

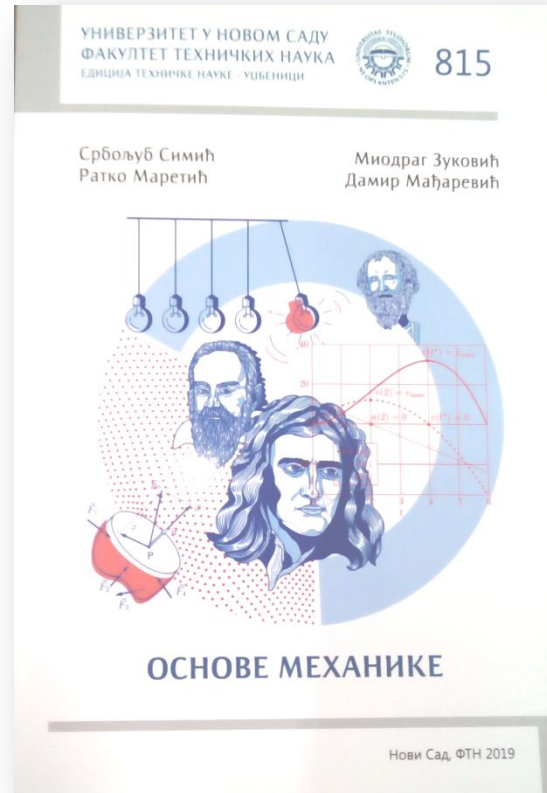
ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА

Аксијално оптерећење

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



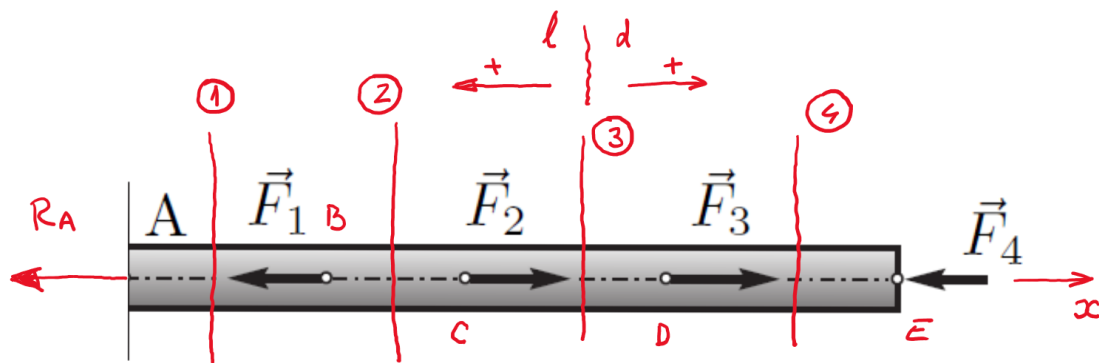
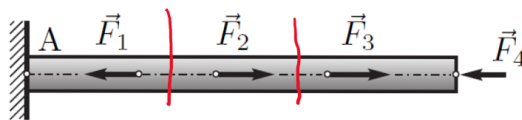
Шта ћемо научити?

10. Основни задаци Отпорности материјала.
11. Метода пресека и вектор напона.
12. Хипотезе Отпорности материјала.
13. Аксијално оптерећени штапови и напони код аксијално оптерећеног штапа.
14. Уздужна и попречна дилатација штапа. Издужење штапа при загревању.
15. Дијаграм нормалних напона у зависности од дилатације.
16. Издужење аксијално оптерећеног штапа.
17. Прорачун штапова изложених аксијалном оптерећењу.
18. Став о издужењу штапа коме је један крај покретан, а други непокретан.
19. Статички неодређени аксијално оптерећени штапови.

ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА



Пример 3.1. Штап приказан на слици причвршћен је крајем А за подлогу и оптерећен силама $F_1 = 1 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$, $F_3 = 1 \text{ kN}$ и $F_4 = 2 \text{ kN}$. Одредити вредност аксијалне силе у појединим пресецима штапа.



$$F_{q1} = \sum F_i^l = R_A = 2 \text{ kN}$$

$$= \sum F_i^d = -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = -1 + 4 + 1 - 2 = 2 \text{ kN}$$

$$F_{q2} = \sum F_i^l = R_A + F_1 = 2 + 1 = 3 \text{ kN}$$

$$F_{q3} = \sum F_i^d = F_2 - F_4 = 1 - 2 = -1 \text{ kN}$$

$$F_{q4} = \sum F_i^d = -F_4 = -2 \text{ kN}$$

у.р.

$$\sum X_i = -R_A - F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = 0$$

$$R_A = -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = -1 + 4 + 1 - 2$$

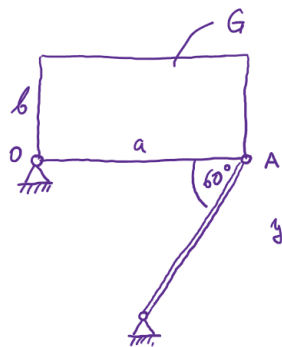
$$\underline{R_A = 2 \text{ kN}}$$

закљ.

закљ.

прикљ.

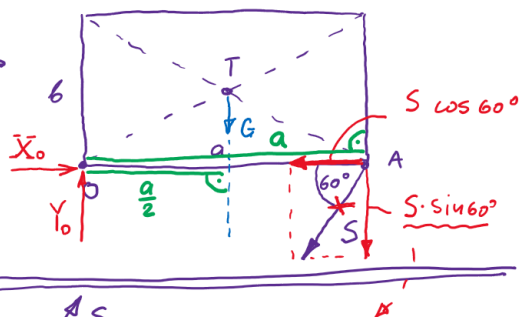
прикљ.



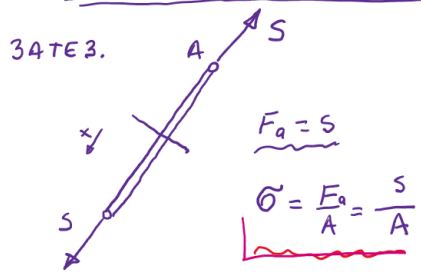
$$\frac{G, a, b, \sigma_d}{d = ?}$$

Y.P.

$$\begin{aligned} (1) \sum X_i &= X_o - S \cos 60^\circ = 0 \\ (2) \sum Y_i &= Y_o - G - S \sin 60^\circ = 0 \\ (3) \sum M_o &= -G \cdot \frac{a}{2} - S \sin 60^\circ \cdot \frac{a}{2} = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} \rightarrow \begin{aligned} X_o &= \\ Y_o &= \end{aligned}$$



$$(3) -\frac{G}{2} - S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$



$$S \sqrt{3} = -G \quad | \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{S = -G \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \text{PUT.}$$

$$\left| \sigma = \frac{S}{A} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{G}{A} \right| \quad \text{PUT.}$$

ДИМЕНЗИОНАЛНЕ

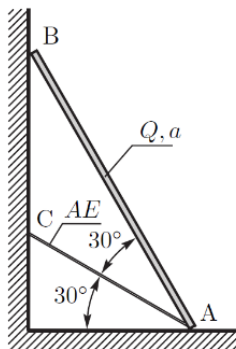
$$|\sigma| < \sigma_d$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{G}{A} < \sigma_d \rightarrow A > \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{G}{\sigma_d}$$

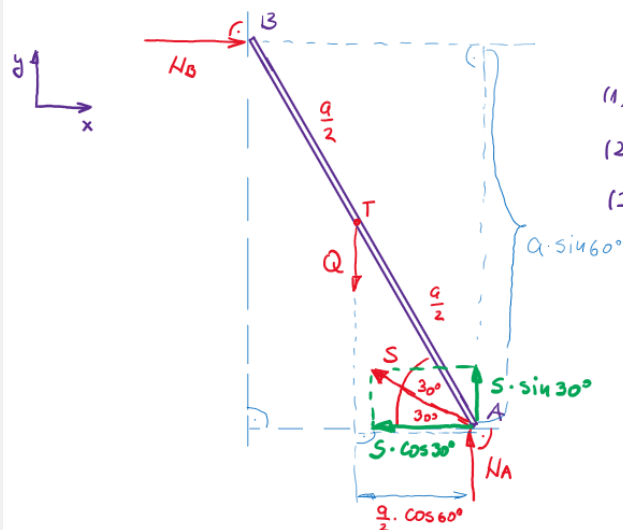


$$\frac{d^2 \pi}{4} > \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{G}{\sigma_d}$$

$$d > \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3\pi} \frac{G}{\sigma_d}}$$



Пример 3.6. Крути штап тежине $Q = 300 \text{ N}$ и дужине $a = 3 \text{ m}$ постављен је својим крајевима A и B на идеално глатки под односно зид. За штап је у тачки A везано челично еластично уже, које је другим крајем везано за зид у тачки C. Површина попречног пресека ужета је $A = 1 \text{ mm}^2$, док материјал од ког је уже направљено има модул еластичности $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$. Приликом везивања ужета штап је придржаван неким спољним узроком (на пример руком) који је након везивања ужета уклоњен. Одредити реакције везе, напон у ужету и померање тачке A.



У. Р.

$$(1) \sum X_i = H_B - S \cos 30^\circ = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (2) \sum Y_i = -Q + H_A + S \sin 30^\circ = 0 \\ (3) \sum M_A = Q \cdot \frac{a}{2} \cos 60^\circ - H_B \cdot a \sin 60^\circ = 0 \end{array} \right\} \rightarrow H_A, S$$

$$(3) \sum M_A = Q \cdot \frac{a}{2} \cos 60^\circ - H_B \cdot a \sin 60^\circ = 0$$

$$H_A, H_B, S = ?$$

$$(3) Q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - H_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$H_B \cdot \sqrt{3} = \frac{Q}{2} \quad / \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$H_B = \frac{\sqrt{3}}{6} Q$$

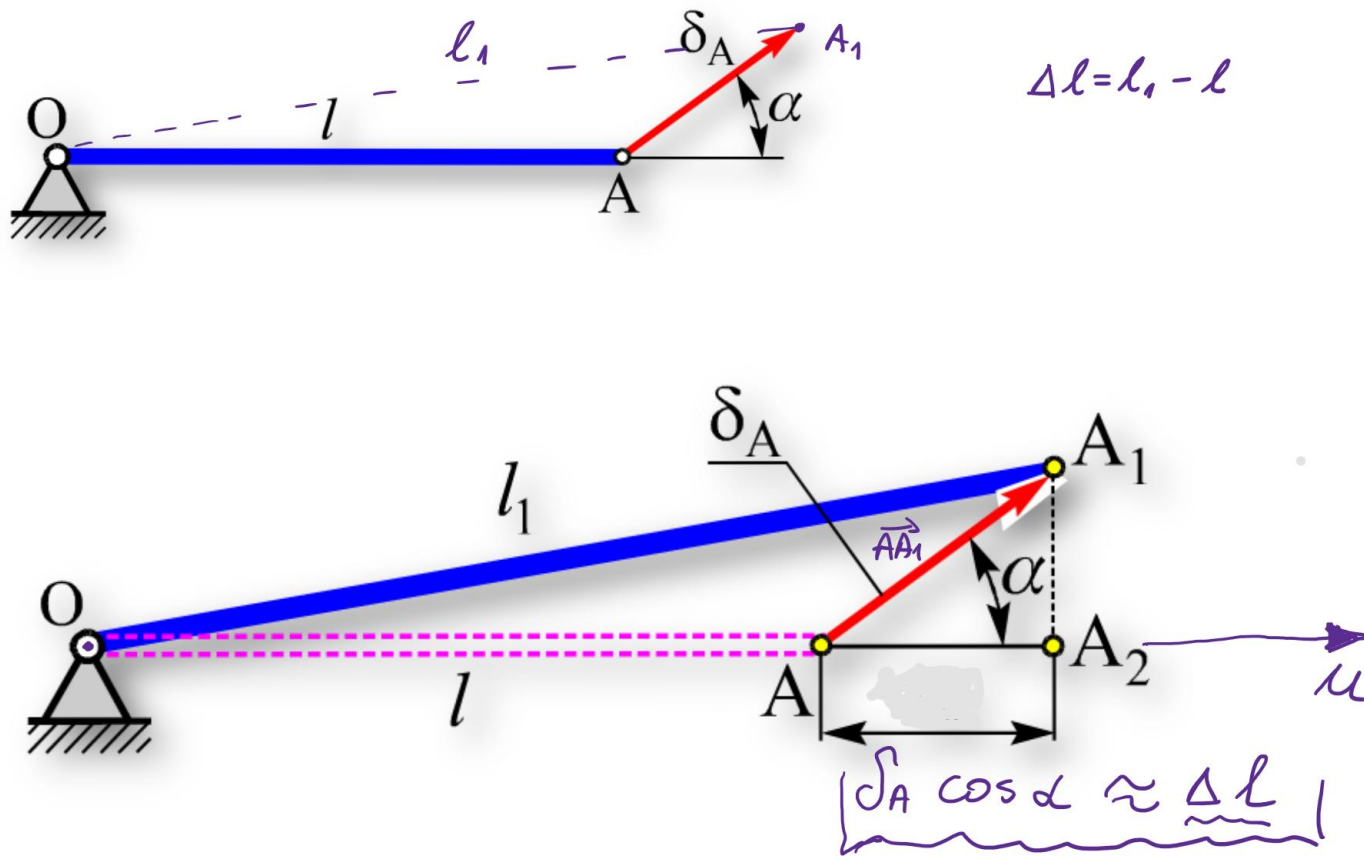
$$(1) \rightarrow H_B - S \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} Q - S \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

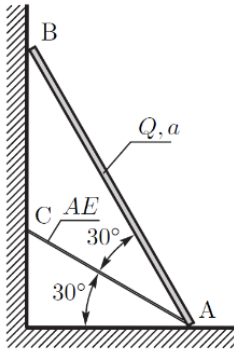
$$S = \frac{Q}{3}$$

$$\sigma = \frac{F_a}{A} = \frac{S}{A} = \frac{Q}{3A} > 0 \quad \text{3 AT.}$$

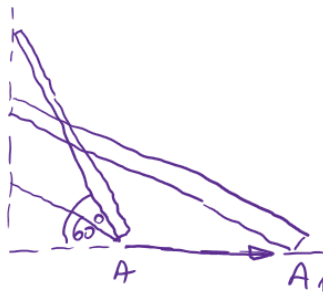
$$\Delta l = \frac{F_a \cdot l}{A E} = \frac{S \cdot l}{A E} = \frac{\frac{Q}{3} \cdot a}{A \cdot E} = \dots$$

18. Став о издужењу штапа коме је један крај покретан, а други непокретан.

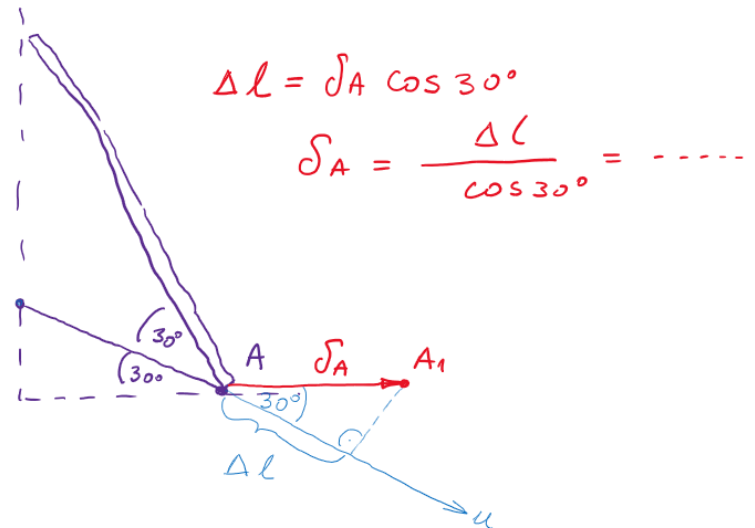


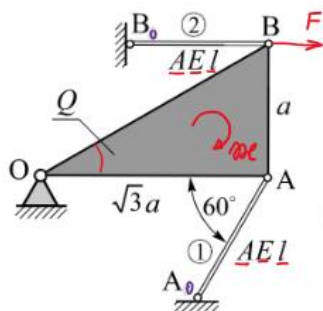


Пример 3.6. Крути штап тежине $Q = 300\text{ N}$ и дужине $a = 3\text{ m}$ постављен је својим крајевима А и В на идеално глатки под односно зид. За штап је у тачки А везано челично еластично уже, које је другим крајем везано за зид у тачки С. Површина попречног пресека ужета је $A = 1\text{ mm}^2$, док материјал од ког је уже направљено има модул еластичности $E = 2 \times 10^{11}\text{ Pa}$. Приликом везивања ужета штап је придржаван неким спољним узроком (на пример руком) који је након везивања ужета уклоњен. Одредити реакције везе, напон у ужету и померање тачке А.

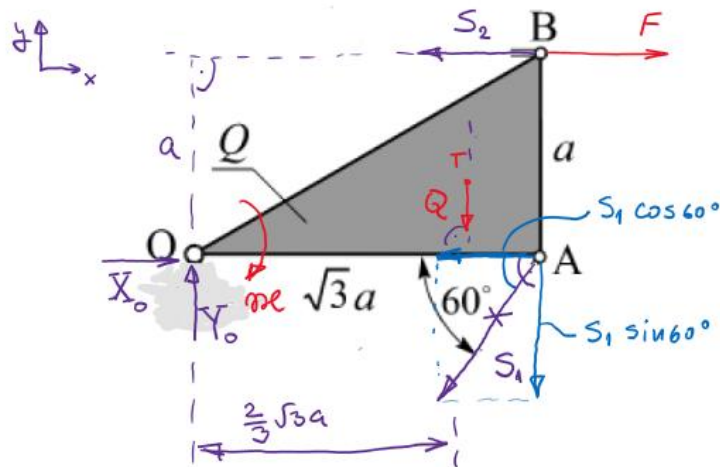
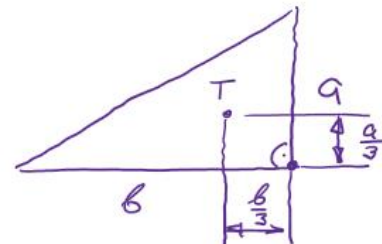


$$\overline{AA_1} = ?$$





Задатак: Крута плоча OAB тежине Q , која има облик правоуглог троугла (прави угао је код темена A) са катетама AB и OA дужине a и $\sqrt{3}a$ зглобно је везана у тачки O за подлогу. За њу су везана два лака еластична штапа AA₀ и BB₀ оба исте површине попречног пресека A , модула еластичности E и дужине l . Одредити напоне у еластичним штаповима. На штап делују и сила F и сирет момент m .



У.Р.

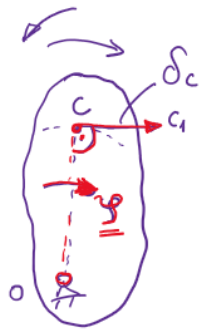
$$\begin{aligned} (1) \sum X_i &= X_0 - S_2 + F - S_1 \cos 60^\circ = 0 \\ (2) \sum Y_i &= Y_0 - Q - S_1 \sin 60^\circ = 0 \\ (3) \sum M_O &= -m + S_2 \cdot a - F \cdot a - S_1 \sin 60^\circ \cdot \sqrt{3}a - Q \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{3} = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{matrix} X_0 \\ Y_0 \end{matrix}$$

$$X_0, Y_0, S_1, S_2 = ?$$

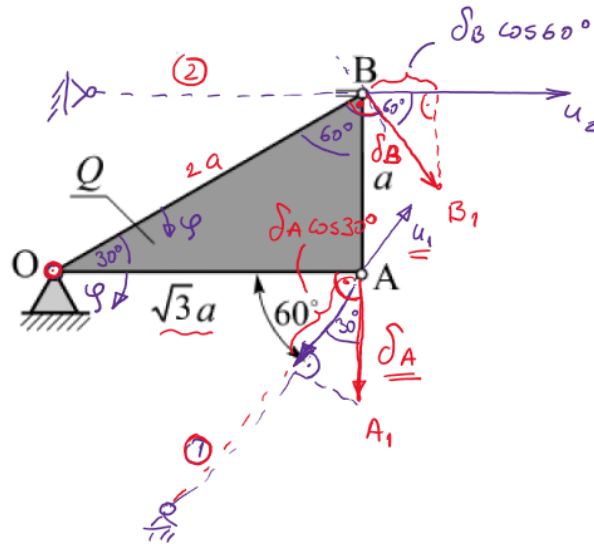
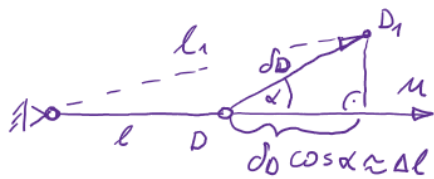
$$4 \text{ HEP} - 3 \text{ YP} = 1 \times \text{CH}$$

1 гођуска јсђначина - ГУД

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2}$$



$$\delta_c = \overline{CC_1} = \overline{OC} \cdot \varphi$$



$$\delta_A = \overline{OA} \cdot \varphi = \sqrt{3}a \cdot \varphi$$

$$\delta_B = \overline{OB} \cdot \varphi = 2a \cdot \varphi$$

$$\Delta l_1 = -\delta_A \cdot \cos 30^\circ$$

$$\Delta l_2 = +\delta_B \cdot \cos 60^\circ$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{-\delta_A \cos 30^\circ}{\delta_B \cdot \cos 60^\circ}$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{-\sqrt{3}a \cdot \varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2a \cdot \varphi \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = -\frac{3}{2}$$

$$\Delta l_1 = -\frac{3}{2} \Delta l_2 \quad \Gamma \gamma \Delta$$

$$\frac{S_1 \cdot l}{AE} = -\frac{3}{2} \frac{S_2 \cdot l}{AE}$$

$$\boxed{S_1 = -\frac{3}{2} S_2} \quad (4)$$

$$(4) \quad S_1 = -\frac{3}{2} S_2$$

$$(3) \quad -mc + \underbrace{S_2 a - Fa - \left(-\frac{3}{2} S_2\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} a - Q \frac{2}{3} a \sqrt{3}} = 0$$

$$S_2 a \left(1 + \frac{4}{3}\right) = mc + Fa + \frac{2}{3} \sqrt{3} Q a$$

$$S_2 = \frac{mc + Fa + \frac{2}{3} \sqrt{3} Q a}{a \cdot \frac{13}{3}}$$

$$(4) \quad S_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{mc + Fa + \frac{2}{3} \sqrt{3} Q a}{a \cdot \frac{13}{3}}$$

