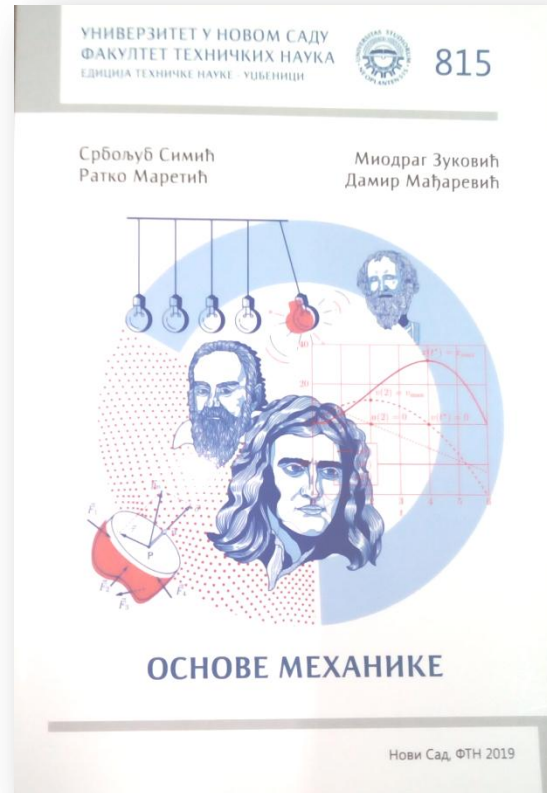


Отпорност материјала Смицање. Увијање.

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



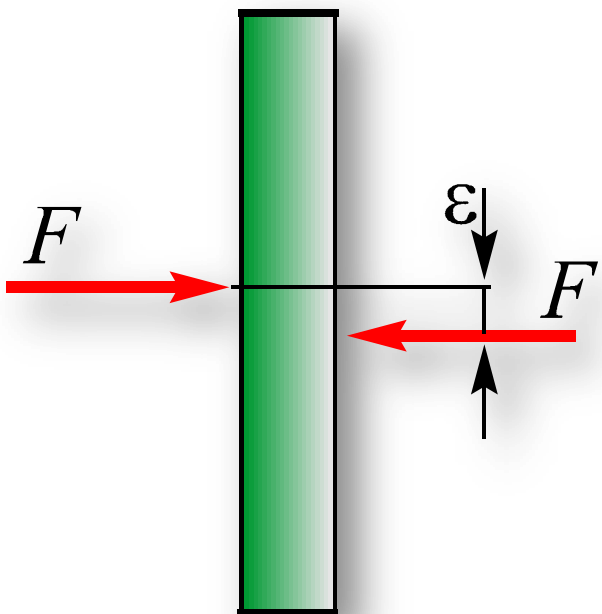
Шта ћемо научити?

- 20. Напони и деформације при смицању.
- 21. Увијање, основни појмови.
- 22. Напони при увијању.
- 23. Одређивање угла увијања.

СМИЦАЊЕ



СМИЦАЊЕ – понављање



Смицање се јавља код штапа који је оптерећен са две силе истог интензитета и супротног смера, чији су правци паралелни и на малом растојању ε .

Тангецијални напон

$$\tau = \frac{F}{A_s}$$

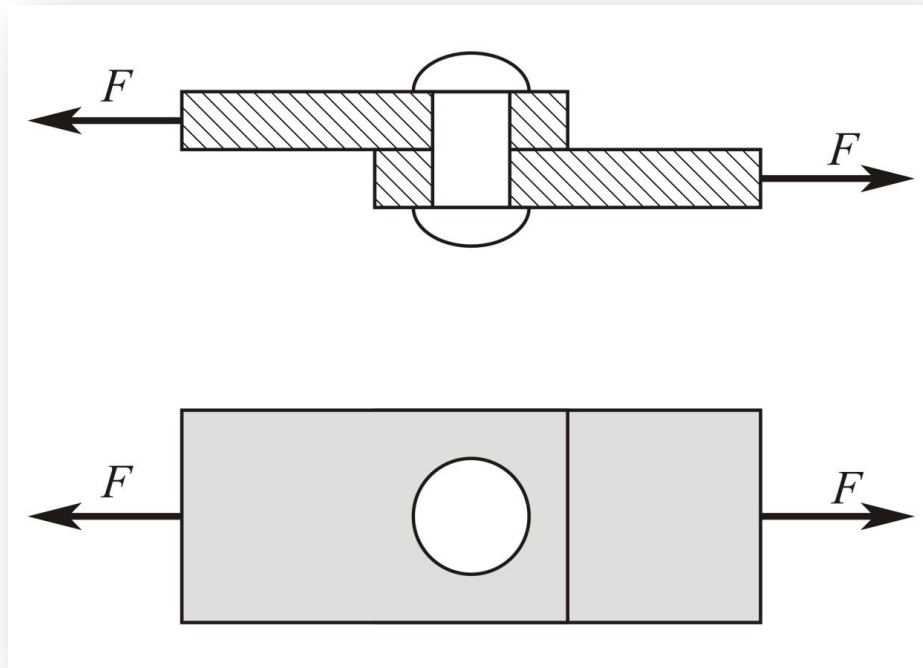
Хуков закон за смицање

$$\tau = G \gamma$$

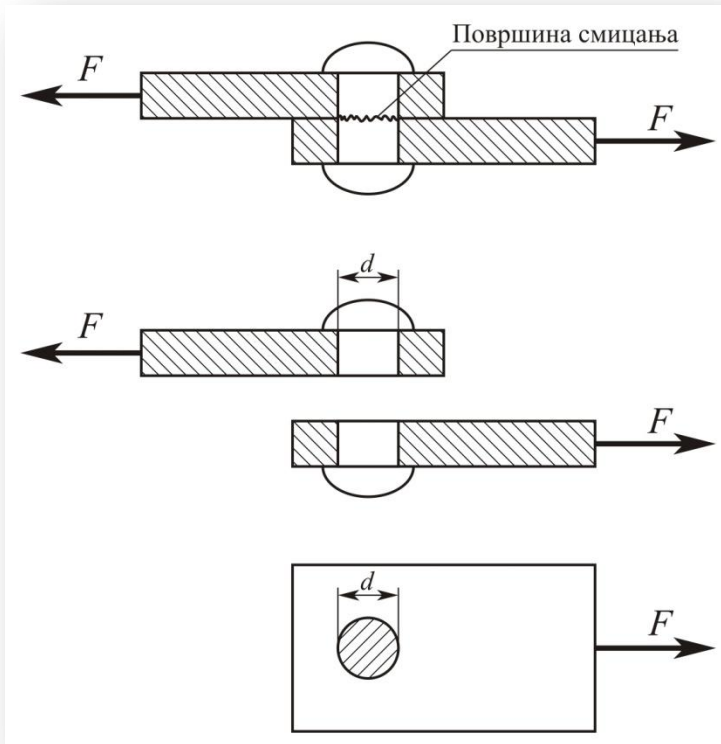
G - модул клизања

Смицање – Пример 1

Две металне траке су спојене помоћу заковице, пречника d , и оптерећена силама интензитета F , како то показује слика. Одредити (димензионисати) пречник заковице, ако је дозвољени тагенцијални напон за заковицу τ_d .



$$\tau = \frac{F_s}{A_s}$$



$$F_s = F$$

$$A_s = \frac{d^2 \pi}{4}$$



$$\tau = \frac{4F}{d^2 \pi}$$

$$\tau \leq \tau_d$$

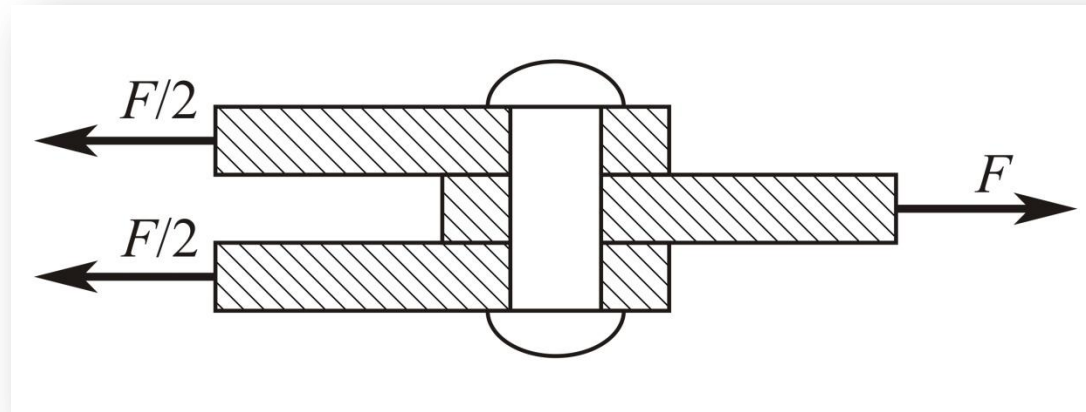
$$\frac{4F}{d^2 \pi} \leq \tau_d$$

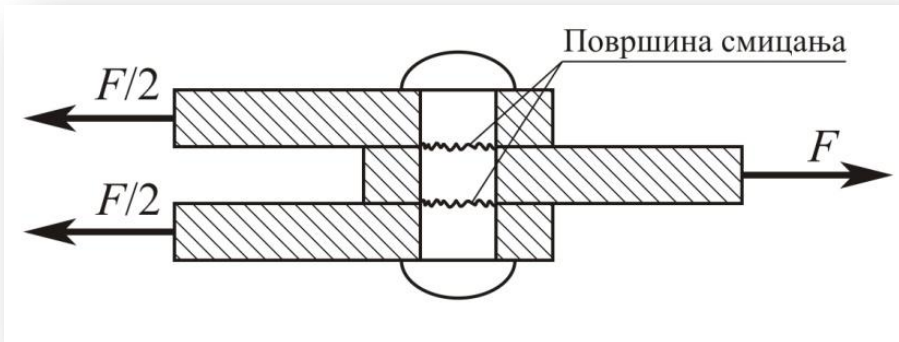


$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \tau_d}}$$

Смицање – Пример 2

Три металне траке су спојене помоћу заковице, пречника d , и оптерећена силама, како то показује слика. Одредити пречник заковице, ако је дозвољени тагенцијални напон за заковицу τ_d .





$$\tau = \frac{F_s}{A_s}$$

$$F_s = F$$

$$A_s = 2 \frac{d^2 \pi}{4}$$



$$\tau = \frac{2F}{d^2 \pi}$$

$$\tau \leq \tau_d$$

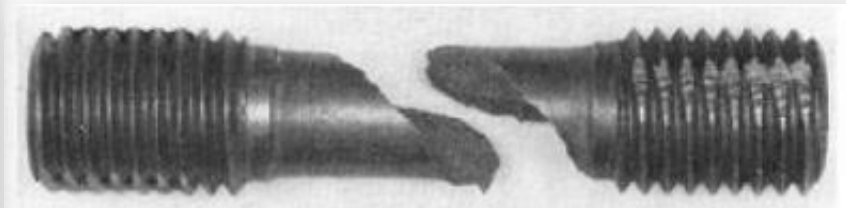
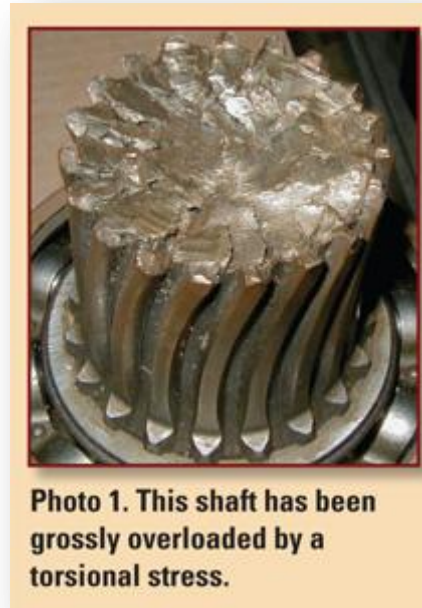
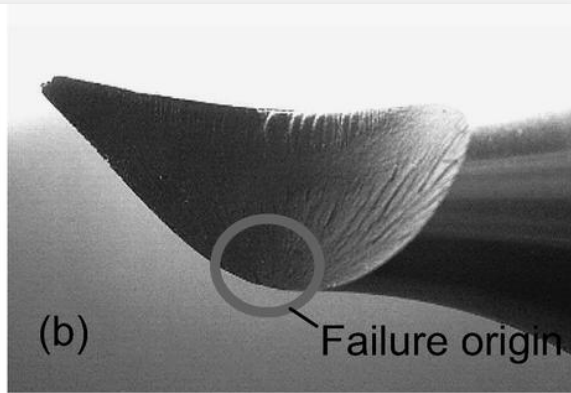
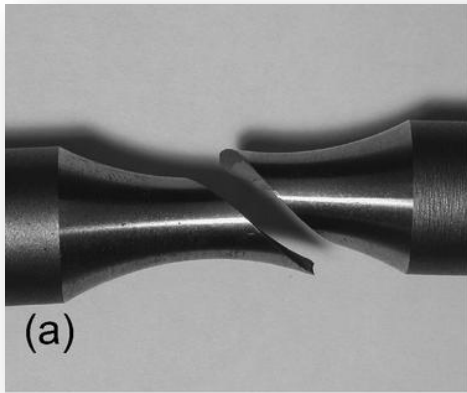
$$\frac{2F}{d^2 \pi} \leq \tau_d$$



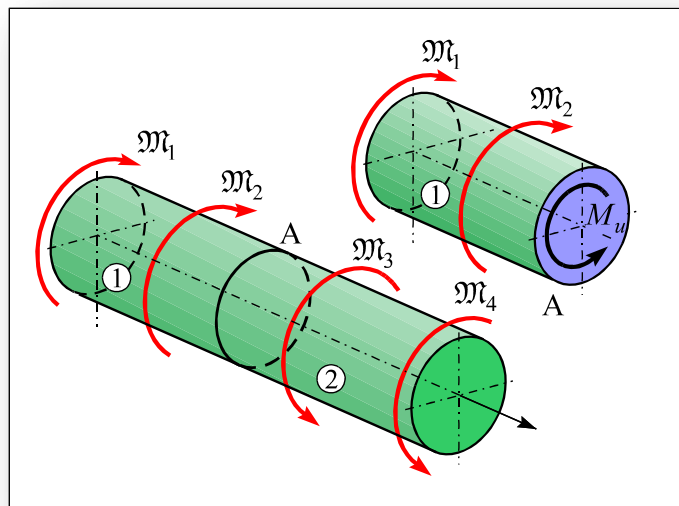
$$d \geq \sqrt{\frac{2F}{\pi \tau_d}}$$

УВИЈАЊЕ





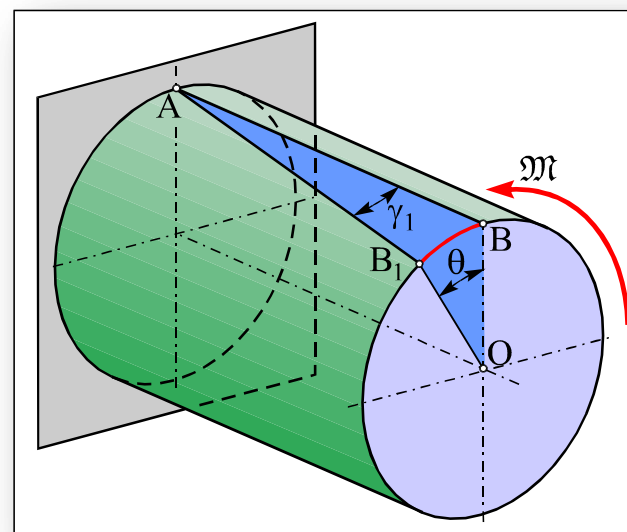
УВИЈАЊЕ – понављање



Штап је оптерећен на увијање уколико је изложен дејству спрегова чије су равни нормалне на осу штапа

Момент увијања

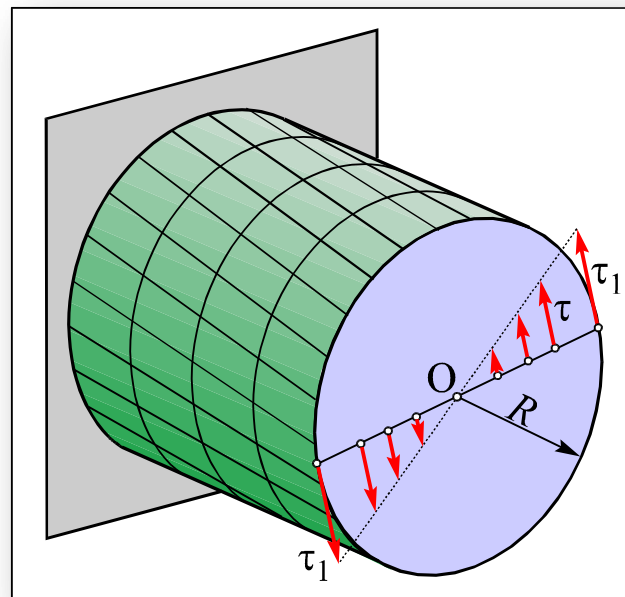
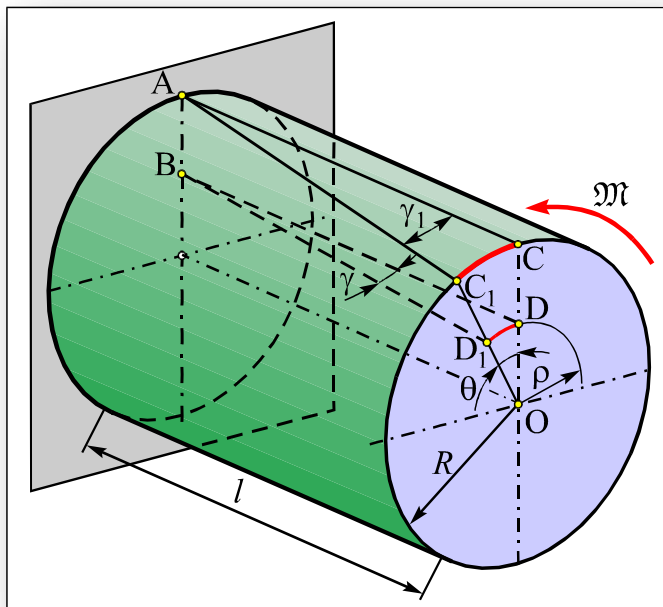
$$M_u = \sum M_i^l \quad M_u = \sum M_i^d$$



θ – угао увијања

γ_1 - угао закретања изводнице

УВИЈАЊЕ – понављање



Тангенцијални напон у
тачки која није на
омотачу штапа

$$\tau = \frac{M_u}{I_0} \rho$$

Угао увијања

Највећи тангенцијални
напон при увијању

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_u}{I_0} R.$$

$$\theta = \frac{M_u l}{G I_0}$$

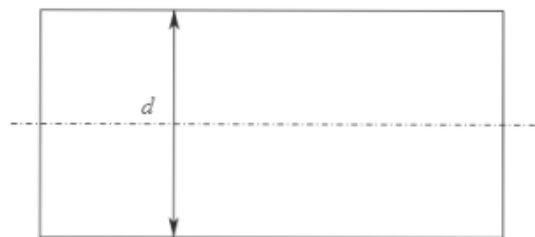
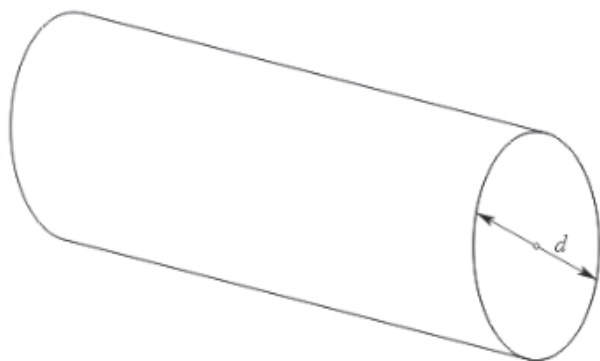
УВИЈАЊЕ – понављање

Поларни момент инерције за кружни попречни пресек

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

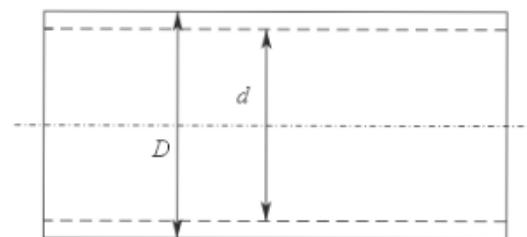
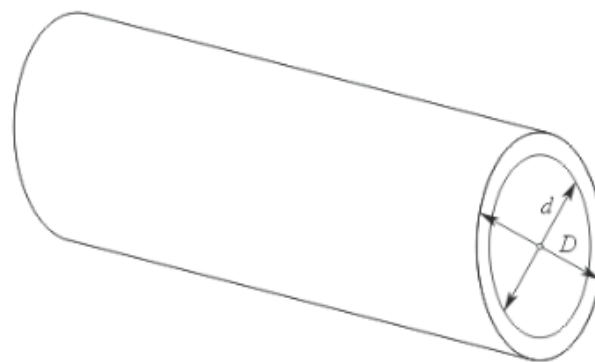
Поларни момент инерције за прстенасти попречни пресек

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$



Поларни момент инерције за
кружни попречни пресек

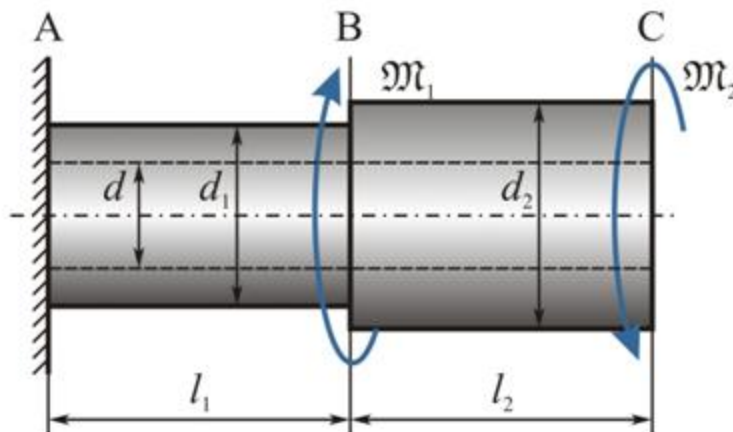
$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$



Поларни момент инерције за
прстенасти попречни пресек

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

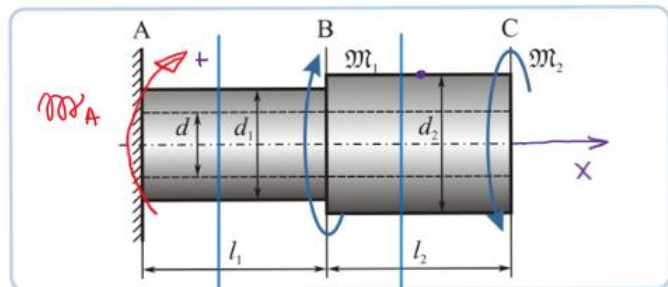
24. Штап променљивог прстенастог попречног укљештен је на једном свом крају и изложен дејству спрегова, како то слика показује. Штап је израђен од алуминијума чији је модул клизања $G=2.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.
Одредити максимални напон у штапу и угао увијања.



$$l_1 = 200 \text{ mm}, l_2 = 200 \text{ mm}$$

$$d_1 = 40 \text{ mm}, d_2 = 60 \text{ mm}, d = 20 \text{ mm}$$

$$M_1 = 400 \text{ Nm}, M_2 = 300 \text{ Nm}$$



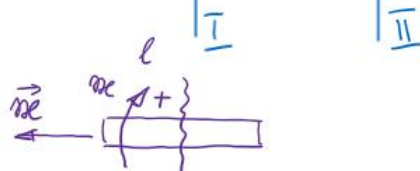
yp

$$\sum M_x = m_A + m_1 - m_2 = 0$$

$$m_A = -m_1 + m_2 = -400 + 300 = -100 \text{ Nm}$$

$$M_u^{\text{I}} = \sum M_i \cdot l = m_A = -100 \text{ Nm}$$

$$M_u^{\text{II}} = \sum M_i \cdot l = m_A + m_1 = -100 + 400 = 300 \text{ Nm}$$



$$\tau_{\max}^i = \frac{M_u^i}{I_o^i} \cdot \frac{D^i}{2}$$

$$\tau_{\max}^{\text{I}} = \frac{M_u^{\text{I}}}{I_o^{\text{I}}} \cdot \frac{D^{\text{I}}}{2} = \frac{-100}{I_o^{\text{I}}} \cdot \frac{d_1}{2} ; I_o^{\text{I}} = \frac{\pi d_1^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\tau_{\max}^{\text{II}} = \frac{M_u^{\text{II}}}{I_o^{\text{II}}} \cdot \frac{D^{\text{II}}}{2} = \frac{300}{I_o^{\text{II}}} \cdot \frac{d_2}{2} ; I_o^{\text{II}} = \frac{\pi d_2^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Theta^i = \frac{M_u^i \cdot l^i}{G^i I_o^i}$$

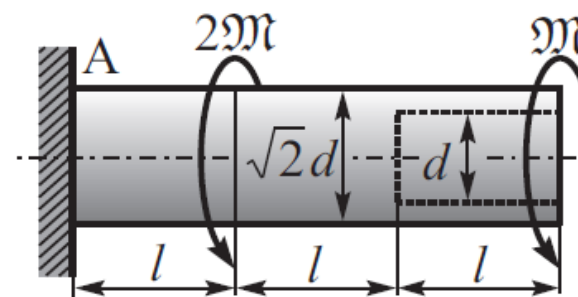
$$\Theta^{\text{I}} = \frac{M_u^{\text{I}} \cdot l_1}{G \cdot I_o^{\text{I}}} = \frac{-100 \text{ Nm} \cdot 0,2 \text{ m}}{\dots} = \Theta_{B/A}$$

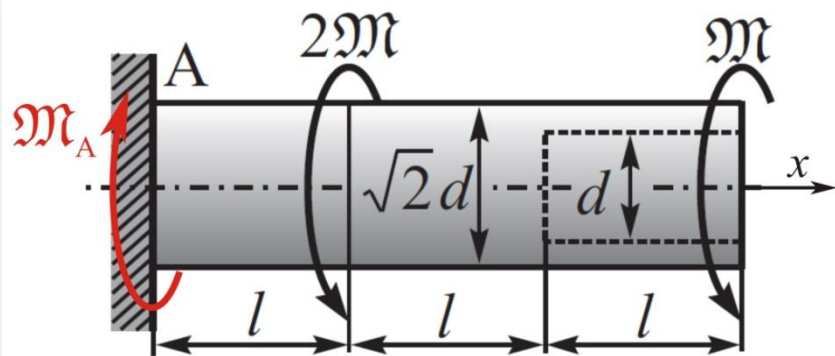
$$\Theta^{\text{II}} = \frac{M_u^{\text{II}} \cdot l_2}{G \cdot I_o^{\text{II}}} = \frac{300 \text{ Nm} \cdot 0,2 \text{ m}}{\dots} = \Theta_{C/B}$$

$$\Theta_{C/A} = \Theta_{C/B} + \Theta_{B/A} = \dots$$

Увијање – Пример 1

3.19 Штап променљивог кружног и прстенастог попречног пресека је својим крајем А причвршћен за крути зид и изложен дејству спрегова интензитета $2\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$. Одредити максимални напон у штапу и угао увијања. Модул клизања материјала штапа је G .



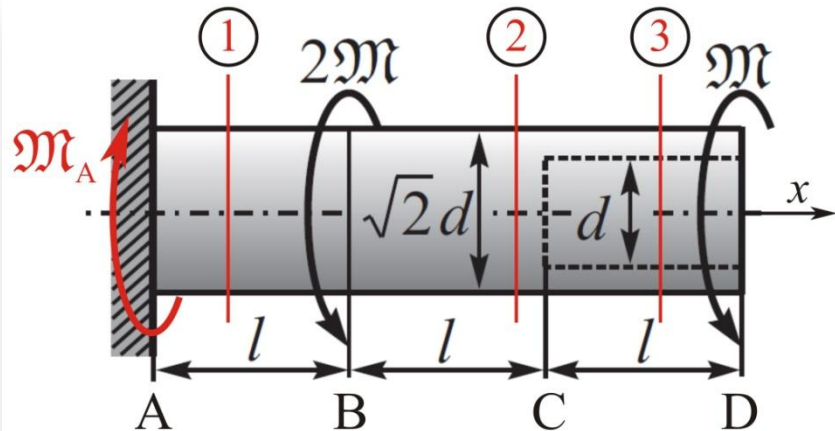


Услов равнотеже

$$\sum M_x = -M_A + 2M + M = 0$$



$$M_A = 3M$$

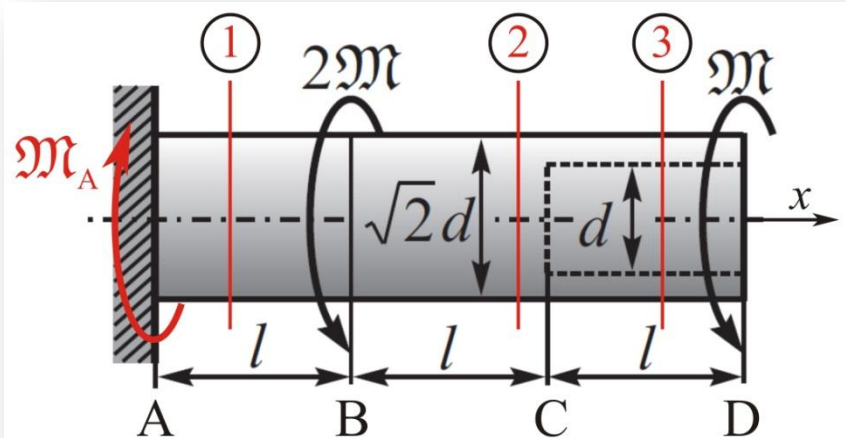


Момент увијања

$$M_{u1} = M_A = 3M$$

$$M_{u2} = M_A - 2M = M$$

$$M_{u3} = M_A - 2M = M$$



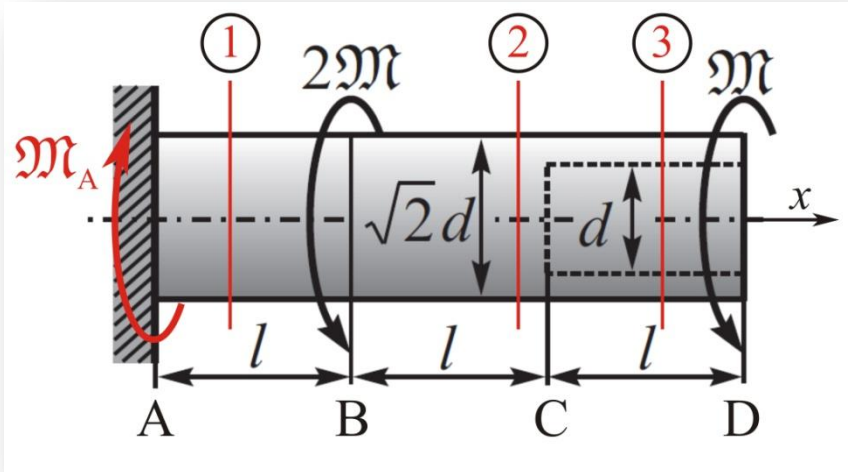
Максимални напони

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{ui}}{I_{0i}} \rho_{\max i}$$

$$I_{01} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi (\sqrt{2}d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{8}, \quad \rho_{\max 1} = \frac{\sqrt{2}d}{2}$$

$$I_{02} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi (\sqrt{2}d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{8}, \quad \rho_{\max 2} = \frac{\sqrt{2}d}{2}$$

$$I_{03} = \frac{\pi}{32} (D_3^4 - d_3^4) = \frac{\pi}{32} ((\sqrt{2}d)^4 - (d)^4) = \frac{3\pi d^4}{32}, \quad \rho_{\max 3} = \frac{\sqrt{2}d}{2}$$



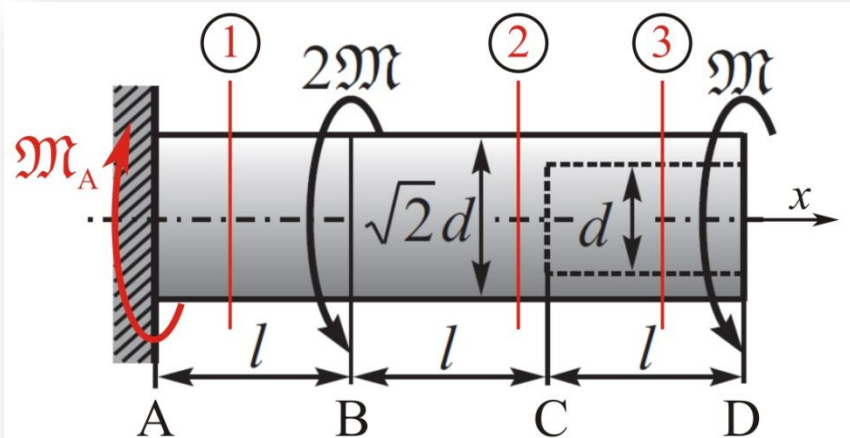
Максимални напони

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{ui}}{I_{0i}} \rho_{\max i}$$

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{u1}}{I_{01}} \rho_{\max 1} = \frac{3m}{\pi d^4} \frac{\sqrt{2}d}{2} = 12\sqrt{2} \frac{m}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{u2}}{I_{02}} \rho_{\max 2} = \frac{m}{\pi d^4} \frac{\sqrt{2}d}{2} = 4\sqrt{2} \frac{m}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\max 3} = \frac{M_{u3}}{I_{03}} \rho_{\max 3} = \frac{m}{3\pi d^4} \frac{\sqrt{2}d}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \frac{m}{\pi d^3}$$



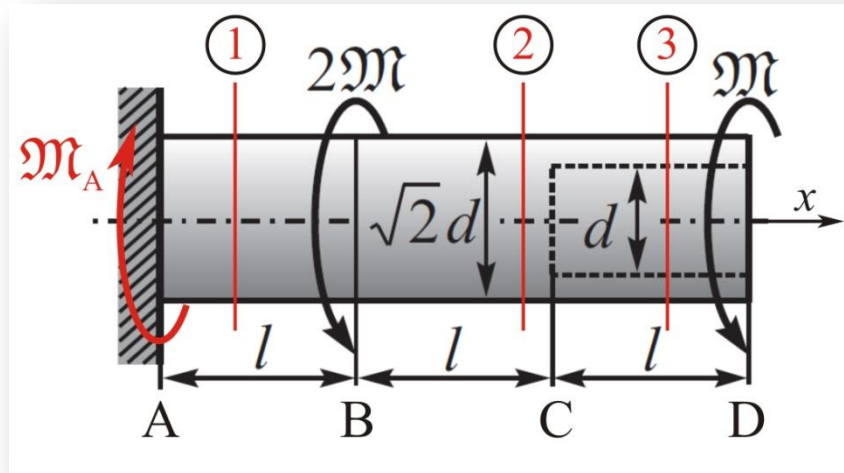
Углови увијања

$$\theta_i = \frac{M_{ui} l_i}{G_i I_{0i}}$$

$$\theta_1 = \theta_{B/A} = \frac{M_{u1} l_1}{G_1 I_{01}} = \frac{3\mathfrak{M} l}{G \frac{\pi d^4}{8}} = \frac{24}{\pi} \frac{\mathfrak{M} l}{G d^4}$$

$$\theta_2 = \theta_{C/B} = \frac{M_{u2} l_2}{G_2 I_{02}} = \frac{\mathfrak{M} l}{G \frac{\pi d^4}{8}} = \frac{8}{\pi} \frac{\mathfrak{M} l}{G d^4}$$

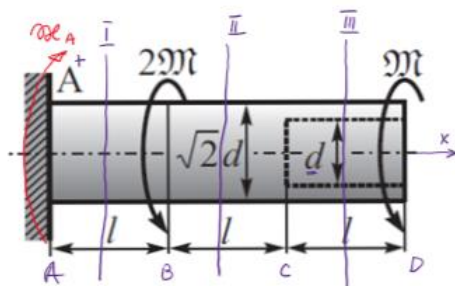
$$\theta_3 = \theta_{D/C} = \frac{M_{u3} l_3}{G_3 I_{03}} = \frac{\mathfrak{M} l}{G \frac{3\pi d^4}{32}} = \frac{32}{3\pi} \frac{\mathfrak{M} l}{G d^4}$$



Углови увијања

$$\theta_{C/A} = \theta_{B/A} + \theta_{C/B} = \frac{32}{\pi} \frac{M l}{G d^4}$$

$$\theta_{D/A} = \theta_{B/A} + \theta_{C/B} + \theta_{D/C} = \frac{128}{3\pi} \frac{M l}{G d^4}$$



3P

$$\sum M_x = M_A - 2M - M = 0$$

$$M_A = 3M$$

$$M_u^I = M_A = 3M$$

$$M_u^{II} = M_A - 2M = M$$

$$M_u^{III} = M_A - 2M = M$$

$$I_o^I = \frac{\pi \cdot (\sqrt{2}d)^4}{32} = \frac{\pi \cdot 2d^4}{32} = \frac{\pi d^4}{16}$$

$$I_o^{II} = I_o^I = \frac{\pi d^4}{16}$$

$$I_o^{III} = \frac{\pi (\sqrt{2}d)^4}{32} = \frac{\pi \cdot 2d^4}{32} = \frac{\pi d^4}{16}$$

$$= \frac{3\pi d^4}{32}$$

$$\tau_{max}^I = \frac{M_u^I}{I_o^I} \cdot \frac{\sqrt{2}d}{2} = \frac{3M}{\frac{\pi d^4}{16}} \cdot \frac{\sqrt{2}d}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{\pi} \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_{max}^{II} = \frac{M_u^{II}}{I_o^{II}} \cdot \frac{\sqrt{2}d}{2} = \frac{M}{\frac{\pi d^4}{16}} \cdot \frac{\sqrt{2}d}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_{max}^{III} = \frac{M_u^{III}}{I_o^{III}} \cdot \frac{\sqrt{2}d}{2} = \frac{M}{\frac{3\pi d^4}{32}} \cdot \frac{\sqrt{2}d}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3\pi} \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_{max} = \tau_{max}^I = \dots$$

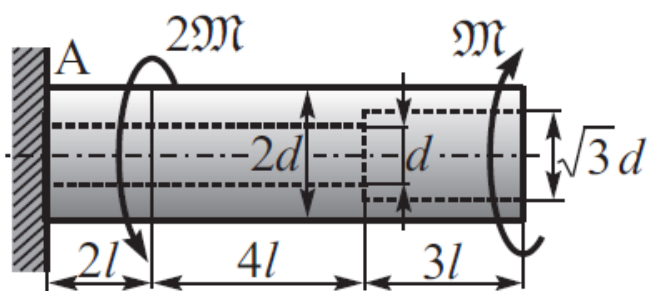
$$\theta^I = \theta_{B/A} = \frac{M_u^I l^I}{G^I I_o^I} = \frac{3M \cdot l}{G \cdot \frac{\pi d^4}{16}} = \frac{24}{\pi} \frac{M l}{G d^4}$$

$$\theta^{II} = \theta_{C/B} = \frac{M_u^{II} l^{II}}{G^{II} I_o^{II}} = \frac{M \cdot l}{G \cdot \frac{\pi d^4}{16}} = \frac{8}{\pi} \frac{M l}{G d^4}$$

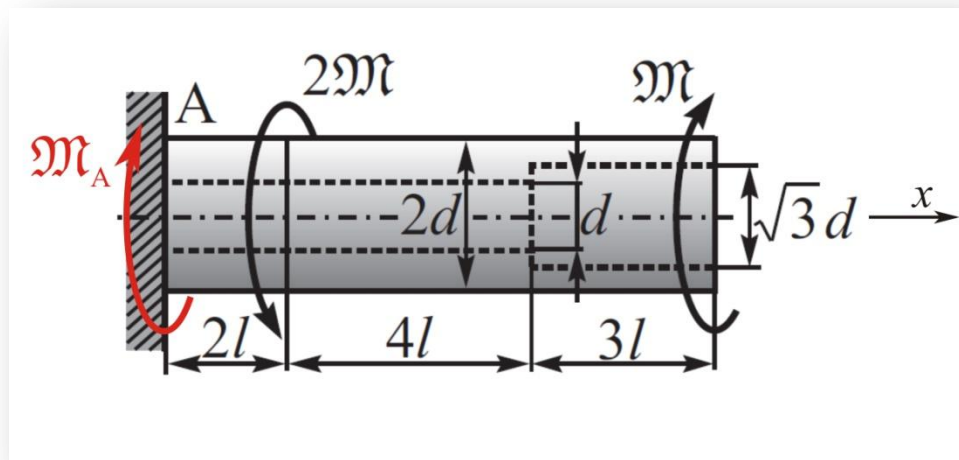
$$\theta^{III} = \theta_{D/C} = \frac{M_u^{III} l^{III}}{G^{III} I_o^{III}} = \frac{M \cdot l}{G \cdot \frac{3\pi d^4}{32}} = \frac{32}{3\pi} \frac{M l}{G d^4}$$

$$\theta = \theta_{D/A} = \theta_{D/C} + \theta_{C/B} + \theta_{B/A} =$$

Увијање – Пример 2



3.20 Штап променљивог прстенастог попречног пресека је својим крајем А причвршћен за крути зид и изложен дејству спрегова интензитета $2M$ и M . Одредити максимални напон у штапу и угао увијања. Модул клизања материјала штапа је G .

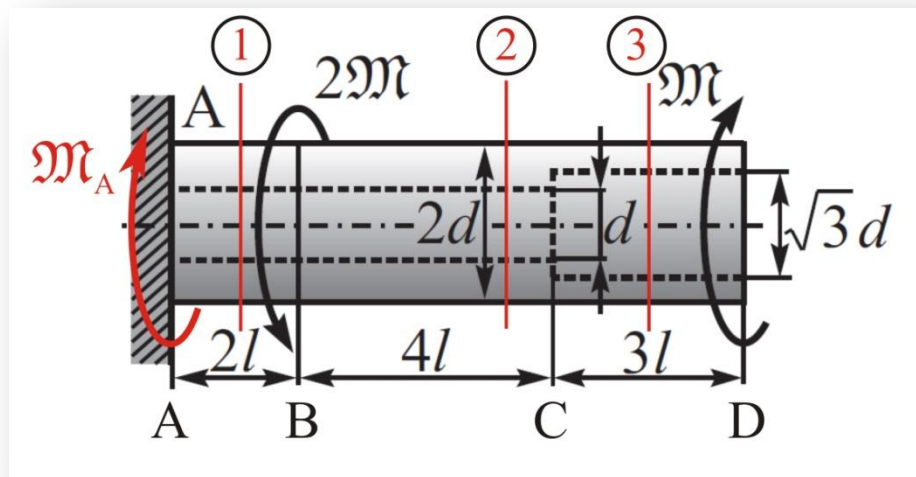


Услов равнотеже

$$\sum M_x = -\mathfrak{M}_A + 2\mathfrak{M} - \mathfrak{M} = 0$$



$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}$$

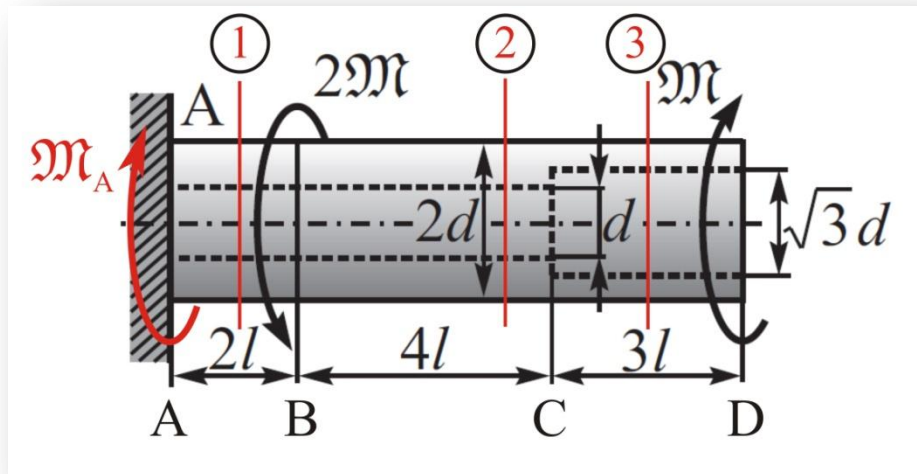


Момент увијања

$$M_{u1} = \mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}$$

$$M_{u2} = \mathfrak{M}_A - 2\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}$$

$$M_{u3} = \mathfrak{M}_A - 2\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}$$



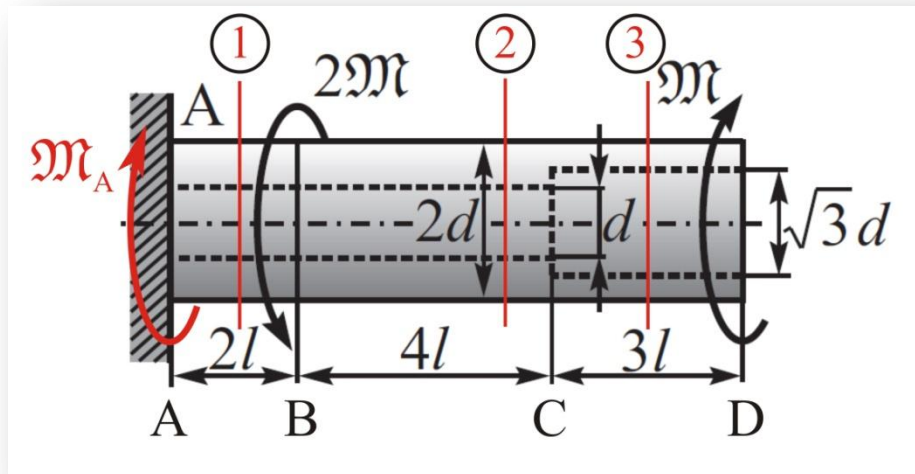
Максимални напони

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{ui}}{I_{0i}} \rho_{\max i}$$

$$I_{01} = \frac{\pi}{32} (D_1^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32} ((2d)^4 - (d)^4) = \frac{15\pi d^4}{32}, \quad \rho_{\max 1} = \frac{2d}{2} = d$$

$$I_{02} = \frac{\pi}{32} (D_2^4 - d_2^4) = \frac{\pi}{32} ((2d)^4 - (d)^4) = \frac{15\pi d^4}{32}, \quad \rho_{\max 2} = \frac{2d}{2} = d$$

$$I_{03} = \frac{\pi}{32} (D_3^4 - d_3^4) = \frac{\pi}{32} ((2d)^4 - (\sqrt{3}d)^4) = \frac{7\pi d^4}{32}, \quad \rho_{\max 3} = \frac{2d}{2} = d$$



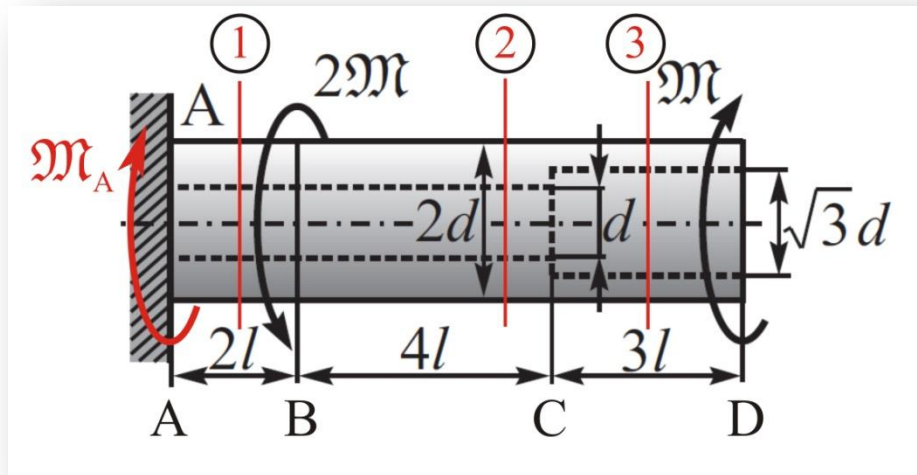
Максимални напони

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{ui}}{I_{0i}} \rho_{\max i}$$

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{u1}}{I_{01}} \rho_{\max 1} = \frac{\mathfrak{M}}{15\pi d^4} d = \frac{32}{15} \frac{\mathfrak{M}}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{u2}}{I_{02}} \rho_{\max 2} = \frac{-\mathfrak{M}}{15\pi d^4} d = -\frac{32}{15} \frac{\mathfrak{M}}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\max 3} = \frac{M_{u3}}{I_{03}} \rho_{\max 3} = \frac{\mathfrak{M}}{7\pi d^4} d = -\frac{32}{7} \frac{\mathfrak{M}}{\pi d^3}$$



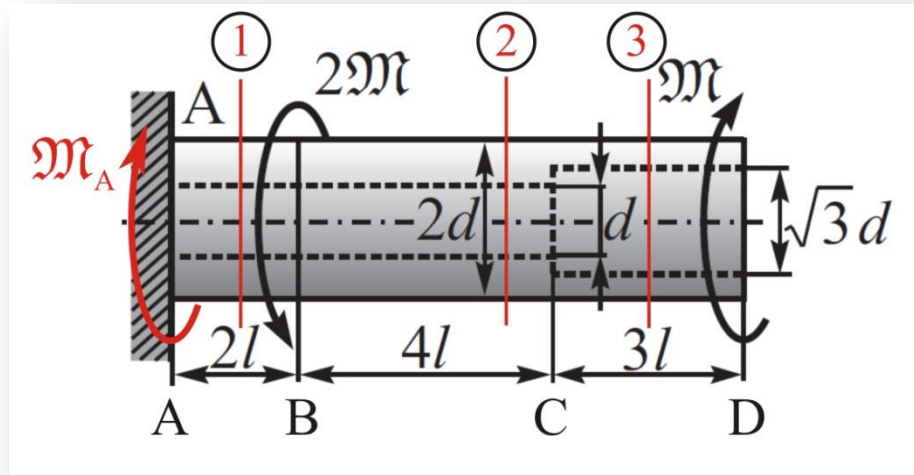
Углови увијања

$$\theta_i = \frac{M_{ui} l_i}{G_i I_{0i}}$$

$$\theta_1 = \theta_{B/A} = \frac{M_{u1} l_1}{G_1 I_{01}} = \frac{\mathfrak{M} 2l}{G \frac{15\pi d^4}{32}} = \frac{64}{15\pi} \frac{\mathfrak{M} l}{G d^4}$$

$$\theta_2 = \theta_{C/B} = \frac{M_{u2} l_2}{G_2 I_{02}} = \frac{-\mathfrak{M} 4l}{G \frac{15\pi d^4}{32}} = -\frac{128}{15\pi} \frac{\mathfrak{M} l}{G d^4}$$

$$\theta_3 = \theta_{D/C} = \frac{M_{u3} l_3}{G_3 I_{03}} = \frac{-\mathfrak{M} 3l}{G \frac{7\pi d^4}{32}} = -\frac{96}{7\pi} \frac{\mathfrak{M} l}{G d^4}$$



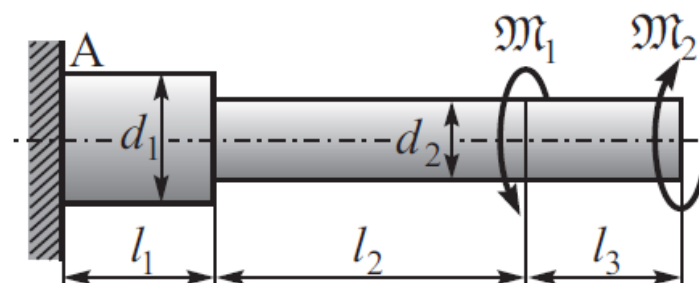
Углови увијања

$$\theta_{C/A} = \theta_{B/A} + \theta_{C/B} = -\frac{64}{15\pi} \frac{Ml}{Gd^4}$$

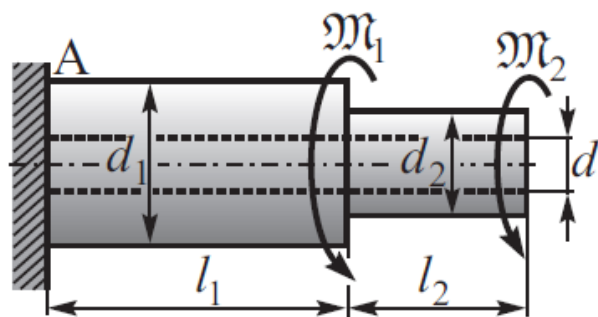
$$\theta_{D/A} = \theta_{B/A} + \theta_{C/B} + \theta_{D/C} = -\frac{1888}{105\pi} \frac{Ml}{Gd^4}$$

Увијање – Пример 3

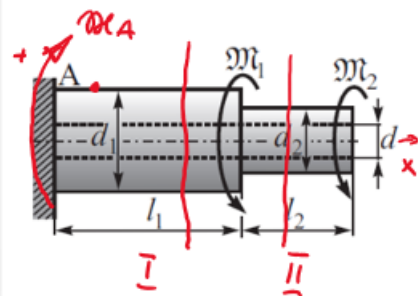
3.21 Штап променљивог кружног попречног пресека пречника $d_1 = 32mm$ $d_2 = 20mm$ је својим крајем А причвршћен за крути зид. Штап је изложен дејству спрегова интензитета $\mathfrak{M}_1 = 100 Nm$ и $\mathfrak{M}_2 = 60 Nm$. Котиране дужине су: $l_1 = 200mm$, $l_2 = 500mm$, $l_3 = 250mm$. Одредити максимални напон у штапу и угао увијања. Штап је од челика чији је модул клизања $G = 7.5 \times 10^{10} N/m^2$.



Увијање – Пример 4



3.22 Штап је својим крајем А причвршћен за крути зид и изложен дејству спрегова интензитета $\mathfrak{M}_1 = 80 \text{ Nm}$ и $\mathfrak{M}_2 = 110 \text{ Nm}$. Штап је пробушен тако да је отвор пречника $d = 25 \text{ mm}$. Димензионисати штап (одредити спољашње пречнике d_1 и d_2) ако је дозвољени напон материјала штапа $\sigma_d = 100 \text{ N/mm}^2$.



3.22 Штап је својим крајем А причвршћен за крути зид и изложен дејству спрегова интензитета $M_1 = 80 \text{ Nm}$ и $M_2 = 110 \text{ Nm}$. Штап је пробушен тако да је отвор пречника $d = 25 \text{ mm}$. Димензионисати штап (одредити спољашње пречнике d_1 и d_2) ако је дозвољени напон материјала штапа $\tau_d = 100 \text{ N/mm}^2$.

$$\text{У.Р. } \sum M_x = M_A - M_1 - M_2 = 0 \rightarrow M_A = M_1 + M_2 = 190 \text{ Nm}$$

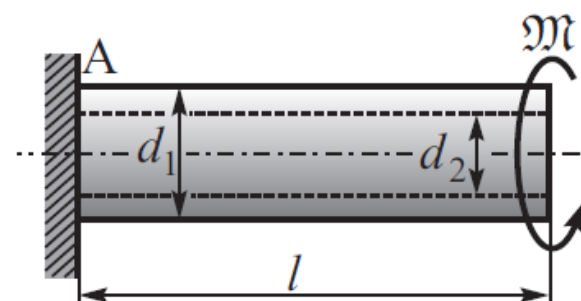
$$\left. \begin{aligned} M_{uI} &= \sum M_i^L = M_A = 190 \text{ Nm} \\ M_{uII} &= \sum M_i^L = M_A - M_1 = 110 \text{ Nm} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_{oI} &= \frac{\pi (d_1)^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \dots \\ I_{oII} &= \frac{\pi (d_2)^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \dots \end{aligned}$$

$$\tau_{\max I} = \frac{M_{uI}}{I_{oI}} \cdot \frac{d_1}{2} = \left\{ \frac{190}{I_{oI}} \cdot \frac{d_1}{2} \leq \tau_d \rightarrow d_1 \geq \right.$$

$$\tau_{\max II} = \frac{M_{uII}}{I_{oII}} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{110}{I_{oII}} \cdot \frac{d_2}{2} \leq \tau_d \rightarrow d_2 \geq$$

Увијање – Пример 5

3.23 Штап од челика ($G = 7.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$) дужине $l = 1\text{ m}$, причвршћен је својим крајем А за крути зид и изложен дејству спрега интензитета $\mathfrak{M} = 85 \text{ Nm}$. Спољашњи пречник штапа је $d_1 = 36 \text{ mm}$. Одредити унутрашњи пречник штапа d_2 уколико је услов да максимални угао увијања штапа не пређе вредност $\theta_g = 0,5^\circ$. Колики би требао да буде пречник d_2 у случају да је интензитет спрега $\mathfrak{M} = 110 \text{ Nm}$?

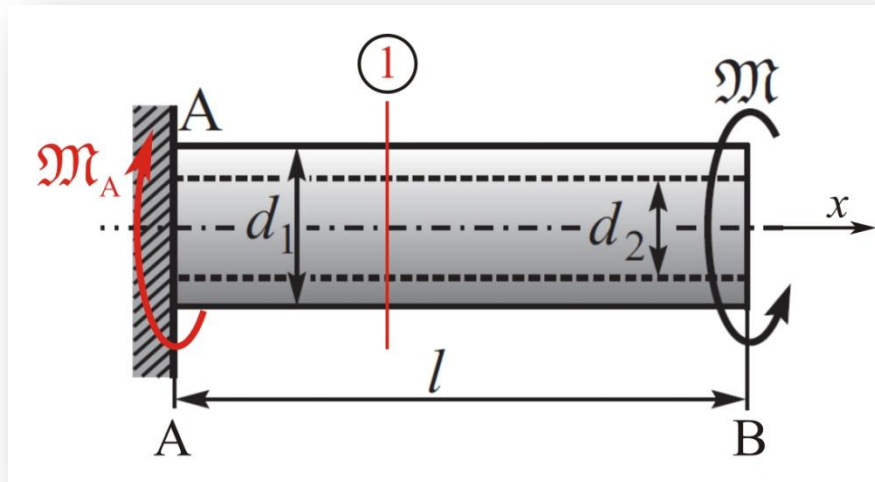


Услов равнотеже

$$\sum M_x = -\mathfrak{M}_A + \mathfrak{M} = 0$$



$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}$$



Момент увијања

$$M_u = M_{u1} = \mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}$$

Максимални напон

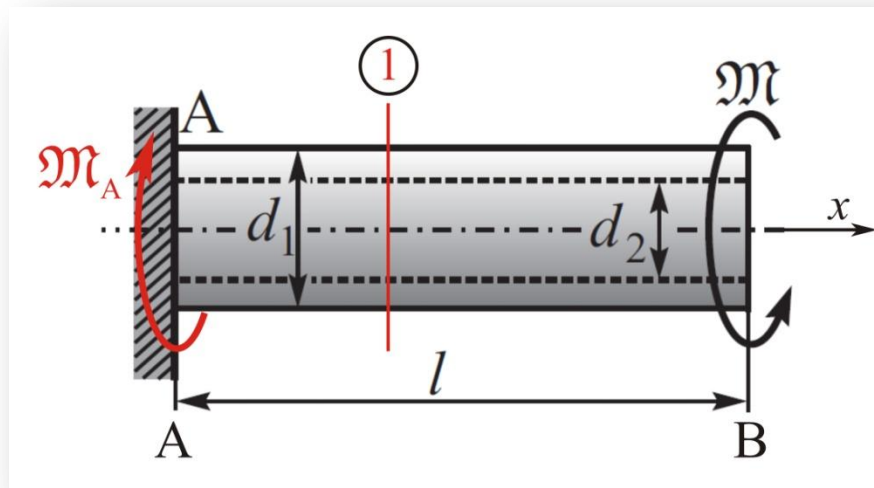
$$\tau_{\max} = \frac{M_u}{I_0} \rho_{\max} = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4)} \frac{d_1}{2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4) \quad , \quad \rho_{\max} = \frac{d_1}{2}$$

Угао увијања

$$\theta = \theta_{B/A} = \frac{M_u l}{GI_0}$$

$$\theta = \frac{M_u l}{GI_0} = \frac{\mathfrak{M} l}{G \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4)}$$



Димензионисање

$$\theta \leq \theta_g \quad \longrightarrow \quad \frac{M l}{G \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4)} \leq \theta_g \quad \longrightarrow \quad d_1^4 - d_2^4 \geq \frac{32 M l}{\pi G \theta_g}$$

$$M = 85 \text{ Nm}$$

$$d_2 \leq 0.0244397 \text{ m} = 24.4397 \text{ mm}$$

$$d_2 \leq \sqrt[4]{d_1^4 - \frac{32 M l}{\pi G \theta_g}} \quad \longrightarrow$$

$$M = 110 \text{ Nm}$$

$$d_2 \leq ?$$

Шта смо научили?

- 20. Напони и деформације при смицању.
- 21. Увијање, основни појмови.
- 22. Напони при увијању.
- 23. Одређивање угла увијања.

Отпорност материјала Смицање. Увијање.

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић