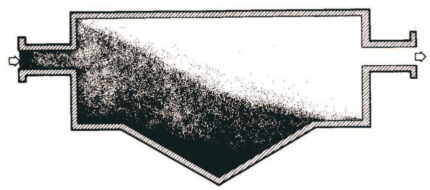
где је $R \approx 8.3J/K$ универзална гасна константа, а m молекуларна маса. Ако је процес *изотерман*, $T = \text{const.}$, онда важи $p/\rho = p_0/\rho_0$, па је брзина звука $v_{zv} = \sqrt{p_0/\rho_0}$. За ваздух на собној температури се тада добија $v_{zv} \approx 290m/s$. Овај резултат није коректан зато што претпоставка о врсти процеса није била исправна. Наиме, током процеса простирања звука варијације притиска су сувише брзе да би температура могла остати непромењена. Међутим, сабијање и ширење гаса су такви да нема топлотних губитака—процес је *адијабатан*. За такве процесе важи $p/\rho^{\gamma} = \text{const.}$, где је γ однос специфичних топлота гаса при константном притиску и константној запремини. За ваздух је он приближно $\gamma \approx 1.4$. У том случају је брзина звука $v_{zv} = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, што на собној температури даје очекивану вредност $v_{zv} \approx 340m/s$.

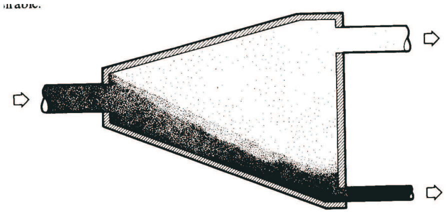
Задаци

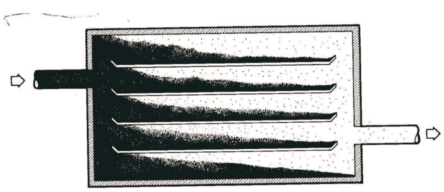
8.1 Материјална тачка масе m пуштена је са висине h_1 без почетне брзине. После удара у подлогу се одбила и доспела на висину h_2, $h_2 < h_1$. Одредити коефицијент успостављања k између тачке и подлоге и губитак механичке енергије током процеса судара.

8.2 Материјална тачка масе m избачена је брзином v_0 у хоризонталном правцу са висине h. Одредити домет хица d под претпоставком да су отпори кретању занемарљиви и упоредити са дометом хица D када на тачку током кретања осим силе тежине дејствује и сила отпора $\mathbf{R} = -mk\mathbf{v}$.
Напомена. Ова идеја се примењује код најједноставнијих комора за пречишћавање ваздуха у којима се врши сепарација честица нечистоће од честица гаса захваљујући дејству гравитационе силе.

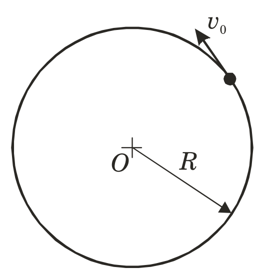


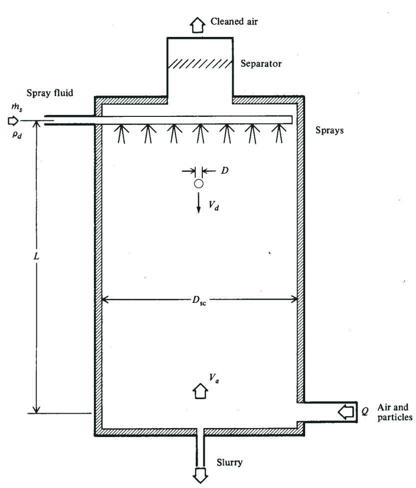


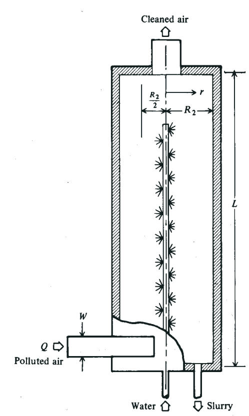




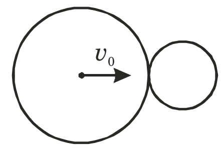
8.3 Две материјалне тачке различитих маса m и M ($M > m$) крећу се брзинама једнаких интензитета v_0 по кружним жицама полупречника R. Жице се налазе у хоризонталној равни. Одредити инерцијалне силе тачака током кретања (центрифугалне силе) и упоредити их.
Напомена. Инерцијалне силе се користе за сепарацију честица нечистоће приликом пречишћавања гаса у инерцијалним уређајима - циклонима.







8.4 Материјална тачка масе M креће се праволинијски брзином v_0. У неком тренутку она је ударила у материјалну тачку масе m која се налазила у стању мировања. Претпостављајући да је судар био идеално пластичан ($k = 0$) одредити брзину v_1 система, који чине ове две тачке, после судара.



Напомена. Овај механизам се користи у влажним коморама за пречишћавање ваздуха у којима капљице воде у ваздушној струји скупљају честице нечистоће.

9

Елементи динамике крутог тела

Под *крутим телом* се у механици подразумева материјални систем (дискретан или непрекидан) код ког се растојање између било које две тачке не мења, константно је, без обзира на дејства којима је тело изложено. Иако круто тело представља апстрактан појам—реална тела нису крута него деформабилна у мањој или већој мери—оно може послужити као веома добар модел приликом проучавања одређених видова кретања.

У овом делу текста ће бити изложени само основни елементи динамике крутих тела. Они ће се односити на два основна вида кретања: транслаторно кретање и обртање око непокретне осе (ротационо кретање). Основне једначине динамике крутих тела ће бити изведене из општих закона динамике материјалних система, а потом ће бити примењене у анализи неких елементарних примера.

9.1 Транслаторно кретање

Транслаторно кретање је најједноставниј вид кретања крутог тела. Оно у многим својим аспектима подсећа на кретање материјалне тачке. Његова основна карактеристика је да било која дуж уочена у телу током кретања не мења свој правац. Ово својство ће нам омогућити да многе карактеристике транслаторног кретања опишемо на врло једноставан начин.

Кинематика транслаторног кретања

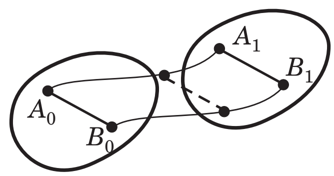
Посматрајмо круто тело $\mathcal{B}$ које се слободно креће у простору. Нека је почетни положај тела у тренутку t_0 означен са $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(t_0)$. Кључне кинематичке карактеристике транслаторног кретања могу се исказати на следећи начин:

При транслаторном кретању све тачке тела описују истоветне трајекторије (које се могу довести до поклапања) и у сваком тренутку времена *имају једнаке брзине и убрзања (по правцу, смеру и интензитету).*

Да бисмо ово показали уочимо у телу две тачке, A и B, и одговарајући вектор $\boldsymbol{\rho}_{AB}$ који одређује релативни положај тачке B у односу на тачку A. Положај ових тачака у односу на референтну тачку O током кретања је одређен следећом релацијом:

$$\mathbf{r}_B(t) = \mathbf{r}_A(t) + \boldsymbol{\rho}_{AB}. \tag{9.1}$$

Пошто је вектор $\boldsymbol{\rho}_{AB}$ по претпоставци константан, из ове релације следи да су трајекторије тачака A и B истог облика, али транслаторно померене у простору управо за вектор $\boldsymbol{\rho}_{AB}$. Овим је доказан први део тврђења.



Слика 9.1: Транслаторно кретање крутог тела

Диференцирањем једначине (9.1) добија се следећа релација:

$$\dot{\mathbf{r}}_B(t) = \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \dot{\boldsymbol{\rho}}_{AB}.$$

Међутим, због константности вектора $\boldsymbol{\rho}_{AB}$ имамо:

$$\boldsymbol{\rho}_{AB} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_{AB} \equiv \mathbf{0},$$

одакле следи веза између брзина тачака при транслаторном кретању:

$$\mathbf{v}_B(t) = \mathbf{v}_A(t). \tag{9.2}$$

Ако добијену једначину диференцирамо још једанпут, добићемо везу између убрзања тачака при транслаторном кретању:

$$\dot{\mathbf{v}}_B(t) = \dot{\mathbf{v}}_A(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_B(t) = \mathbf{a}_A(t). \tag{9.3}$$

Једначинама (9.2)-(9.3) доказује се други део тврђења.

Чињеница да све тачке крутог тела имају једнаке брзине значајно олакшава динамичку анализу. Довољно је, наиме, уочити једну репрезентативну тачку тела. Описивањем њеног кретања биће у исто време описано и кретање свих тачака тела које врши транслаторно кретање.

Динамика транслаторног кретања

Основне једначине динамике транслаторног кретања биће изведене из закона о кретању центра масе (8.15) и закона о промени момента количине кретања за центар масе (8.22). Прва једначина представља непосредну примену закона о кретању центра масе:

$$M\mathbf{a}_C = \mathbf{F}^s. \tag{9.4}$$

Једина напомена се односи на одређивање масе и положаја центра масе код тела са непрекидно распоређеном материјом. Укупна маса, изражена сумом (8.1), у случају крутог тела односи се на елементарне делове тела у околини тачака P_i, чије су масе Δm_i:

$$M = \sum_{\mathcal{B}} \Delta m_i,$$

а сумирање се односи на целу запремину тела. Финијом поделом тела на елементарне делове добија се $\Delta m_i \to dm$, а сума постаје интеграл по целој области коју заузима тело:

$$M = \int_{\mathcal{B}} dm.$$

Сличним поступком вектор положаја центра масе (8.3) се тада одређује по следећем обрасцу:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_i \Delta m_i \to \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} dm.$$

Када је у питању закон о промени момента количине кретања неопходно је најпре израчунати укупан момент количине кретања тела у односу на центар масе. Уочимо било коју тачку крутог тела које врши транслаторно кретање, на пример A. При транслаторном кретању она ће бити једнака брзини центра масе, $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C$. То значи да је, према једначини (8.6), релативна брзина тачке A у односу на центар масе C:

$$\mathbf{v}_{Ar} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_C = \mathbf{0}.$$

Одатле следи и да ће елементарни момент количине кретања у односу на центар масе бити:

$$\Delta \mathbf{L}_C = \boldsymbol{\rho}_A \times \Delta m \mathbf{v}_A = \mathbf{0}.$$

Како ово важи за све тачке крутог тела које врши транслаторно кретање, укупни момент количине кретања ће бити идентички једнак нули, као и његов извод:

$$\mathbf{L}_C \equiv \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{L}}_C \equiv \mathbf{0}. \tag{9.5}$$

Због тога се закон о промени момента количине кретања (8.22) у случају транслаторног кретања своди на статичку једначину:

$$\mathbf{M}_C^s = \mathbf{0}. \tag{9.6}$$

Уз истоветну аргументацију која се односи на релативно кретање тачака тела у односу на центар масе, може се показати да се кинетичка енергија материјалног система (8.7) при транслаторном кретању крутог тела своди на:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_C^2. \tag{9.7}$$

До истог резултата се може доћи и анализом основног израза за кинетичку енергију материјалног система (8.5). Он ће се свести на:

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{B}}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}v_C^2\sum_{\mathcal{B}}\Delta m_i \rightarrow \frac{1}{2}v_C^2\int_{\mathcal{B}}dm = \frac{1}{2}Mv_C^2$$

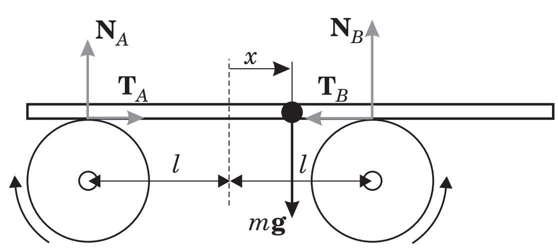
при чему је искоришћена чињеница да све брзине свих тачака тела при транслаторном кретању једнаке, а брзина центра масе је усвојена као њихов репрезент.

Пример 9.1 *Хомогени штап масе m положен је на два кружна ваљка, једнаких полупречника, који се обрћу око паралелних оса у супротним смеровима, као што је на слици показано. Осе O_1 и O_2 ваљака налазе се у хоризонталној равни на растојању $2l$. Услед дејства сила трења, које се јављају на местима додира штапа и ваљака, штап се креће. Одредити:*

а) кретање штапа ако га на ваљке положимо тако да је за x_0 померен у односу на симетрични положај у односу на ваљке, а $v_0 = 0$;

б) коефицијент трења μ ако је познато да је период осциловања штапа $T = 2s$ при $l = 25cm$.

Претпоставити да су силе трења пропрорционалне силама притиска штапа на ваљак, а да је константа пропорционалности—коефицијент трења μ.



► На основу геометрије тела (штапа) чије кретање посматрамо и карактера веза које ограничавају његово кретање (ваљци са паралелним хоризонталним осама) може се унапред закључити да ће штап вршити транслаторно праволинијско кретање[1]. Због тога ћемо у вертикалној равни, у којој се

[1] Да би се овакво кретање вршило морају бити испуњена два услова: оса штапа током кретања мора бити нормална на осе ваљака (мора се налазити у равни нормалној на осе ваљака) и штап све време мора бити у додиру са ваљцима (не сме се одвојити од веза).

штап креће, уочити Декартов координатни систем чија се оса x поклапа са осом штапа, а оса y је постављена симетрично у односу на осе ваљака. Тада је положај центра масе штапа одређен вектором положаја $\mathbf{r}_C = x\,\mathbf{i}$, јер је $y = 0 = \text{const.}$ током кретања. Отуда ће убрзање центра масе и одговарајући почетни услови бити одређени следећим релацијама:

$$\mathbf{a}_C = \ddot{x}\,\mathbf{i}; \tag{а}$$

$$\mathbf{r}(0) = x_0\,\mathbf{i}; \quad \mathbf{v}(0) = v_0\,\mathbf{i} = \mathbf{0}. \tag{б}$$

Једина активна сила која дејствује на штап јесте сила тежине $m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{j}$. Међутим, после ослобађања штапа од веза (ваљака) морају се увести реакције веза. У овом случају то су нормалне реакције ваљака у тачкама додира $\mathbf{N}_A = N_A\,\mathbf{j}$ и $\mathbf{N}_B = N_B\,\mathbf{j}$ и силе трења $\mathbf{T}_A = T_A\,\mathbf{i}$ и $\mathbf{T}_B = -T_B\,\mathbf{i}$. Пошто су нормалне реакције истих интензитета као силе притиска, по претпоставци задатка важиће следеће релације:

$$T_A = \mu N_A; \quad T_B = \mu N_B. \tag{в}$$

Основне једначине динамике транслаторног кретања су закон о кретању центра масе (9.4) и закон о промени момента количине кретања за центар масе, који се своди на (9.6). У овом проблему једначина (9.4) постаје:

$$m\mathbf{a}_C = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B + \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B,$$

чему одговарају две скаларне једначине:

$$m\ddot{x} = T_A - T_B; \tag{г}$$

$$0 = -mg + N_A + N_B. \tag{д}$$

Једначини (9.6) одговара само једна скаларна једначина која гласи:

$$M_C^s = -N_A(l + x) + N_B(l - x) = 0. \tag{ђ}$$

Сада (а), (в), (г), (д) и (ђ) чине затворен систем једначина за одређивање кретања $x(t)$ и реакција веза N_A, N_B, T_A и T_B.

Ако се једначина (ђ) реши по једној од непознатих сила, на пример N_B:

$$N_B = N_A \frac{l + x}{l - x}, \tag{е}$$

и тај резултат уврсти у једначину (д), може се одредити реакција N_A у функцији положаја центра масе:

$$N_A = mg\frac{l - x}{2l}. \tag{ж}$$

Коришћењем ове релације, из једначине (е) добијамо:

$$N_B = mg\frac{l + x}{2l}. \tag{з}$$

Уврштавањем ових резултата у Кулонове законе (в) добијају се силе трења у функцији положаја центра масе:

$$T_A = \mu m g \frac{l-x}{2l}; \quad T_B = \mu m g \frac{l+x}{2l}. \tag{и}$$

Једначина (и) нам сада омогућује да, полазећи од диференцијалне једначине кретања (а), формирамо једначину у којој ће једина непозната величина бити $x(t)$:

$$m\ddot{x} = \mu m g \frac{l-x}{2l} - \mu m g \frac{l+x}{2l} = -\mu m g \frac{x}{l},$$

односно:

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{l} x = 0. \tag{j}$$

Опште решење једначине (j) гласи:

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l}} t\right).$$

Интеграционе константе одређујемо коришћењем почетних услова (б), $x(0) = x_0$, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$, одакле следи:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l}} t\right),$$

чиме је одређено кретање штапа.

Период осциловања штапа T је одређен релацијом:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu g / l}},$$

одакле се може изразити коефицијент трења μ:

$$\mu = \frac{l}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

На основу података датих у тексту задатка може израчунати приближна вредност коефицијента трења $\mu \approx 0.25$. ◀

9.2 Обртање око непокретне осе

За круто тело кажемо да се обрће око непокретне осе ако постоји правац у телу који током кретања тела мирује[2]. Тај правац се назива *оса обртања*. Услов непокретности неког правца најчешће се физички остварује помоћу веза—аксијалног и радијалног лежишта[3].

[2] Може се показати да је за констатовање обртања око непокретне осе довољно уочити две тачке тела које током кретања мирују. Тада ће мировати и све тачке које се налазе на правој одређеној уоченим тачкама.

[3] Аксијално лежиште не допушта померање везане тачке ни у једном правцу, док радијално спречава померање тачке у било ком правцу нормалном на осу обртања.

Кинематика обртања око непокретне осе

Означимо непокретну осу око које се тело обрће са z и уведимо друге две осе непокретног Декартовог координатног система $Oxyz$. Уочимо и други, покретни координатни систем $Ox_1y_1z_1$ који се креће заједно са телом, причему се оса z_1 поклапа са осом z. Јасно је да ће положај покретног координатног система у односу на непокретни бити одређен углом φ који покретне осе образују са непокретним[4]. Угао φ се зове *угао обртања* крутог тела.

Пошто угао обртања на јединствен начин одређује положај крутог тела, *параметарска једначина* обртања крутог тела око непокретне осе је:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{9.8}$$

Први извод угла обртања по времену јесте *угаона брзина* крутог тела:

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t). \tag{9.9}$$

Смер угаоне брзине одговара смеру обртања крутог тела у посматраном тренутку времена t. Јединица мере за угаону брзину је rad/s, односно s^{-1}. Ова кинематичка карактеристика се може описати помоћу вектора који има правац осе обртања и усмерен је у ону страну из које се обртање види као обртање у позитивном математичком смеру:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\,\mathbf{k}. \tag{9.10}$$

Други извод угла обртања по времену, односно први извод угаоне брзине, јесте *угаоно убрзање* крутог тела:

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \frac{d\omega}{dt}(t) = \ddot{\varphi}(t) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t). \tag{9.11}$$

И њему се се може придружити одговарајући вектор који има правац осе обртања:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}(t)\,\mathbf{k} = \ddot{\varphi}(t)\,\mathbf{k}. \tag{9.12}$$

Смер вектора угаоног убрзања зависи од карактера промене угаоне брзине: ако је извод угаоне брзине (9.11) истог знака као угаона брзина (9.9), онда ће смерови вектора угаоне брзине и угаоног убрзања бити исти; ако су различитог знака, смерови вектора угаоне брзине и угаоног убрзања ће бити различити[5].

Угаона брзина и угаоно убрзање представљају *глобалне карактеристике* обртања крутог тела око непокретне осе. То значи да оне важе за круто

[4] Угао φ се мери од непокретне осе ка одговарајућој покретној, на пример од осе Ox до осе Ox_1, у позитивном математичком смеру посматрано из врха осе обртања Oz. Он уједно представља угао који покретна раван Ox_1y_1 образује са непокретном равни Oxy.

[5] Ако су смерови вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ исти, тело врши убрзану ротацију, а ако су различити, успорену.

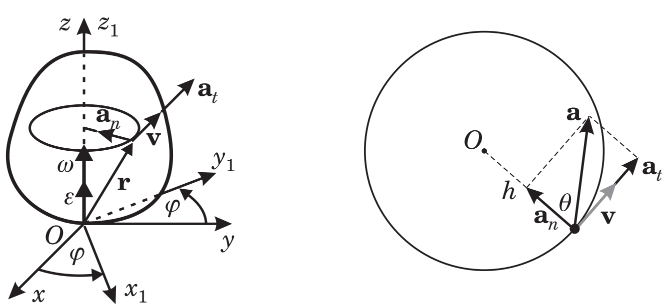
тело као целину, независно од тачака тела у којима ћемо их посматрати. Поред тога, стање кретања тела у било ком тренутку времена t одређено је тренутним вредностима угла обртања $\varphi(t)$ и угаоне брзине $\omega(t)$.

Све тачке крутог тела које се обрће око непокретне осе, осим оних које се налазе на самој оси обртања, описују кружне трајекторије у равни нормалној на осу обртања. Центар круга који ове тачке описују налази се на оси обртања, а полупречник h му је једнак нормалном растојању поматране тачке од осе. Кинематичке карактеристике кретања тачке по кругу су анализиране у Примеру 4.4. Добијени резултати се могу непосредно применити за одређивање брзине и убрзања тачке P која припада телу које се обрће око непокретне осе. Брзина тачке ће бити:

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{e}_t = h\,\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_t = h\,\omega(t)\mathbf{e}_t, \tag{9.13}$$

док ће убрзање бити разложено на тангентну и нормалну компоненту:

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{e}_n = h\,\ddot{\varphi}(t)\mathbf{e}_t + h\,\dot{\varphi}^2(t)\mathbf{e}_n = h\,\varepsilon(t)\mathbf{e}_t + h\,\omega^2(t)\mathbf{e}_n. \tag{9.14}$$



Слика 9.2: Обртање крутог тела око непокретне осе

Једначине (9.13) и (9.14) показују да брзина и убрзање сваке тачке крутог тела зависе од њеног положаја—односно растојања тачке од осе обртања. Због тога се за њих каже да представљају *локалне карактеристике* обртања око непокретне осе. Ипак, постоји величина везана за ове карактеристике која не зависи од положаја—угао θ који вектор убрзања образује са правцем нормале на трајекторију, а који је одређен следећом релацијом:

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Веза између глобалних и локалних карактеристика кретања је у једначинама (9.13)-(9.14) исказана у скаларном облику. Она може бити изражена и у векторском облику применом *Ојлерове теореме*. Ако се положај тачке P тела које се обрће око непокретне осе одреди вектором положаја $\mathbf{r} =$

$x_1\mathbf{i}_1+y_1\mathbf{j}_1+z_1\mathbf{k}_1$, при чему је $\mathbf{k}\equiv\mathbf{k}_1$, онда је тренутна брзина тачке одређена једначином:

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=-y_1\omega\,\mathbf{i}_1+x_1\omega\,\mathbf{j}_1. \tag{9.15}$$

Убрзање тачке P се добија диференцирањем Ојлеровог обрасца (9.15) по времену:

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}. \tag{9.16}$$

Први члан у једначини (9.16), $\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}$, представља тангентно убрзање, док други члан, $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$, представља нормално убрзање тачке P. Лако се може показати да ће интензитети брзине и убрзања бити истоветни као у једначинама (9.13)-(9.14) ако се узме у обзир да важи $h^2=x_1^2+y_1^2$.

Динамика обртања око непокретне осе

За описивање динамике ротационог кретања користе се, као и код транслаторног, закони о кретању центра масе (8.15) и о промени момента количине кретања, али овога пута за непокретну тачку (8.21). Међутим, за извођење диференцијалне једначине кретања довољно је искористити пројекцију једначине (8.21), $\dot{\mathbf{L}}_O=\mathbf{M}_O^s$, на осу обртања тела, чиме се добија:

$$\dot{L}_z=M_z^s. \tag{9.17}$$

Изведимо најпре, на један упрошћени начин, израз за момент количине кретања крутог тела у односу на осу Oz. Посматрајмо елементарни део крутог тела масе Δm_i у околини тачке P_i која се налази на растојању h_i од осе обртања. Вектор количине кретања $\Delta\mathbf{K}_i=\Delta m_i\mathbf{v}_i$ нормалан је на полупречник круга који посматрана тачка описије током ротационог кретања тела, па се момент количине кретања ΔL_{zi} може израчунати као момент вектора количине кретања за центар круга—трајекторије тачке P_i:

$$\Delta L_{zi}=h_i\Delta K_i=h_i(\Delta m_i h_i\omega)=\Delta m_i h_i^2\omega,$$

при чему је искоришћена једначина (9.13) за брзину тачке. Укупан момент количине кретања за $z-$осу се добија сабирањем momenата количина кретања свих елементарних делова/footnoteПриметимо да се растојање h_i мења од тачке до тачке крутог тела које посматрамо.:

$$L_z=\sum_{\mathcal{B}}\Delta L_{zi}=\omega\sum_{\mathcal{B}}h_i^2\Delta m_i.$$

Са финијом поделом тела на елементарне делове добијамо $\Delta m_i\to dm$, а сума постаје интеграл рачунат по целој запремини тела:

$$L_z=\omega\int_{\mathcal{B}}h^2dm.$$

Овде се уводи једна нова величина—*момент инерције* J_z крутог тела за осу обртања—који представља меру за инерцију тела при ротационом кретању:

$$J_z=\int_{\mathcal{B}}h^2dm. \tag{9.18}$$

На тај начин момент количине кретања крутог тела може бити записан као производ момента инерције и тренутне угаоне брзине:

$$L_z = J_z\omega = J_z\dot{\varphi}. \tag{9.19}$$

Уочимо да постоји потпуна аналогија између израза за количину кретања тела при транслаторном кретању и момента количине кретања при ротационом кретању: маса као мера за инерцију при транслацији замењена је моментом инерције при ротацији, док је брзина транслаторног кретања замењена угаоном брзином крутог тела.

Диференцијална једначина (9.20) обртања тела око непокретне осе може се коришћењем израза (9.19) записати у облику:

$$J_z\varepsilon = J_z\ddot{\varphi} = M_z^s. \tag{9.20}$$

И код ње се може успоставити аналигоји са једначином sa транслаторно кретање: убрзање центра масе замењено је угаоним убрзањем тела, а резултујућа спољашња сила резултујућим спрегом за осу обртања.

Кинетичка енергија елементарног дела крутог тела има следећи облик:

$$\Delta E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i h_i^2\omega^2,$$

Укупна кинетичка енергија се одређује применом израза (8.7) за кинетичку енергију материјалног система:

$$E_k = \sum_{\mathcal{B}} \Delta E_{ki} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{\mathcal{B}} h_i^2 \Delta m_i.$$

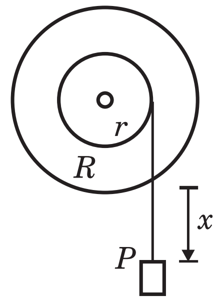
Као у случају момента количине кретања и овде ће сума прећи у интеграл рачунат по целој запремини, тако да ће се добити:

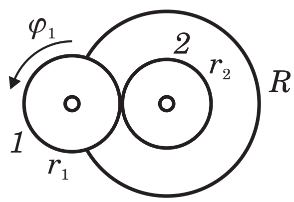
$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\mathcal{B}} h^2 dm = \frac{1}{2}J_z\omega^2. \tag{9.21}$$

Овде је поново згодно уочити аналогију између ове једначине и израза (9.7) за кинетичку енергију транслаторног кретања крутог тела. Постоји директна кореспонденција између мера за инерцију—масе M и момента инерција J_z—као и између величина стања кретања—брзине центра масе v_C и угаоне брзине ω.

Задаци

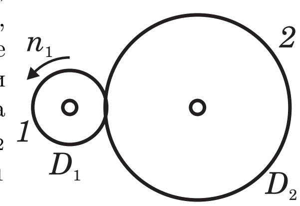
9.1 Терет P, који може да се креће у вертикалном правцу, окачен је о нерастегљиво уже намотано на добош полупречника $r = 0.2m$. Добош је коаксијално круто спојен са диском полупречника $R = 0.4m$ који се обрће око непокретне осе. Параметарска једначина кретања терета гласи: $x(t) = 2(t^2 + t)$. Одредити угаону брзину и угаоно убрзање диска, као и брзину и убрзање тачке која се налази на ободу диска у тренутку $t_1 = 1s$ од почетка кретања.

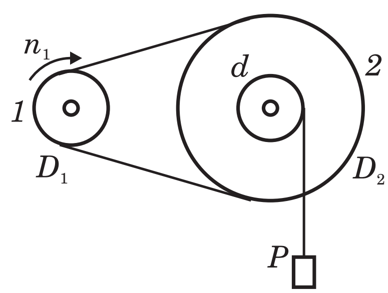




9.2 Зупчаник 1 полупречника $r_1 = 15cm$, који се обрће око непокретне осе по закону $\varphi_1(t) = t^2 - 2t$, спрегнут је са зупчаником 2 полупречника $r_2 = 10cm$. Овај зупчаник је коаксијално спојен са добошем полупречника $R = 30cm$. Одредити угаону брзину и угаоно убрзање добоша и брзину и убрзање тачке на ободу добоша у тренутку $t_1 = 1s$ од почетка кретања.

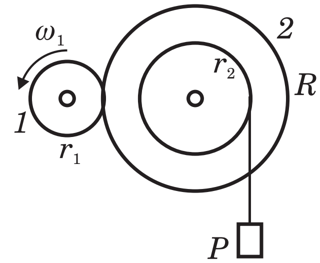
9.3 Зупчаници 1 и 2 са спољашњим спрезањем, пречника $D_1 = 7cm$ и $D_2 = 28cm$ респективно, обрћу се око непокретних оса. Зупчаник 1 се обрће једнолико са $n_1 = 800o/min$. Одредити угаоне брзине зупчаника, брзине и убрзања тачака додира два зупчаника и број обртаја n_2 зупчаника 2. Колико је преносни однос $i = \omega_2/\omega_1$ овог зупчастог пара.

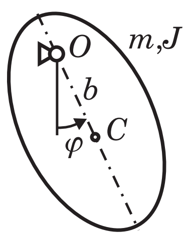




9.4 Ремени преносник чине два диска повезана бесконачним ременом, како је наслици приказано. Диск 1, пречника $D_1 = 30cm$, обрће се једнолико са $n_1 = 250o/min$. За диск 2, пречника $D_2 = 75cm$, коаксијално је заварен добош пречника $d = 25cm$. На добош је намотано лако нерастегљиво уже о чији је слободан крај окачен терет P. Одредити кретање терета.

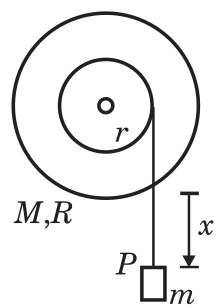
9.5 Два зупчаника са спољашњим спрезањем, полупречника $r_1 = 12cm$ и $R = 60cm$, обрћу се око непокретних оса како је на слици показано. Зупчаник 2 је круто спојен са добошем полупречника $r_2 = 30cm$ на који је намотано нерастегљиво уже на чијем се крају налази терет P. Ако се зупчаник обрће једнолико угаоном брзином $\omega_1 = 5s^{-1}$ одредити кретање терета.

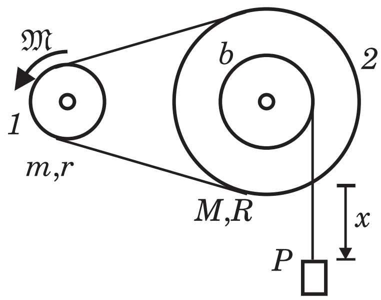




9.6 *Физичко клатно.* Круто тело масе m и момента инерције J за осу која пролази кроз центар масе C може да се обрће око непокретне хоризонталне осе O. Веза у тачки O је остварена помоћу цилиндричног зглоба, а растојање центра масе од осе обртања је $\overline{OC} = b$. Користећи закон о кретању центра масе и закон о промени момента количине кретања за непокретну тачку формирати диференцијалне једначине кретања овог тела и одредити реакције цилиндричног зглоба у функцији угла обртања φ.

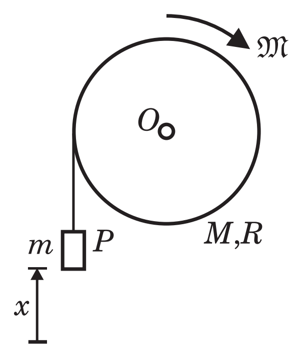
9.7 Терет P масе m окачен је о лако нерастегљиво уже које је намотано на лаки добош полупречника r. Добош је коаксијално заварен за диск полупречника R и масе M који може да се обрће око непокретне хоризонталне осе која се поклапа са осом диска. Користећи закон одржања укупне механичке енергије одредити брзину и убрзање терета у зависности од његовог положаја. Претпоставити да је систем започео кретање из стања мировања.

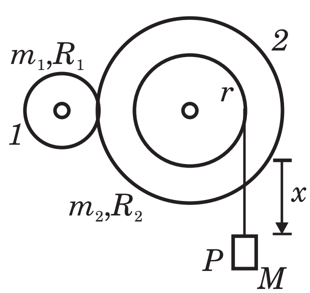




9.8 Ремени преносник сачињен је од дискова 1 и 2, полопречника r и R и маса m и M респективно. За диск 2 коаксијално је заварен лаки добош полупречника b. На добош је намотано лако нерастегљиво уже о чији је слободни крај окачен терет P масе m_P који се спушта. На диск 1 дејствује кочиони момент $\mathfrak{M}$ константног интензитета у смеру приказаном на слици. Применом закона о промени енергије одредити брзину терета у зависности од његовог положаја, претпостављајући да је брзина терета у почетном тренутку била v_0. Колики би требало да буде кочиони момент да би се терет спуштао константном брзином?

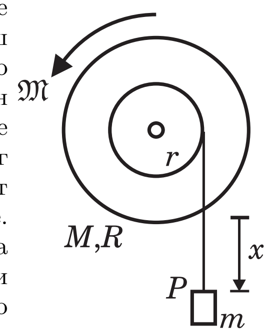
9.9 На цилиндар масе M и полупречника R, који може да се обрће око хоризонталне осе која се поклапа са осом цилиндра, намотано је лако нерастегљиво уже. О слободни крај ужета окачен је терет P масе m. На цилиндар дејствује погонски момент (спрег сила) $\mathfrak{M}$ који омогућије подизање терета. Ако је терет започео кретање почетном брзином v_0, применом закона о промени енергије одредити брзину терета у зависности од положаја. Колики би требало да буде погонски момент да би се терет подизао константном брзином?





9.10 Систем крутих тела образују зупчаници 1 и 2, полупречника R_1 и R_2 и маса m_1 и m_2 са спољашњим спрезањем. На диск 2 је коаксијално заварен лаки добош полупречника r. На добош је намотано лако нерастегљиво уже о чији је слободни крај окачен терет P масе M. Систем је започео кретање из стања мировања. Применом закона одржања енергије одредити угаону брзину и угаоно убрзање зупчаника 1 у зависности од положаја терета.

9.11 На диск масе M и полупречника R, који може да се обрће око совје непокретне хоризонталне осе симетрије, коаксијално је заварен лаки добош полупречника r. На добош је намотано лако нерастегљиво уже о чији је слободни крај окачен терет масе m који се спушта. На диск дејствује кочиони момент (спрег сила) $\mathfrak{M}$ константног интензитета у смеру приказаном на слици. Терет је започео кретање брзином v_0 усмереном на доле. Одредити брзину терета у зависности од положаја применом закона о промени енергије. Одредити пут који ће терет прећи од почетка кретања до заустављања.



Литература

[1] F.P. Beer, E.R Johnston: *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics*, Seventh Edition, McGraw-Hill, Boston 2004.

[2] J. Billingham, A.C. King: *Wave Motion*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.

[3] В. Брчић: *Отпорност материјала*, Грађевинска књига, Београд 1978.

[4] D.N. Burghes, A.M. Downs: *Modern Introduction to Classical Mechanics & Control*, Ellis Horwood Limited, Chichester 1975.

[5] P. Chadwick: *Continuum mechanics: concise theory and problems*, Dover Publication Inc., New York 1999.

[6] Б.Д. Вујановић: *Динамика*, Научна књига, Београд 1976.

[7] P.G. Drazin: *Nonlinear Systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1992.

[8] Ђ.С. Ђукић, Т.М. Атанацковић, Л.Ј. Цветићанин: *Механика*, Факултет техничких наука, Нови Сад 2002.

[9] C.R. Hadlock: *Mathematical modeling in the Environment*, The Mathematical Association of America, Washington 1998.

[10] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц: *Механика*, Наука, Москва 1988.

[11] M. Lunn: *A First Course in Mechanics*, Oxford University Press, Oxford 1999.

[12] J.Ђ. Мандић: *Отпорност материјала*, Научна књига, Београд 1977.

[13] G.V. Middleton, P.R. Wilcock: *Mechanics in the Earth and Environmental Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.

[14] L.A. Pars: *Introduction to Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge 1953.

[15] A.E. Scheidegger: *The physics of flow through porous media*, Third Edition, University of Toronto Press, Toronto 1974.

[16] С.М. Тарг: *Теоријска механика, кратак курс*, Грађевинска књига, Београд 1983.

[17] F. Ziegler: *Mechanics of Solids and Fluids*, Second Edition, Springer-Verlag, New York 1998.