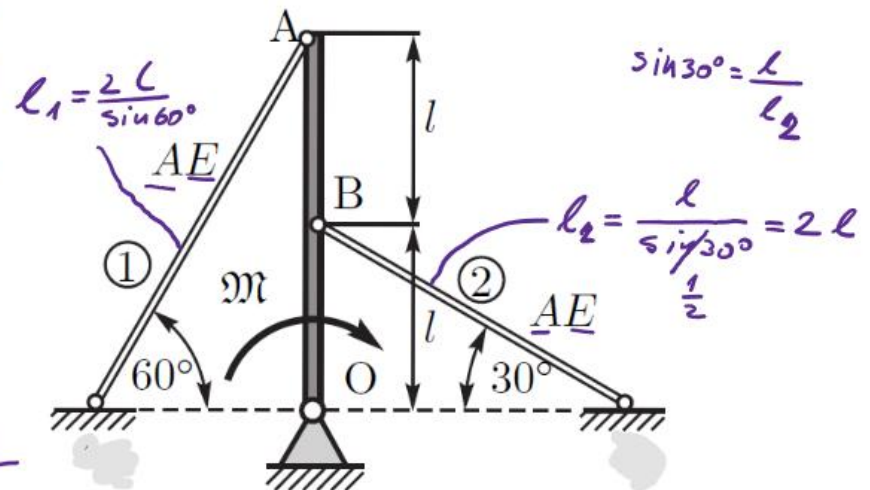
$$\sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{S_1}{A} = \dots < 0 \quad \text{НАПЯТ.}$$

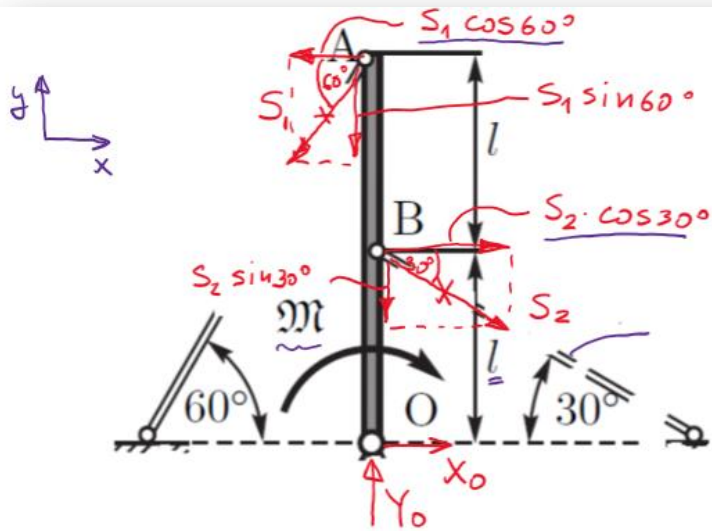
$$\sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{S_2}{A} = \dots > 0 \quad \text{СЖАТ.}$$

3.7. Крут и лак штап ОА дужине $2l$ зглобно је везан у тачки О за подлогу и оптерећен спрегом $\mathcal{M}$. За овај штап су зглобно, у тачкама А и В, везана два лака еластична штапа, оба исте површине попречног пресека и модула еластичности E . Ови штапови су преосталим крајевима зглобно везани за подлогу. Одредити напоне у еластичним штаповима.

$$\sigma_1 = ? , \sigma_2 = ?$$

$$\sin 60^\circ = \frac{2l}{l_1} \quad , \quad l_1 = \frac{2l}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4l}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}l$$





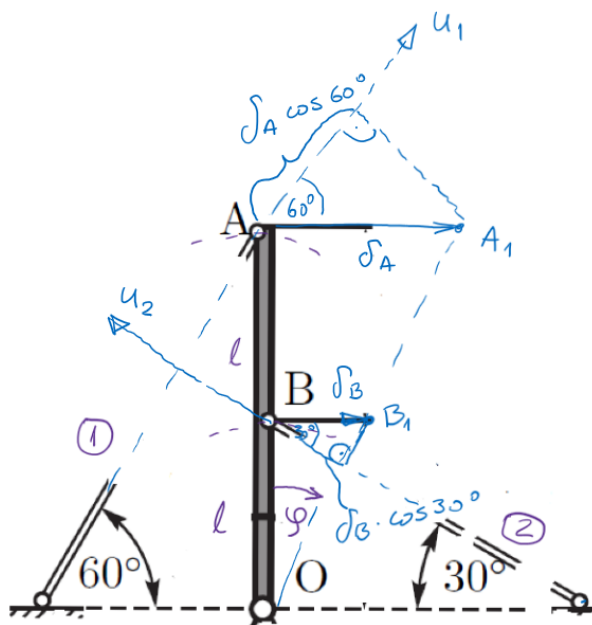
Y.P.

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum X_i &= X_0 + S_2 \cos 30^\circ - S_1 \cos 60^\circ = 0 \\ (2) \quad \sum Y_i &= Y_0 - S_2 \sin 30^\circ - S_1 \sin 60^\circ = 0 \\ (3) \quad \sum M_O &= -M - S_2 \cos 30^\circ \cdot l + S_1 \cos 60^\circ \cdot 2l = 0 \end{aligned}$$

$$X_0, Y_0, S_1, S_2 = ?$$

$$4 \text{ HEN} - 3 \text{ YP} = 1 \times \text{CH}$$

Г.У.Д.



$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{F_{A1} \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{S_1 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}l}{A E} \\ \Delta l_2 &= \frac{F_{A2} \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} = \frac{S_2 \cdot 2l}{A E} \end{aligned}$$

$$\delta_A = 2l \cdot \varphi$$

$$\delta_B = l \cdot \varphi$$

$$\Delta l_1 = \delta_A \cos 60^\circ$$

$$\Delta l_2 = -\delta_B \cdot \cos 30^\circ$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\delta_A \cos 60^\circ}{-\delta_B \cos 30^\circ} = \frac{2l \varphi \cdot \frac{1}{2}}{-l \varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta l_1 = -2 \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \Delta l_2$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{S_1 \cdot l}{A E} = -2 \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{S_2 \cdot 2l}{A E}$$

$$(4) \boxed{S_1 = -S_2}$$

$$(3) -mg - S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l + S_1 \cdot \frac{1}{2} l = 0$$

$$(4) S_1 = -S_2$$

$$-mg - S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} l + (-S_2) \frac{1}{2} l = 0$$

$$S_2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) l = -mg \rightarrow S_2 =$$

$$S_2 = -\frac{mg}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) l} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{F_{a1}}{A_1} = \frac{S_1}{A} = \frac{mg}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) l A} > 0 \end{array} \right.$$

ЗАТЕЗ.

$$\left[\begin{array}{l} S_1 = \frac{mg}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) l} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 = \frac{F_{a2}}{A_2} = \frac{S_2}{A} = -\frac{mg}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) l A} < 0 \end{array} \right.$$

НАРУСАКА

Шта смо научили?

10. Основни задаци Отпорности материјала.
11. Метода пресека и вектор напона.
12. Хипотезе Отпорности материјала.
13. Аксијално оптерећени штапови и напони код аксијално оптерећеног штапа.
14. Уздужна и попречна дилатација штапа. Издужење штапа при загревању.
15. Дијаграм нормалних напона у зависности од дилатације.
16. Издужење аксијално оптерећеног штапа.
17. Прорачун штапова изложених аксијалном оптерећењу.
18. Став о издужењу штапа коме је један крај покретан, а други непокретан.
19. Статички неодређени аксијално оптерећени штапови.

ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА

Аксијално оптерећење

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић