



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Структура 2-фактор трансфер диграфа мрежних графова фиксне ширине

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ментор:
проф. др Ксенија Дорословачки

Кандидат:
Јелена Ђокић

Нови Сад, 2023. године

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА¹

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Јелена Ђокић
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	Др Ксенија Дорословачки, ванредни професор, Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
Наслов рада:	Структура 2-фактор трансфер диграфа мрежних графова фиксне ширине
Језик публикације (писмо):	Српски (латиница)
Физички опис рада:	Унети број: Страница _____ 217 (78 без Додатка) Поглавља _____ 5 Референци _____ 94 Табела _____ 9 Слика _____ 24 Графика _____ 0 Прилога _____ 1
Научна област:	Примењена математика
Ужа научна област (научна дисциплина):	Теоријска и примењена математика (Дискретна математика)
Кључне речи / предметна одредница:	2-фактор, трансфер матрица, мрежни графови, генеративне функције, Мебијусова трака, Клајнова боца, палиндроми
Резиме на језику рада:	За шест типова мрежних графова фиксне ширине m (m природан број), тј. за три линеарна (правоугаони мрежни граф, широки цилиндар и Мебијусова трака) и три циклична (танки цилиндар, торус и Клајнова боца) графа, дати су алгоритми за добијање 2-фактор трансфер диграфова потребних за пребројавање покривајућих унија контура, тзв. 2-фактора на овим графовима. Ово пребројавање се своди на пребројавање оријентисаних шетњи у 2-фактор трансфер диграфу придруженом посматраном мрежном графу. Компјутерски резултати добијени имплементацијом ових алгоритама за графове ширине $m \leq 18$ откривају неке интересантне особине и за трансфер диграфове и за низове бројева 2-фактора. Већину ових особина ми доказујемо за произвољно $m > 1$. Тако, за линеарне мрежне графове доказујемо да 2-фактор трансфер диграф има тачно $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ компоненту, да су све осим једне бипартитни диграфови и да се њихов број чворова може изразити преко биномних коефицијената. Такође доказујемо да се скуп чворова сваке компоненте састоји од свих бинарних m -речи за које је разлика

¹ Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истовестности штапане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штапаном и електронском облику и не корице се са тезом.

	бројева нула на непарним и парним местима константна. За цикличне мрежне графове у случају непарног m доказујемо да трансфер диграф има тачно 2 компоненте, које су изоморфне, док је за парно m ситуација слична као код линеарних графова. Постављено је и неколико хипотеза које се односе на спектралне особине ових трансфер диграфова, као и преклапања бројева 2-фактора за различите типове Клајнове боце.
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	25. 5. 2023.
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник: др Тибор Лукић, редовни професор, Факултет техничких наука, Нови Сад Члан: др Ђорђе Баралић, виши научни сарадник, Математички институт САНУ, Београд Члан: др Петар Ђапић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Нови Сад Члан: др Зоран Овчин, доцент, Факултет техничких наука, Нови Сад Ментор: др Ксенија Дорословачки, ванредни професор, Факултет техничких наука, Нови Сад
Напомена:	

KEY WORD DOCUMENTATION²

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Jelena Đokić
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Dr Ksenija Doroslovački, Associate Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
Thesis title:	The structure of the 2-factor transfer digraph for fixed width grid graphs
Language of text (script):	Serbian language (latin script)
Physical description:	Number of: Pages_____217 (78 without Appendix) Chapters_____5 References_____94 Tables_____9 Illustrations_____24 Graphs_____0 Appendices_____1
Scientific field:	Applied Mathematics
Scientific subfield (scientific discipline):	Theoretical and Applied Mathematics (Discrete Mathematics)
Subject, Key words:	2-factor, transfer matrix, grid graphs, generating functions, Moebius strip, Klein bottle, palindromes
Abstract in English language:	For six types of grid graphs with fixed width m ($m > 0$), i.e. for three linear (rectangular grid graph, thick grid cylinder and Moebius strip) and three circular (thin grid cylinder, torus and Klein bottle) graphs, we propose algorithms for obtaining 2-factor transfer digraphs needed for enumeration of spanning unions of cycles, the so-called 2-factors, in these graphs. This enumeration is reduced to the problem of enumerating oriented walks in the 2-factor transfer digraph of the considered grid graph. By implementation of these algorithms we gathered computational results for $m \leq 18$ which reveal some interesting properties both for these transfer digraphs and for the sequences of numbers of 2-factors. We have proved most of them for arbitrary integer $m > 1$. Thus, for the linear grid graphs, we prove that the 2-factor transfer digraph has exactly $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ components, all but one of the them are bipartite digraphs and their orders could be expressed in term of binomial coefficients. In addition, we prove that the set of vertices of each component consists of all the binary m-words for which the difference of numbers of zeros in odd and even positions is constant. For the circular grid graphs, in case of odd m we prove that the 2-factor transfer digraph has exactly two components, which are isomorphic, while when m is even the situation is

² The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

56 – Statement on the authority,

5B – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at the faculty and are not included into the printed thesis.

	similar to the one for the linear grid graphs. Several conjectures related to the spectral properties of these transfer digraphs as well as the overlap of the 2-factor numbers for different types of Klein bottles have been proposed, too.
Accepted on Scientific Board on:	25. 5. 2023.
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	President: Dr Tibor Lukić, Full Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad Member: Dr Đorđe Baralić, Research Associate, Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade Member: Dr Petar Đapić, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad Member: Dr Zoran Ovcin, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad Supervisor: Dr Ksenija Doroslovački, Associate Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
Note:	



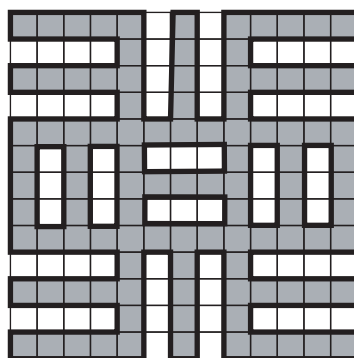
UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
U NOVOM SADU



Jelena Đokić

Struktura 2-faktor transfer digrafa mrežnih grafova fiksne širine

DOKTORSKA DISERTACIJA



Novi Sad
2023.

Predgovor

“Nea onnim no sua a, ohu” - u prevodu: što manje ne zna, više vidi.

(Akanska¹ izreka koja se povezuje sa adinkrom² prikazanom na koricama.)

Od začetaka teorije grafova i Ojlerovog rešenja problema Sedam mostova Kenigsberga prošlo je gotovo 300 godina. Ovaj vremenski period bio je sasvim dovoljan da se teorija grafova razvije kao zasebna matematička disciplina. Velika primena u raznim oblastima koje uključuju biohemiju (genomika, Kekuleove strukture), elektrotehniku (komunikacione mreže i teorija kodiranja), fiziku (nauka o polimerima, monomer-dimer problem), računarstvo (algoritmi), operaciona istraživanja, društvene mreže i mnoge druge oblasti, daje teoriji grafova epitet izuzetno aktuelne i primenljive grane matematike. Korišćenjem Google pretraživača uživamo u jednoj od najpoznatijih i finansijski najisplativijih primena grafova.

Predmet istraživanja ove disertacije jesu transfer digrafovi koji se koriste u algoritmima za prebrojavanje pokrivajućih unija kontura, takozvanih i u daljem tekstu *2-faktora*, linearnih i cikličnih mrežnih grafova sa kvadratnim elementarnim ćelijama. Na naslovnoj strani je prikazana jedna adinkra kao crtež na kvadratnoj mreži sa 14×14 čvorova. Rub sive figure se sastoji od sedam kontura čija unija pokriva sve čvorove mrežnog grafa $P_{14} \times P_{14}$. Ta unija predstavlja ujedno i jedan 2-faktor prikazanog mrežnog grafa. 2-faktori predstavljaju prirodno uopštenje koncepta Hamiltonovih kontura - zatvorenih Hamiltonovih puteva (puteva koji posećuju svaki čvor grafa tačno jednom). Izučavanje Hamiltonovih puteva ima široku primenu u raznim oblastima nauke i tehnike: u teoriji polimera vezano za savijanje i topljenje polimera kao i za entropiju polimernog sistema, u inženjerstvu kod problema planiranja putanja za mašine i robote, u bioinformatičari vezano za zaštitu bezbednosti i intelektualne svojine i sl.

Istraživanja vezana za prebrojavanje Hamiltonovih kontura na specijalnim mrežnim grafovima su inicirana radom grupe autora Tošić, Bodroža, Kwong i Straight (poslednji autor je nosilac Erdoševog broja 1) iz 1990. godine u kojem je prvi put dat eksplicitni izraz za broj Hamiltonovih kontura za čitavu jednu klasu mrežnih grafova ($P_4 \times P_n$, $n \in \mathbb{N}$) za koju traženi problem nije trivijalan (kao što je to slučaj za grafove $P_2 \times P_n$ i $P_3 \times P_n$, $n \in \mathbb{N}$). Nakon toga slede radovi u kojima su dobijene formule i ad hoc algoritmi za dobijanje traženih nizova brojeva za grafove $P_m \times P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) za neke konkretne, manje vrednosti broja m (npr. $H_{8,25} = 16098959403506801921858124$ za graf $P_8 \times P_{25}$). Metod matrica prenosa tzv. *transfer matricni metod* za dobijanje brojeva Hamiltonovih kontura za mreže $P_m \times P_n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) za proizvoljno veliko m je razvijen 1994. (Bodroža-Pantić, Tošić) čime je prvi put dokazano da za proizvoljno, fiksno $m \in \mathbb{N}$ brojevi Hamiltonovih kontura zadovoljavaju homogenu diferencnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima (rekurentnu formulu) čiji je red ograničen veličinom transfer matrice. Kasnije, 1996. druga grupa autora (Stoyan i Strehl) su nezavisno došli do istog rezultata. Potreba i interesovanje za prebrojavanje Hamiltonovih kontura mrežnih grafova i na drugim površinama (cilindrima, torusu), kao i sa drugim elementarnim ćelijama (npr. trougaonim), podstaknuto prvenstveno radovima hemičara Kloczkowskog i Jernigana, fizičara Jacobsena i Jensena i drugih dalo je novi zamajac. Takođe su na ovim mrežama ispitivani i srodni pojmovi (savršeno i skoro savršeno sparivanje). Istaknimo zapažene rezultate ruske grupe naučnika predvođenih Perepechkom.

¹ Akani su etnička grupa u Zapadnoj Africi koja uključuje Ašante, Fante i narod Nzema u Gani i Obali Slonovače.

² Ime „adinkra” se povezuje sa simbolima zapadno afričkih naroda koji simbolizuju mudre izreke. U teorijskoj fizici su ovaj termin preuzeli u značenju geometrijskih objekata koji kodiraju matematičke veze između supersimetričnih čestica.

Motivacija za istraživanja koja su opisana u ovoj disertaciji su proistekla iz niza nedavnih radova grupe autora Bodroža-Pantić, Kwong, Doroslovački i Pantić koji se odnose na brojeve Hamiltonovih kontura u mrežnim grafovima sa $m \cdot n$ čvorova ($m, n \in \mathbb{N}$) fiksne širine m . Ova disertacija se bavi 2-faktorima, kao prirodnim uopštenju pojma Hamiltonovih kontura, na ovim grafovima. Mrežni grafovi koje u ovoj disertaciji posmatramo su svi sa kvadratnim ćelijama i delimo ih na dva tipa: linearne i ciklične. U prvu grupu spadaju: mrežni graf pravougaonog oblika $RG_m(n) = P_m \times P_n$, široki cilindar $TkC_m(n) = P_m \times C_n$ i Mebijusova traka $MS_m(n)$, dok su u drugoj grupi: tanki cilindar $C_m \times P_n$, torus $TG_m^{(p)}(n)$ i Klajnova boca $KB_m^{(p)}(n)$ ($0 \leq p \leq m-1$). Za svih šest navedenih tipova mrežnih grafova fiksne širine m ($m \in \mathbb{N}$) dati su algoritmi za dobijanje 2-faktor transfer digrafova potrebnih za prebrojavanje pokrivajućih unija kontura (2-faktora) na ovim grafovima. Ovo prebrojavanje se svodi na prebrojavanje orijentisanih šetnji u 2-faktor transfer digrafu pridruženom posmatranom mrežnom grafu. Kompjuterski rezultati dobijeni implementacijom ovih algoritama za grafove širine $m \leq 18$ otkrivaju neke interesantne osobine kako za transfer digrafove tako i za nizove brojeva 2-faktora. Većinu ovih osobina mi dokazujemo za proizvoljno $m > 1$. Tako, za linearne mrežne grafove dokazujemo da 2-faktor transfer digraf ima tačno $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ komponenti, da su sve osim jedne bipartitni digrafovi i da se njihov broj čvorova može izraziti preko binomnih koeficijenata. Takođe, dokazujemo da se skup čvorova svake komponente sastoji od svih binarnih m -reči za koje je razlika brojeva nula na neparnim i parnim mestima konstantna. Za ciklične mrežne grafove u slučaju neparnog m dokazujemo da transfer digraf ima tačno dve komponente koje su izomorfne, dok je za parno m situacija slična kao kod linearnih grafova. Postavljeno je i nekoliko hipoteza koje se odnose na spektralne osobine ovih transfer digrafova, kao i preklapanja brojeva 2-faktora za različite tipove Klajnovih boca. Rezultati našeg istraživanja koji su opisani u ovoj disertaciji (glave 1 - 3) mogu se naći u nedavno objavljenim radovima [28]- [32].

U Uvodu je dat hronološki pregled istraživanja iz ove oblasti i objašnjena motivacija za naša istraživanja. U prvoj glavi ove disertacije su date osnovne definicije i opisan metod dobijanja traženih transfer matrica. U drugoj glavi su predstavljeni rezultati vezani za linearne, dok u trećoj za ciklične grafove. Pored Zaključka, u kome je stavljen akcenat na mogućnosti daljih istraživanja, priložen je i Dodatak u kome su korišćenjem generativnih funkcija pohranjeni numerički podaci za konkretne vrednosti parametara m i n ($m, n \in \mathbb{N}$).

Ovim putem želim da se zahvalim svom mentoru profesoru dr Kseniji Doroslovački na svesrdnoj podršci prilikom izrade ove disertacije. Svom prvom mentoru profesoru dr Olgi Bodroža-Pantić dugujem zahvalnost za nesebičnu posvećenost, preneseno znanje, izbor teme, što je bila uporna sa mnom i bodrila me da istrajem. Takođe se zahvaljujem svojim roditeljima Raji i Janji, bratu Jovanu i supruhu Iliji na beskrajnoj ljubavi, podršci, razumevanju i strpljenju. Zahvaljujem se najdražoj nastavnici, Staki Živanović, koja je svojim bezgraničnim nastavničkim umećem podstakla moju ljubav prema matematici.

Sadržaj

Predgovor	3
Spisak oznaka	7
Uvod	9
1. Osnovne definicije i metodologija	11
1.1 Mrežni grafovi fiksne širine	11
1.2 Tipovi kontura	15
1.3 Egzistencija 2-faktora na linearnim mrežnim grafovima	18
1.4 Transfer matični metod i generativne funkcije	20
1.5 Kodne matrice	22
2. Linearni mrežni grafovi	27
2.1 Prebrojavanje 2-faktora linearnih mrežnih grafova	27
2.2 Dodatna redukcija transfer digrafa za $RG_m(n)$	34
2.3 Kompjuterski rezultati	36
2.4 Asimptotsko ponašanje brojeva $f_m^{RG}(n)$, $f_m^{TKC}(n)$ i $f_m^{MS}(n)$	37
2.5 Struktura linearnog 2-faktor transfer digrafa	41
2.6 Red redukovano i duplo redukovano transfer digrafa za $RG_m(n)$	49
2.7 Izgradnja skupova $S_m^{(k)}$	51
3. Ciklični mrežni grafovi	55
3.1 Prebrojavanje 2-faktora cikličnih mrežnih grafova	55
3.2 Kompjuterski rezultati i otvorena pitanja	61
3.3 Struktura cikličnog 2-faktor transfer digrafa	65
Zaključak	69
Literatura	73
Dodatak	79

Spisak oznaka

$\mathbb{N}$	– skup prirodnih brojeva
$\mathbb{N}_0$	– skup prirodnih brojeva proširen sa 0
$\mathbb{Z}$	– skup celih brojeva
$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$	– niz elemenata $a_0, a_1, a_2, \dots$
$[AB]$	– duž sa krajevima u tačkama A i B
$G = (V(G), E(G))$	– graf ili digraf G gde je $V(G)$ skup čvorova, a $E(G)$ skup grana
$v_1 \rightarrow v_2$	– grana (luk) (v_1, v_2) digrafa $\mathcal{D}$, tj. $(v_1, v_2) \in E(\mathcal{D})$ ili v_1 "tuče" v_2
$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_t$	– orijentisana šetnja u digrafu od čvora v_1 do čvora v_t
$v_1 \leftrightarrow v_2$	– $(v_1, v_2), (v_2, v_1) \in E(\mathcal{D})$ (grane u oba smera)
$\langle S \rangle_G$	– podgraf (poddigraf) grafa (digrafa) G indukovano sa $S, S \subseteq V(G)$
$G-v$	– graf ili digraf koji se dobija od G brisanjem njegovog čvora $v \in V(G)$
$G-e$	– graf ili digraf koji se dobija od G brisanjem njegove grane $e \in E(G)$
P_n	– Put (prost otvoren lanac) od n čvorova i sa $n - 1$ granom
C_n	– Kontura (prost zatvoren lanac) od n čvorova i sa n grana
$G_1 \times G_2$	– Dekartov proizvod grafova G_1 i G_2
$ M $	– determinanta matrice M
$a_{i,j}^{(n)}$	– element n -tog stepena matrice $[a_{i,j}]$ na poziciji (i, j)
I	– jedinična matrica
HC	– Hamiltonova kontura
odd(x)	– broj nula u binarnoj reči x koje se nalaze na neparnim pozicijama
even(x)	– broj nula u binarnoj reči x koje se nalaze na parnim pozicijama

Uvod

U teoriji polimera izučavanje Hamiltonovih puteva je prihvaćeno kao prva aproksimacija za kvalitativno razumevanje mehanizma savijanja proteina (savijanja određenih nizova aminokiselina polipeptidnog lanca), pri čemu se zapremina zanemaruje [45, 76]. Hamiltonove konture mogu da posluže i kao jednostavan model za globularne proteine zbijene strukture [54, 57]. Takođe, one mogu biti i matematički model topljenja polimera [75], dok se broj Hamiltonovih kontura dovodi i u vezu sa entropijom polimernog sistema [7, 46]. Problem prebrojavanja i generisanja Hamiltonovih kontura na mrežnim grafovima se pojavljuje u inženjerstvu kod problema planiranja putanja za mašine i robote [69], bioinformatičari vezano za zaštitu bezbednosti i intelektualne svojine korišćenjem MEDA biočipova [62], u teoriji algoritama [68], kao i u razvoju statističkih algoritama koji snabdevaju nepristrasno uzorkovanje takvih putanja [64].

Istraživanja vezana za prebrojavanje Hamiltonovih kontura na specijalnim mrežnim grafovima su inicirana radom [88] gde je izveden eksplicitni izraz za broj Hamiltonovih kontura u mrežnom grafu $P_4 \times P_n$, $n \in \mathbb{N}$. Zatim su sledili radovi [61, 87] u kojima su dobijene formule za broj Hamiltonovih kontura $P_m \times P_n$, $n \in \mathbb{N}$ za neke male vrednosti broja m , kao i radovi [2, 4, 5, 19, 60] u kojima su dati ad hoc algoritmi pomoću kojih su dobijene još neke vrednosti ovih brojeva. Transfer matrični metod za dobijanje ovih brojeva za proizvoljno velike mreže $P_m \times P_n$, $m, n \in \mathbb{N}$ je prvi put razvijen 1994. god. u [6], a kasnije, 1996. god. nezavisno i u [82]. Ovim je dokazano po prvi put da za proizvoljno, fiksno $m \in \mathbb{N}$ brojevi Hamiltonovih kontura zadovoljavaju rekurentnu formulu čiji red je ograničen veličinom transfer matrice (koja zavisi od $m \in \mathbb{N}$). Potreba i interesovanje za prebrojavanje Hamiltonovih kontura mrežnih grafova i na drugim površinama (cilindrima i torusu) [36, 56, 71], kao i sa drugim elementarnim ćelijama (trougaoim) dali su novi zamajac [7, 9, 45, 46, 47, 49, 50]. Takođe su na ovim mrežama ispitivani i srodni pojmovi (savršeno i skoro savršeno sparivanje) [48, 70].

Motivacija za istraživanja koja su opisana u ovoj disertaciji je proistekla iz niza nedavnih radova [8, 10, 11, 12], a koji se odnose na brojeve Hamiltonovih kontura u mrežnim grafovima fiksne širine $m \in \mathbb{N}$, sa $m \cdot n$ ($n \in \mathbb{N}$) čvorova posmatrane kao nizove po n . Kompjuterski podaci dobijeni u ovim radovima su ukazali na pojavu nekih interesantnih fenomena, iskazanih kao hipoteze, a koji se odnose na brojeve kontraktibilnih i nekontraktibilnih Hamiltonovih kontura posmatranih kao zatvorene Žordanove krive na datoj površi. Tako je ustanovljeno da se brojevi kontraktibilnih i nekontraktibilnih Hamiltonovih kontura na tankom cilindru $C_m \times P_n$ širine m ($m, n \in \mathbb{N}$) asimptotski jednako ponašaju za isto m , kad $n \rightarrow \infty$ [8] i da isto važi za njegovu trougaonu varijantu [10]. Za takozvane široke cilindre $P_m \times C_n$ širine m ($m, n \in \mathbb{N}$) uočeno je da dominantnost broja kontraktibilnih nad brojem nekontraktibilnih Hamiltonovih kontura zavisi od parnosti broja m [12]. Takođe, koeficijent uz pozitivni dominantni koren karakteristične jednačine pridružene rekurentnoj formuli koja opisuje brojeve nekontraktibilnih Hamiltonovih kontura za široki cilindar $P_m \times C_n$ je jednak 1 (podaci za $m \leq 10$), dok je taj koren za kontraktibilne Hamiltonove konture jednak onom koji odgovara pravougaonom mrežnom grafu $P_m \times P_n$ [11].

Kako su 2-faktori prirodno uopštenje pojma Hamiltonovih kontura mi smo nedavno pokrenuli sistematsko proučavanje 2-faktora na mrežnim grafovima fiksne širine u cilju da se što više približimo davanju odgovora na navedena otvorena pitanja. Uverenja smo bili (i ostali) da ove odgovore treba tražiti u strukturi transfer digrafova - pomoćnih digrafova koje koristimo pri prebrojavanju traženih objekata, a čije matrice susedstva predstavljaju transfer matrice. Interesovalo nas je da li će se neke iste ili slične osobine pojaviti i kod brojeva 2-faktora ovih grafova. Takođe, mi smo istraživanja na pravougaonom mrežnom grafu, širokom i tankom cilindru dodatno proširili i na nove klase mrežnih grafova - Mebijusovu traku, Torus i Klajnovu bocu.

Osnovne definicije i metodologija

1.1 Mrežni grafovi fiksne širine

Za proizvoljni označeni neorijentisani graf G pojam 2-faktora izvodimo iz sledeće definicije.

Definicija 1.1 Za proizvoljni prirodni broj $r \in \mathbb{N}$, **r-faktor** je pokrivajući r -regularni podgraf od G , tj. podgraf koji sadrži sve čvorove grafa G pri čemu je stepen svakog čvora tačno r . **Hamiltonova kontura** je povezan 2-faktor.

1-faktori se nazivaju još i *savršena sparivanja* (eng. *perfect matchings*) i veoma su dobro ispitana posebno zbog svoje primene u hemiji [37] gde ih povezuju sa Kekuleovim strukturama ugljovodoničnih jedinjenja. Da bi graf G imao 1-faktor potreban uslov je da mu je broj čvorova paran. Ukoliko je taj broj neparan, i ako postoji čvor $v \in V(G)$ takav da $G - v$ ima 1-faktor, tada grane tog 1-faktora zajedno sa čvorom v određuju tzv. *skoro savršeno sparivanje* [70].

2-regularni graf predstavlja uniju kontura. Ako imamo konturu koja sadrži sve čvorove grafa, tj. ako se taj 2-faktor sastoji samo od jedne konture, on je povezan i predstavlja Hamiltonovu konturu.

Mrežni grafovi koje razmatramo u ovoj disertaciji su svi fiksne širine m ($m \in \mathbb{N}$) i za njihove čvorove možemo smatrati da su grupisani po kolonama.

Definicija 1.2

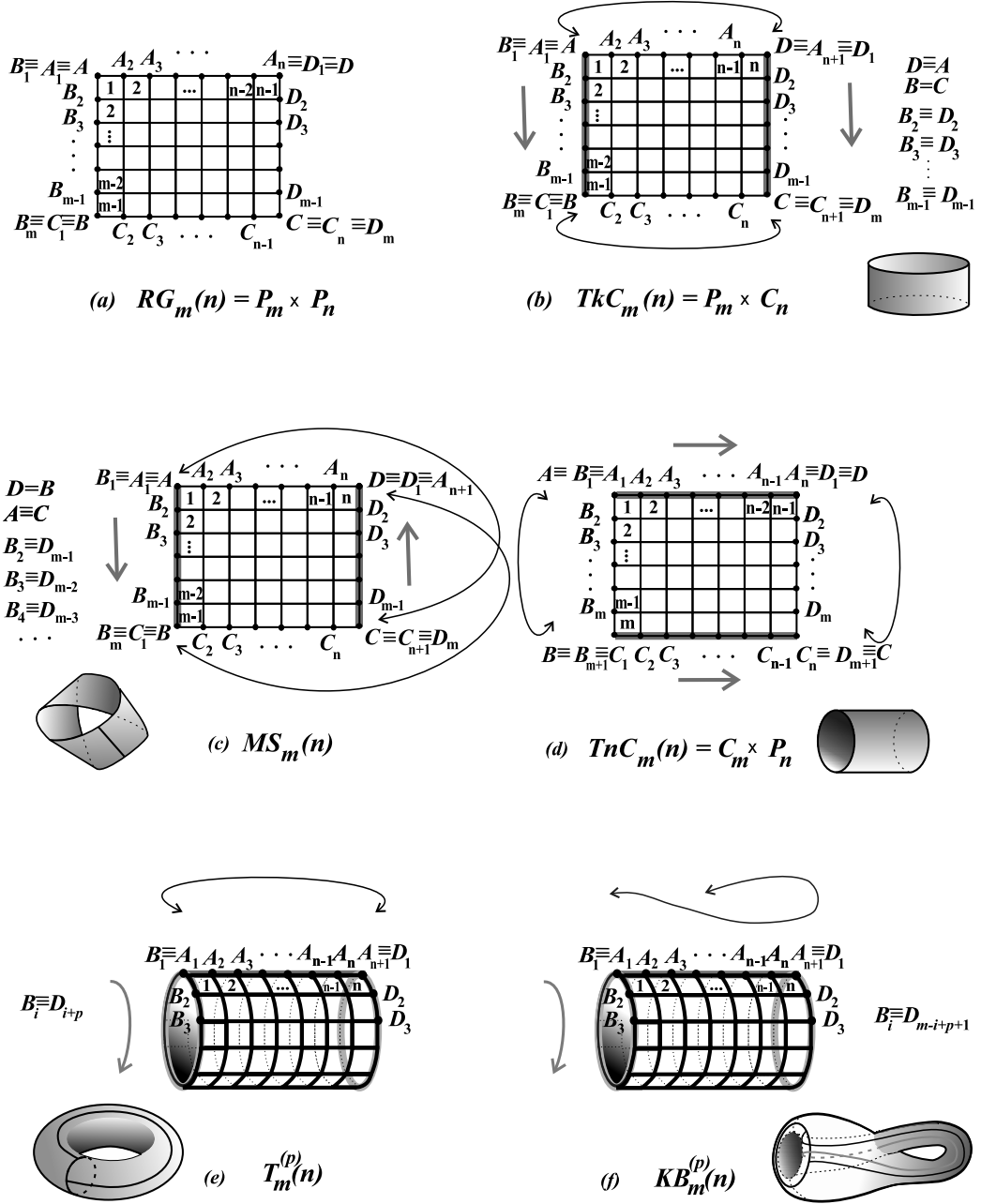
Pravougaoni (mrežni) graf $RG_m(n)$, **tanki (mrežni) cilindar** $TnC_m(n)$ i **široki (mrežni) cilindar** $TkC_m(n)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) su $P_m \times P_n$, $C_m \times P_n$ i $P_m \times C_n$, redom.

Mebijusova traka $MS_m(n)$ se dobija od pravougaonog grafa $RG_m(n+1) = P_m \times P_{n+1}$ identifikacijom odgovarajućih čvorova prve i poslednje kolone u obrnutom smeru (B_i i D_{m-i+1} sa Slike 1.1 c) bez dupliranja grana.

Torus (mrežni) graf $TG_m^{(p)}(n)$ ($0 \leq p \leq m-1$) je graf dobijen od $TnC_m(n+1)$ identifikacijom čvorova B_i i D_{i+p} , $i = 1, \dots, m$, bez dupliranja grana, gde B_i i D_i označavaju čvorove koji pripadaju i -toj vrsti ($1 \leq i \leq m$) prve i poslednje kolone, redom a oznaka operacije $+$ u donjem indeksu je sabiranje po modulu m (Slika 1.1 e).

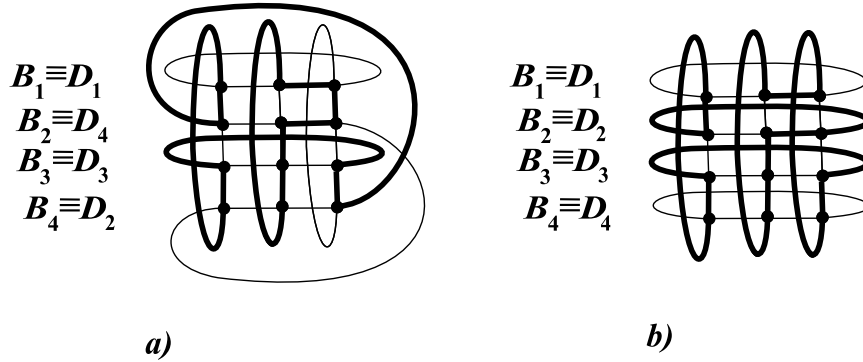
Klajnova boca $KB_m^{(p)}(n)$ je graf dobijen od $TnC_m(n+1)$ identifikacijom čvorova B_i i $D_{m-i+p+1}$, $i = 1, \dots, m$ bez dupliranja grana (Slika 1.1 f).

Vrednost $m \in \mathbb{N}$ se naziva **širina** mrežnog grafa. Mrežne grafove $RG_m(n)$, $TkC_m(n)$ i $MS_m(n)$ jednim imenom nazivamo **linearni mrežni grafovi**, a grafove $TnC_m(n)$, $TG_m^{(p)}(n)$ i $KB_m^{(p)}(n)$ **ciklični mrežni grafovi**.



Slika 1.1: (a) Pravougaoni graf $RG_m(n) = P_m \times P_n$; (b) Široki cilindar $TkC_m(n) = P_m \times C_n$; (c) Mebi-jusova traka $MS_m(n)$; (d) Tanki cilindar $TnC_m(n) = P_m \times C_n$; (e) Torus $TG_m^{(p)}(n)$; (f) Klajnova boca $KB_m^{(p)}(n)$

Za svaku kolonu linearnog mrežnog grafa važi da je podgraf indukovani svim čvorovima te kolone put P_m , dok kod cikličnog grafa je to kontura C_m . Na Slici 1.2 (a) prikazan je 2-faktor Klajnovne boce $KB_4^{(1)}(3)$ koji se sastoji od dve konture, a na Slici 1.2 (b) 2-faktor torusa $TG_4^{(0)}(3)$ koji se sastoji od samo jedne konture, stoga je to Hamiltonova kontura datog grafa.

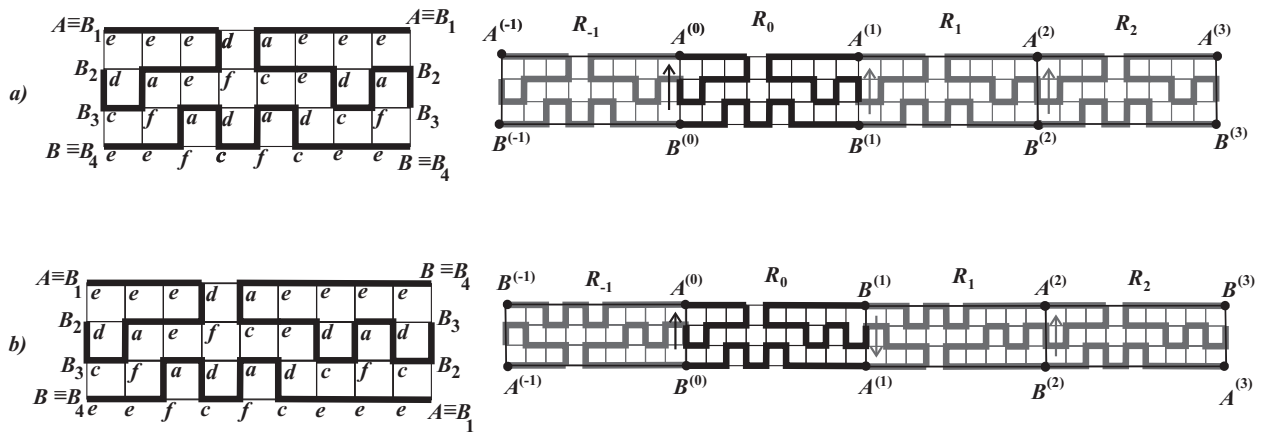


Slika 1.2: (a) Klajnova boca $KB_4^{(1)}(3)$ sa jednim 2-faktorom; (b) Torus $TG_4^{(0)}(3)$ sa Hamiltonovom konturom.

Da bismo mogli da se krećemo „nalevo”, „nadesno”, „nagore”, „nadole” po konturama 2-faktora nekog od posmatranih mrežnih grafova, razvijamo površi ovih grafova u ravan na sledeći način:

- Kod $TkC_m(n)$ i $MS_m(n)$ prvo presečemo površ posmatranog grafa (sa jednim od njegovih 2-faktora) po duži $[AB]$ (proizvedeći tako čvorove D_i , $i=1,2,\dots,m$ na desnoj strani, ponovo). Sada odvijemo mrežu i prikažemo je u ravni (videti Sliku 1.3 a), b)).
- U slučaju $TG_m^{(p)}(n)$ i $KB_m^{(p)}(n)$ najpre presecamo grane koje povezuju čvorove poslednje i prve kolone. Dalje je kod svih cikličnih mrežnih grafova (uključujući i tanki cilindar $TnC_m(n)$) ista tehnika - sečemo grane koje povezuju čvorove poslednje i prve vrste cilindra i razvijamo površ grafa u ravan (videti Sliku 1.4).

Pravougaona slika (sa zadebljanim granama 2-faktora) nastala na gore opisani način naziva se *Flat-reprezentacija (FR)*.



Slika 1.3: (a) FR grafa $TkC_4(8)$ sa jednim 2-faktorom koji je unija dve konture i pridruženi Rolling imprints; (b) FR grafa $MS_4(9)$ sa jednom Hamiltonovom konturom i pridruženi Rolling imprints

Definicija 1.3 Rolling imprints (RI)³ definišemo kao beskonačan mrežni graf dobijen povezivanjem kopija FR-slike tako što:

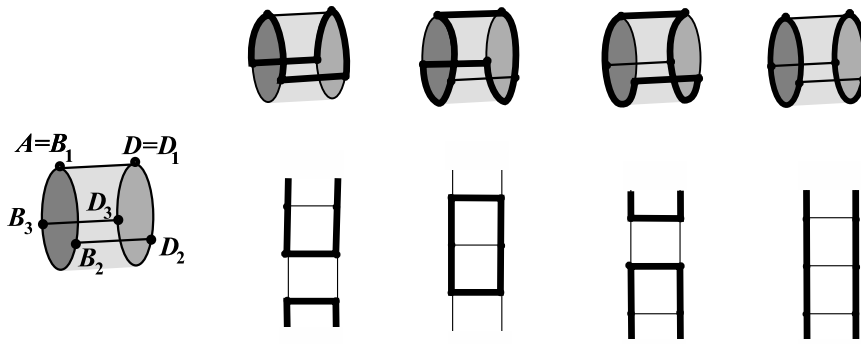
³Ovaj termin je prvi put uveden u [10]

Za $TkC_m(n)$ koristimo translaciju njegove FR-slike tako da odgovarajući čvorovi B_i i D_i ($1 \leq i \leq m$) susednih kopija budu slepljeni čime dobijamo beskonačnu traku širine m (Slika 1.3 a).

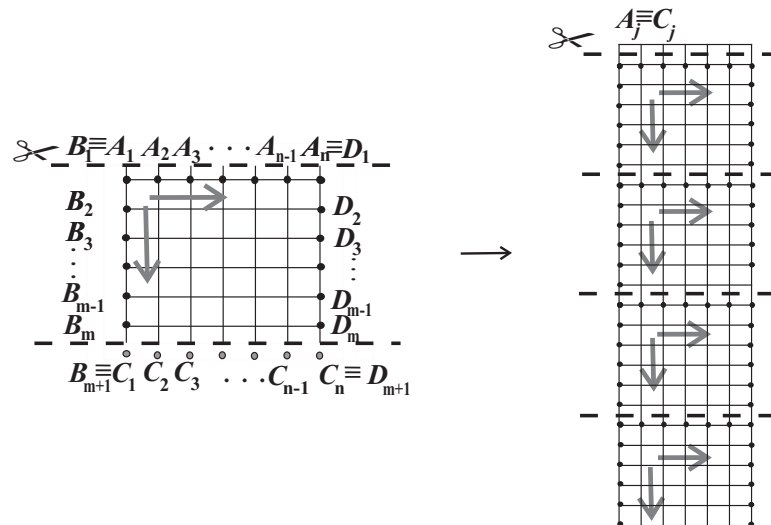
Za $MS_m(n)$ koristimo translaciju i kliznu simetriju njegove FR-slike tako da čvorovi B_i i D_{m-i+1} ($1 \leq i \leq m$) susednih kopija budu slepljeni čime dobijamo beskonačnu traku širine m (Slika 1.3 b).

Za $TnC_m(n)$ koristimo translaciju njegove FR-slike tako da za sve $j = 1, 2, \dots, n$ odgovarajući čvorovi A_j i C_j (videti Sliku 1.5) susednih kopija budu slepljeni čime dobijamo beskonačnu traku širine n .

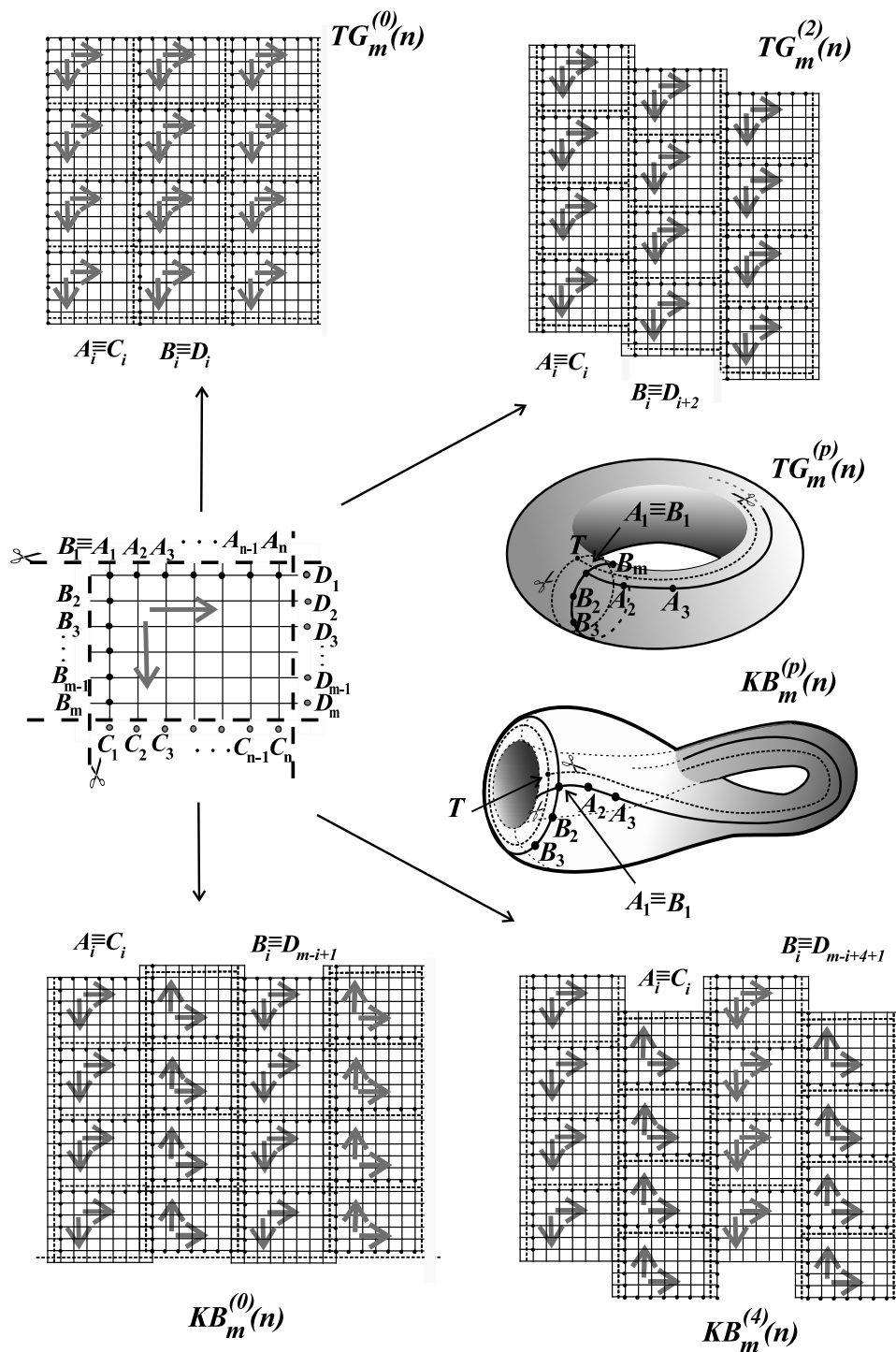
Za $TG_m^{(p)}(n)$ ($KB_m^{(p)}(n)$) nakon formiranja beskonačne trake kao kod $TnC_m(n)$ pravimo kopije ove trake i koristeći translaciju (kliznu simetriju) njima popločavamo ravan vodeći računa da se za sve $i = 1, 2, \dots, m$ čvorovi B_i i D_{i+p} (B_i i $D_{m+p+1-i}$) susednih kopija poklope (Slika 1.6).



Slika 1.4: Graf $TnC_3(2) = C_3 \times P_2$ sa svim mogućim 2-faktorima i njihove Flat-reprezentacije.



Slika 1.5: Tehnika pravljenja rolling imprints-a koristeći FR za $TnC_m(n)$.

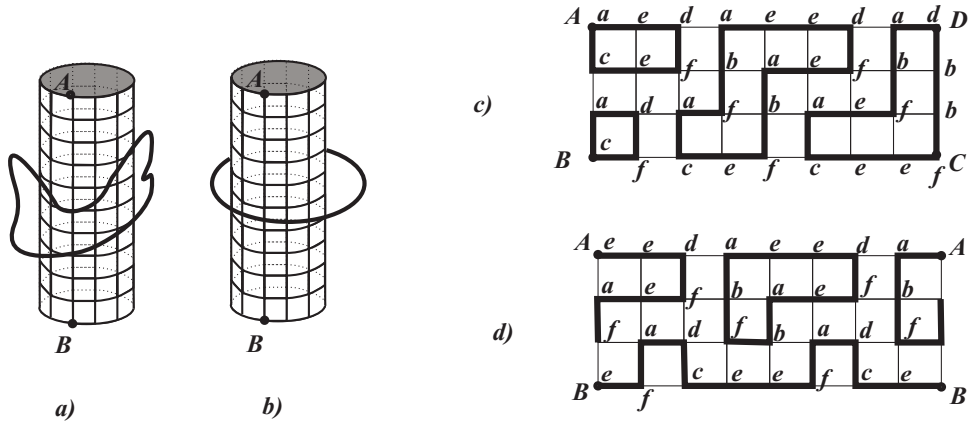


Slika 1.6: Tehnika pravljenja rolling imprints-a koristeći FR za $TG_m^{(p)}(n)$ i $KB_m^{(p)}(n)$.

1.2 Tipovi kontura

Na cilindričnoj površi razlikujemo dva tipa kontura posmatranih kao zatvorene Žordanove krive: **kontraktibilne** (skraćeno **c-tipa** ili **c-kontura**) i **nekontraktibilne** (skraćeno **nc-tipa** ili **nc-kontura**),

videti Sliku 1.7 a) i b). Prva deli beskonačnu cilindričnu površ na jednu ograničenu i jednu neograničenu oblast, dok nekontraktibilna kontura deli cilindričnu površ na dve neograničene oblasti (slobodnijim rečima, konturu c-tipa zamišljamo kao zalepljenu na cilindričnoj površi, dok konturu nc-tipa tretiramo kao narukvicu stavljenju oko ruke). U slučaju grafa $RG_m(n)$, jasno, sve su konture kontraktibilne (Slika 1.7 c). Na Slici 1.7 d) je prikazan 2-faktor koji se sastoji od dve kontraktibilne i jedne nekontraktibilne konture. Primetimo da za svaku kontraktibilnu konturu bilo kog posmatranog grafa postoji beskonačan broj odgovarajućih podudarnih kontura (poligona) na beskonačnom mrežnom grafu RI.



Slika 1.7: Tipovi kontura u $TkC_m(n)$: a) kontraktibilna; b) nekontraktibilna; c) četiri (kontraktibilne) konture u $RG_4(9)$; d) jedna nekontraktibilna i dve kontraktibilne konture u $TkC_4(8)$

Tipove i osobine nekontraktibilnih kontura ispitujemo samo kod linearnih mrežnih grafova uslovljeno potrebom u dokazima teorema o egzistenciji 2-faktora. Naime, egzistencija 2-faktora kod cikličnih grafova se obezbeđuje iz egzistencije 2-faktora kod linearnih mrežnih grafova. Primetimo da je graf $TnC_m(n)$ izomorfan sa $TkC_n(m)$, a za druge dve klase cikličnih mrežnih grafova važi da se uklanjanjem horizontalnih grana koje spajaju čvorove dve susedne kolone dobija tanki cilindar sa istim brojem čvorova.

Nekontraktibilnoj konturi na $TkC_m(n)$ u RI-u odgovara jedinstveni neograničen put koji preseca duži $[A^{(k)}B^{(k)}]$ ($k \in \mathbb{Z}$) neparan broj puta. U slučaju $MS_m(n)$, iz topoloških razloga, postoje tri moguća tipa kontura: c-tip i dva nc-tipa prikazana na Slici 1.8 a) i b). Prva od ovih nc-kontura se naziva *duga nekontraktibilna* kontura (skraćeno *duga nc-tipa*). Njena slika na RI je unija dva beskonačna puta koja presecaju duž $[A^{(k)}B^{(k)}]$ paran broj puta. Na primeru sa Slike 1.8 c) prikazana duga nc-kontura preseca ovu duž 6 puta. Druga nc-kontura se naziva *kratka nekontraktibilna* kontura (skraćeno *kratka nc-tip*). Njena slika na RI-u je jedinstveni beskonačni put koji preseca duž $[A^{(k)}B^{(k)}]$ neparan broj puta. Primera radi, na Slici 1.3 b) Hamiltonova kontura je kratka nc-kontura i preseca ovu duž 3 puta. Neki 2-faktor na $MS_m(n)$ može imati najviše jednu kratku nc-tipa konturu (iz topoloških razloga). Dodatno, duga nc-kontura deli površ od $MS_m(n)$ na dva dela, dok je kratka ne deli uopšte (površ ostaje u komadu). Na Slici 1.8 d) prikazan je 2-faktor koji je unija jedne c-konture, dve duge nc-konture i jedne kratke nc-konture.

Za proizvoljnu konturu C nekog 2-faktora jednog od posmatranih mrežnih grafova sledećom definicijom uvodimo pojam Bazne figure kao deo slike na RI-u pridružene toj konturi i koji dodatno orijentišemo. Sve to radimo po slučajevima u zavisnosti od klase mrežnog grafa i tipa posmatrane konture.

Definicija 1.4

- Konturu C (kontraktibilnu) na $RG_m(n)$ orijentišemo u smeru kazaljke na satu i zovemo je **bazna figura**.
- Ako kontraktibilna kontura C na $TkC_m(n)$ ili $MS_m(n)$ ne preseca segment $[AB]$ tada orijentišemo odgovarajuću konturu na rolling imprints-u koja potpuno leži u pravougoniku $R_0 \setminus [A^{(1)}B^{(1)}]$ u smeru kazaljke na satu i nazivamo je **bazna figura**. U suprotnom, neka je B_i ($1 \leq i \leq m$) čvor iz preseka $C \cap [AB]$ sa minimalnim indeksom i . **Bazna figura** je odgovarajuća kontura na rolling imprints-u koja sadrži čvor $B_i^{(0)}$ i koju orijentišemo u smeru kazaljke na satu.
- Neka je za nekontraktibilnu konturu C na $TkC_m(n)$ (ili kratku c -konturu na $MS_m(n)$), B_i ($1 \leq i \leq m$) čvor iz preseka $C \cap [AB]$ sa minimalnim indeksom i ($1 \leq i \leq m$). Orijetišemo deo (ograničen put) slike konture C na rolling imprints-u (jedinstvenog neograničenog puta) od $B_i^{(0)}$ do $D_i^{(0)} \equiv B_i^{(1)}$ ($D_i^{(0)} \equiv B_{m-i+1}^{(1)}$ kod $MS_m(n)$) u tom smeru, tj. od $B_i^{(0)}$ do $D_i^{(0)}$ i zovemo ga **bazna figura**.
- Neka je sada B_i ($1 \leq i \leq m$) čvor segmenta $[AB]$ sa minimalnim indeksom i ($1 \leq i \leq m$) koji pripada dugoj nekontraktibilnoj konturi C na $MS_m(n)$. **Bazna figura** je deo neograničenog puta (na RI) pridruženog konturi koji sadrži čvor $B_i^{(0)}$ i koji je ograničen čvorovima $B_i^{(0)}$ i $D_{m-i+1}^{(1)} \equiv B_i^{(2)}$, a orijentisan u smeru od $B_i^{(0)}$ do $D_{m-i+1}^{(1)}$.

Na ovaj način smo uspostavili bijekciju između skupa svih grana unije baznih figura za posmatrani 2-faktor i skupa svih njegovih grana. Grane baznih figura gledane kao orijentisane na rolling imprints-u mogu biti posmatrane kao jedinični vektori četiri moguća orijentisana pravca ($\uparrow, \downarrow, \rightarrow$ i $\leftarrow$). Neka su $\#_C(\uparrow), \#_C(\downarrow), \#_C(\rightarrow)$ i $\#_C(\leftarrow)$ oznake za broj grana odgovarajućeg orijentisanog pravca koje pređemo krećući se baznom figurom konture C .

Stav 1.1 [28]

Ako je C c -kontura (za sva tri grafa $RG_m(n)$, $TkC_m(n)$ i $MS_m(n)$), tada je

$$\#_C(\uparrow) = \#_C(\downarrow) \text{ i } \#_C(\rightarrow) = \#_C(\leftarrow). \quad (1.1)$$

Ako je C nc -kontura u $TkC_m(n)$, tada je

$$\#_C(\uparrow) = \#_C(\downarrow) \text{ i } |\#_C(\rightarrow) - \#_C(\leftarrow)| = n. \quad (1.2)$$

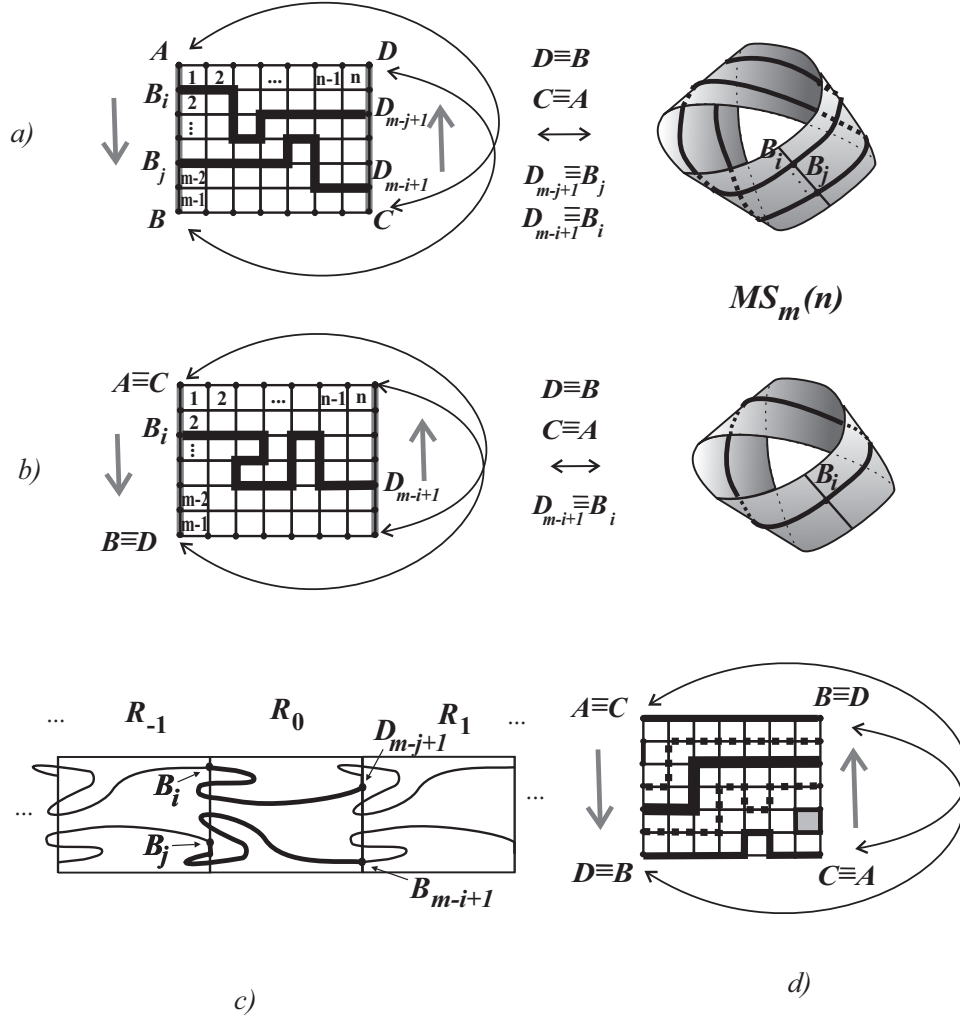
Ako je C kratka nc -kontura u $MS_m(n)$, tada je

$$|\#_C(\uparrow) - \#_C(\downarrow)| = |m + 1 - 2i| \text{ i } |\#_C(\rightarrow) - \#_C(\leftarrow)| = n. \quad (1.3)$$

Ako je C duga nc -kontura u $MS_m(n)$, tada je

$$\#_C(\uparrow) = \#_C(\downarrow) \text{ i } |\#_C(\rightarrow) - \#_C(\leftarrow)| = 2n. \quad (1.4)$$

Dokaz. Direktno. $\square$



Slika 1.8: Tipovi kontura na Mebijusovoj traci $MS_m(n)$: a) duga kontura nc-tipa; b) kratka kontura nc-tipa; c) duga kontura nc-tipa može preseći duž $[AB]$ više od 2 puta; d) primer 2-faktora sa jednom kratkom i dve duge nc-konture i jednom kontraktibilnom konturom.

1.3 Egzistencija 2-faktora na linearnim mrežnim grafovima

Označimo ukupan broj 2-faktora u $RG_m(n)$, $TkC_m(n)$ i $MS_m(n)$ sa $f_m^{RG}(n)$, $f_m^{TkC}(n)$ i $f_m^{MS}(n)$, redom. Ukupan broj 2-faktora u $TkC_m(n)$ koji sadrže neparan (paran) broj nekontraktibilnih kontura označićemo sa $f_{1,m}^{TkC}(n)$ ($f_{0,m}^{TkC}(n)$). Slično, neka oznaka $f_{1,m}^{MS}(n)$ ($f_{0,m}^{MS}(n)$) predstavlja ukupan broj 2-faktora u $MS_m(n)$ koji sadrže (ne sadrže) kratku nc-konturu. Stoga, imamo da je

$$f_m^{TkC}(n) = f_{1,m}^{TkC}(n) + f_{0,m}^{TkC}(n) \quad \text{i} \quad f_m^{MS}(n) = f_{1,m}^{MS}(n) + f_{0,m}^{MS}(n).$$

Teorema 1.1 [28]

a) $f_m^{RG}(n) = 0$ akko su i i n ($m, n \geq 2$) neparni;

b) $f_{0,m}^{TkC}(n) = 0$ akko su i i n ($m, n \geq 1$) neparni;

c) $f_{1,m}^{TkC}(n) = 0$ akko je m parno i n neparno ($m, n \geq 1$);

d) $f_{0,m}^{MS}(n) = 0$ akko su m i n ($m, n \geq 1$) neparni;

e) $f_{1,m}^{MS}(n) = 0$ akko su m i n ($m, n \geq 1$) parni.

Dokaz. Dokažimo najpre da su uslovi vezani za parnost brojeva m i n dovoljni da ne postoji 2-faktor odgovarajućeg tipa. Pretpostavimo suprotno:

a) Ako postoji 2-faktor u $RG_m(n)$, tada koristeći (1.1) zaključujemo da broj njegovih grana mora biti paran. Posledično, nije moguće da su oba broja m i n neparni.

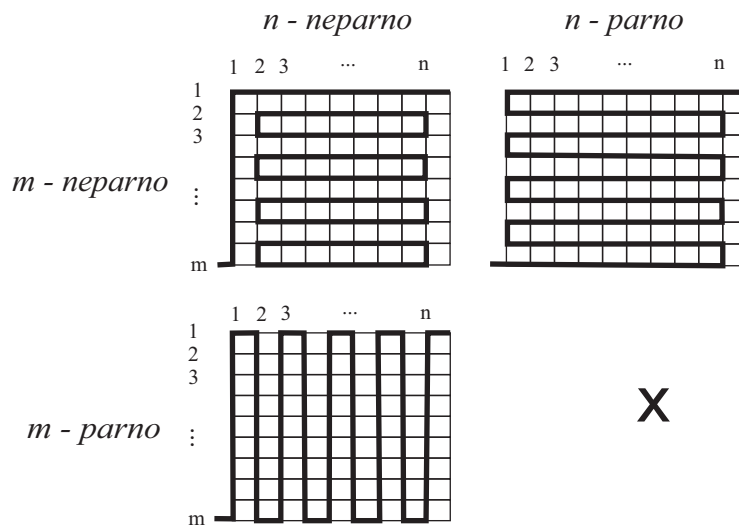
b) Ako postoji 2-faktor u $TkC_m(n)$ sa parnim brojem nc-kontura, tada koristeći (1.1) i (1.2) dolazimo do istog zaključka kao u slučaju pod a).

c) Ako postoji 2-faktor u $TkC_m(n)$ sa neparnim brojem nc-kontura, tada koristeći (1.1) i (1.2) zaključujemo da broj njegovih grana $m \cdot n$ mora biti iste parnosti kao n . To dalje implicira da je m neparno ili n parno što je negacija datog uslova.

d) Pretpostavimo da postoji 2-faktor u $MS_m(n)$ bez kratke nc-konture. Korišćenjem (1.1) i (1.4) dolazimo do istih zaključaka kao u slučajevima a) i b).

e) Ako postoji 2-faktor u $MS_m(n)$ sa kratkom nc-konturom, tada iz (1.1), (1.3) i (1.4) imamo da broj grana $(m \cdot n)$ mora biti iste parnosti kao $m + n + 1$. To implicira da vrednosti m i n mogu biti sve kombinacije osim da su m i n oba parna broja.

Da su uslovi vezani za parnost brojeva m i n potrebni da ne postoji 2-faktor odgovarajućeg tipa dokazujemo takođe indirektno, tj. konstrukcijom 2-faktora tog tipa za svaku od tri preostale kombinacije za m i n . Na primer, po jedan 2-faktor za svaku od tri dozvoljene kombinacije u slučaju pod e) (2-faktori sa kratkom nc-konturom u $MS_m(n)$) je prikazan na Slici 1.9. Ostatak dokaza se slično izvodi. $\square$

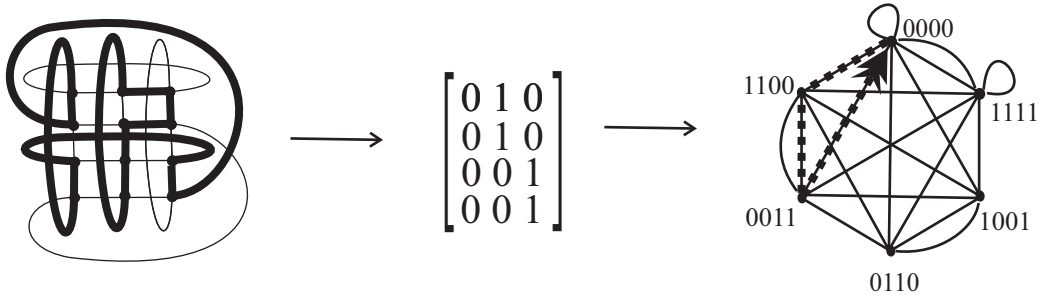


Slika 1.9: Egzistencija 2-faktora u $MS_m(n)$ sa kratkom nc-konturom.

1.4 Transfer matrični metod i generativne funkcije

Ukratko opišimo tzv. *transfer matrični metod* koji je ključan za naš rad. Korišćenjem specifičnosti polaznih mrežnih grafova širine m sa $m \cdot n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) čvorova kod prebrojavanja objekata kao što su Hamiltonove konture, 2-faktori, savršeno ili skoro savršeno sparivanje pristupamo najpre karakterizaciji traženih objekata. Obično uspostavljamo bijekciju između skupa svih traženih objekata i skupa svih matrica čije kolone možemo tretirati kao reči nad nekom konačnom azbukom (videti Sliku 1.3 i Sliku 1.7 c i d) sa određenim osobinama. Osobine tih matrica formata $m \times n$ treba da budu formulisane tako da se mogu odrediti: skup svih mogućih kolona tih matrica $\mathcal{V}$ (kao skup reči), podskupovi svih mogućih prvih kolona $\mathcal{F}$ i svih mogućih poslednjih kolona $\mathcal{L}$, kao i jasna pravila na osnovu kojih možemo utvrditi koja reč može doći neposredno posle koje kao sledeća kolona u matrici i za koju reč $l \in \mathcal{L}$ može da se neka reč $f \in \mathcal{F}$ pojavi u istoj matrici. U sledećem koraku se formira pomoćni digraf $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, gde za dva čvora u i w iz $\mathcal{V}$ važi $u \rightarrow w$ ako i samo ako se reč w može pojaviti kao sledeća kolona za reč u u matrici pridruženoj nekom od objekata koji se prebrojavaju. Matrica susedstva $\mathcal{T}$ tog digrafa se naziva *matrica prelaza* ili *transfer matrica*. Na ovaj način se uspostavlja bijekcija između svih posmatranih objekata (npr. 2-faktora) na datoj mreži i svih orijentisanih šetnji sa strogo utvrđenim pravilima koja proističu iz navedenih osobina pridruženih matrica.

Primer 1 Za 2-faktor Klajnove boce $KB_4^{(1)}(3)$ koji je prikazan na Slici 1.10, pridružena kodna matrica je formata 4×3 , sadrži tri kolone koje su reči dužine 4 i njoj odgovara orijentisana šetnja dužine 2 koja počinje u čvoru $f_1 f_2 f_3 f_4 \equiv 0000 \in \mathcal{F} \equiv \mathcal{V}$, a završava u čvoru $l_1 l_2 l_3 l_4 \equiv 0011 \in \mathcal{L} \equiv \mathcal{V}$ pri čemu je reč $f_1 f_4 f_3 f_2 \equiv 0000 \in \mathcal{V}$ neposredni sledbenik čvora $l_1 l_2 l_3 l_4$ u digrafu $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ (na slici je prikazana samo komponenta relevantna za ovaj 2-faktor).



Slika 1.10: 2-faktor Klajnove boce $KB_4^{(1)}(3)$ i njemu pridružena orijentisana šetnja.

Ovom bijekcijom je polazni problem preformulisan na problem prebrojavanja orijentisanih šetnji određene, fiksne dužine $(n - 1)$ sa dodatnim zahtevima po pitanju polaznog i završnog čvora. Tehnika je dalje standardna [21], koristi Kejli-Hamiltonovu teoremu [42] i postupak dobijanja generativnih funkcija pomoću rekurentnih formula i početnih uslova. Naime, opšte je poznato da element $t_{ij}^{(k)}$ i -te vrste i j -te kolone ($1 \leq i, j \leq |\mathcal{V}|$) k -tog stepena ($k \in \mathbb{N}$) matrice susedstva $\mathcal{T} = [t_{ij}]$ proizvoljnog digrafa $\mathcal{D}$ predstavlja broj svih orijentisanih šetnji dužine k koje polaze iz čvora pridruženog i -toj vrsti (i koloni), a završavaju u čvoru koji je pridružen j -toj koloni (i vrsti), kao i da karakteristična jednačina matrice $\mathcal{T}$ određuje rekurentnu formulu koju zadovoljavaju članovi niza $\{t_{ij}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ za proizvoljno, fiksno i i j . Takođe je dobro poznato da je generativna funkcija ovakvih nizova racionalna funkcija i da

se rekurentna formula (linearna homogena diferencna jednačina sa konstantnim koeficijentima) može “pročitati” u imeniocu ove funkcije. Korišćenjem generativnih funkcija i njihovim uprošćavanjem, mogu se dobiti i rekurentne formule nižeg reda od onih koje se dobijaju direktnom primenom Kejli-Hamiltonove teoreme, tj. iz karakteristične jednačine, što umnogome olakšava traženi posao i sam zapis.

Na ovaj način dobijeni numerički podaci u vidu konkretnih (početnih) vrednosti traženih nizova, kao i same generativne funkcije (čijim se razvojem u red dobijaju svi članovi niza) često omogućavaju da se uoče neke neočekivane osobine traženih nizova.

Primer 2 *Sličnost između asimptotskog ponašanja broja skoro-savršenih sparivanja na cilindrima $C_m \times P_n$ i pravougaonim mrežama $P_m \times P_n$ primetio je Kong u [59]. Perepechko je nedavno proširio ovaj rezultat [50] otkrivajući da su, ako fiksiramo upražnjeno mesto, brojevi skoro-savršenih sparivanja i savršenih sparivanja na cilindru sa fiksnim neparnim m rešenja iste rekurentne formule. Perepechko je našao generativne funkcije za $m \leq 13$ i to mu je omogućilo da postavi sledeću teoremu kao hipotezu [70]: **Za proizvoljnu neparnu vrednost m , imenilac generativne funkcije $G_m^N(z)$ za ukupan broj skoro-savršenih sparivanja na grafu $C_m \times P_{2n+1}$ je jednak kvadratu imenioca generativne funkcije $G_m^P(z)$ za broj savršenih sparivanja na grafu $C_m \times P_{2n}$.***

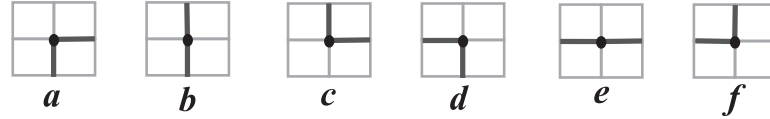
Ovu teoremu smo mi dokazali u radu [26] koristeći transfer matrični metod. Naime, za grafove $TnC_m(2n)$ i $TnC_m(2n+1)$ (m - neparan broj) uvodi se na određen način za posmatrani 1-faktor (u slučaju prvog grafa) ili za posmatrano skoro savršeno sparivanje gde je upražnjeno mesto na rubu cilindra (u slučaju drugog grafa) kodiranje čvorova posmatranog mrežnog grafa oznakama iz skupa $\{L, M, R\}$. Zatim se formira pomoćni (transfer) digraf $\mathcal{D}_m$ čiji su čvorovi reči dužine m nad azbukom $\{L, M, R\}$. Uočavanjem specifičnosti tog digrafa, kao i njemu pridruženog, redukovano (nastao sažimanjem određenih čvorova) transfer digrafa $\overline{\mathcal{D}}_m$ najpre je dokazano da je transfer matrica za $\overline{\mathcal{D}}_m$ blokovska matrica $\begin{bmatrix} 0 & A_m \\ B_m & 0 \end{bmatrix}$, gde su matrice A_m i B_m kvadratne matrice istog reda $|V(\overline{\mathcal{D}}_m)|/2$ i da se ovi različiti nizovi po n (koji prebrojavaju različite objekte za isto fiksno m) pokoravaju diferencnoj jednačini koja je određena karakterističnom jednačinom matrice $B_m \cdot A_m$, za jedan problem, odnosno, karakterističnom jednačinom matrice $A_m \cdot B_m$, za drugi problem. Kako za proizvoljne kvadratne matrice A i B važi da matrice AB i BA imaju isti karakteristični polinom (Teorema 1.3.22 u [42]), uz primenu osobina množenja generativnih funkcija dobija se kompletan dokaz Perepechkove hipoteze.

Određivanje karakterizacija za 2-faktore putem matrica formata $m \times n$ (tzv. kodnih matrica) je nešto jednostavnije nego u slučaju Hamiltonovih kontura, ali nije trivijano (težina zavisi od izbora polazne mreže). Implementacijom algoritama formiranih na osnovu tvrđenja koja će biti dokazana u narednim poglavljima (vezana za karakterizacije posmatranih objekata, tj. 2-faktora) dobijena je čitava baza podataka (videti Dodatak) čijom analizom su uočene veze između nizova kojima se bavi ova disertacija. Neke od uočenih osobina traženih nizova ovde dokazujemo.

Takve baze su veoma korisne za dalja istraživanja i za potvrdu budućih rezultata. Primera radi, ruska grupa informatičara na čelu sa prof. Perepechkom poseduje već jednu takvu bazu podataka [47] vezanu za problem prebrojavanja Hamiltonovih kontura u mrežnim grafovima, a koja je omogućila i proveru rezultata dobijenih drugim algoritmima u već pomenutim radovima srpske grupe naučnika.

1.5 Kodne matrice

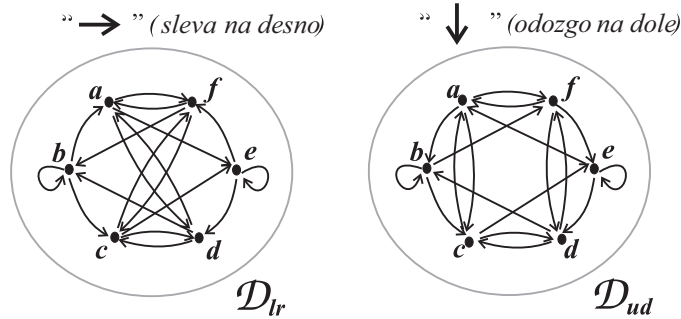
Posmatrajmo neki od gore definisanih grafova G sa jednim njegovim 2-faktorom. Svaki čvor $v \in V(G)$ je incidentan sa tačno dve grane posmatranog 2-faktora. Svi mogući rasporedi ove dve grane oko v su prikazani na Slici 1.11 (zadebljane grane pripadaju 2-faktoru). Svakom rasporedu (situaciji) pridružujemo jedno slovo koje nazivamo *kodno slovo*.



Slika 1.11: Mogući rasporedi (situacije) grana 2-faktora oko čvora sa pridruženim kodnim slovima.

Definicija 1.5 [28, 30] Za dati 2-faktor linearnog ili cikličnog grafa G širine m i sa $m \cdot n$ čvorova ($m, n \in \mathbb{N}$), **kodna matrica** $[\alpha_{i,j}]_{m \times n}$ je matrica reda $m \times n$ sa elementima iz skupa $\{a, b, c, d, e, f\}$, gde je $\alpha_{i,j}$ kodno slovo i -tog čvora u j -toj koloni grafa G .

Ako znamo kodno slovo nekog čvora, tada kodno slovo njegovog susednog čvora ne može biti bilo koje slovo iz skupa $\{a, b, c, d, e, f\}$, nego zavisi od toga da li su ta dva čvora susedi u istoj vrsti ili istoj koloni i koji sledi posle kojeg. Ta susednost je određena digrafovima $\mathcal{D}_{lr}$ (za čvorove iz iste vrste) i $\mathcal{D}_{ud}$ (za čvorove iz iste kolone), oba prikazana na Slici 1.12.



Slika 1.12: Digrafovi $\mathcal{D}_{ud}$ i $\mathcal{D}_{lr}$.

Čitajući odozgo na dole slova kolone kodne matrice, dobijamo reč dužine m nad azbukom $\{a, b, c, d, e, f\}$, koju nazivamo *alfa reč*. Kada je G ciklični mrežni graf ove reči posmatramo kao ciklične i slovo $\alpha_{m+1,j} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{1,j}$ smatramo da sledi nakon slova $\alpha_{m,j}$ (susedna su).

Za svako kodno slovo α , sa $\bar{\alpha}$ (α') označavamo kodno slovo situacije sa Slike 1.11 koja se dobija primenom osne simetrije na situaciju od α sa horizontalnom (vertikalnom) osom kao osom simetrije. Stoga je $\bar{a} \stackrel{\text{def}}{=} c, \bar{b} \stackrel{\text{def}}{=} b, \bar{c} \stackrel{\text{def}}{=} a, \bar{d} \stackrel{\text{def}}{=} f, \bar{e} \stackrel{\text{def}}{=} e, \bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} d$ i $a' \stackrel{\text{def}}{=} d, b' \stackrel{\text{def}}{=} b, c' \stackrel{\text{def}}{=} f, d' \stackrel{\text{def}}{=} a, e' \stackrel{\text{def}}{=} e, f' \stackrel{\text{def}}{=} c$.

Definicija 1.6 **Linearna (ciklična) alfa reč** je reč (ciklična reč) $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ dužine m nad azbukom $\{a, b, c, d, e, f\}$ za koju važi $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$ u digrafu $\mathcal{D}_{ud}$ za sve $1 \leq i \leq m-1$ (za sve $1 \leq i \leq m$), pri čemu kod linearnih još važi $\alpha_1 \in \{a, d, e\}$ i $\alpha_m \in \{c, f, e\}$. **Horizontalna konverzija** alfa reči $v = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ je alfa reč $\bar{v} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\alpha}_m \bar{\alpha}_{m-1} \dots \bar{\alpha}_1$ dok je njena **vertikalna konverzija** alfa-reč $v' \stackrel{\text{def}}{=} \alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_m$. Za cikličnu alfa reč $\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m$, cikličnu reč $\rho(\alpha) \equiv \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m \alpha_1$ nazivamo **rotacija** od α .

Valjanost definicije horizontalne i vertikalne konverzije sledi iz specifičnosti digrafa $\mathcal{D}_{ud}$ za koji važi $x \rightarrow y \Leftrightarrow x' \rightarrow y' \Leftrightarrow \bar{y} \rightarrow \bar{x}$ za sve $x, y \in V(\mathcal{D}_{ud})$. Takođe, za proizvoljnu alfa reč α važi $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, $(\alpha')' = \alpha$, $\rho^p(\alpha) \equiv \alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\dots\alpha_m\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p$ ($1 \leq p \leq m-1$) i $\rho^0(\alpha) \equiv \alpha$. Primetimo da $\rho^p(\bar{\alpha}) = \bar{\rho^{m-p}(\alpha)}$ za $p = 0, 1, \dots, m-1$.

Primer 3 Za Hamiltonovu konturu prikazanu na Slici 1.2 (a), kolone kodne matrice (čitane sleva na desno) su reči *bfd b*, *cabb* i *d f a c*. Na Slici 1.2 (b) kolone su *bfd b*, *cabb* i *f e a b*.

Teorema 1.2 (Karakterizacija 2-faktora) [28, 30]

Za dati 2-faktor mrežnog grafa G širine m ($m \in \mathbb{N}$) kodna matrica $[\alpha_{i,j}]_{m \times n}$ ima sledeće osobine:

1. Uslovi kolone:

Za svako fiksno j ($1 \leq j \leq n$),

- (a) ako je G linearan (ciklični) mrežni graf, tada uređeni parovi $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j})$ moraju biti grane u digrafu $\mathcal{D}_{ud}$ za $1 \leq i \leq m-1$ ($1 \leq i \leq m$).
- (b) ako je G linearni mrežni graf, tada $\alpha_{1,j} \in \{a, d, e\}$ i $\alpha_{m,j} \in \{c, e, f\}$.

2. Uslov susednosti kolona:

Za svako fiksno j ($1 \leq j \leq n-1$), uređeni parovi $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1})$ moraju biti grane u digrafu $\mathcal{D}_{lr}$ za $1 \leq i \leq m$.

3. Uslovi prve i poslednje kolone:

- (a) Ako je $G = RG_m(n)$ ili $G = TnC_m(n)$, tada se alfa reč prve kolone sastoji od slova iz skupa $\{a, b, c\}$, a poslednje kolone od slova iz skupa $\{b, d, f\}$.
- (b) Ako je $G = TkC_m(n)$, tada uređeni parovi $(\alpha_{i,n}, \alpha_{i,1})$, gde je $1 \leq i \leq m$, moraju biti grane u digrafu $\mathcal{D}_{lr}$.
- (c) Ako je $G = MS_m(n)$, tada uređeni parovi $(\bar{\alpha}_{i,n}, \alpha_{m-i+1,1})$, gde je $1 \leq i \leq m$, moraju biti grane u digrafu $\mathcal{D}_{lr}$.
- (d) Ako je $G = TG_m^{(p)}(n)$, tada uređeni parovi $(\alpha_{i+p,n}, \alpha_{i,1})$, gde je $1 \leq i \leq m$, moraju biti grane u digrafu $\mathcal{D}_{lr}$.
- (e) Ako je $G = KB_m^{(p)}(n)$, tada uređeni parovi $(\alpha_{m+p+1-i,n}, \bar{\alpha}_{i,1})$, gde je $1 \leq i \leq m$, moraju biti grane u digrafu $\mathcal{D}_{lr}$.

Važi i obrnuto, za svaku matricu $[\alpha_{i,j}]_{m \times n}$ sa elementima iz skupa $\{a, b, c, d, e, f\}$ koja zadovoljava uslove 1–3 postoji jedinstveni 2-faktor posmatranog mrežnog grafa G .

Dokaz. Navedene osobine se dokazuju neposrednom proverom svih mogućih rasporeda grana 2-faktora kod susednih čvorova posmatranog mrežnog grafa (njihove kompatibilnosti) kao i proverom svih mogućih rasporeda grana uslovljeno ograničenjima koje nameće struktura posmatranog grafa G . Obrnuto, kodna slova i mogućnost njihovog kontakta koji je izražen pomoću digrafova $\mathcal{D}_{ud}$ i $\mathcal{D}_{lr}$

osigurava nam da podgraf grafa G određen matricom $[\alpha_{i,j}]_{m \times n}$ predstavlja pokrivaјуći 2-regularni podgraf od G , drugim rečima, 2-faktor. $\square$

Ovo tvrđenje omogućava da prebrojavanje kodnih matrica (2-faktora) posmatranog mrežnog grafa G za fiksno m ($m \in \mathbb{N}$) svedemo na prebrojavanje nekih orijentisanih šetnji u jednom pomoćnom digrafu. Kada je G linearni mrežni graf, ovaj digraf označavamo sa $\mathcal{D}_{L,m} = (V(\mathcal{D}_{L,m}), E(\mathcal{D}_{L,m}))$, a u slučaju kada je G ciklični sa $\mathcal{D}_{C,m} = (V(\mathcal{D}_{C,m}), E(\mathcal{D}_{C,m}))$ (ove digrafove preciznije uvodimo u narednim poglavljima). Skup čvorova $V(\mathcal{D}_{L,m})$ ($V(\mathcal{D}_{C,m})$) se sastoji od svih mogućih linearnih (cikličnih) alfa reči, dok za neka dva čvora v i u važi da $v \rightarrow u$ akko čvor v može da bude prethodna kolona za čvor u u kodnoj matrici $[\alpha_{i,j}]_{m \times n}$ nekog 2-faktora posmatranog mrežnog grafa.

Primer 4 Grafovi sa Slike 1.2 (a) i (b) su $KB_4^{(1)}(3)$ i $TG_4^{(0)}(3)$ i imaju isti transfer digraf $\mathcal{D}_{C,4}$. U njemu, prvom 2-faktoru odgovara usmerena šetnja dužine dva: $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \equiv bfdb \rightarrow cabb \rightarrow dfac \equiv \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, gde za početni i završni čvor važi $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 = dfac \rightarrow \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4\bar{\alpha}_3\bar{\alpha}_2 = bbfd$. Drugom 2-faktoru odgovara zatvorena usmerena šetnja dužine tri: $bfdb \rightarrow cabb \rightarrow feab \rightarrow bfdb$.

Primetimo da je $\mathcal{D}_{L,m}$ poddigraf od $\mathcal{D}_{C,m}$, gde alfa reči iz $V(\mathcal{D}_{L,m})$ posmatramo kao ciklične u $V(\mathcal{D}_{C,m})$.

Svakoј alfa reči pridružujemo dve binarne reči zamenjujući svako njeno slovo cifrom 1 ili 0 u zavisnosti da li horizontalne grane incidentne sa čvorom koji je pridružen tom slovu na Slici 1.11 su zadebljane (pripadaju 2-faktoru) ili ne.

Definicija 1.7 [28, 30] **Outlet (inlet) reč** alfa reči $\alpha \equiv \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$ je binarna reč $o(\alpha) \equiv o_1o_2 \dots o_m$ ($i(\alpha) \equiv i_1i_2 \dots i_m$), za koju važi

$$o_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ako } \alpha_j \in \{b, d, f\} \\ 1, & \text{ako } \alpha_j \in \{a, c, e\} \end{cases} \quad i \quad i_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ako } \alpha_j \in \{a, b, c\} \\ 1, & \text{ako } \alpha_j \in \{d, e, f\} \end{cases}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Za binarnu reč $v \equiv b_1b_2 \dots b_{m-1}b_m \in \{0, 1\}^m$ uzimamo da je

$$\bar{v} \stackrel{\text{def}}{=} b_mb_{m-1} \dots b_2b_1 \quad i \quad \rho(v) \stackrel{\text{def}}{=} b_2 \dots b_{m-1}b_mb_1.$$

Primer 5 Za 2-faktor od $KB_4^{(1)}(3)$ prikazan na Slici 1.2 (a) outlet reči za prve tri kolone su 0^4 , 1100 i 0011, redom. Slično, za Hamiltonovu konturu grafa $TG_4^{(0)}(3)$ sa Slike 1.2 (b) outlet reči su 0^4 , 1100 i 0110.

Stav 1.2 (Osobine vertikalne konverzije)

Za proizvoljna dva čvora v i w u digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ (ili $\mathcal{D}_{C,m}$) vertikalna konverzija ima osobine:

$$v \rightarrow v' \tag{1.5}$$

$$\text{Ako } v \rightarrow w, \quad \text{tada } w' \rightarrow v'. \tag{1.6}$$

Dokaz. Sledi direktno koristeći osobine osne simetrije. $\square$

Iz definicije vertikalne konverzije imamo da za svaki čvor $v \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ važi $(v')' = v$.

Primer 6 Parovi vertikalne konverzije za $\mathcal{D}_{L,3}$ su: abf i dbc , edf i eac , dfe i ace , abc i dbf , afe i dce , edc i ea ; dok primenom vertikalne konverzije na čvor $eee \in V(\mathcal{D}_{L,3})$ dobijamo isti taj čvor (videti Sliku 2.13).

Stav 1.3 (Osobine horizontalne konverzije)

Za proizvoljna dva čvora x i y digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ (ili $\mathcal{D}_{C,m}$) važi

$$o(\bar{x}) = \overline{o(x)}; \quad (1.7)$$

$$\text{Ako je } o(x) = o(y), \text{ tada je } o(\bar{x}) = o(\bar{y}). \quad (1.8)$$

Dokaz. Sledi direktno koristeći osobine osne simetrije. $\square$

Linearni mrežni grafovi

Prebrojavanje pokrivaćih unija kontura u linearnim mrežnim grafovima: $RG_m(n)$, $TkC_m(n)$ i $MS_m(n)$ tema je rada [28], dok se strukturom njihovog zajedničkog transfer digrafa (za fiksno m) bavi rad [29]. Rezultati ovih radova su predstavljeni u narednih pet poglavlja. U poglavlju 2.6 je dat pregled rada [32].

2.1 Prebrojavanje 2-faktora linearnih mrežnih grafova

Za svaki prirodan broj m kreiramo digraf $\mathcal{D}_{L,m} \stackrel{\text{def}}{=} (V(\mathcal{D}_{L,m}), E(\mathcal{D}_{L,m}))$ (zajednički za sve linearne mrežne grafove) na sledeći način:

- Skup čvorova $V(\mathcal{D}_{L,m})$ se sastoji od svih mogućih linearnih alfa reči dužine m ;
- Luk povezuje čvor $v = v_1v_2 \dots v_m$ sa čvorom $u = u_1u_2 \dots u_m$, tj. $(v, u) \in E(\mathcal{D}_{L,m})$ ili $v \rightarrow u$ akko su uređeni parovi (v_i, u_i) grane u digrafu $\mathcal{D}_{lr}$, za sve $1 \leq i \leq m$ (čvorovi v i u zadovoljavaju *Uslov susednosti kolona* iz Teoreme 1.2).

Podskupove skupa $V(\mathcal{D}_{L,m})$ koji se sastoje od svih mogućih prvih (poslednjih) kolona kodne matrice za 2-faktore grafa $RG_m(n)$ označavamo sa $\mathcal{F}_{L,m}$ ($\mathcal{L}_{L,m}$). Na osnovu *Uslova prve i poslednje kolone* (a) i *Uslova kolone* Teoreme 1.2, dobijamo da je u grafu $RG_m(n)$ prva kolona kodne matrice $[\alpha_{i,j}]_{m \times n}$ linearna alfa reč iz $\{a, b, c\}^m$ sa $\alpha_{1,1} = a$ i $\alpha_{m,1} = c$, dok je poslednja kolona linearna alfa reč iz $\{b, d, f\}^m$ sa $\alpha_{1,n} = d$ i $\alpha_{m,n} = f$.

Lema 2.1 *Kardinalnost skupova $\mathcal{F}_{L,m}$ i $\mathcal{L}_{L,m}$ ($m \in \mathbb{N}$) je jednaka $(m-1)$ -om članu Fibonačijevog niza F_{m-1} (definisanog sa $F_0 = 0, F_1 = 1$ i $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, za sve $k \geq 2$).*

Dokaz.

Kardinalni broj skupa $\mathcal{F}_{L,m}$ jednak je broju svih orijentisanih šetnji dužine $m-1$ koje počinju u čvoru a , a završavaju u čvoru c u poddigrafu digrafa $\mathcal{D}_{ud}$ indukovanom skupom $\{a, b, c\}$. Primitimo da je karakteristični polinom matrice susedstva tog poddigrafa jednak $\lambda(\lambda^2 - \lambda - 1)$, tj. traženi niz $|\mathcal{F}_{L,m}|$ ($m \in \mathbb{N}$) se pokorava istoj rekurentnoj relaciji kao i Fibonačijev niz. Kako je $|\mathcal{F}_{L,1}| = 0 = F_0$ i $|\mathcal{F}_{L,2}| = 1 = F_1$ ($\mathcal{F}_{L,2} = \{ac\}$, $|\mathcal{F}_{L,3}| = 1 = F_2$ jer $\mathcal{F}_{L,3} = \{abc\}$), indukcijom zaključujemo tvrđenje leme. Dokaz za kardinalnost skupa $\mathcal{L}_{L,m}$ se analogno izvodi. $\square$

Neka je $\mathcal{P} = [p_{ij}]$ kvadratna binarna matrica reda $|V(\mathcal{D}_{L,m})|$ kod koje je $p_{i,j} = 1$ akko se i -ti i j -ti čvorovi digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ mogu dobiti jedan od drugog horizontalnom konverzijom; u suprotnom $p_{i,j} = 0$. Primitimo da je matrica $\mathcal{P}$ simetrična. Sledeća teorema je osnova za prebrojavanje 2-faktora linearnih mrežnih grafova.

Lema 2.2 Ako $f_m^G(n)$ ($m \geq 2$) predstavlja broj 2-faktora linearnog mrežnog grafa G sa $m \cdot n$ čvorova i širine m , tada

$$f_m^G(n) = \begin{cases} \sum_{\substack{v_i \in \mathcal{F}_{L,m} \\ v_j \in \mathcal{L}_{L,m}}} a_{i,j}^{(n-1)} = \sum_{v_i \in \mathcal{F}_{L,m}} a_{i,i}^{(n)} = a_{1,2}^{(n+1)}, & \text{ako je } G = RG \\ \\ tr(\mathcal{T}_{L,m}^n) = \sum_{v_i \in V(\mathcal{D}_{L,m})} a_{i,i}^{(n)}, & \text{ako je } G = TkC \\ \\ tr(\mathcal{P} \cdot \mathcal{T}_{L,m}^n), & \text{ako je } G = MS, \end{cases}$$

gde je $\mathcal{T}_{L,m} = [a_{ij}]$ matrica susedstva digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ (transfer matrica), a čvorovi $v_1, v_2 \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ su reči $db^{m-2}f$ i $ab^{m-2}c$, redom.

Dokaz.

Kako se problem prebrojavanja 2-faktora u linearnom mrežnom grafu G sa $m \cdot n$ čvorova i širine m svodi na prebrojavanje svih mogućih njima pridruženih kodnih matrica, to na osnovu Teoreme 1.2 dobijamo da traženi broj $f_m^G(n)$ predstavlja broj svih orijentisanih šetnji dužine $n - 1$ u digrafu $\mathcal{D}_{L,m}$ čiji početni i krajnji čvorovi zadovoljavaju Uslove prve i poslednje kolone iz te teoreme.

U slučaju $G = RG_m(n)$ taj broj je jednak sumi svih elemenata na poziciji (i, j) u matrici koja se dobija stepenovanjem matrice $\mathcal{T}_{L,m}$ na $(n - 1)$ -vi stepen gde i -ti čvor pripada skupu $\mathcal{F}_{L,m}$ a j -ti skupu $\mathcal{L}_{L,m}$. Primetimo da se skup $\mathcal{F}_{L,m}$ sastoji od svih direktnih sledbenika bilo kog čvora iz $\mathcal{L}_{L,m}$ (uključujući i čvor $db^{m-2}f$), a skup $\mathcal{L}_{L,m}$ od svih direktnih prethodnika bilo kog čvora iz $\mathcal{F}_{L,m}$ (uključujući i čvor $ab^{m-2}c$). Odavde dalje sledi da se traženi broj može tretirati kao broj svih zatvorenih orijentisanih šetnji dužine n u digrafu $\mathcal{D}_{L,m}$ sa početnim čvorom iz skupa $\mathcal{F}_{L,m}$ ili broj svih orijentisanih šetnji dužine $n + 1$ sa početnim čvorom $db^{m-2}f$ i krajnjim $ab^{m-2}c$.

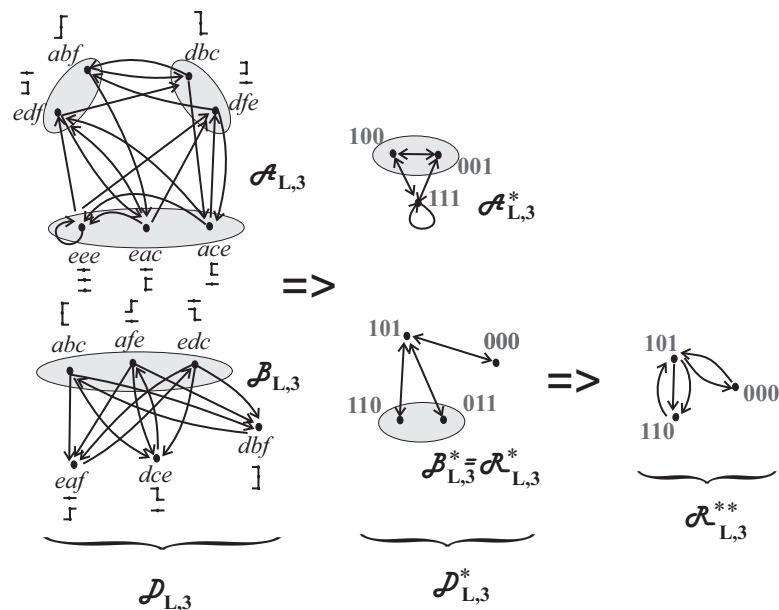
Vezano za slučaj $G = TkC_m(n)$, podsetimo se da element $a_{i,i}^{(n)}$ na poziciji (i, i) u matrici dobijenoj stepenovanjem matrice $\mathcal{T}_{L,m}$ na n -ti stepen predstavlja broj svih zatvorenih orijentisanih šetnji dužine n koje počinju (i završavaju) u i -tom čvoru, što na osnovu Uslova prve i poslednje kolone Teoreme 1.2 pod b) daje vrednost $f_m^{TkC}(n)$.

U slučaju $G = MS_m(n)$, uslov prve i poslednje kolone iste teoreme, ali pod c) nameće da svaka orijentisana šetnja u $\mathcal{D}_{L,m}$ dužine $n - 1$ čiji je završni čvor neposredni prethodnik od čvora dobijenog horizontalnom konverzijom početnog čvora učestvuje u izgradnji broja $f_m^{TkC}(n)$, stoga je traženi broj jednak tragu matrice $\mathcal{P} \cdot \mathcal{T}_{L,m}^n$. $\square$

Lema 2.3 Broj čvorova digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ iznosi $|V(\mathcal{D}_{L,m})| = \frac{1}{2}(3^m + (-1)^m)$.

Dokaz. Svaki čvor digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ je linearna alfa reč dužine m . Kako je za svaku alfa reč w reč w' takođe alfa reč i važi $w \rightarrow w'$, kao i $w' \rightarrow w$, zaključujemo da se w pojavljuje kao kolona kodne matrice jednog od 2-faktora grafa $TkC_m(2)$. Odavde sledi da je i svaka linearna alfa reč čvor digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$, te je broj svih linearnih alfa reči dužine m , u oznaci c_m ($m \in \mathbb{N}$), jednak broju $|V(\mathcal{D}_{L,m})|$.

Broj c_m je jednak broju svih orijentisanih šetnji dužine $m - 1$ u digrafu $\mathcal{D}_{ud}$ koje počinju u čvoru iz skupa $\{a, d, e\}$ i završavaju u čvoru iz skupa $\{c, e, f\}$ (Uslov kolone Teoreme 1.2). Karakteristični polinom matrice susedstva digrafa $\mathcal{D}_{ud}$ je $P(\lambda) = \lambda^4(1 + \lambda)(\lambda - 3)$. Stoga traženi niz c_m ($m \in \mathbb{N}$) zadovoljava diferencnu jednačinu $c_m = 2c_{m-1} + 3c_{m-2}$, sa početnim uslovima $c_1 = 1$ (reč e), $c_2 = 5$ (reči ac, bd, ee, dc i af). Koristeći standardni postupak za rešavanje linearnih homogenih diferencnih jednačina sa konstantnim koeficijentima dobijamo $|V(\mathcal{D}_{L,m})| = c_m = \frac{(-1)^m + 3^m}{2}$. $\square$



Slika 2.13: Digrafovi $\mathcal{D}_{L,3}$, $\mathcal{D}_{L,3}^*$ i $\mathcal{R}_{L,3}^{**}$ za $P_3 \times C_n$.

Lema 2.4 Digraf $\mathcal{D}_{L,m}$ za $m \geq 2$ je nepovezan. Svaka njegova komponenta je jako povezan digraf.

Dokaz. Neka $v \rightarrow w$, gde su $v, w \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ i $w \equiv \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$. Primetimo da je broj jedinica u outlet reči $o(v)$ za v jednak broju jedinica u inlet reči $i(w)$ za w . Zatim, suma jedinica u $i(w)$ i u $o(w)$ uvećana za broj zadebljanih vertikalnih linija u situacijama sa Slike 1.11 svakog od slova $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ je jednaka $2m$. Uzimajući u obzir da je broj uračunatih vertikalnih linija paran (svaka vertikalna grana 2-faktora je uračunata dva puta za svaki svoj čvor po jednom) zaključujemo da je broj jedinica u outlet reči $o(v)$ iste parnosti kao broj jedinica u outlet reči $o(w)$. Odavde sledi da dva čvora digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ čiji su brojevi jedinica u njihovim outlet rečima različite parnosti ne mogu pripadati istoj komponenti od $\mathcal{D}_{L,m}$. Za $m \geq 2$, uvek postoje takva dva čvora (npr. reči $ab^{m-2}c$ i $ab^{m-2}f$) što ima za posledicu da je digraf $\mathcal{D}_{L,m}$ nepovezan.

Za dokaz drugog dela tvrđenja, posmatrajmo dva proizvoljna čvora w i u iz iste komponente i dokažimo da postoji orijentisana šetnja od w do u . Kako su ova dva čvora povezana nekom (ne obavezno orijentisanom) šetnjom $w_0 w_1 \dots w_{k-1} w_k$, gde je $w \equiv w_0$ i $u \equiv w_k$, to za postizanje orijentisane šetnje od čvora w do čvora u , dovoljno je svaku granu koja povezuje w_i i w_{i+1} ($0 \leq i \leq k-1$) koja nije orijentisana tako da $w_i \rightarrow w_{i+1}$ (već važi $w_{i+1} \rightarrow w_i$), zamenimo sa orijentisanom šetnjom $w_i \rightarrow w'_i \rightarrow w'_{i+1} \rightarrow w_i$ čija egzistencija je posledica primene Stava 1.2. Ovim zaključujemo da su sve komponente jako povezani digrafovi. $\square$

Neka je $\mathcal{D}_{L,m} = \mathcal{A}_{L,m} \cup \mathcal{B}_{L,m}$, $m \geq 2$ gde je $\mathcal{A}_{L,m}$ komponenta digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ koja sadrži čvor e^m (sa outlet rečju $11 \dots 1$) - jedini čvor sa petljom ($\mathcal{B}_{L,m}$ je unija preostalih komponenti).

Sa $\mathcal{R}_{L,m}$ ćemo označiti komponentu digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ koja sadrži čvor $db^{m-2}f$ ($m \geq 2$) (sa outlet rečju $00 \dots 0$). Čvorovi ove komponente su sve moguće kolone kodne matrice grafa $RG_m(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Da li će se alfa reč $db^{m-2}f$ naći u komponenti $\mathcal{A}_{L,m}$ zavisi od parnosti broja m .

Lema 2.5 $\mathcal{A}_{L,m} \equiv \mathcal{R}_{L,m}$ akko je m parno.

Dokaz. Za $m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) čvorovi e^m i $db^{m-2}f$ su u istoj komponenti jer $e^m \rightarrow (df)^k \rightarrow ab^{m-2}c \rightarrow db^{m-2}f$, dakle $\mathcal{A}_{L,m} \equiv \mathcal{R}_{L,m}$. Kada je m neparno, outlet reči čvorova iz $V(\mathcal{A}_{L,m})$ imaju neparan, a outlet reči čvorova iz $V(\mathcal{R}_{L,m})$ paran broj jedinica, pa je $\mathcal{A}_{L,m} \neq \mathcal{R}_{L,m}$. $\square$

U cilju redukovanja transfer matrice $\mathcal{T}_{L,m}$ sve čvorove iz $V(\mathcal{D}_{L,m})$ koji imaju istu outlet reč zamenjujemo sa samo jednim čvorom, označenim njihovom zajedničkom outlet rečju (primetimo da dva čvora sa istom outlet rečju imaju isti skup sledbenika). Sve grane iz $E(\mathcal{D}_{L,m})$ koje počinju u ovim sažetim čvorovima, a završavaju u istom čvoru zamenjuju se jednom granom. Na ovaj način se dobija digraf $\mathcal{D}_{L,m}^*$ koji zovemo **2-faktor transfer digraf** za linearne mrežne grafove širine m . Njegovu matricu susedstva (transfer matricu) označavamo sa $\mathcal{T}_{L,m}^*$. Na primer, na Slici 2.13 čvorovi $abc, afe, edc \in V(\mathcal{D}_{L,3})$ sa zajedničkom outlet rečju 101 su sažeti u jedan čvor $101 \in V(\mathcal{D}_{L,3}^*)$ (dvosmerna strelica predstavlja dve različite grane, po jedna za svaki smer).

Primetimo da dva čvora iz $V(\mathcal{D}_{L,m})$ sa istom outlet rečju ne mogu imati istog prethodnika. Ovo implicira da ne postoje višestruke grane u $\mathcal{D}_{L,m}^*$, tj. elementi matrice $\mathcal{T}_{L,m}^*$ su iz skupa $\{0, 1\}$.

Teorema 2.3 Matrica susedstva $\mathcal{T}_{L,m}^*$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ je simetrična binarna matrica, tj. $\mathcal{T}_{L,m}^* = (\mathcal{T}_{L,m}^*)^T$.

Dokaz.

Dokazaćemo da važi $v \rightarrow w$ akko $w \rightarrow v$, za bilo koja dva čvora $v, w \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$.

Neka je v direktni prethodnik od w , tj. $v \rightarrow w$. Tada postoje čvorovi $x, y \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ takvi da važi $x \rightarrow y$ gde je $o(x) = v$ i $o(y) = w$. Koristeći osobine vertikalne konverzije (Stav 1.2) dobijamo $y' \rightarrow x'$ i $x \rightarrow x'$ što povlači da je $o(y') = i(x') = o(x)$ (x i y' su sažeti u v). Dalje, koristeći isto tvrđenje dobijamo $y \rightarrow y'$ odakle zaključujemo da $w \rightarrow v$. $\square$

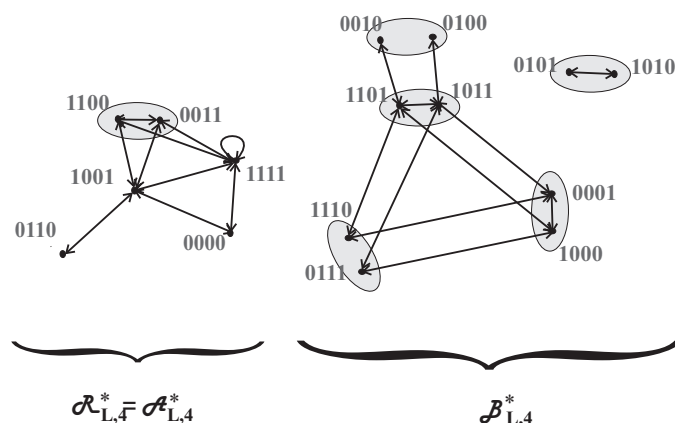
Kako čvorovi iz $V(\mathcal{D}_{L,m})$ koje sažimamo pripadaju istoj komponenti (jer imaju iste sledbenike) Lema 2.4 implicira narednu teoremu.

Teorema 2.4 Digraf $\mathcal{D}_{L,m}^*$ za $m \geq 2$ je nepovezan. Svaka njegova komponenta je strogo povezan digraf.

Komponentu koja sadrži čvor $0^m \equiv 00 \dots 0$ označavamo sa $\mathcal{R}_{L,m}^*$. Komponentu koja sadrži jedinstvenu petlju ($1^m \rightarrow 1^m$) označavamo sa $\mathcal{A}_{L,m}^*$, a uniju preostalih komponenti sa $\mathcal{B}_{L,m}^*$. Digrafovi $\mathcal{D}_{L,m}^*$ za $m = 4$ i $m = 5$ su prikazani na Slikama 2.14 i 2.15.

Teorema 2.5 Za broj čvorova digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ važi:

$$|V(\mathcal{D}_{L,m}^*)| = \begin{cases} 2^m, & \text{za parno } m \\ 2^m - 1, & \text{za neparno } m \end{cases} \quad (2.9)$$

Slika 2.14: Digraf $\mathcal{D}_{L,4}^*$ za $P_4 \times C_n$

Dokaz. Primitimo prvo da bilo koja reč $x \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ čija outlet reč ima prefiks $(01)^k$ ($1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$) mora imati prefiks $(dc)^k$. Ako je ovaj prefiks dužine $m-1$, tada je m neparno i poslednje slovo mora biti e . Dakle, $010101\dots 010 \notin V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ u slučaju kad je m neparno.

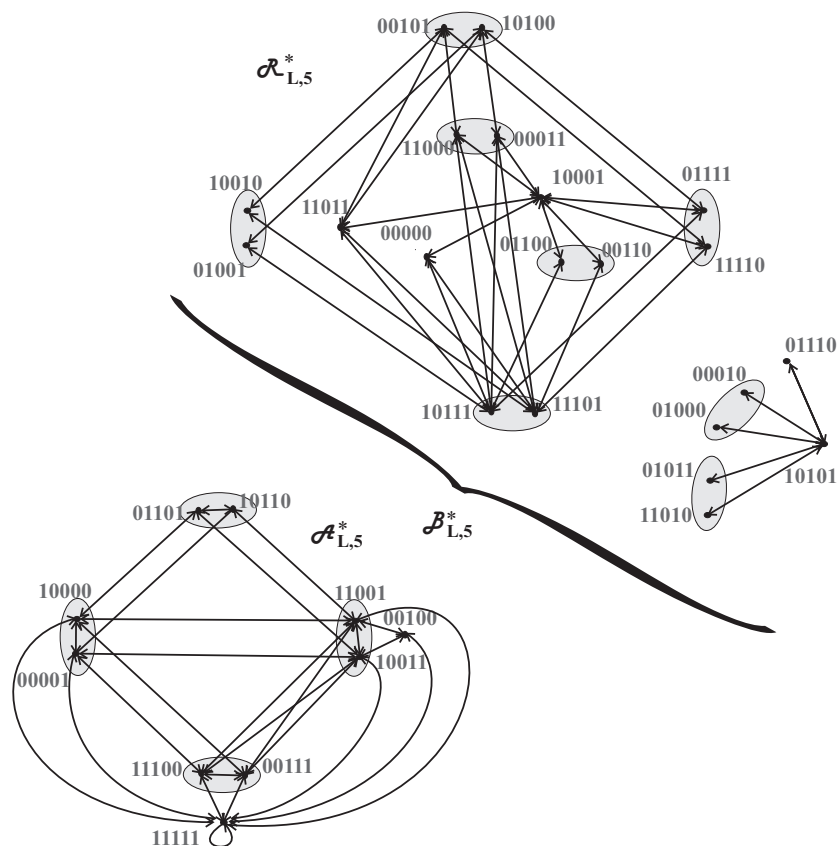
Dokažimo sada da za proizvoljnu binarnu reč v dužine m (i za parno i za neparno m) a različitu od $010101\dots 010$ postoji bar jedan čvor $x \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ sa osobinom $o(x) = v$. U tu svrhu za zadatu reč v demonstriramo konstrukciju reči x . Neka su k i s maksimalni nenegativni celi brojevi za koje je $(01)^k$ prefiks i $(10)^s$ sufiks od v . Tada je $v \equiv (01)^k w (10)^s$, gde je podreč w različita od 0 , nema prefiks 01 , niti sufiks 10 . Najpre zamenjujemo prefiks $(01)^k$ sa $(dc)^k$, a sufiks $(10)^s$ sa $(af)^s$. Za w imamo dve mogućnosti. Ako je $w \equiv 0^{m-2(k+s)}$ ($m-2(k+s) > 1$), tada se reč $db^{m-2(k+s+1)}f$ može ubaciti umesto w . Druga mogućnost je da reč w sadrži bar jedno slovo 1 . Neka su t i p maksimalni nenegativni celi brojevi za koje je 0^t prefiks i 0^p sufiks od w . Jasno, $t \neq 1$, $p \neq 1$ i $w \equiv 0^t \alpha 0^p$, gde podreč α ima za prvo i poslednje slovo 1 . U slučaju da je $t \geq 2$ ($p \geq 2$), podreč 0^t (0^p) zamenjujemo sa $db^{t-2}f$ ($db^{p-2}f$). Posmatrajmo sada maksimalne nula-podreči od α . Svaku od njih dužine $q \geq 2$ zamenjujemo sa $db^{m-2}f$. Ako je dužina neke od njih $q = 1$, tada podreč 01 zamenjujemo sa dc . Na kraju preostala slova 1 zamenjujemo sa e i dobijamo da je x alfa reč, tj. $x \in \mathcal{D}_{L,m}$. $\square$

Teorema 2.6 Broj grana u $\mathcal{D}_{L,m}^*$ je $|E(\mathcal{D}_{L,m}^*)| = \frac{1}{2}(3^m + (-1)^m)$.

Dokaz. Posmatrajmo sve čvorove iz $V(\mathcal{D}_{L,m})$ sa istom outlet rečju $v \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$. Svi oni imaju različite inlet reči, koje predstavljaju sve moguće prethodnike od v u $\mathcal{D}_{L,m}^*$. Bijekciju između skupova $E(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ i $V(\mathcal{D}_{L,m})$ uvodimo na sledeći način: svakoj grani $w \rightarrow v$ iz $\mathcal{D}_{L,m}^*$ pridružujemo jedinstveni čvor x iz $\mathcal{D}_{L,m}$ za koji je $o(x) = v$ i za koji važi da svi njegovi prethodnici imaju (istu) outlet reč w . Sada, tvđenje teoreme sledi iz Leme 2.3. $\square$

Neka je $\mathcal{P}_m^* = [p_{ij}]$ kvadratna binarna matrica reda $|V(\mathcal{D}_{L,m}^*)|$ čiji je element $p_{i,j} = 1$ akko i -ti i j -ti čvorovi digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ zadovoljavaju $v_i = \bar{v}_j$ (i $v_j = \bar{v}_i$). Matrica $\mathcal{P}_m^*$ je simetrična.

Proces prebrojavanja 2-faktora možemo poboljšati koristeći novu transfer-matricu $\mathcal{T}_{L,m}^*$.

Slika 2.15: Digraf $\mathcal{D}_{L,5}^*$ za $P_5 \times C_n$ **Teorema 2.7**

$$f_m^G(n) = \begin{cases} a_{1,1}^{(n)}, & \text{ako je } G = RG, \\ tr((\mathcal{T}_{L,m}^*)^n) = \sum_{v_i \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)} a_{i,i}^{(n)}, & \text{ako je } G = TkC, \\ tr(\mathcal{P}_m^* \cdot (\mathcal{T}_{L,m}^*)^n), & \text{ako je } G = MS, \end{cases}$$

gde je $\mathcal{T}_{L,m}^* = [a_{ij}]$ matrica susedstva digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$, a čvor $v_1 \equiv 00 \dots 0$.

Dokaz.

Označimo sa $\mathcal{W}_x^y(n)$ broj svih orijentisanih šetnji dužine n u posmatranom digrafu ($\mathcal{D}_{L,m}$ ili $\mathcal{D}_{L,m}^*$) koje počinju u čvoru x , a završavaju u čvoru y .

Element $a_{i,j}^{(n)}$ n -tog stepena matrice $\mathcal{T}_{L,m}^*$ predstavlja broj svih orijentisanih šetnji dužine n u digrafu $\mathcal{D}_{L,m}^*$ koje počinju u $v_i \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$, a završavaju u $v_j \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$, tj. $\mathcal{W}_{v_i}^{v_j}(n)$. Primetimo da za $x_1, x_2 \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ važi:

$$\text{Ako je } o(x_1) = o(x_2), \text{ tada je } \mathcal{W}_{x_1}^y(n) = \mathcal{W}_{x_2}^y(n) \text{ za svako } y \in V(\mathcal{D}_{L,m}). \quad (2.10)$$

Posledično je broj $\mathcal{W}_{v_i}^{v_j}(n)$ jednak broju svih orijentisanih šetnji dužine n u digrafu $\mathcal{D}_{L,m}$ koje počinju u čvoru $x \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ kome je pridružen čvor $v_i \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ ($o(x) = v_i$), a završavaju u čvorovima $y \in V(\mathcal{D}_{L,m})$ kojima je pridružen čvor $v_j \in V(\mathcal{D}_m^*)$ ($o(y) = v_j$), tj.

$$\mathcal{W}_{v_i}^{v_j}(n) = \sum_{\substack{y \in V(\mathcal{D}_{L,m}) \\ o(y) = v_j}} \mathcal{W}_x^y(n), \text{ gde } x \in V(\mathcal{D}_{L,m}) \text{ i } o(x) = v_i. \quad (2.11)$$

Imajući u vidu da je skup prethodnika od $ab^{m-2}c$ skup $\mathcal{L}_{L,m}$, iz Leme 2.2, koristeći (2.11) imamo da

$$f_m^{RG}(n) = \mathcal{W}_{db^{m-2}f}^{ab^{m-2}c}(n+1) = \sum_{y \in \mathcal{L}_{L,m}} \mathcal{W}_{db^{m-2}f}^y(n) = \mathcal{W}_{0^m}^{0^m}(n) = a_{1,1}^{(n)}.$$

Koristeći (2.11), (2.10) i Stav 1.3 imamo

$$\mathcal{W}_{v_i}^{v_i}(n) = \sum_{\substack{x \in V(\mathcal{D}_{L,m}) \\ o(x) = o(x_1) = v_i}} \mathcal{W}_{x_1}^x(n) = \sum_{\substack{x \in V(\mathcal{D}_{L,m}) \\ o(x) = v_i}} \mathcal{W}_x^x(n). \quad (2.12)$$

i

$$\mathcal{W}_{v_i}^{\bar{v}_i}(n) = \sum_{\substack{x \in V(\mathcal{D}_{L,m}) \\ o(x) = o(x_1) = v_i}} \mathcal{W}_{x_1}^{\bar{x}}(n) = \sum_{\substack{x \in V(\mathcal{D}_{L,m}) \\ o(x) = v_i}} \mathcal{W}_x^{\bar{x}}(n). \quad (2.13)$$

Primenjujući ponovo Lemu 2.2 i (2.12) za $TkC_m(n)$ dobijamo

$$f_m^{TkC}(n) = \sum_{x \in V(\mathcal{D}_{L,m})} \mathcal{W}_x^x(n) = \sum_{v_i \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)} \sum_{\substack{x \in V(\mathcal{D}_{L,m}) \\ o(x) = v_i}} \mathcal{W}_x^x(n) = \sum_{v_i \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)} a_{i,i}^{(n)} = \text{tr}((\mathcal{T}_m^*)^n).$$

Kod $MS_m(n)$ primena Leme 2.2 i (2.13) daju

$$f_m^{MS}(n) = \sum_{x \in V(\mathcal{D}_{L,m})} \mathcal{W}_x^{\bar{x}}(n) = \sum_{v_i \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)} \sum_{\substack{x \in V(\mathcal{D}_{L,m}) \\ o(x) = v_i}} \mathcal{W}_x^{\bar{x}}(n) = \sum_{v_i \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)} \mathcal{W}_{v_i}^{\bar{v}_i}(n), \text{ tj.}$$

$$f_m^{MS}(n) = \text{tr}(\mathcal{P}_m^* \cdot (\mathcal{T}_{L,m}^*)^n). \quad \square$$

Teorema 2.8 *Poddigraf od $\mathcal{D}_{L,m}^*$ indukovano skupom čvorova koji imaju neparan broj 0 je bipartitan digraf.*

Dokaz. Imajući u vidu Teoremu 2.3 dovoljno je pokazati da ovaj poddigraf ne sadrži orijentisanu konturu neparne dužine. Pretpostavimo suprotno, neka postoji neparan broj n i orijentisana kontura dužine n u posmatranom poddigrafu. To dalje implicira postojanje 2-faktora u $TkC_m(n)$.

Slučaj 1: m -parno

Svaki čvor razmatrane orijentisane konture posmatran kao binarna reč ima neparan broj jedinica. Ovo povlači da odgovarajući 2-faktor u $TkC_m(n)$ sadrži neparan broj nekontraktibilnih kontura. Koristeći Stav 1.1 zaključujemo da je broj svih grana 2-faktora iste parnosti kao i n , tj. neparan broj. S druge strane, ovaj broj mora biti $m \cdot n$, tj. paran broj. Kontradikcija.

Slučaj 2: m -neparno

Sada posmatrani 2-faktor sadrži paran broj nekontraktibilnih kontura (pridružene binarne reči imaju paran broj jedinica). Primenujući Stav 1.1 ponovo, zaključujemo da je broj svih grana 2-faktora paran broj, dok je $m \cdot n$ neparan, što je kontradikcija. $\square$

Posledica 2.1 *Poddigraf od $\mathcal{D}_{L,m}$ indukovano skupom čvorova čije outlet reči imaju neparan broj nula je bipartitan digraf.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da dva čvora povezana usmerenom granom nemaju istu outlet reč. Pretpostavimo suprotno, da postoje dva čvora v i w tako da $v \rightarrow w$ i $o(v) = o(w)$. Tada, za sledbenika w važi $o(w) = o(v) = i(w)$. Jedini čvor u $\mathcal{D}_{L,m}$ kod koje su inlet i outlet reči jednake je e^m , a on ne pripada posmatranom poddigrafu. Kontradikcija. $\square$

Posledica 2.2 *Kada je m neparno, $\mathcal{R}_{L,m}$ i $\mathcal{R}_{L,m}^*$ su bipartitni digrafovi.*

Dokaz. Direktno sledi iz Teoreme 2.8 i Posledice 2.1 $\square$

Primitimo da kada je m parno, čvor 0^m je i prethodnik i sledbenik od 1^m u $\mathcal{D}_{L,m}^*$ (za primer videti Sliku 2.14).

Teorema 2.9 *Kada je m parno, $\mathcal{R}_{L,m}^* \equiv \mathcal{A}_{L,m}^*$.*

Dokaz. Ovo je direktna posledica Leme 2.5. $\square$

2.2 Dodatna redukcija transfer digrafa za $RG_m(n)$

Dalja redukcija transfer matrice je moguća samo u slučaju $G = RG_m(n)$ koristeći narednu teoremu.

Teorema 2.10 *Ako je $v \in V(\mathcal{R}_{L,m}^*)$, tada je $\bar{v} \in V(\mathcal{R}_{L,m}^*)$.*

Dokaz.

Ako je $v \in V(\mathcal{R}_{L,m}^*)$, tada postoji $x \in V(\mathcal{R}_{L,m})$ za koje je $o(x) = v$. Iz $x \in V(\mathcal{R}_{L,m})$, sledi da postoji prirodan broj $n \geq 1$ za koji je $\mathcal{W}_x^{db^{m-2}f}(n) \neq 0$. Koristeći osobinu osne simetrije, dobijamo da je $\mathcal{W}_{\bar{x}}^{db^{m-2}f}(n) = \mathcal{W}_x^{db^{m-2}f}(n) = \mathcal{W}_x^{db^{m-2}f}(n) \neq 0$, tj. da $\bar{x} \in V(\mathcal{R}_{L,m})$. Kako je $\bar{v} = o(\bar{x})$, zaključujemo da $\bar{v} \in V(\mathcal{R}_{L,m}^*)$. $\square$

Dakle, sada za svako $v \in V(\mathcal{R}_{L,m}^*)$ možemo sažeti čvorove v i $\bar{v}$ u jedan čvor dobijajući tako novi digraf $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$. Prilikom sažimanja čvorova v i $\bar{v}$ zadržavamo usmerene grane koje kreću samo iz jednog od ovih čvorova, a brišemo one koje počinju u drugom.

Primer 7 *Za slučaj $m = 5$, digraf $\mathcal{R}_{L,5}^*$ je bipartitan (videti Sliku 2.15) i ima 6 (neuređenih) parova različitih čvorova $\{v, \bar{v}\}$ (zaokruženi na slici) koji se po parovima sažimaju u jedan.*

Primitimo da se višestruke (duple) grane pojavljuju kada v i $\bar{v}$ imaju zajedničkog prethodnika kao što je to slučaj sa čvorovima 110 i 011 iz $\mathcal{R}_{L,3}^$ (videti Sliku 2.13).*

Teorema 2.11 $f_m^{RG}(n)$ je jednak elementu $a_{1,1}^{(n)}$ n -tog stepena matrice susedstva digrafa $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$, gde je $v_1 \equiv 0^m$.

Dokaz.

Iz simetrije pravougaone mreže zaključujemo da je $\mathcal{W}_v^{0^m}(n) = \mathcal{W}_v^{0^m}(n)$ za bilo koji čvor $v \in V(\mathcal{R}_{L,m}^*)$. Posledično, broj $\mathcal{W}_{0^m}^{0^m}(n)$ ostaje isti u oba digrafa $\mathcal{R}_{L,m}^*$ i $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$. Tvđenje sada sledi direktno iz Teoreme 2.7. $\square$

Na ovaj način za $f_m^{RG}(n)$ dobijamo transfer matrice nižeg reda od onih za digraf $\mathcal{R}_{L,m}^*$ što olakšava dalju kompjutersku obradu podataka. Primetimo da su za neparno m čvorovi v i $\bar{v}$ na parnoj udaljenosti (iste boje), pa $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$ nema petlji. Kada je m parno nove petlje mogu da se pojave. Na primer, za $m = 4$ (videti Sliku 2.14) pojavljuje se još jedna petlja kada se čvorovi 1100 i 0011 sažmu.

Kako su u digrafu $\mathcal{R}_{L,m}^*$ palindromi jedini čvorovi koji nemaju svoj par sa kojim bi se saželi, to za određivanje reda digrafa $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$ potrebno je znati pored reda digrafa $\mathcal{R}_{L,m}^*$ i broj palindroma u digrafu $\mathcal{R}_{L,m}^*$. Stoga nam je od značaja sledeća teorema.

Teorema 2.12 Kada je m parno svi palindromi iz $V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ pripadaju komponenti $\mathcal{R}_{L,m}^* \equiv \mathcal{A}_{L,m}^*$.

Dokaz. Dokazaćemo teoremu primenom stroge indukcije po $k \in \mathbb{N}$ gde je $m = 2k$. Baza indukcije je tačna, $00 \leftrightarrow 11$. Pretpostavimo da tvđenje važi za sve palindrome $w\bar{w}$ dužine manje od $2k$. Posmatrajmo palindrom $v\bar{v} \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$, gde $v\bar{v} \neq 0^m \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$.

Slučaj 1: $v\bar{v} = 1w\bar{w}1$.

Neka je $x\bar{x}$ jedna od alfa-reči iz $V(\mathcal{D}_{L,m-2})$ čija je outlet reč $w\bar{w}$, tj. $o(x\bar{x}) = w\bar{w}$. Tada postoje palindromi $w_j\bar{w}_j \in V(\mathcal{D}_{L,m-2}^*)$ i alfa-reči $x_j\bar{x}_j \in V(\mathcal{D}_{L,m-2})$ sa osobinom $o(x_j\bar{x}_j) = w_j\bar{w}_j$, $1 \leq j \leq t$ ($t \in \mathbb{N}$) takvi da postoje orijentisane šetnje $w\bar{w} \rightarrow w_1\bar{w}_1 \rightarrow w_2\bar{w}_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_t\bar{w}_t$ i $x\bar{x} \rightarrow x_1\bar{x}_1 \rightarrow x_2\bar{x}_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_t\bar{x}_t$ u $\mathcal{D}_{L,m-2}^*$ i $\mathcal{D}_{L,m-2}$, redom, gde je $w_t\bar{w}_t = 0^{m-2}$ (induktivna hipoteza). Sada iz postojanja šetnje $ex\bar{x}e \rightarrow ex_1\bar{x}_1e \rightarrow ex_2\bar{x}_2e \rightarrow \dots \rightarrow ex_t\bar{x}_te \rightarrow db^{2(k-1)}f$ u $\mathcal{D}_{L,m}$ ($x_t\bar{x}_t \in \mathcal{L}_{L,m}$) zaključujemo postojanje šetnje $v\bar{v} = 1w\bar{w}1 \rightarrow 1w_1\bar{w}_11 \rightarrow 1w_2\bar{w}_21 \rightarrow \dots \rightarrow 1w_t\bar{w}_t1 \rightarrow 0^m$ u $\mathcal{R}_{L,m}^*$ (Slika 2.16a).

Slučaj 2: $v\bar{v} = 0^s 1w\bar{w}10^s$, gde je $s \geq 1$ (uključujući mogućnost da je w prazna reč).

Ako w nije prazna reč, tada postoji orijentisana šetnja $w\bar{w} \rightarrow w_1\bar{w}_1 \rightarrow w_2\bar{w}_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_t\bar{w}_t$ i $x\bar{x} \rightarrow x_1\bar{x}_1 \rightarrow x_2\bar{x}_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_t\bar{x}_t$ (obe dužine $t \in \mathbb{N}$) u $\mathcal{D}_{L,2(k-s-1)}^*$ i $\mathcal{D}_{L,2(k-s-1)}$, redom, gde je $o(x\bar{x}) = w\bar{w}$, $o(x_j\bar{x}_j) = w_j\bar{w}_j$, za sve $1 \leq j \leq t$ i $w_t\bar{w}_t = 0^{2(k-s-1)}$ (induktivna hipoteza).

Slučaj 2.1: t je neparno.

Tražena šetnja (dužine $t+1$) u $\mathcal{D}_{L,m}$ je $db^{s-1}cx\bar{x}ab^{s-1}f \rightarrow ab^{s-1}fx_1\bar{x}_1db^{s-1}c \rightarrow db^{s-1}cx_2\bar{x}_2ab^{s-1}f \rightarrow ab^{s-1}fx_3\bar{x}_3db^{s-1}c \rightarrow db^{s-1}cx_4\bar{x}_4ab^{s-1}f \rightarrow \dots \rightarrow ab^{s-1}fx_t\bar{x}_t db^{s-1}c \rightarrow db^{m-2}f$. Iz $db^{m-2}f \in \mathcal{L}_{L,m}$ sledi tvđenje (videti Sliku 2.16b).

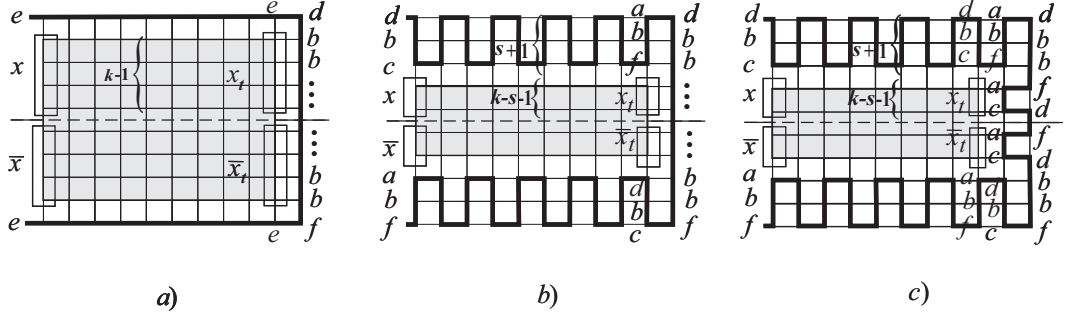
Slučaj 2.2: t je parno.

Tražena šetnja (dužine $t+2$) u $\mathcal{D}_{L,m}$ je $db^{s-1}cx\bar{x}ab^{s-1}f \rightarrow ab^{s-1}fx_1\bar{x}_1db^{s-1}c \rightarrow db^{s-1}cx_2\bar{x}_2ab^{s-1}f \rightarrow ab^{s-1}fx_3\bar{x}_3db^{s-1}c \rightarrow db^{s-1}cx_4\bar{x}_4ab^{s-1}f \rightarrow \dots \rightarrow db^{s-1}cx_t\bar{x}_tab^{s-1}f \rightarrow ab^{s-1}f(ac)^{k-s-1}db^{s-1}c \rightarrow db^s f(df)^{k-s-2}db^s f$. Kako $db^s(df)^{k-s-1}b^s f \in \mathcal{L}_{L,m}$, tvđenje važi (videti Sliku 2.16c).

Slučaj 2.3: $v\bar{v} = 0^{k-1}110^{k-1}$.

Šetnja (dužine 2) $db^{k-2}cab^{k-2}f \rightarrow ab^{k-2}fdb^{k-2}c \rightarrow db^{m-2}f$ u $\mathcal{R}_{L,m}$ implicira postojanje šetnje $0^{k-1}110^{k-1} \rightarrow 10^{m-2}1 \rightarrow 0^m$ u $\mathcal{R}_{L,m}^*$. Posledično, $0^{k-1}110^{k-1} \in \mathcal{R}_{L,m}^*$. $\square$

Primetimo da za slučaj kad je m neparan broj gornje tvđenje više ne važi (npr. za $m = 5$ palindroma imamo u svim komponentama).



Slika 2.16: Konstrukcija orijentisanih šetnji do čvora 0^{2k} u digrafu $\mathcal{D}_{2k}^*$.

2.3 Kompjuterski rezultati

Tehnika izračunavanja generativnih funkcija $\mathcal{F}_m^G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f_m^G(n)x^n$ je dobro poznata [15, 20, 78]. Napisali smo kompjuterske programe za određivanje matrica susedstva digrafova $\mathcal{D}_{L,m}$, $\mathcal{D}_{L,m}^*$, $\mathcal{R}_{L,m}$, $\mathcal{R}_{L,m}^*$ i $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$ (prva dva po komponentama) kao i početnih članova traženih nizova $f_m^G(n)$. Komponente digrafa $\mathcal{B}_{L,m}^*$ su označene oznakama $\mathcal{B}_{L,m}^{*,k}$ ($k=1,2, \dots$) tako da za manje k komponenta ima veći red.

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$ \mathcal{F}_{L,m} = \mathcal{L}_{L,m} $	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$ V(\mathcal{R}_{L,m}) $	3	6	19	60	141	532	1107	4608	8953	$\ll$	$\ll$	$\ll$
$ V(\mathcal{R}_{L,m}^*) $	2	4	6	15	20	56	70	210	252	792	924	3003
$ V(\mathcal{R}_{L,m}^{**}) $	2	3	5	9	14	31	43	110	142	406	494	1519
order	2	1	5	3	13	9	35	25	96	-	-	-

m	14	15	16	17
$ \mathcal{F}_{L,m} = \mathcal{L}_{L,m} $	233	377	610	987
$ V(\mathcal{R}_{L,m}^*) $	3433	$\ll$	$\ll$	$\ll$
$ V(\mathcal{R}_{L,m}^{**}) $	1780	5755	6563	21942

Tabela 2.1: Broj čvorova u $\mathcal{F}_{L,m}$, $\mathcal{L}_{L,m}$, $\mathcal{R}_{L,m}$, $\mathcal{R}_{L,m}^*$ i $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$ i red rekurentne relacije za $RG_m(n)$.

Neke osobine digrafova $\mathcal{D}_{L,m}$, $\mathcal{D}_{L,m}^*$ i $\mathcal{R}_{L,m}^*$, i njima pridruženih nizova $f_m^G(n)$, uočene analizom kompjuterskih podataka za $m \leq 12$ (u slučaju $RG_m(n)$ za $m \leq 17$) su diskutovane i dokazane u prethodnom poglavlju za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$. Numerički podaci su dati u priloženim tabelama, a osobine koje se odnose na strukturu digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$, koje su uočene iz ovih podataka i formulisane u [28] kao hipoteze, a dokazane u [29], dajemo i dokazujemo u poglavlju 2.5. Takođe, uočeno je da se početni članovi niza brojeva $|V(\mathcal{R}_m)|$ za parno $m \leq 10$ poklapaju sa početnim članovima niza A082758 iz OEIS [77].

Naši rezultati za pravougaoni mrežni graf $RG_m(n) \equiv P_m \times P_n$ za $m \leq 7$ potvrđuju ranije dobijene podatke na drugi način (kodiranjem ćelija) [4]. Dobili smo generativne funkcije $\mathcal{F}_m^{RG}(x)$, $\mathcal{F}_m^{Tkc}(x)$

i $\mathcal{F}_m^{MS}(x)$ traženih nizova za $2 \leq m \leq 10$. One su zajedno sa prvih 30 članova nizova $f_m^{RG}(n)$ ($2 \leq m \leq 17$), $f_m^{TkC}(n)$ ($2 \leq m \leq 12$) i $f_m^{MS}(n)$ ($2 \leq m \leq 12$) izložene u Dodatku. Dodajmo još, vezano za generativne funkcija nizova 2-faktora koji su pridruženi komponentama $\mathcal{B}_{L,m}^{*(k)}$, gde je $k \geq 2$, da je uočeno da se imenilac svake od njih sastoji od faktora imenioca generativne funkcije za $\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)}$ ili $\mathcal{A}_m^*$.

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ V(\mathcal{D}_{L,m}) $	5	13	41	121	365	1093	3281	9841	29525	88573	265721
$ V(\mathcal{D}_{L,m}^*) $	4	7	16	31	64	127	256	511	1024	2047	4096
$ V(\mathcal{A}_{L,m}^*) $	2	3	6	10	20	35	70	126	252	462	924
$ V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)}) $	2	4	8	15	30	56	112	210	420	792	1584
$ V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(2)}) $	-	-	2	6	12	28	56	120	240	495	990
$ V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(3)}) $	-	-	-	-	2	8	16	45	90	220	440
$ V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(4)}) $	-	-	-	-	-	-	2	10	20	66	132
$ V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(5)}) $	-	-	-	-	-	-	-	-	2	12	24
$ V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(6)}) $	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
order	4	5	13	19	49	69	178	249	649	-	-

Tabela 2.2: Broj čvorova u $\mathcal{D}_{L,m}$, $\mathcal{D}_{L,m}^*$, komponentama digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ i red rekurentne relacije (isti) i za graf $TkC_m(n)$ i za graf $MS_m(n)$.

2.4 Asimptotsko ponašanje brojeva $f_m^{RG}(n)$, $f_m^{TkC}(n)$ i $f_m^{MS}(n)$

Osobine koje se odnose na asimptotsko ponašanje brojeva 2-faktora $f_m^{RG}(n)$ i $f_m^{TkC}(n)$ (kada $n \rightarrow \infty$) su slične onima koje su se pojavile prilikom proučavanja Hamiltonovih kontura. Navodimo neke.

Pošto je matrica susedstva $\mathcal{T}_{L,m}^*$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ ($m \geq 2$) simetrična (Teorema 2.3), odnosno hermitska, spektar digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ sadrži samo realne brojeve. Svaka od komponenti $\mathcal{D}_{L,m}^*$ je jako povezan digraf (Teorema 2.4) i, prema tome, ima ireducibilnu (nesvodljivu) matricu susedstva [20] (koja je blok u dijagonalnoj blok matrici $\mathcal{T}_{L,m}^*$). Iz Peron-Frobenijusove teoreme [42] karakteristični koreni maksimalnog modula za ove nenegativne i ireducibilne matrice su algebarski prosti karakteristični koreni. Ako skup svih sopstvenih vrednosti maksimalnog modula za nenegativnu i ireducibilnu matricu ima tačno $k \geq 2$ različitih elemenata, oni su jednaki proizvodu k -tog korena od 1 i maksimalnog karakterističnog korena θ [42]. Pošto su svi karakteristični koreni naših razmatranih matrica realni brojevi, za bipartitne digrafove postoje tačno dva prosta karakteristična korena maksimalnog modula (θ i $-\theta$), tj. k mora biti 2.

Neka su $\theta_{L,m}$ (takođe koristimo i oznake θ_m^{TkC} i θ_m^{MS} za isticanje pridruženog mrežnog grafa) i θ_m^{RG} maksimalni karakteristični koreni matrice susedstva digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ i $\mathcal{R}_{L,m}^*$, redom. Kompjuterski podaci za $m \leq 12$ pokazuju da je maksimalni karakteristični koren $\theta_{L,m}$ za $\mathcal{T}_{L,m}^*$ prost i jedinstven karakteristični koren maksimalnog modula. Pored toga, podaci pokazuju da je $\theta_{L,m}$ pridružen komponenti $\mathcal{A}_{L,m}^*$, za sve $m \geq 2$.

Hipoteza 1 Maksimalni karakteristični koren za $\mathcal{A}_{L,m}^*$ je jedinstveni karakteristični koren maksimalnog modula za $\mathcal{D}_{L,m}^*$.

Na osnovu prethodno rečenog (usvajajući gornju hipotezu) i dobijenih numeričkih podataka imamo

$$f_m^{TkC}(n) \sim a_m^{TkC} \theta_{L,m}^n, \text{ gde je } a_m^{TkC} = 1.$$

Na primer,

$$\begin{aligned} f_9^{TkC}(99) &= \mathbf{1750738462181652771338808207772701955030703442028258017318088093361136} \\ &\quad 0786760679564966706639273723674798766385930557092858331879012953635968 \\ &\quad 195685205, \\ f_9^{TkC}(100) &= \mathbf{5503488851650192832857551518533018608271730034860817348840930779798339} \\ &\quad 9866850567422183774919747362024619387408919222429539996042852109168447 \\ &\quad 1910843826, \\ f_{10}^{TkC}(99) &= \mathbf{5472946695895734348165268778293176272799246831355358749477747452490650} \\ &\quad 1214615708064019534391418227552525368357696963283863359292333457421226 \\ &\quad 269199598481596902807547077 \text{ i} \\ f_{10}^{TkC}(100) &= \mathbf{2645316310319933683496095009841718024759437947764204153951092048286901} \\ &\quad 7777259031349223534872931966971355650359749930614841881983326875548074 \\ &\quad 53750119675251682976586688605 \end{aligned}$$

dok

$$\begin{aligned} \theta_9^{99} &= \mathbf{1.75073846218165923653} \dots \cdot 10^{148}, \\ \theta_9^{100} &= \mathbf{5.503355253} \dots \cdot 10^{149}, \\ \theta_{10}^{99} &= \mathbf{5.47294669589622318} \dots \cdot 10^{166}, \text{ i} \\ \theta_{10}^{100} &= \mathbf{2.645121801666474501} \dots \cdot 10^{168}. \end{aligned}$$

Osobina da koeficijent uz maksimalni karakteristični koren bude jednak 1 pojavila se i kod Hamiltonovih kontura za neparno m [10] i [12].

Objašnjenje za činjenicu da je koeficijent a_m^{TkC} jednak 1 leži u Teoremi 2.7 i poznatim tvrđenjima da trag n -tog stepena matrice $\mathcal{T}_{L,m}^*$ je jednak zbiru n -tih stepena svih njenih karakterističnih korena, kao i da eksplicitni izraz za n -ti član niza koji zadovoljava homogenu linearnu diferencnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima i zadatim početnim uslovima ima jedinstvenu reprezentaciju kao linearnu kombinaciju od n standardnih (partikularnih) rešenja koja su pridružena svim njenim karakterističnim korenima.

Za Hamiltonove konture (HC) na $TkC_m(n)$ ustanovljeno je da su kontraktibilne HC brojnije od nekontraktibilnih HC ako i samo ako je m parno [12]. Slično tvrđenje može se formulisati za 2-faktore deleći ih na one sa parnim i one sa neparnim brojem nekontraktibilnih kontura. Primetimo da u slučaju kad je m parno, digraf $\mathcal{A}_{L,m}^*$ određuje 2-faktore u $TkC_m(n)$ sa parnim brojem nc-kontura (međutim ne sve). Za neparno m $\mathcal{A}_{L,m}^*$ određuje 2-faktore sa neparnim brojevima nc-kontura i ova vrsta 2-faktora su tada dominantna prema Hipotezi 1. Preciznije,

$$f_{L,m}^{TkC}(n) \sim \begin{cases} f_{1,m}^{TkC}(n), & \text{za } m \text{ neparno} \\ f_{0,m}^{TkC}(n), & \text{za } m \text{ parno} \end{cases} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Pretpostavljajući da su sve komponente $\mathcal{B}_{L,m}^{*(k)}$ bipartitne (tvrđenje Teoreme 2.13 koju dokazujemo u sledećem poglavlju) dobijamo da za n neparno, jedino 2-faktori dobijeni iz komponente $\mathcal{A}_{L,m}^*$ su

uračunati u broj $f_m^{TkC}(n)$. (Naime, bipartitni digrafovi nemaju orijentisane konture neparne dužine, a 2-faktorima na širokom cilindru smo pridružili upravo orijentisane šetnje dužine n .) Otuda se više cifara poklapaju kod brojeva $f_9^{TkC}(99)$ i θ_9^{99} , ili $f_{10}^{TkC}(99)$ i θ_{10}^{99} , nego kod $f_9^{TkC}(100)$ i θ_9^{100} , ili $f_{10}^{TkC}(100)$ i θ_{10}^{100} .

m	$\theta_m^{TkC} = \theta_m^{MS}$	$a_m^{TkC} = a_m^{MS}$
2	1.6180339887498948482045868344	1
3	2.4142135623730950488016887242	1
4	3.6941816601239106665999753656	1
5	5.6532020378824433814716902315	1
6	8.6709538972300632454385724873	1
7	13.3121782399972542081592050166	1
8	20.4516932294114966231186908391	1
9	31.4344796371815965829996668429	1
10	48.3308526218584373943242746007	1
11	$\approx_{(100)} 74.32697213$	1
12	$\approx_{(50)} 114.326$	1

Tabela 2.3: Približna vrednost od $\theta_{L,m} = \theta_m^{TkC} = \theta_m^{MS}$ i $a_m^{TkC} = a_m^{MS} = 1$ za $1 \leq m \leq 12$, gde $\approx_{(n)}$ označava procenu zasnovanu na prvih n članova niza.

Kod izučavanja kontraktibilnih Hamiltonovih kontura na mrežama $TkC_m(n)$ i $RG_m(n)$ ustanovljeno je da se kod oba grafa pojavljuje isti pozitivni dominantni karakteristični koren kada je m parno [12]. U slučaju 2-faktora ova osobina je očiglednija ako usvojimo Hipotezu 1 i primenimo Teoremu 2.9 (videti Tabelu 2.3 i Tabelu 2.4), tj.

$$f_m^{RG}(n) \sim \begin{cases} a_m^{RG} \theta_{L,m}^n, & \text{za } m \text{ parno} \\ a_m^{RG} (\theta_m^{RG})^n + a_m^{RG} (-\theta_m^{RG})^n, & \text{za } m \text{ neparno} \end{cases} \quad (n \rightarrow +\infty),$$

gde su a_m^{RG} su pozitivni brojevi.

Novina se pojavljuje kod Mebijusove trake $MS_m(n)$. Prema Hipotezi 1 imamo

$$f_m^{MS}(n) \sim a_m^{MS} \theta_{L,m}^n.$$

No, numerički podaci ukazuju da je i koeficijent maksimalnog karakterističnog korena ponovo jedan, tj. $a_m^{MS} = 1$.

Na primer,

$$f_9^{MS}(99) = 17507384621816657017230821469273381935815150867478447123412536854063191553795793184785069123799306157361712365337734920832932311990627148209033567981,$$

$$f_9^{MS}(100) = 550348885165016377693111676371429307642797003218099949784787371690938870015377422853917203788036488969756314516186491518322757272055087029757535019482,$$

m	θ_m^{RG}	a_m^{RG}
2	$(1 + \sqrt{5})/2$	$\sqrt{5}/5$
3	1.73205080756887729352744634151	0.2886751345948128822545743903
4	3.69418166012391066659997536564	0.3118537771565198570113824680
5	4.62518160134423951692596223359	0.2689660737850244855426998625
6	8.67095389723006324543857248731	0.2520573399762828621654010912
7	11.5193830042298614862975296130	0.2420402401081641797612878583
8	20.4516932294114966231186908391	0.2149686611014229925654013297
9	28.0703410924057870863760633239	0.2185598738607493954133759244
10	48.3308526218584373943242746007	0.1885668461094284796839894294
11	$\approx_{(600)} 67.7256340927618460544544369622$	$\approx_{(600)} 0.1987190117694364038206719883$
12	$\approx_{(600)} 114.3265540751374759033150378963$	$\approx_{(600)} 0.1683321933349066394611832136$
13	$\approx_{(200)} 162.5256416517095900095387075181$	$\approx_{(200)} 0.1818325481375590304998965322$
14	$\approx_{(200)} 270.594404874261731$	$\approx_{(200)} 0.152084575433189642$
15	$\approx_{(200)} 388.7591582316368266038304859009$	$\approx_{(200)} 0.1672787181981763741720923489$
16	$\approx_{(200)} 640.690454998007$	$\approx_{(200)} 0.1386133711863155$
17	$\approx_{(100)} 927.945466754283$	$\approx_{(100)} 0.154581709489037$

Tabela 2.4: Približne vrednosti θ_m^{RG} i a_m^{RG} za $2 \leq m \leq 17$, gde $\approx_{(n)}$ označava procenu zasnovanu na prvih n članova niza.

$$f_{10}^{MS}(99) = \underline{54733924135514359040975241372222575565221548357559622053648411725274345587572680168475798796527038604871940909874270974422734365157886590851507415380950441091624785881}, \text{ i}$$

$$f_{10}^{MS}(100) = \underline{2645121801666648913048490842342065467547225492026995244876289719579663872123046577689940070810418615815546951442200623394560299994468519528133438673321151104001586481523}.$$

Ovde, ako pretpostavimo da je Hipoteza 1 tačna, tada u slučaju da je m parno, digraf $\mathcal{A}_{L,m}^*$ određuje većinu 2-faktora bez kratke nc-konture (iako uglavnom nisu svi). Za m -neparno, $\mathcal{A}_{L,m}^*$ određuje 2-faktore koji sadrže kratku nc-konturu i ova vrsta 2-faktora je tada dominantna. Preciznije,

$$f_m^{MS}(n) \sim \begin{cases} f_{1,m}^{MS}(n) & , \text{ ako } m \text{ je neparno} \\ f_{0,m}^{MS}(n) & , \text{ ako } m \text{ je parno} \end{cases} \text{ , kada } n \rightarrow +\infty .$$

Za slučaj kad su i i m i n neparni imamo da su jedino 2-faktori dobijeni iz komponente $\mathcal{A}_{L,m}^*$ (koji sadrže kratku nc-konturu) uračunati u broj $f_m^{MS}(n)$, na šta su numerički podaci upućivali, a što se korišćenjem Teoreme 2.13 i jednostavno dokazuje. (Naime, za m neparno, čvorovi v i $\bar{v}$ bipartitnih komponenti su u istoj klasi te orijentisana šetnja od jednog do drugog čvora ne može biti neparne dužine n .)

Ilustracije radi, primetimo da se veći broj cifara poklapa kod brojeva $f_9^{MS}(99)$ i θ_9^{99} nego što je to slučaj sa $f_9^{MS}(100)$ i θ_9^{100} .

S druge strane, i za slučaj kad su i i m i n parni, jedino 2-faktori dobijeni iz komponente $\mathcal{A}_{L,m}^*$

(bez kratke nc-konture) su uračunati u broj $f_m^{MS}(n)$. (Tada su čvorovi v i $\bar{v}$ bipartitnih komponenti u različitim klasama te orijentisana šetnja od jednog do drugog čvora ne može biti parne dužine n .) Stoga, više cifara se poklapa kod brojeva $f_{10}^{MS}(100)$ i θ_{10}^{100} nego kod $f_{10}^{MS}(99)$ i θ_{10}^{99} .

2.5 Struktura linearnog 2-faktor transfer digrafa

U ovom poglavlju dokazujemo sledeće tvrđenje koje je ključno za razumevanje strukture digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$.

Teorema 2.13 [29] *Za svako $m \geq 2$, digraf $\mathcal{D}_{L,m}^*$ ima tačno $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$ komponenti, tj. $\mathcal{D}_{L,m}^* = \mathcal{A}_{L,m}^* \cup \mathcal{B}_{L,m}^*$, gde se $\mathcal{B}_{L,m}^*$ sastoji od $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ komponenti $\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)}, \mathcal{B}_{L,m}^{*(2)}, \dots, \mathcal{B}_{L,m}^{*(\lfloor m/2 \rfloor)}$ ($|V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)})| \geq |V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(2)})| \geq \dots \geq |V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(\lfloor m/2 \rfloor)})|$). Sve komponente $\mathcal{B}_{L,m}^{*(k)}$ ($1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$) su bipartitni digrafovi i*

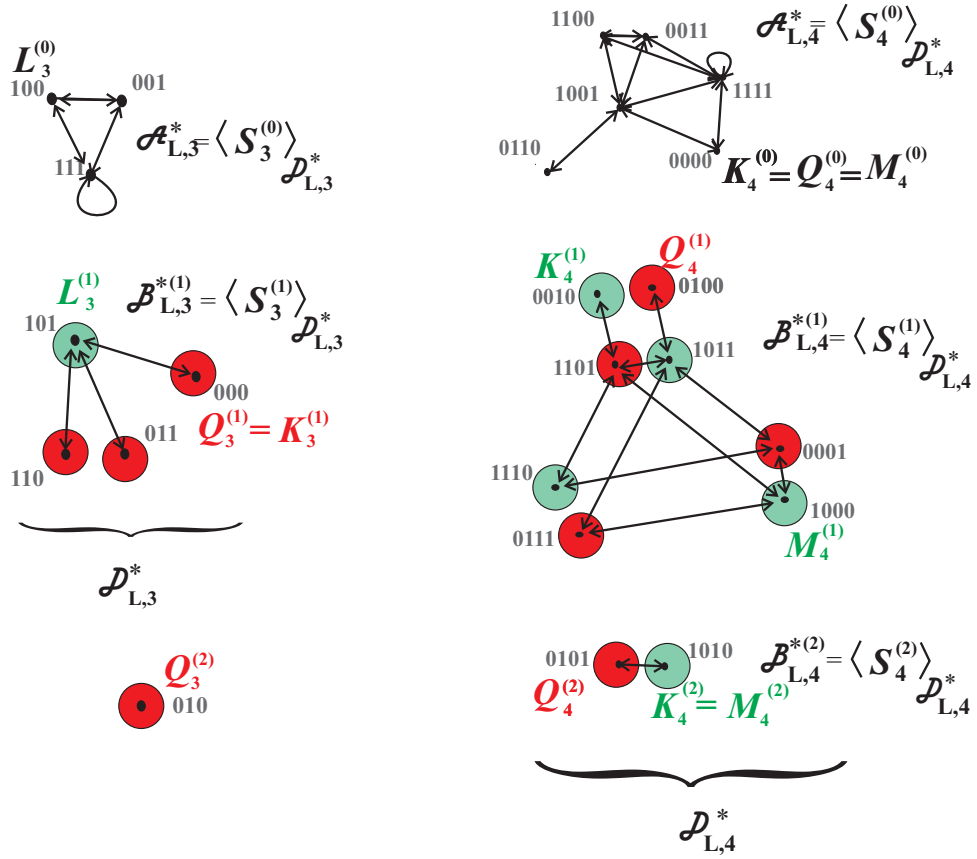
$$|V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(k)})| = \begin{cases} \binom{m+1}{(m+1)/2-k}, & \text{ako je } m \text{ neparno,} \\ 2 \cdot \binom{m}{m/2-k}, & \text{ako je } m \text{ parno,} \end{cases}$$

i

$$|V(\mathcal{A}_{L,m}^*)| = \begin{cases} \binom{m}{(m-1)/2}, & \text{ako je } m \text{ neparno,} \\ \binom{m}{m/2}, & \text{ako je } m \text{ parno.} \end{cases}$$

Čvorovi v i $\bar{v}$ pripadaju istoj komponenti. Ako je $v \in \mathcal{B}_{L,m}^{*(s)}$, $1 \leq s \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, tada je $\bar{v}$ smešteno u istu klasu akko je m neparno.

Primer 8 Digraf $\mathcal{D}_{L,4}^*$ sa Slike 2.17 ima $\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ komponente koje su sve osim jedne (one sa petljom) bipartitni digrafovi. Kardinalnosti ovih komponenti su $\binom{4}{4/2} = 6$, $2 \binom{4}{4/2-1} = 8$ i $2 \binom{4}{4/2-2} = 2$. Primetimo da su čvorovi v i $\bar{v}$ smešteni u različite klase (različitih boja su).

Slika 2.17: Digrafovi $\mathcal{D}_{L,3}^*$ i $\mathcal{D}_{L,4}^*$.

Kako bismo dokazali navedeno tvrđenje mi najpre uvodimo skupove binarnih reči dužine m koje označavamo sa $S_m^{(s)}$ ($0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$) i njihove predstavnike pomoću prebrojavanja brojeva nula u tim rečima, posebno na parnim, a posebno na neparnim pozicijama. Dokazujemo najpre da dva predstavnika različitih skupova $S_m^{(s_1)}$ i $S_m^{(s_2)}$, $s_1 \neq s_2$ ne mogu biti povezani orijentisanom šetnjom u $\mathcal{D}_{L,m}^*$, a zatim da su poddigrafovi digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ indukovani skupovima $S_m^{(s)}$, za $0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$, jako povezani (pa su stoga to komponente digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$) i štaviše, za $s \geq 1$, da su oni bipartitni digrafovi.

Definicija 2.8 Za binarnu reč x dužine m ($m \in \mathbb{N}$) sa $\text{odd}(x)$ ($\text{even}(x)$) označavamo ukupan broj nula na neparnim (parnim) pozicijama u x . Razliku $\text{odd}(x) - \text{even}(x)$ označavamo sa $Z(x)$.

Uvodimo za svaki prirodan broj $m \geq 1$ skupove binarnih reči dužine m : $S_m^{(0)}$, $S_m^{(1)} = R_m^{(1)} \cup G_m^{(1)}$, $S_m^{(2)} = R_m^{(2)} \cup G_m^{(2)}$, ..., $S_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = R_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} \cup G_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)}$ na sledeći način:

Definicija 2.9 Skup $S_m^{(0)}$ ($m \in \mathbb{N}$) se sastoji od svih binarnih m -reči čiji je broj nula na neparnim mestima jednak broju nula na parnim mestima. Za $1 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$, $S_m^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} R_m^{(s)} \cup G_m^{(s)}$ gde su reči u $R_m^{(s)}$ i $G_m^{(s)}$ sve binarne reči x dužine m za koje je $Z(x) = s$ i $Z(x) = -s$, redom. Dodatno, kada je m neparno, tada je $R_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} \stackrel{\text{def}}{=} \{0(10)^{\lfloor m/2 \rfloor}\}$.

Jasno, $x \in S_m^{(s)}$ akko je $|Z(x)| = s$ ($0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$). Na ovaj način smo definisali kolekciju skupova $S_m^{(s)}$, $0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$ koja za parno $m \in \mathbb{N}$ predstavlja particiju skupa $\{0, 1\}^m$, tj. $\bigcup_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} S_m^{(s)} = \{0, 1\}^m = V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$. Kada je m neparno skup $R_m^{(\lceil m/2 \rceil)}$ se sastoji od jedine binarne reči x dužine m koja nije u skupu čvorova digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ i za koju je $Z(x) = \lfloor m/2 \rfloor + 1$. Dakle, u ovom slučaju imamo da je $\bigcup_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} S_m^{(s)} = \{0, 1\}^m \setminus R_m^{(\lceil m/2 \rceil)} = V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$.

Primer 9 *Lako se proverava da je*

$$S_1^{(0)} = \{1\}, R_1^{(1)} = \{0\} \text{ i } S_1^{(0)} = \{1\} = V(\mathcal{D}_{L,1}^*)$$

$$S_2^{(0)} = \{00, 11\}, S_2^{(1)} = R_2^{(1)} \cup G_2^{(1)}, R_2^{(1)} = \{01\} \text{ i } G_2^{(1)} = \{10\} \text{ i } S_2^{(0)} \cup S_2^{(1)} = \{0, 1\}^2 = V(\mathcal{D}_{L,2}^*)$$

$$S_3^{(0)} = \{100, 111, 001\}, S_3^{(1)} = R_3^{(1)} \cup G_3^{(1)}, R_3^{(1)} = \{000, 011, 110\}, G_3^{(1)} = \{101\}, R_3^{(2)} = \{010\} \text{ i } S_3^{(0)} \cup S_3^{(1)} = \{0, 1\}^3 \setminus \{010\} = V(\mathcal{D}_{L,3}^*)$$

Takođe, primetimo da se skupovi $R_{2k}^{(k)}, G_{2k}^{(k)}, G_{2k+1}^{(k)}$ i $R_{2k+1}^{(k+1)}$ sastoje od samo jedne reči, tj. $R_{2k}^{(k)} = \{(01)^k\}$, $G_{2k}^{(k)} = \{(10)^k\}$, $G_{2k+1}^{(k)} = \{(10)^k 1\}$ i $R_{2k+1}^{(k+1)} = \{(01)^k 0\}$ ($k \in \mathbb{N}$).

Dodatno, reč 1^m pripada $S_m^{(0)}$ za svako $m \in \mathbb{N}$.

Posmatrajući elemente od $S_m^{(s)}$ kao čvorove digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ reči iz skupova $R_m^{(s)}$ i $G_m^{(s)}$ nazivamo *crveni* i *zeleni* čvorovi, redom. Jedina binarna reč dužine m koja ne pripada $\bigcup_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} S_m^{(s)} = V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ je $(01)^k 0 \in R_m^{(k+1)}$ kada je $m = 2k + 1$. Bez obzira, zvaćemo je *crveni* čvor (po definiciji).

Primetimo da za svaku binarnu reč x važe sledeće jednakosti:

Stav 2.4

- a) $Z(0x) = -Z(x) + 1$,
- b) $Z(1x) = -Z(x)$,
- c) $Z(00x) = Z(11x) = Z(x)$,
- d) $Z(10x) = Z(x) - 1$ i
- e) $Z(01x) = Z(x) + 1$.

Dokaz. Direktnom proverom. $\square$

U ovome što sledi, dokazaćemo da poddigrafovi od $\mathcal{D}_{L,m}^*$ indukovani skupovima $S_m^{(s)}$ ($0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$), označeni sa $\langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ predstavljaju redom $\mathcal{A}_{L,m}^*$ (komponenta koja sadrži 1^m) i $\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)}, \mathcal{B}_{L,m}^{*(2)}, \dots, \mathcal{B}_{L,m}^{*(\lfloor m/2 \rfloor)}$ (komponente od $\mathcal{B}_{L,m}^*$ koje zadovoljavaju $|V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)})| \geq |V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(2)})| \geq \dots \geq |V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(\lfloor m/2 \rfloor)})|$), kao i da je svaki $\mathcal{B}_{L,m}^{*(s)}$ bihromatski (bipartitni) digraf $(R_m^{(s)}, G_m^{(s)})$ ($s \geq 1$).

Definicija 2.10 Nula-reči $Q_{2k}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 0^{2k} \in S_{2k}^{(0)}$, reči $Q_{2k}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} (01)^s 0^{2k-2s} \in R_{2k}^{(s)}$ ($1 \leq s \leq k$) i $Q_{2k+1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} (01)^{s-1} 0^{2k-2s+3} \in R_{2k+1}^{(s)}$ ($1 \leq s \leq k+1$) nazivamo **kraljice (queens)**. Reči $(10)^s 0^{2k-2s} \in S_{2k}^{(s)}$ ($0 \leq s \leq k$) nazivamo **deve (maindens)** i označavamo sa $M_{2k}^{(s)}$. Slično, reči $L_{2k+1}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (10)^k 1 \in S_{2k+1}^{(k)}$ i reči $L_{2k+1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} (10)^{s+1} 0^{2k-2s-1} \in S_{2k+1}^{(s)}$ ($0 \leq s < k$) nazivamo **dvorske dame (court ladies)**.

Primetimo da je $M_{2k}^{(0)} \equiv Q_{2k}^{(0)}$, $M_{2k}^{(s)} \in G_{2k}^{(s)}$ i $L_{2k+1}^{(s)} \in G_{2k+1}^{(s)}$ za $s \geq 1$. Na ovaj način smo za $s \geq 1$ obezbedili predstavnike za crvene i zelene skupove: kraljice $Q_m^{(s)}$ ($m \in \mathbb{N}$) za prve, a deve $M_{2k}^{(s)}$ ($k \in \mathbb{N}$) i dvorske dame $L_{2k+1}^{(s)}$ ($k \in \mathbb{N}$) za druge. U ovim slučajevima, kraljice $Q_m^{(s)}$ tretiramo kao glavne predstavnike celog skupa $S_m^{(s)}$. Jedini skup $S_m^{(s)}$ bez kraljice je $S_m^{(0)}$ kada je m neparno. U ovom slučaju, dvorska dama $L_m^{(0)} \equiv 10^{m-1}$ postaje glavni predstavnik skupa $S_m^{(0)}$, dok za m parno ovu ulogu preuzima kraljica $Q_m^{(0)} \equiv M_m^{(0)} = 0^m$.

Ako dodamo prefiks 0 devi $M_{2k}^{(s)} \in S_{2k}^{(s)}$ ($0 \leq s \leq k$), ona postaje kraljica u $R_{2k+1}^{(s+1)}$. Ako dodamo prefiks 1 kraljici $Q_{2k}^{(s)}$ ($0 \leq s \leq k$), ona postaje dvorska dama $L_{2k+1}^{(s)} \in S_{2k+1}^{(s)}$. Obrnut proces, tj. “podmlađivanje” nastaje prilikom formiranja predstavnika crvenih i zelenih podskupova od $S_{2k}^{(s)}$, za $s \geq 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Naime, dodavanjem prefiksa 1 kraljici $Q_{2k-1}^{(s)} \in R_{2k-1}^{(s)}$, za $s \geq 1$, dobijamo deve $M_{2k}^{(s)} \in G_{2k}^{(s)}$. Kraljice $Q_{2k}^{(s)} \in R_{2k}^{(s)}$ ($1 \leq s \leq k$) nastaju dodavanjem prefiksa 0 dvorskoj dami $L_{2k-1}^{(s-1)} \in S_{2k-1}^{(s-1)}$. Ovo pravilo se ne odnosi na kraljicu iz $S_{2k}^{(0)}$. Ona nastaje od kraljice iz $R_{2k-1}^{(1)}$, tj. $Q_{2k}^{(0)} = 0^{2k} = 0Q_{2k-1}^{(1)} \in S_{2k}^{(0)}$.

Definicija 2.11 Reč $\bar{Q}_m^{(s)}$ ($0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$) se naziva **kralj** i označava se sa $K_m^{(s)}$.

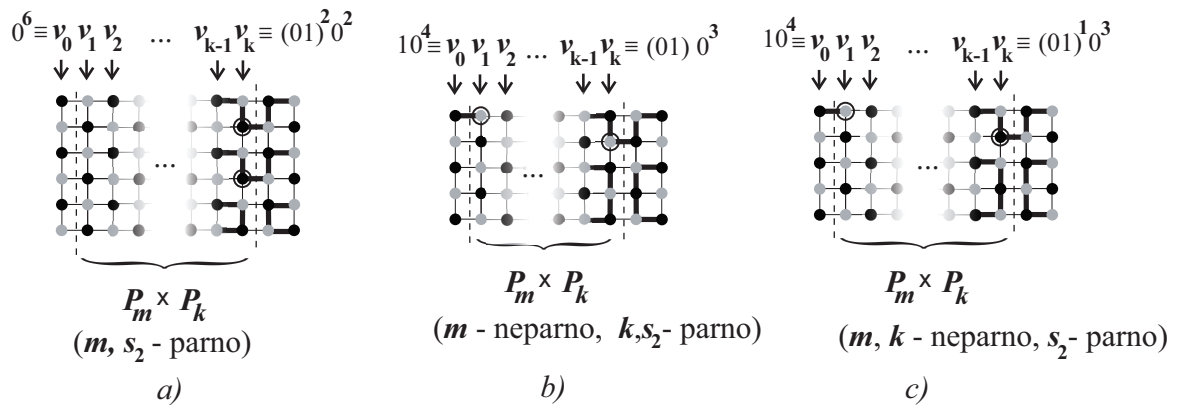
Za $s = 0$ imamo da je $K_{2k}^{(0)} \equiv Q_{2k}^{(0)} \equiv M_{2k}^{(0)} = 0^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Kada je $s \geq 1$, a $m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), $K_{2k}^{(s)} = 0^{2k-2s} (10)^s \in G_{2k}^{(s)}$, dok kada je $m = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), $K_{2k+1}^{(s)} \in R_{2k+1}^{(s)}$ zato što $K_{2k+1}^{(s)} = 0^{2k-2s+3} (10)^{s-1} \in R_{2k+1}^{(s)}$. (Kada je deva prisutna u $S_m^{(s)}$ ($s \geq 1$), kralj je na istoj strani (iste je boje) kao i deva, ali kada je dvorska dama prisutna u $S_m^{(s)}$, kralj drži suprotnu stranu (druge je boje) od dvorske dame.)

Lema 2.6 Dvorska dama $L_{2k-1}^{(0)} \in S_{2k-1}^{(0)}$ ($k \in \mathbb{N}$) i bilo koja kraljica $Q_{2k-1}^{(s)} \in S_{2k-1}^{(s)}$ ($1 \leq s \leq k-1$) ne mogu biti povezane usmerenom šetnjom u $\mathcal{D}_{L,2k-1}^*$. Isto važi za bilo koje dve kraljice $Q_m^{(s_1)}$ i $Q_m^{(s_2)}$ gde je $0 \leq s_1 < s_2 \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ($m \in \mathbb{N}$).

Dokaz. Ovo tvrđenje trivijalno važi za glavne predstavnike od $S_m^{(s_1)}$ i $S_m^{(s_2)}$ ($0 \leq s_1 < s_2 \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$) kada su s_1 i s_2 suprotne parnosti (brojevi njihovih jedinica su suprotne parnosti). U preostalim slučajevima dajemo indirektan dokaz. Dakle, pretpostavimo suprotno, da u $\mathcal{D}_{L,m}^*$ postoji usmerena šetnja $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ dužine $k \in \mathbb{N}$, gde su v_0 i v_k glavni predstavnici dva posmatrana skupa. Deo mreže koji odgovara usmerenoj šetnji od v_1 do v_k sadrži $m \cdot k$ čvorova (videti Sliku 2.18). Pravougaoni mrežni graf koji smo dobili je bihromatski (bojimo njegove čvorove u sivo i crno). U ovoj mreži usmerena šetnja $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ određuje pokrivajuću uniju puteva (otvorenih puteva i kontura). Svaka kontura (ako uopšte postoji) ima isti broj čvorova sive i crne boje. Kada je $m \cdot k$ parno, tada je broj sivih i crnih čvorova mreže $P_m \times P_k$ isti. Inače, kada je $m \cdot k$ neparno, ovi brojevi se razlikuju za 1, sva četiri čvora na uglovima (sa stepenom 2) su tada iste boje - one kojom su brojniji čvorovi obojeni.

Slučaj 1: $s_1 = 0$, m i s_2 ($s_2 > 0$) su parni.

Usmerena šetnja $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ određuje pokrivajuću uniju od $\frac{s_2}{2}$ puteva (otvorenih) i moguće nekoliko kontura. Završni čvorovi ovih puteva (zaokruženi na Slici 2.18 a) pripadaju poslednjoj koloni mreže $P_m \times P_k$. Oni su iste boje i pridruženi su jedinicama kraljice $v_k = Q_m^{(s_2)} = (01)^{s_2} 0^{m-2s_2}$. Posledično, brojevi sivih i crnih čvorova u posmatranom mrežnom grafu $P_m \times P_k$ se razlikuju za $\frac{s_2}{2}$. S druge strane, ovi brojevi moraju biti isti jer je $m \cdot k$ parno. Kontradikcija.



Slika 2.18: Glavni predstavnici od $S_m^{(0)}$ i $S_m^{(s_2)}$ ($1 \leq s_2 \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$) ne mogu biti povezani usmerenom šetnjom u $\mathcal{D}_{L,m}^*$.

Slučaj 2: $s_1 = 0$, m je neparno i s_2 ($s_2 > 0$) parno.

U orijentisanoj šetnji $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ imamo da je $v_0 = L_m^{(0)} = 10^{m-1}$ i $v_k = Q_m^{(s_2)} = (01)^{s_2-1} 0^{m-2s_2+2}$.

Ako je k parno (videti Sliku 2.18 b), završni čvorovi svih $\frac{s_2}{2}$ ($\frac{s_2}{2} \geq 1$) otvorenih puteva su iste boje što implicira da je u mrežnom grafu $P_m \times P_k$ broj čvorova ove boje veći od onog druge boje, što je nemoguće jer je $m \cdot k$ parno.

Ako je k neparno (videti Sliku 2.18 c), tačno jedan put ima završne čvorove različite boje. Završni čvorovi preostalih $\frac{s_2-2}{2}$ ($\frac{s_2-2}{2} \geq 0$) puteva su svi iste boje. Bez umanjenja opštosti, recimo da je to crna boja. Zaključujemo da je broj crnih čvorova veći ili jednak od broja sivih čvorova. S druge strane, kako je $m \cdot k$ neparno, u posmatranoj mreži broj sivih čvorova (među kojima su čvorovi na uglovima) mora biti veći za jedan od broja crnih čvorova. Kontradikcija.

Slučaj 3: $s_2 > s_1 > 0$ i k parno.

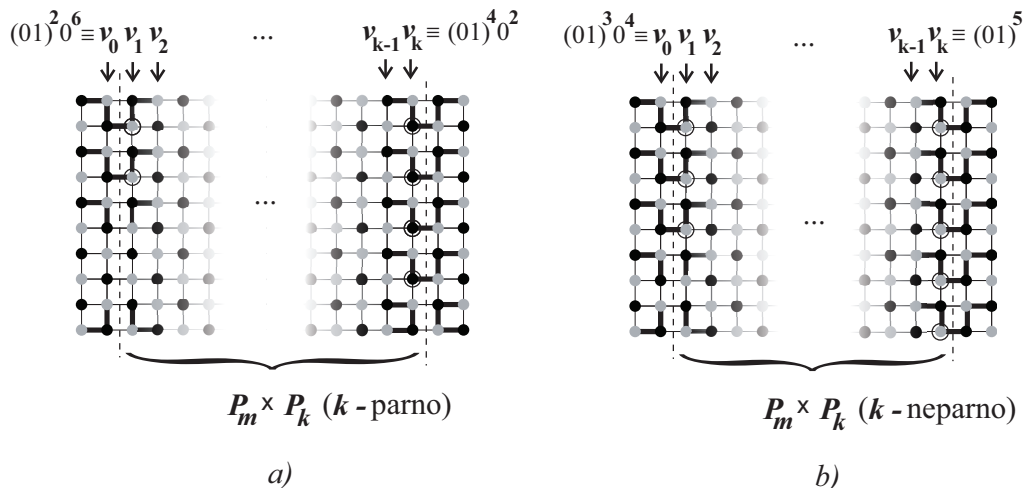
Posmatrani pravougaoni mrežni graf ima isti broj čvorova obe boje ($m \cdot k$ je parno), dok njegov pokrivajući podgraf ima $\frac{s_1+s_2}{2}$ puteva kada je m parno, i $\frac{s_1+s_2}{2} - 1$ puteva kada je m neparno. Ovi (otvoreni) putevi pokrivaju $\frac{s_2-s_1}{2} \geq 1$ više čvorova jedne boje (videti Sliku 2.19 a). Kontradikcija.

Slučaj 4: $s_2 > s_1 > 0$ i k neparno.

Ako je k neparno, onda svi (otvoreni) putevi imaju završne čvorove iste boje, recimo sive (videti Sliku 2.19 b). Posledično, sivi čvorovi su brojniji.

Međutim čvorovi u gornjim uglovima su crni, što implicira da je broj crnih čvorova veći za 1 (kada

je m neparno) ili jednak broju sivih čvorova (kada je m parno). Kontradikcija.



Slika 2.19: Dve kraljice iz $S_m^{(s_1)}$ i $S_m^{(s_2)}$ ($1 \leq s_1 \leq s_2 \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$) ne mogu biti povezane usmerenom šetnjom u $\mathcal{D}_{L,m}^*$.

Potrebno nam je još par tvrđenja.

Stav 2.5 Za $v, w \in V(\mathcal{D}_{L,m_1}^*)$ i $x, y \in V(\mathcal{D}_{L,m_2}^*)$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{N}$) važi:

- a) ako $v \leftrightarrow w$ u $\mathcal{D}_{L,m_1}^*$ i $x \leftrightarrow y$ u $\mathcal{D}_{L,m_2}^*$, tada $vx \leftrightarrow wy$ u $\mathcal{D}_{L,m_1+m_2}^*$,
- b) ako $vx \leftrightarrow wy$ u $\mathcal{D}_{L,m_1+m_2}^*$ i $v \leftrightarrow w$ u $\mathcal{D}_{L,m_1}^*$, tada $x \leftrightarrow y$ u $\mathcal{D}_{L,m_2}^*$.

Dokaz. Direktno iz definicije 2-faktora za linearni mrežni graf. $\square$

Stav 2.6

Neposredni prethodnik ili sledbenik reči iz $V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ koja ima

- a) prefiks 0 mora imati prefiks 1,
- b) prefiks 01 mora imati prefiks 10.

Dokaz. Direktno iz definicije 2-faktora za linearni mrežni graf. $\square$

Stav 2.7

Ako reč w iz $V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ ima prefiks 00 i $w \leftrightarrow v$ za neko $v \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$, tada za reč u dobijenu od w zamenom njenog prefiksa 00 sa 11 važi da $u \leftrightarrow v$, takođe.

Dokaz. Posmatrajmo 2-faktor linearnog mrežnog grafa kod koga su reči w i v pridružene susednim kolonama. Kvadratna ćelija mreže (kvadratić) koji odgovara prefiksu 00 reči w ima dve vertikalne grane koje pripadaju 2-faktoru. Ako ove grane zamenimo sa druge dve (horizontalne) grane kvadratića, dobijeni podgraf je ostao 2-faktor. $\square$

Lema 2.7 Za $m \geq 2$ i $0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$, poddigrafovi od $\mathcal{D}_{L,m}^*$ indukovani skupovima $S_m^{(s)}$ su jako povezani. Dodatno, za $s \geq 1$ oni su bipartitni digrafovi, tj. $\langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*} = (R_m^{(s)}, G_m^{(s)})$. Ne postoji luk

koji povezuje čvor iz $S_m^{(s)}$ sa čvorom iz $S_m^{(t)}$, gde je $0 \leq s < t \leq \lfloor m/2 \rfloor$, tj. $\mathcal{D}_{L,m}^* = \bigcup_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$.

Dokaz. Dokaz dajemo indukcijom po m . Tvrdjenje za $m \leq 3$ (baza indukcije) trivijalno važi (videti Sliku 2.17 i Primer 9). Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sve digrafove $\mathcal{D}_{L,w}^*$, kada je $w < m$ i dokažimo ga za $m \geq 4$.

$\langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ ($0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$) je jako povezan.

Uvodimo sledeće skupove:

$$\begin{aligned} O_m^{(s)} &\stackrel{\text{def}}{=} \{1v \mid v \in \{0,1\}^{m-1} \wedge |Z(v)| = s\}, \\ \mathcal{J}_m^{(s)} &\stackrel{\text{def}}{=} \{00v \mid v \in \{0,1\}^{m-2} \wedge |Z(v)| = s\} \text{ i} \\ \mathcal{K}_m^{(s)} &\stackrel{\text{def}}{=} \{01v \mid v \in \{0,1\}^{m-2} \wedge |Z(v)| + 1 = s\}. \end{aligned}$$

Jasno, $S_m^{(s)} = O_m^{(s)} \cup \mathcal{J}_m^{(s)} \cup \mathcal{K}_m^{(s)}$.

Primetimo da je $\langle O_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ izomorfan sa $\langle S_{m-1}^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m-1}^*}$. Kako je ovaj drugi digraf jako povezan po induktivnoj hipotezi (I.H.), isto važi i za prvi digraf. Dokažimo da je svaki čvor $x \in \mathcal{J}_m^{(s)} \cup \mathcal{K}_m^{(s)}$ neposredni prethodnik čvora iz $O_m^{(s)}$.

Ako $x = 00v \in \mathcal{J}_m^{(s)}$ gde $v \in S_{m-2}^{(s)}$ ($|Z(v)| = s$), tada po I.H. postoji $w \in S_{m-2}^{(s)}$ za koje $v \leftrightarrow w$ u $\langle S_{m-2}^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m-2}^*}$ i $Z(w) = -Z(v)$, tj. $|Z(w)| = |Z(v)| = s$. Kako $00 \leftrightarrow 11$ u $\mathcal{D}_{L,2}^*$, Stav 2.5 a) implicira da $00v \leftrightarrow 11w$ gde $11w \in O_m^{(s)}$.

Ako je $x = 01v$, gde $v \in \{0,1\}^{m-2} \wedge Z(v) = -1 \pm s$, tada po I.H. postoji $w \in \{0,1\}^{m-2}$ za koje $v \leftrightarrow w$ (stoga i $Z(w) = -Z(v)$) u $\langle S_{m-2}^{(|Z(v)|)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m-2}^*}$. Kako $01 \leftrightarrow 10$ u $\mathcal{D}_{L,2}^*$ i $Z(10w) = -1 + Z(w) = -1 - Z(v) = \mp s$, koristeći ponovo Stav 2.5 a), zaključujemo da $x = 01v \leftrightarrow 10w$ gde $10w \in O_m^{(s)}$.

$\langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ ($1 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$) je bipartitni digraf $(R_m^{(s)}, G_m^{(s)})$.

Treba da dokažemo da $\langle R_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ i $\langle G_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ nemaju lukova, tj. da su prazni digrafovi. Iz tog razloga posmatramo skup $\{x \in \{0,1\}^m \mid Z(x) = k\}$, gde je $k = s$ ili $k = -s$. On je unija $O_m^{(k)} \cup \mathcal{J}_m^{(k)} \cup \mathcal{K}_m^{(k)}$ gde su:

$$\begin{aligned} O_m^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \{1v \mid v \in \{0,1\}^{m-1} \wedge Z(v) = -k\}, \\ \mathcal{J}_m^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \{00v \mid v \in \{0,1\}^{m-2} \wedge Z(v) = k\} \text{ i} \\ \mathcal{K}_m^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \{01v \mid v \in \{0,1\}^{m-2} \wedge Z(v) = k - 1\}. \end{aligned}$$

Digraf $\langle \mathcal{J}_m^{(k)} \cup \mathcal{K}_m^{(k)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ je prazan digraf jer dve reči sa prefiksom 0 ne mogu biti susedi u $\mathcal{D}_{L,m}^*$ (Stav 2.6 a). Digraf $\langle O_m^{(k)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ je takođe prazan digraf jer je izomorfan digrafu $\langle \{v \in \{0,1\}^{m-1} \mid Z(v) = -k\} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m-1}^*}$, koji je $\langle G_{m-1}^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m-1}^*}$ (za $k = s$) ili $\langle R_{m-1}^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m-1}^*}$ (za $k = -s$) (I.H.).

Ostaje da se dokaže da ne postoje lukovi između $\langle O_m^{(k)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ i $\langle \mathcal{J}_m^{(k)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$, kao ni između $\langle O_m^{(k)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ i $\langle \mathcal{K}_m^{(k)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$. Pretpostavimo suprotno:

$(\exists x \in \mathcal{J}_m^{(k)}) (\exists y \in O_m^{(k)}) x \leftrightarrow y$ (I Slučaj) ili $(\exists x \in \mathcal{K}_m^{(k)}) (\exists y \in O_m^{(k)}) x \leftrightarrow y$ (II Slučaj).

I Slučaj: $x = 00v \in \mathcal{J}_m^{(k)}$, $y = 1w \in O_m^{(k)}$ i $x \leftrightarrow y$.

Koristeći Stav 2.7 zaključujemo da $11v \leftrightarrow 1w$, tj. $1v \leftrightarrow w$. $Z(v) = Z(00v) = k$ implicira $Z(1v) = -k$. S druge strane, $Z(w) = -k$ jer je $Z(1w) = k$ ($1w \in O_m^{(k)}$). Kako važi $1v \leftrightarrow w$, zaključujemo da poddigraf indukovani skupom čvorova $\{v \mid v \in \{0,1\}^{m-1} \wedge Z(v) = -k\}$ nije prazan digraf. Kontradikcija sa I.H.

II Slučaj: $x = 01v \in \mathcal{K}_m^{(k)}$, $x \leftrightarrow y$, gde je

$$y \in O_m^{(k)} = \{10w \mid w \in \{0,1\}^{m-2} \wedge Z(w) = k+1\} \cup \{11w \mid w \in \{0,1\}^{m-2} \wedge Z(w) = k\}.$$

Stav 2.6 b) eliminiše mogućnost da je $y = 11w$, te zaključujemo da je $y = 10w$. Koristeći Stav 2.5 b), imamo da je $v \leftrightarrow w$. Kako je $Z(w) = k+1$ i $Z(v) = k-1$ dobijamo da postoji grana u digrafu $\mathcal{D}_{L,m-2}^*$ koja povezuje čvor iz $\{v \in \{0,1\}^{m-2} \mid Z(v) = k+1\}$ i čvor iz $\{v \in \{0,1\}^{m-2} \mid Z(v) = k-1\}$, a što je nemoguće po I.H.

Ne postoji luk koji povezuje čvor iz $S_m^{(s)}$ sa čvorom iz $S_m^{(t)}$, $0 \leq s < t \leq \lfloor m/2 \rfloor$.

Pretpostavljajući suprotno, iz već pokazane jake povezanosti digrafova $\langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ i $\langle S_m^{(t)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ dobijamo su glavni predstavnici od $S_m^{(s)}$ i $S_m^{(t)}$ povezani usmerenom šetnjom u $\mathcal{D}_{L,m}^*$ što je u kontradikciji sa

tvrđenjem Leme 2.1. Posledično, imamo da važi $\mathcal{D}_{L,m}^* = \bigcup_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$.

Ovim je kompletiran induktivni korak za $m \geq 4$. Dakle, tvrđenje važi za sve prirodne brojeve $m \geq 2$. $\square$

Lema 2.8 *Ako $v \in S_m^{(s)}$ ($0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor, m \in \mathbb{N}$), tada čvor $\bar{v}$ pripada istom skupu $S_m^{(s)}$. Dodatno, ako je m neparno i $s > 0$, tada su čvorovi v i $\bar{v}$ u istoj klasi (iste boje). Kada je m parno i $s > 0$, tada su čvorovi v i $\bar{v}$ u različitim klasama (različite boje).*

Dokaz. Neka je v proizvoljni čvor skupa $S_m^{(s)}$ pri čemu je $s \geq 1$. Tada postoji orijentisana šetnja je $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_t = Q_m^{(s)}$ dužine t ($t \geq 0$) koja povezuje v sa kraljicom digrafa $\langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$. Koristeći osobine horizontalne konverzije zaključujemo da postoji i orijentisana šetnja $\bar{v} \rightarrow \bar{v}_1 \rightarrow \bar{v}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{v}_t = K_m^{(s)}$. Kako u digrafu $\mathcal{D}_{L,m}^*$ važi tvrđenje: Ako $u \rightarrow w$, onda $w \rightarrow u$, zaključujemo da postoji i orijentisana šetnja $\bar{v}_t = K_m^{(s)} \rightarrow \bar{v}_{t-1} \rightarrow \bar{v}_{t-2} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{v}_1 \rightarrow \bar{v}$, iste dužine t . Kada je m neparno, kralj $K_m^{(s)}$ je crven, tj. $K_m^{(s)} \in R_m^{(s)}$. Svaka orijentisana šetnja između njega i kraljice $Q_m^{(s)}$ je parne dužine, pa isto važi i za čvorove v i $\bar{v}$. Ovo implicira da su v i $\bar{v}$ u istoj klasi (iste boje). Kada je m parno, kralj $K_m^{(s)}$ i kraljica $Q_m^{(s)}$ su različite boje. Stoga, isto važi i za v i $\bar{v}$.

Za $v \in S_m^{(0)}$, $\bar{v}$ mora pripadati istom skupu. Naime, ako pretpostavimo suprotno, tj. $\bar{v} \in S_m^{(s)}$, za neko $s \neq 0$, tada na osnovu predhodno dokazanog slučaja dobijamo $\bar{\bar{v}} = v \in S_m^{(s)}$, tj. dobijamo povezanost čvorova iz $\langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ ($s > 0$) i $\langle S_m^{(0)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ što je na osnovu Leme 2.7 nemoguće. $\square$

Lema 2.9 *Ako je $1 \leq s \leq k$ ($k \in \mathbb{N}$), tada je*

$$a) \quad |R_{2k}^{(s)}| = |G_{2k}^{(s)}| = \binom{2k}{k-s}, \quad |S_{2k}^{(s)}| = 2 \cdot \binom{2k}{k-s} \quad i \quad |S_{2k}^{(0)}| = \binom{2k}{k}.$$

$$b) \quad |R_{2k+1}^{(s)}| = \binom{2k+1}{k-s+1}, \quad |G_{2k+1}^{(s)}| = \binom{2k+1}{k-s}, \\ |S_{2k+1}^{(s)}| = \binom{2k+2}{k-s+1} \quad i \quad |S_{2k+1}^{(0)}| = \binom{2k+1}{k}.$$

Dokaz. Neka je i broj nula na neparnim pozicijama u reči $v \in V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$, tj. $i = \text{odd}(v)$. Koristeći definiciju skupova $S_m^{(0)}$, $R_m^{(s)}$ i $G_m^{(s)}$ ($1 \leq s \leq k$) i Vandermondovu konvoluciju analiziramo sve moguće slučajeve ($\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, za $k < 0$ i $k > n$).

- $m = 2k, v \in S_m^{(0)}$
 $|S_{2k}^{(0)}| = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{k-i} = \binom{2k}{k}$
- $m = 2k+1, v \in S_m^{(0)}$
 $|S_{2k+1}^{(0)}| = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \binom{k}{k-i} = \binom{2k+1}{k}$
- $m = 2k, v \in S_m^{(s)}$ ($s > 0$)
 $|R_{2k}^{(s)}| = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{i-s} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{k-i+s} = \binom{2k}{k+s} = \binom{2k}{k-s}$
 $|G_{2k}^{(s)}| = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{i+s} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{k-i-s} = \binom{2k}{k-s}$
- $m = 2k+1, v \in S_m^{(s)}$ ($s > 0$)
 $|R_{2k+1}^{(s)}| = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \binom{k}{i-s} = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \binom{k}{k-i+s} = \binom{2k+1}{k+s} = \binom{2k+1}{k-s+1}$
 $|G_{2k+1}^{(s)}| = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \binom{k}{i+s} = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} \binom{k}{k-i-s} = \binom{2k+1}{k-s}$

□

Sada iz Leme 2.7 zaključujemo da su digrafovi $\langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ za $0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$ komponente transfer digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$. Primetimo da je digraf $\langle S_m^{(0)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}$ komponenta koja sadrži čvor 1^m . To povlači da je

$$\langle S_m^{(0)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*} = \mathcal{A}_{L,m}^*. \text{ Imajući u vidu da je } \mathcal{D}_{L,m}^* = \mathcal{A}_{L,m}^* \cup \left(\bigcup_{s=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \mathcal{B}_{L,m}^{*(s)} \right) = \bigcup_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*} \text{ i}$$

$$|S_m^{(s_1)}| > |S_m^{(s_2)}| \text{ za } 1 \leq s_1 < s_2 \leq \lfloor m/2 \rfloor, \text{ zaključujemo da je } \mathcal{B}_{L,m}^{*(s)} = \langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*}, \text{ za svako } s = 1, 2, \dots, \lfloor m/2 \rfloor.$$

Posledično, sve komponentne $\mathcal{B}_{L,m}^{*(s)}$ ($1 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$) su bipartitni digrafovi. Lema 2.8 i Lema 2.9 dalje kompletiraju dokaz Teoreme 2.13.

2.6 Red redukovanog i duplo redukovanog transfer digrafa za $RG_m(n)$

Tvrđenja sledeće dve teoreme su bila u radu [28] postavljena kao hipoteze. U radu [32] se dokazi ovih tvrđenja kompletiraju.

Teorema 2.14 *Kada je m parno, broj čvorova u $\mathcal{R}_{L,m}^*$ je jednak n -tom članu niza A000984 u OEIS [77] gde je $m = 2n$, tj.*

$$|V(\mathcal{R}_{L,m}^*)| = \binom{m}{m/2}, \quad (2.14)$$

*dok je broj čvorova u digrafu $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$ jednak n -tom članu niza A005317 u OEIS gde je $m = 2n$, tj.*

$$|V(\mathcal{R}_{L,m}^{**})| = 2^{(m-2)/2} + \frac{1}{2} \binom{m}{m/2}. \quad (2.15)$$

Dokaz. Primenom Teoreme 2.13 i Teoreme 2.9 dobijamo (2.14). Za parno m dokazano je da svi palindromi iz $V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$, kojih ima $2^{m/2}$, pripadaju istoj komponenti $\mathcal{A}_{L,m}^* \equiv \mathcal{R}_{L,m}^*$ (Teorema 2.12), što implicira (2.15). $\square$

PRIMEDBA. Koristeći funkciju $Z(x)$, datu u Definiciji 2.9, možemo dati kraći dokaz Teoreme 2.12 koja tvrdi da svi palindromi iz $V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ pripadaju komponenti $\mathcal{A}_{L,m}^*$ kada je m parno. Naime, ako je w palindrom ($w = \bar{w}$), tada je $Z(w) = Z(\bar{w})$. Kako je m parno, imamo da je $Z(\bar{w}) = -Z(w)$. Posledično, $Z(w) = -Z(w)$, tj. $Z(w) = 0$. Ovo implicira da $w \in \langle S_m^{(0)} \rangle_{\mathcal{D}_{L,m}^*} = \mathcal{A}_{L,m}^*$. $\square$

Teorema 2.15 [32] *Kada je m neparno, broj čvorova u $\mathcal{R}_{L,m}^*$ je jednak n -tom članu niza A001791 u OEIS gde je $m = 2n - 1$, tj.*

$$|V(\mathcal{R}_{L,m}^*)| = \binom{m+1}{(m-1)/2}, \quad (2.16)$$

*dok je broj čvorova u digrafu $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$ jednak*

$$|V(\mathcal{R}_{L,m}^{**})| = \frac{1}{2} \left[\binom{m+1}{(m-1)/2} + \binom{(m+1)/2}{\lfloor (m+1)/4 \rfloor} \right]. \quad (2.17)$$

Za dokaz ove teoreme potrebne su nam sledeće dve leme.

Lema 2.10 *Kada je m neparno, $\mathcal{R}_{L,m}^* \equiv \mathcal{B}_{L,m}^{*(1)}$.*

Dokaz. Kako je m neparno, imamo da je $Z(0^m) = 1$, što implicira da $0^m \in V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)})$. Posledično, $\mathcal{R}_{L,m}^* \equiv \mathcal{B}_{L,m}^{*(1)}$. $\square$

Lema 2.11 *Za neparno m , broj svih palindroma iz $V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)})$ jednak je $\binom{(m+1)/2}{\lfloor (m+1)/4 \rfloor}$.*

Dokaz. Posmatrajmo palindrom iz $V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)})$ gde je $m = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Primitimo da on mora biti oblika $w0\bar{w}$.

Slučaj I: Ako je k parno, tada je $Z(\bar{w}) = -Z(w)$ i $Z(w0\bar{w}) = Z(w) + 1 - Z(\bar{w}) = 2Z(w) + 1$. Kako je

$|Z(w0\bar{w})| = 1$, imamo da je $Z(w) = -1$ ili $Z(w) = 0$. Ovo povlači da $w \in G_k^{(1)} \cup S_k^{(0)}$.

Primenjujući Teoremu 2.13 i Lemu 2.9, kako je k parno, dobijamo da je broj svih palindroma jednak

$$|G_k^{(1)} \cup S_k^{(0)}| = \binom{k}{k/2-1} + \binom{k}{k/2} = \binom{k+1}{k/2} = \binom{(m+1)/2}{\lfloor (m+1)/4 \rfloor}.$$

Slučaj II: Ako je k neparno, tada je $Z(\bar{w}) = Z(w)$ i $Z(w0\bar{w}) = Z(w) - 1 + Z(\bar{w}) = 2Z(w) - 1$. Kako je $|Z(w0\bar{w})| = 1$, imamo da je $Z(w) = 0$ ili $Z(w) = 1$, što implicira da $w \in S_k^{(0)} \cup R_k^{(1)}$.

Primenjujući Teoremu 2.13 i Lemu 2.9 ponovo, dobijamo da je broj svih palindroma jednak

$$|S_k^{(0)} \cup R_k^{(1)}| = \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} + \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} = \binom{k+1}{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} = \binom{(m+1)/2}{\lfloor (m+1)/4 \rfloor}, \text{ u oba slučaja. } \square$$

Dokaz Teoreme 2.15. [32]

Jednakost 2.16 je trivijalna posledica Leme 2.10 i Teoreme 2.13. Naime, za neparno m ,

$$|V(\mathcal{R}_{L,m}^*)| = |V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(1)})| = \binom{m+1}{(m+1)/2-1} = \binom{m+1}{(m-1)/2}.$$

Da bismo dobili broj čvorova digrafa $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$ primetimo da je on jednak broju čvorova u $\mathcal{R}_{L,m}^*$ umanjenom za polovinu broja njegovih čvorova koji nisu palindromi. Tako koristeći upravo dokazanu jednakost (2.16) i Lemu 2.11 dobijamo

$$|V(\mathcal{R}_{L,m}^{**})| = |V(\mathcal{R}_{L,m}^*)| - \frac{1}{2} \left[|V(\mathcal{R}_{L,m}^*)| - \binom{(m+1)/2}{\lfloor (m+1)/4 \rfloor} \right] = \frac{1}{2} \left[\binom{m+1}{(m-1)/2} + \binom{(m+1)/2}{\lfloor (m+1)/4 \rfloor} \right].$$

Na ovaj način je dokazana teorema. $\square$

2.7 Izgradnja skupova $S_m^{(k)}$

Ovo poglavlje ima za cilj sagledavanje skupova $S_m^{(k)}$, $R_m^{(k)}$ i $G_m^{(k)}$ iz ugla njihove međusobne povezanosti. Naime, sledeće leme omogućavaju izgradnju ovih skupova jednih od drugih. Drugim rečima, navedeni skupovi se mogu uvesti, tj. definisati induktivno na ovaj način, dok bi Definicija 2.9 ovih skupova predstavljala u tom slučaju karakterizaciju tih skupova iskazanu pomoću funkcije $Z(x)$.

Definicija 2.12 Za proizvoljni skup binarnih reči A , oznaka $1A$ (ili $0A$) predstavlja skup svih reči $1a$ ($0a$), za koje je $a \in A$.

Za male vrednosti broja m (videti Primer 9) lako se uočava da važi: $S_1^{(0)} = \{1\}$, $R_1^{(1)} = \{0\}$,

$$\boxed{S_2^{(0)} = 1S_1^{(0)} \cup 0R_1^{(1)}} = \{00, 11\}, \quad S_2^{(1)} = R_2^{(1)} \cup G_2^{(1)}, \text{ gde je } \boxed{R_2^{(1)} = 0S_1^{(0)}} = \{01\} \text{ i } \boxed{G_2^{(1)} = 1R_1^{(1)}} = \{10\}.$$

$$\boxed{S_3^{(0)} = 1S_2^{(0)} \cup 0R_2^{(1)}} = \{100, 111, 001\}, \quad S_3^{(1)} = R_3^{(1)} \cup G_3^{(1)}, \text{ gde je } \boxed{R_3^{(1)} = 0S_2^{(0)} \cup 1G_2^{(1)}} = \{000, 011, 110\}$$

i $\boxed{G_3^{(1)} = 1R_2^{(1)}} = \{101\}$, $\boxed{R_3^{(2)} = 0G_2^{(1)}} = \{010\}$ (videti Sliku 2.20).

Za skupove $S_m^{(0)}$, $S_m^{(1)} = R_m^{(1)} \cup G_m^{(1)}$, $S_m^{(2)} = R_m^{(2)} \cup G_m^{(2)}$, ..., $S_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = R_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} \cup G_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)}$ kada je $m \geq 4$ važi sledeće tvrđenje.

Lema 2.12 *Ako je $m \geq 4$, tada*

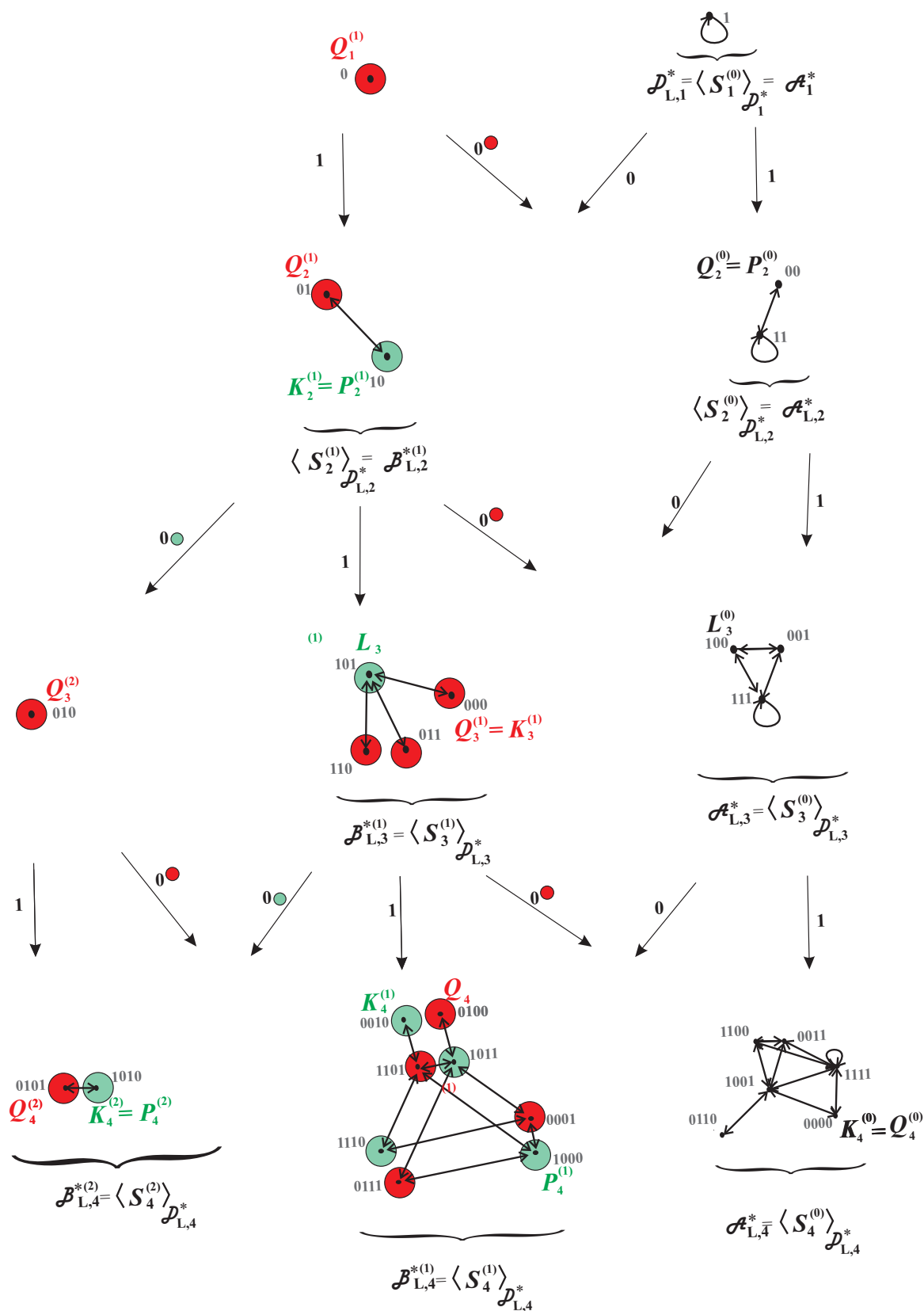
- $S_m^{(0)} = 1S_{m-1}^{(0)} \cup 0R_{m-1}^{(1)}$;
- $S_m^{(1)} := R_m^{(1)} \cup G_m^{(1)}$, gde je $R_m^{(1)} = 0S_{m-1}^{(0)} \cup 1G_{m-1}^{(1)}$ i $G_m^{(1)} = 1R_{m-1}^{(1)} \cup 0R_{m-1}^{(2)}$;
- Za $2 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor - 1$, $S_m^{(s)} = R_m^{(s)} \cup G_m^{(s)}$,
gde je $R_m^{(s)} = 0G_{m-1}^{(s-1)} \cup 1G_{m-1}^{(s)}$ i $G_m^{(s)} = 1R_{m-1}^{(s)} \cup 0R_{m-1}^{(s+1)}$;
- $S_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} := R_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} \cup G_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)}$, gde je kada je m neparno
 $R_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = 0G_{m-1}^{(\lfloor m/2 \rfloor - 1)} \cup 1G_{m-1}^{(\lfloor m/2 \rfloor)}$ i $G_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = 1R_{m-1}^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = \{1(01)^{\lfloor m/2 \rfloor}\}$,
a kada je m parno
 $R_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = 0G_{m-1}^{(\lfloor m/2 \rfloor - 1)} = \{(01)^{\lfloor m/2 \rfloor}\}$ i $G_m^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = 1R_{m-1}^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = \{(10)^{\lfloor m/2 \rfloor}\}$;
- i kada je m neparno $R_m^{(\lfloor m/2 \rfloor + 1)} = 0G_{m-1}^{(\lfloor m/2 \rfloor)} = \{0(10)^{\lfloor m/2 \rfloor}\}$.

Dokaz. Čvor iz $S_m^{(0)}$ predstavlja po definiciji skup svih binarnih reči x dužine m za koje je $Z(x) = 0$. Ako x počinje cifrom 1, tj. ako je $x = 1y$, tada za reč y važi $Z(y) = 0$, te y pripada skupu $S_{m-1}^{(0)}$, tj. komponenti $\mathcal{A}_{L,m-1}^*$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m-1}^*$. Ako, pak, x počinje cifrom 0, tj. ako je $x = 0y$, tada za reč y važi $Z(y) = 1$, te y pripada skupu $R_{m-1}^{(1)}$ (x se dobija isključivo od crvenih čvorova komponente $\mathcal{B}_{L,m-1}^{*(1)}$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m-1}^*$).

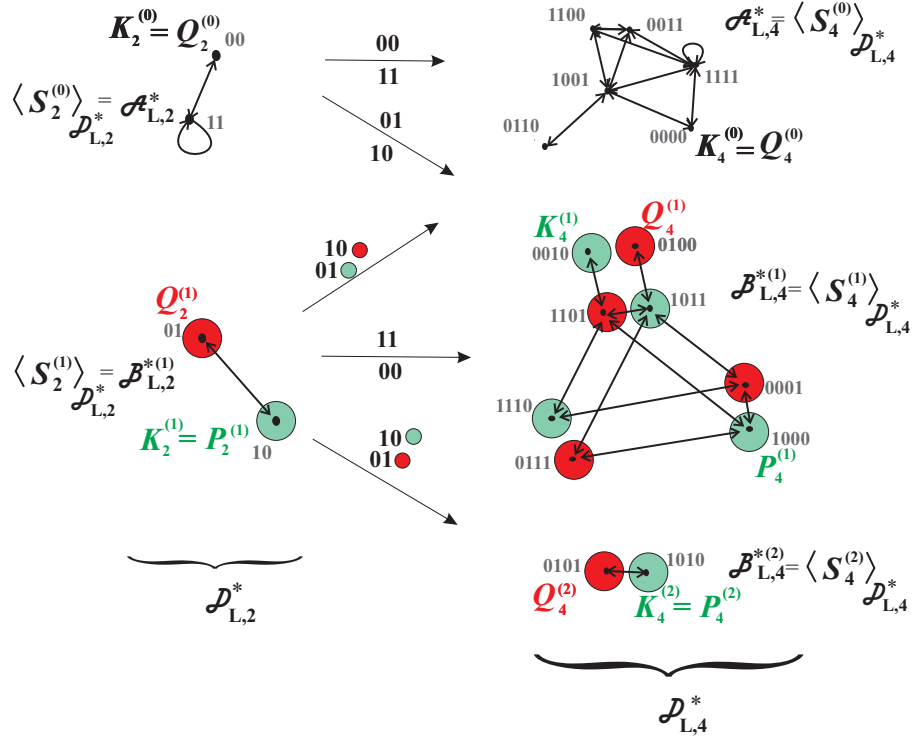
Neka je sada x zeleni čvor iz $G_m^{(s)}$, $1 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$, tj. $Z(x) = -s$. Ako je $x = 1y$, tada $Z(y) = s > 0$, te y pripada crvenim čvorovima komponente $\mathcal{B}_{L,m-1}^{*(s)}$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m-1}^*$. Ako je $x = 0y$, tada $Z(y) = s + 1 > 0$, te y pripada ponovo crvenim čvorovima ali komponente $\mathcal{B}_{L,m-1}^{*(s+1)}$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m-1}^*$.

Za slučaj kad je x crveni čvor iz $R_m^{(s)}$, $1 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$ imamo $Z(x) = s > 0$. Stoga, ako je $x = 1y$, tada $Z(y) = -s < 0$, te y pripada zelenim čvorovima komponente $\mathcal{B}_{L,m-1}^{*(s)}$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m-1}^*$. Ako je, pak, $x = 0y$, tada je $Z(y) = s - 1 \geq 0$, te y pripada ponovo zelenim čvorovima ali komponente $\mathcal{B}_{L,m-1}^{*(s-1)}$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m-1}^*$ (za slučaj $s > 1$) ili komponenti $\mathcal{A}_{L,m-1}^*$ (za slučaj $s = 1$).

Za kraljicu $Q_m^{(s)} = 0(10)^{\lfloor m/2 \rfloor}$ važi $Q_m^{(s)} = 0y$, gde je $Z(y) = -\lfloor m/2 \rfloor$. Dakle, ona nastaje od zelenog čvora $(10)^{\lfloor m/2 \rfloor}$ komponente $\mathcal{B}_{L,m-1}^{*(\lfloor m/2 \rfloor)}$. $\square$

Slika 2.20: Izgradnja komponenti $\mathcal{D}_{L,m}^*$

Koristeći gornju lemu, naredna lema se lako dokazuje (nepostojeći skupovi, kao što su $S_m^{(\lfloor m/2 \rfloor + 1)}$, 10 , i drugi tretiraju se kao prazni skupovi). Ona nam omogućava da induktivno izgradimo sve skupove $S_m^{(s)}$ za $m = 2k$ i $k \in \mathbb{N}$ (videti Sliku 2.21), nezavisno od skupova $S_m^{(s)}$ sa neparnim m . Slično se radi i za skupove $S_m^{(s)}$ gde je $m = 2k - 1$ i $k \in \mathbb{N}$.



Slika 2.21: Nastajanje komponenti od $\mathcal{D}_{L,4}^*$ iz $\mathcal{D}_{L,2}^*$

Lema 2.13 Za $m \geq 1$,

- $S_{m+2}^{(0)} = 00S_m^{(0)} \cup 11S_m^{(0)} \cup 10R_m^{(1)} \cup 01G_m^{(1)}$;
- $S_{m+2}^{(1)} = R_{m+2}^{(1)} \cup G_{m+2}^{(1)}$, gde

$$\begin{aligned} R_{m+2}^{(1)} &= 01S_m^{(0)} \cup 00R_m^{(1)} \cup 11R_m^{(1)} \cup 10R_m^{(2)} \\ G_{m+2}^{(1)} &= 10S_m^{(0)} \cup 00G_m^{(1)} \cup 11G_m^{(1)} \cup 01G_m^{(2)}; \end{aligned}$$
- Za $2 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor + 1$, $S_{m+2}^{(s)} = R_{m+2}^{(s)} \cup G_{m+2}^{(s)}$, gde

$$\begin{aligned} R_{m+2}^{(s)} &= 01R_m^{(s-1)} \cup 00R_m^{(s)} \cup 11R_m^{(s)} \cup 10R_m^{(s+1)} \\ G_{m+2}^{(s)} &= 10G_m^{(s-1)} \cup 00G_m^{(s)} \cup 11G_m^{(s)} \cup 01G_m^{(s+1)}; \end{aligned}$$
- $R_{m+2}^{(\lfloor m/2 \rfloor + 2)} = 01R_m^{(\lfloor m/2 \rfloor + 1)} = \{0(10)^{\lfloor m/2 \rfloor + 1}\}$

Dokaz. Neposredno iz prethodne leme. $\square$

Ciklični mrežni grafovi

Prebrojavanje pokrivaćih unija kontura u cikličnim mrežnim grafovima: $TnC_m(n)$, $TG_m^{(p)}(n)$ i $KB_m^{(p)}(n)$ tema je rada [30], dok se strukturom njihovog zajedničkog transfer digrafa (za fiksno m) bavi rad [31]. Rezultati ovih radova su predstavljeni u naredna tri poglavlja.

3.1 Prebrojavanje 2-faktora cikličnih mrežnih grafova

Za svaki prirodan broj m kreiramo digraf $\mathcal{D}_{C,m} \stackrel{\text{def}}{=} (V(\mathcal{D}_{C,m}), E(\mathcal{D}_{C,m}))$ (zajednički za sva tri tipa cikličnih mrežnih grafova) na sledeći način:

- Skup čvorova $V(\mathcal{D}_{C,m})$ se sastoji od svih mogućih cikličnih alfa reči dužine m ;
- Luk povezuje čvor $v = v_1v_2 \dots v_m$ sa čvorom $u = u_1u_2 \dots u_m$, tj. $(v, u) \in E(\mathcal{D}_{C,m})$ ili $v \rightarrow u$ akko su uređeni parovi (v_i, u_i) grane u digrafu $\mathcal{D}_{lr}$, za sve $1 \leq i \leq m$ (čvorovi v i u zadovoljavaju *Uslov susednosti kolona* iz Teoreme 1.2).

Podskupove skupa $V(\mathcal{D}_{C,m})$ koji se sastoje od svih mogućih prvih (poslednjih) kolona kodne matrice $[\alpha_{i,j}]_{m \times n}$ za $TnC_m(n)$ (Uslov 3a, Teoreme 1.2) označavamo sa $\mathcal{F}_{C,m}(\mathcal{L}_{C,m})$. Na osnovu *Uslova kolone* (a), prva kolona kodne matrice $[\alpha_{i,j}]_{m \times n}$ je ciklična alfa reč iz $\{a, b, c\}^m$, dok je poslednja kolona ciklična alfa reč iz $\{b, d, f\}^m$. Posledično, važi sledeće:

Lema 3.14 *Kardinalnosti skupova $\mathcal{F}_{C,m}$ i $\mathcal{L}_{C,m}$ ($m \in \mathbb{N}$) su jednake m -tom članu Lukasovog niza L_m ($L_1 \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $L_2 \stackrel{\text{def}}{=} 3$; $L_k \stackrel{\text{def}}{=} L_{k-1} + L_{k-2}$, za $k \geq 3$).*

Dokaz. Izvodi se analogno kao u linearnom slučaju. Karakteristični polinom matrice susedstva poddigrafa od $\mathcal{D}_{ud}$ indukovano skupom $\{a, b, c\}$ ili $\{b, d, f\}$ je $\lambda(\lambda^2 - \lambda - 1)$. Polinom u zagradi određuje rekurentnu relaciju za brojeve svih orijentisanih zatvorenih šetnji dužine m u posmatranom poddigrafu koje počinju i završavaju u istom čvoru. Posledično, $|\mathcal{F}_{C,m}| = |\mathcal{F}_{C,m-1}| + |\mathcal{F}_{C,m-2}|$ i $|\mathcal{L}_{C,m}| = |\mathcal{L}_{C,m-1}| + |\mathcal{L}_{C,m-2}|$, za $m \geq 3$.

Kako je $|\mathcal{F}_{C,1}| = |\{b\}| = |\mathcal{L}_{C,1}| = 1 = L_1$ i $|\mathcal{F}_{C,2}| = |\{bb, ac, ca\}| = |\mathcal{L}_{C,2}| = |\{bb, df, fd\}| = 3 = L_2$, zaključujemo da je $|\mathcal{F}_{C,m}| = |\mathcal{L}_{C,m}| = L_m$, za svako $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Definicija 3.13 *Kvadratna simetrična matrica $\mathcal{H}_m = [h_{ij}]$ reda $|V(\mathcal{D}_{C,m})|$ takva da je $h_{i,j} = 1$ akko se i -ti i j -ti čvor u digrafu $\mathcal{D}_{C,m}$ mogu dobiti jedan od drugog horizontalnom konverzijom naziva se *H-konverzionom matricom* za $\mathcal{D}_{C,m}$. Permutaciona binarna matrica $\mathcal{R}_m = [r_{ij}]$ reda $|V(\mathcal{D}_{C,m})|$ takva da je $r_{i,j} = 1$ akko je $v_j = \rho(v_i)$ gde su v_i i v_j redom i -ti i j -ti čvor digrafa $\mathcal{D}_{C,m}$, se naziva *rotacionom matricom* za $\mathcal{D}_{C,m}$.*

Lema 3.15 Ako $f_m^{TnC}(n)$, $f_{m,p}^{TG}(n)$ i $f_{m,p}^{KB}(n)$ ($m \geq 2$) označavaju broj 2-faktora od $TnC_m(n)$, $TG_m^{(p)}(n)$ i $KB_m^{(p)}(n)$, redom, tada važi

$$f_m^{TnC}(n) = \sum_{\substack{v_i \in \mathcal{F}_{C,m} \\ v_j \in \mathcal{L}_{C,m}}} a_{i,j}^{(n-1)} = \sum_{v_i \in \mathcal{F}_{C,m}} a_{i,i}^{(n)} = a_{1,1}^{(n+1)} \quad (3.18)$$

$$f_{m,p}^{TG}(n) = \text{tr}(\mathcal{T}_{C,m}^n \cdot \mathcal{R}_m^p) = \text{tr}(\mathcal{R}_m^p \cdot \mathcal{T}_{C,m}^n) = \sum_{\substack{v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ v_i = \rho^p(v_j)}} a_{i,j}^{(n)} \quad (3.19)$$

$$f_m^{KB}(n) = \text{tr}(\mathcal{T}_{C,m}^n \cdot \mathcal{R}_m^p \cdot \mathcal{H}_m) = \text{tr}(\mathcal{R}_m^p \cdot \mathcal{H}_m \cdot \mathcal{T}_{C,m}^n) = \sum_{\substack{v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ \bar{v}_i = \rho^p(v_j)}} a_{i,j}^{(n)} \quad (3.20)$$

gde su $\mathcal{T}_{C,m} = [a_{ij}]$, $\mathcal{H}_m = [h_{ij}]$ i $\mathcal{R}_m = [r_{ij}]$ redom matrica susedstva (transfer matrica), H -konverziona i rotaciona matrica digrafa $\mathcal{D}_{C,m}$ i $v_1 = b^m$.

Dokaz. Broj svih mogućih kodnih matrica jednak je broju svih orijentisanih šetnji dužine $n - 1$ u digrafu $\mathcal{D}_{C,m}$ kod kojih početni i završni čvor zadovoljavaju Uslov prve i poslednje kolone iz Teoreme 1.2.

U slučaju $TnC_m(n)$, ovaj broj je jednak sumi (i, j) elemenata $(n - 1)$ -og stepena matrice $\mathcal{T}_{C,m}$, gde $v_i \in \mathcal{F}_{C,m}$ i $v_j \in \mathcal{L}_{C,m}$. Kako je svaki čvor iz $\mathcal{F}_{C,m}$ neposredni sledbenik bilo kog čvora iz $\mathcal{L}_{C,m}$, imamo da je $f_m^{TnC}(n) = \sum_{v_i \in \mathcal{F}_{C,m}} a_{i,i}^{(n)}$. Kako čvor b^m pripada i skupu $\mathcal{F}_{C,m}$ i $\mathcal{L}_{C,m}$, dobijamo da je traženi broj jednak $a_{1,1}^{(n+1)}$.

U slučaju $TG_m^{(p)}(n)$, broj svih mogućih kodnih matrica sa prvom kolonom v_i , gde $v_i \in V(\mathcal{D}_{C,m})$ jednak je broju svih orijentisanih šetnji dužine $n - 1$ u digrafu $\mathcal{D}_{C,m}$ koje počinju u čvoru v_i , a završavaju u nekom od prethodnika čvora $v_j = \rho^{m-p}(v_i)$ (Uslov 3 b) iz Teoreme 1.2) ili broju svih orijentisanih šetnji dužine n koje počinju u v_i i završavaju u $v_j = \rho^{m-p}(v_i)$ što predstavlja broj $a_{i,j}^{(n)}$ ((i, j) element n -tog stepena matrice $\mathcal{T}_{C,m}$). Posledično, ukupan broj 2-faktora od $TG_m^{(p)}(n)$ jednak je tragu matrice $\mathcal{T}_{C,m}^n \cdot \mathcal{R}_m^p$. Trag proizvoda kvadratnih matrica ne zavisi od redosleda množenja, tako da važi $f_{m,p}^{TG}(n) = \text{tr}(\mathcal{T}_{C,m}^n \cdot \mathcal{R}_m^p) = \text{tr}(\mathcal{R}_m^p \cdot \mathcal{T}_{C,m}^n)$.

Slučaj $KB_m^{(p)}(n)$ je sličan prethodnom. Prebrojavanje svih orijentisanih šetnji dužine $n - 1$ u $\mathcal{D}_{C,m}$ koje počinju u $v_i \in V(\mathcal{D}_{C,m})$ i završavaju u nekom od prethodnika od $v_j = \rho^{m-p}(\bar{v}_i) = \overline{\rho^p(v_i)}$ (Uslov 3(c) iz Teoreme 1.2) svodi se na traženje traga matrice $\mathcal{R}_m^p \cdot \mathcal{H}_m \cdot \mathcal{T}_{C,m}^n$ ili $\mathcal{T}_{C,m}^n \cdot \mathcal{R}_m^p \cdot \mathcal{H}_m$. $\square$

Lema 3.16 Broj čvorova digrafa $\mathcal{D}_{C,m}$ je $|V(\mathcal{D}_{C,m})| = 3^m + (-1)^m$.

Dokaz. Neka je d_m ($m \in \mathbb{N}$) broj svih cikličnih reči dužine m nad alfabetom $\{a, b, c, d, e, f\}$ koje zadovoljavaju Uslov kolone Teoreme 1.2. Taj broj je jednak broju svih zatvorenih orijentisanih šetnji (sa označenim prvim čvorom) dužine m u $\mathcal{D}_{ud}$, tj. tragu m -tog stepena matrice susedstva digrafa $\mathcal{D}_{ud}$. Kako je karakteristični polinom ove matrice $P(\lambda) = \lambda^4(1 + \lambda)(\lambda - 3)$, imamo da je

$d_m = 2d_{m-1} + 3d_{m-2}$, sa početnim uslovima $d_1 = 2$ (kardinalnost skupa $\{e, b\}$) i $d_2 = 10$ (kardinalnost skupa $\{ac, af, bb, ca, cd, dc, df, ee, fa, fd\}$). Rešavajući gornju rekurentnu relaciju, dobijamo $d_m = (-1)^m + 3^m$ ($m \in \mathbb{N}$), što implicira da je $|V(\mathcal{D}_{C,m})| \leq (-1)^m + 3^m$. Kako se svaka ciklična reč w može pojaviti kao kolona u kodnoj matrici grafa $TG_m^{(0)}(2)$ jer $w \rightarrow w' \rightarrow w''$, sledi da važi $|V(\mathcal{D}_{C,m})| = (-1)^m + 3^m$. $\square$

Lema 3.17 *Digraf $\mathcal{D}_{C,m}$ za $m \geq 2$ je nepovezan. Svaka njegova komponenta je jako povezan digraf.*

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu za linearni slučaj. Preciznije, ako su dve reči w i v susedni čvorovi u $\mathcal{D}_{C,m}$, tada brojevi jedinica u njihovim outlet rečima moraju biti iste parnosti. Kako postoje dva čvora u $\mathcal{D}_{C,m}$ sa outlet rečima u kojima su brojevi jedinica različite parnosti (npr. reči $ab^{m-2}f$ i b^m), zaključujemo da u digrafu $\mathcal{D}_{C,m}$ postoje bar dve komponente.

Primetimo da za svaki luk $u \rightarrow w$ u digrafu $\mathcal{D}_{C,m}$ važi da je i čvor u dostižan iz w orijentisanom šetnjom $w \rightarrow w' \rightarrow u' \rightarrow u$, što sledi iz osobina vertikalne konverzije (Stav 1.2). Otuda sledi da je svaki čvor dostižan (orijentisanom šetnjom) iz svakog drugog čvora iste komponente, što potvrđuje drugi deo ove leme. $\square$

Neka je $\mathcal{D}_{C,m} = \mathcal{A}_{C,m} \cup \mathcal{B}_{C,m}$, $m \geq 1$, gde je $\mathcal{A}_{C,m}$ komponenta od $\mathcal{D}_{C,m}$, koja sadrži čvor e^m ($m \geq 1$) a $\mathcal{B}_{C,m}$ je unija preostalih komponenti. Uvodimo i oznaku $\mathcal{N}_{C,m}$ za komponentu od $\mathcal{D}_{C,m}$, koja sadrži čvor b^m ($m \geq 1$) (ova komponenta je dovoljna za prebrojavanje 2-faktora tankog cilindra $TnC_m(n)$).

Lema 3.18 $\mathcal{A}_{C,m} \equiv \mathcal{N}_{C,m}$ akko je m parno.

Dokaz. Kada je m parno, čvorovi e^m i b^m su povezani (pripadaju istoj komponenti) jer $e^m \rightarrow (df)^{m/2} \rightarrow b^m$, tj. $\mathcal{A}_{C,m} \equiv \mathcal{N}_{C,m}$. Kada je m neparno, brojevi jedinica u outlet rečima čvorova u $V(\mathcal{N}_{C,m})$ i $V(\mathcal{A}_{C,m})$ su različite parnosti, stoga je $\mathcal{A}_{C,m} \not\equiv \mathcal{N}_{C,m}$. $\square$

Dva čvora u $\mathcal{D}_{C,m}$ koja imaju istu outlet reč, imaju isti skup neposrednih sledbenika. Grupišemo sve čvorove iz $V(\mathcal{D}_{C,m})$ koji imaju istu outlet reč i zamenjujemo ih sa jednim čvorom, označenim njihovom zajedničkom outlet rečju. Zatim zamenjujemo sve lukove iz $\mathcal{D}_{C,m}$ koji počinju u čvorovima koji se sažimaju (tj. koji imaju istu outlet reč) i završavaju u istom čvoru sa samo jednim lukom. Na ovaj način smo redukovali transfer digraf $\mathcal{D}_{C,m}$ u $\mathcal{D}_{C,m}^*$, čiju matricu susedstva (transfer matricu) označavamo sa $\mathcal{T}_{C,m}^*$.

Primer 10 Čvorovi $abbc, abfe, afdc, cdfa, edbc, edfe \in V(\mathcal{D}_{C,4})$ sa istom outlet rečju 1001 su svi zamenjeni sa $1001 \in V(\mathcal{D}_{C,4}^*)$. Svi lukovi koji počinju u ovim čvorovima i završavaju u $dcaf$ su zamenjeni jednim lukom: $1001 \rightarrow 0110$. Međutim, isto važi i za lukove koji počinju u ovim čvorovima i završavaju u čvoru $facd$. Ovo rezultuje pojavom paralelnih lukova ($1001 \rightarrow 0110$) u $\mathcal{D}_{C,4}^*$.

U linearnom slučaju digraf $\mathcal{D}_{L,m}^*$ je prost (tj. bez višestrukih lukova) jer dva različita čvora iz $V(\mathcal{D}_{L,m})$ sa istom outlet rečju ne mogu imati istog neposrednog prethodnika. Kod cikličnih reči je drugačije. Tačnije, za dve binarne reči u i w dužine m , postoje najviše dva čvora iz $V(\mathcal{D}_{C,m})$ čije su inlet i outlet reči redom u i w . Drugim rečima, ako su u koloni posmatranog grafa date horizontalne grane 2-faktora, ako takav 2-faktor uopšte postoji, tada imamo najviše dve mogućnosti za izbor vertikalnih grana te kolone kao grana 2-faktora. Ovo znači da su elementi matrice $\mathcal{T}_{C,m}^*$ iz skupa $\{0, 1, 2\}$.

Teorema 3.16 Matrica susedstva $\mathcal{T}_{C,m}^*$ digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je simetrična matrica, tj. $\mathcal{T}_{C,m}^* = (\mathcal{T}_{C,m}^*)^T$.

Dokaz. Pretpostavimo da $v \rightarrow w$, gde $v, w \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$. Tada postoje čvorovi $x, y \in V(\mathcal{D}_{C,m})$ takvi da $x \rightarrow y$, gde je $o(x) = v$ i $o(y) = w$. Kako je $v = o(x) = i(y) = o(y')$ i $y \rightarrow y'$, imamo da $w \rightarrow v$. $\square$

Teorema 3.17 Digraf $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je nepovezan. Svaka njegova komponenta je jako povezan digraf.

Dokaz. Primetimo da svi čvorovi iz $\mathcal{D}_{C,m}$ koji su slepljeni u jedan čvor pripadaju istoj komponenti, pa takvo lepljenje ne smanjuje broj komponenti, te tvrđenje teoreme sledi direktno iz Leme 3.17 $\square$

Komponentu od $\mathcal{D}_{C,m}^*$ koja sadrži cikličnu reč $0^m \equiv 00\dots 0$ označavamo sa $\mathcal{N}_{C,m}^*$. Komponentu od $\mathcal{D}_{C,m}^*$ koja sadrži cikličnu reč 1^m označavamo sa $\mathcal{A}_{C,m}^*$, a uniju preostalih komponenti sa $\mathcal{B}_{C,m}^*$:

Primer 11 Matrice susedstva digrafova $\mathcal{A}_{C,m}^*$, $\mathcal{N}_{C,m}^*$ i $\mathcal{B}_{C,m}^*$ za $m = 2$, $m = 3$ i $m = 4$ su prikazane ispod:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{A}_{C,2}}^* = \mathcal{T}_{\mathcal{N}_{C,2}}^* &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 = 00 \\ v_2 = 11 \end{matrix} \quad i \quad \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{C,2}}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 = 10 \\ v_2 = 01 \end{matrix} ; \\ \mathcal{T}_{\mathcal{N}_{C,3}}^* = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{C,3}}^* &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 = 000 \\ v_2 = 101 \\ v_3 = 011 \\ v_4 = 110 \end{matrix} \quad i \quad \mathcal{T}_{\mathcal{A}_{C,3}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 = 111 \\ v_2 = 001 \\ v_3 = 100 \\ v_4 = 010 \end{matrix} ; \\ \mathcal{T}_{\mathcal{A}_{C,4}}^* = \mathcal{T}_{\mathcal{N}_{C,4}}^* &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 = 0000 \\ v_2 = 1111 \\ v_3 = 0011 \\ v_4 = 0110 \\ v_5 = 1100 \\ v_6 = 1001 \end{matrix} \quad i \quad \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{C,4}}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{C,4}}^{*(1)} & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{C,4}}^{*(2)} \end{bmatrix}, \text{ gde su} \\ \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{C,4}}^{*(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 = 0001 \\ v_2 = 0111 \\ v_3 = 1101 \\ v_4 = 0100 \\ v_5 = 1011 \\ v_6 = 1110 \\ v_7 = 0010 \\ v_8 = 1000, \end{matrix} \quad i \quad \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{C,4}}^{*(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 = 0101 \\ v_2 = 1010 \end{matrix} . \end{aligned}$$

Teorema 3.18 Broj čvorova digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je $|V(\mathcal{D}_{C,m}^*)| = 2^m$.

Dokaz. Dokazaćemo da postoji najmanje jedan čvor $x \in V(\mathcal{D}_{C,m})$ sa $o(x) = v$, gde je v proizvoljna ciklična binarna reč dužine m . Na osnovu Teoreme 2.5 znamo da se svaka binarna m -reč, osim reči $0(10)^{(m-1)/2}$ za neparno m , pojavljuje kao čvor u $\mathcal{D}_{L,m}^*$, koji je poddigraf od $\mathcal{D}_{C,m}^*$. Tako ostaje da se nađe $x \in V(\mathcal{D}_{C,m})$ sa $o(x) = 010101\dots 010$ (za neparno m). Kako $x = (fa)^{(m-1)/2}b \rightarrow (cd)^{(m-1)/2}b$, $v = o(x)$ pripada istoj komponenti od $\mathcal{D}_{C,m}^*$ kao i $o((cd)^{(m-1)/2}b) = 1010\dots 100$, što potvrđuje tvrđenje teoreme. $\square$

Teorema 3.19 Broj grana digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je $|E(\mathcal{D}_{C,m}^*)| = 3^m + (-1)^m$.

Dokaz. Uspostavljamo bijekciju između skupova $E(\mathcal{D}_{C,m}^*)$ i $V(\mathcal{D}_{C,m})$ na sledeći način:

- Jednostruki luk vw ($v \rightarrow w$) iz $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je uparen sa tačno jednim čvorom $x \in V(\mathcal{D}_{C,m})$, čiji se svi ulazni lukovi zamenjuju lukom vw . Jasno, $o(x) = w$, $(\forall z \in V(\mathcal{D}_{C,m}))(z \rightarrow x \Rightarrow o(z) = v)$, i ne postoji čvor $y \in V(\mathcal{D}_{C,m})$ sa $o(y) = w$ čiji ulazni lukovi počinju u čvoru čija je outlet reč v .
- Dvostruki luk vw (dva paralelna luka) u $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je uparen sa tačno dva čvora x i y iz $V(\mathcal{D}_{C,m})$, gde se svi ulazni lukovi od x zamenjuju jednim od dva paralelna luka vw i svi ulazni lukovi od y zamenjuju drugim. Dakle, $o(x) = o(y) = w$, $(\forall z \in V(\mathcal{D}_{C,m}))((z \rightarrow x \Rightarrow o(z) = v) \wedge (z \rightarrow y \Rightarrow o(z) = v))$, i x i y su jedina dva čvora u $\mathcal{D}_{C,m}$ sa ovim osobinama.

Uspostavljena bijekcija zajedno sa Lemom 3.16 dokazuje teoremu. $\square$

Definicija 3.14 H -konverzionna matrica $\mathcal{H}_m^* = [h_{ij}]$ za $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je kvadratna binarna matrica reda $|V(\mathcal{D}_{C,m}^*)|$ u kojoj je $h_{i,j} = 1$ akko je $v_i = \bar{v}_j$ gde $v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$.

Rotaciona matrica $\mathcal{R}_m^* = [r_{ij}]$ za $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je permutaciona matrica reda $|V(\mathcal{D}_{C,m}^*)|$ u kojoj je $r_{i,j} = 1$ akko je $\rho(v_i) = v_j$ gde $v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$.

Primetimo da je matrica $\mathcal{H}_m^*$ simetrična jer važi $(\forall i, j)(v_i = \bar{v}_j \Leftrightarrow v_j = \bar{v}_i)$, a da je $(\mathcal{R}_m^*)^m$ jedinična matrica. Proces prebrojavanja 2-faktora se poboljšava upotrebom nove transfer matrice $\mathcal{T}_{C,m}^*$:

Teorema 3.20

$$f_m^{TnC}(n) = a_{1,1}^{(n)} \quad (3.21)$$

$$f_{m,p}^{TG}(n) = \text{tr}((\mathcal{R}_m^*)^p \cdot (\mathcal{T}_{C,m}^*)^n) = \text{tr}((\mathcal{T}_{C,m}^*)^n \cdot (\mathcal{R}_m^*)^p) = \sum_{\substack{v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*) \\ v_i = \rho^p(v_j)}} a_{i,j}^{(n)} \quad (3.22)$$

$$f_{m,p}^{KB}(n) = \text{tr}((\mathcal{R}_m^*)^p \cdot \mathcal{H}_m^* \cdot (\mathcal{T}_{C,m}^*)^n) = \text{tr}((\mathcal{T}_{C,m}^*)^n \cdot (\mathcal{R}_m^*)^p \cdot \mathcal{H}_m^*) = \sum_{\substack{v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*) \\ \bar{v}_i = \rho^p(v_j)}} a_{i,j}^{(n)}, \quad (3.23)$$

gde je $\mathcal{T}_{C,m}^* = [a_{ij}]$ matrica susedstva digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$ i $v_1 \equiv 00 \dots 0$.

Dokaz.

Za posmatrani digraf $(\mathcal{D}_{C,m}$ ili $\mathcal{D}_{C,m}^*)$, broj svih orijentisanih šetnji dužine n koje počinju čvorom x i završavaju čvorom y označavamo sa $\mathcal{W}_x^y(n)$. Podsetimo se da je broj $\mathcal{W}_{v_i}^{v_j}(n)$, gde $v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$, jednak $a_{i,j}^{(n)}$, tj. (i, j) elementu n -tog stepena matrice $\mathcal{T}_{C,m}^*$. Prisetimo da

$$\mathcal{W}_{v_i}^{v_j}(n) = \sum_{\substack{y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ o(y) = v_j}} \mathcal{W}_x^y(n), \text{ gde } x \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \text{ i } o(x) = v_i. \quad (3.24)$$

Koristeći ovo i Lemu 3.15, imamo da je

$$f_m^{TnC}(n) = \mathcal{W}_{b_m^m}^{b_m^m}(n+1) = \sum_{y \in \mathcal{L}_m} \mathcal{W}_{b_m^m}^y(n) = \mathcal{W}_{0^m}^{0^m}(n) = a_{1,1}^{(n)},$$

čime je teorema dokazana za $G = TnC_m(n)$.

U cilju da dobijemo izraze i za preostala dva slučaja, uočimo da je

$$\mathcal{W}_{x_1}^y(n) = \mathcal{W}_{x_2}^y(n), \text{ za sve } x_1, x_2, y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \text{ gde je } o(x_1) = o(x_2). \quad (3.25)$$

Koristeći (3.24) i (3.25), za svaki prirodan broj k i $v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$, dobijamo

$$\mathcal{W}_{\rho^k(v_j)}^{v_j}(n) = \sum_{\substack{y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ o(y) = o(y_1) = v_j}} \mathcal{W}_{\rho^k(y_1)}^y(n) = \sum_{\substack{y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ o(y) = v_j}} \mathcal{W}_{\rho^k(y)}^y(n). \quad (3.26)$$

Primenjujući Lemu 3.15 ponovo i (3.26) za $TG_m^{(p)}(n)$, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{m,p}^{TG}(n) &= \sum_{\substack{x, y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ x = \rho^p(y)}} \mathcal{W}_x^y(n) = \sum_{v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)} \sum_{\substack{y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ o(y) = v_j}} \mathcal{W}_{\rho^p(y)}^y(n) = \\ &= \sum_{v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)} \mathcal{W}_{\rho^p(v_j)}^{v_j}(n) = \sum_{\substack{v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*) \\ v_i = \rho^p(v_j)}} a_{i,j}^{(n)} = \text{tr}((\mathcal{R}_m^*)^p \cdot (\mathcal{T}_{C,m}^*)^n) = \text{tr}((\mathcal{T}_{C,m}^*)^n \cdot (\mathcal{R}_m^*)^p). \end{aligned}$$

Procedura je slična i za $KB_m^{(p)}(n)$. Iz (3.24) i (3.25) i Stava 1.3, za prirodan broj k i $v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$, dobijamo

$$\mathcal{W}_{\rho^k(v_j)}^{v_j}(n) = \sum_{\substack{y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ o(y) = o(y_1) = v_j}} \mathcal{W}_{\rho^k(y_1)}^y(n) = \sum_{\substack{y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ o(y) = v_j}} \mathcal{W}_{\rho^k(y)}^y(n). \quad (3.27)$$

Sada Lema 3.15 i jednakost (3.27) vode do

$$\begin{aligned} f_{m,p}^{KB}(n) &= \sum_{\substack{x, y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ \bar{x} = \rho^p(y)}} \mathcal{W}_x^y(n) = \sum_{y \in V(\mathcal{D}_{C,m})} \mathcal{W}_{\rho^p(y)}^y(n) = \\ &= \sum_{v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)} \sum_{\substack{y \in V(\mathcal{D}_{C,m}) \\ o(y) = v_j}} \mathcal{W}_{\rho^p(y)}^y(n) = \sum_{v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)} \mathcal{W}_{\rho^p(v_j)}^{v_j}(n) = \\ &= \sum_{\substack{v_i, v_j \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*) \\ v_j = \rho^{m-p}(\bar{v}_i)}} a_{i,j}^{(n)} = \text{tr}((\mathcal{R}_m^*)^p \cdot \mathcal{H}_m^* \cdot (\mathcal{T}_{C,m}^*)^n) = \text{tr}((\mathcal{T}_{C,m}^*)^n \cdot (\mathcal{R}_m^*)^p \cdot \mathcal{H}_m^*). \end{aligned}$$

□

Dalja redukcija transfer matrice je moguća samo u slučaju $G = TnC_m(n)$ koristeći sledeće:

Lema 3.19 *Ako $v \in V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$, tada i $\bar{v} \in V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$ i $\rho^k(v) \in V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$ ($0 \leq k \leq m-1$). Dodatno, $\mathcal{W}_{\bar{v}}^{0^m}(n) = \mathcal{W}_v^{0^m}(n) = \mathcal{W}_{\rho^k(v)}^{0^m}(n) = \mathcal{W}_{\rho^k(\bar{v})}^{0^m}(n)$ za svako $v \in V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$ ($1 \leq k \leq m-1$).*

Dokaz. Ako je $o(x) = v$, gde $x \in V(\mathcal{N}_{C,m})$, tada postoji prirodan broj $n \geq 1$ za koji je $\mathcal{W}_x^{b^m}(n) \neq 0$. Koristeći osnu simetriju, ako $x \rightarrow y$, tada $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ i $\bar{b}^m = b^m$, dobijamo da je $\mathcal{W}_{\bar{x}}^{b^m}(n) = \mathcal{W}_x^{b^m}(n) \neq 0$, što implicira da $\bar{x} \in V(\mathcal{N}_{C,m})$. Kako je $\bar{v} = o(\bar{x})$, zaključujemo da $\bar{v} \in V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$ i $\mathcal{W}_{\bar{v}}^{0^m}(n) = \mathcal{W}_v^{0^m}(n)$.

Slično koristeći rotacionu simetriju, ako $x \rightarrow y$, tada $\rho(x) \rightarrow \rho(y)$ i $\rho(b^m) = b^m$, imamo da je $\mathcal{W}_{\rho(x)}^{b^m}(n) = \mathcal{W}_x^{b^m}(n) \neq 0$. Samim tim je $\mathcal{W}_{\rho(v)}^{0^m}(n) = \mathcal{W}_v^{0^m}(n) \neq 0$ i $\rho(v) \in V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$. Stoga, $\rho^k(v) \in V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$ i $\mathcal{W}_{\rho^k(v)}^{0^m}(n) = \mathcal{W}_v^{0^m}(n) \neq 0$ za proizvoljni prirodan broj k . $\square$

Sada možemo da slepimo čvorove $v, \bar{v}, \rho^k(v)$ i $\rho^k(\bar{v})$ ($1 \leq k \leq m-1$ i $v \in V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$) u jedan čvor, što rezultira novim digrafom $\mathcal{N}_{C,m}^{**}$. Tokom lepljenja zadržavamo samo lukove koji kreću iz jednog od ovih čvorova i brišemo one koji počinju u ostalim. Višestruki lukovi se pojavljuju kada slepljeni čvorovi imaju zajedničkog prethodnika.

Primer 12 Za $m = 4$, tokom prelaska sa $\mathcal{N}_{C,4}^*$ na $\mathcal{N}_{C,4}^{**}$, čvorovi v_3, v_4, v_5 i v_6 su slepljeni. Matrica susedstva od $\mathcal{N}_{C,4}^{**}$ se dobija dodavanjem četvrte, pete i šeste kolone trećoj. Posle toga dodate kolone

i odgovarajući redovi se uklanjaju. Nastala matrica je $\mathcal{T}_{\mathcal{N}_{C,4}}^{**} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ gde su $v_1 = 0000, v_2 = 1111, v_3 = 0011$.

Posledica 3.3 Broj $f_m^{TnC}(n)$ je jednak elementu $a_{1,1}^{(n)}$ od n -tog stepena matrice susedstva digrafa $\mathcal{N}_{C,m}^{**}$, gde je $v_1 \equiv 0^m$.

Dokaz. Broj $\mathcal{W}_v^{0^m}(n)$ ostaje isti u oba digrafa $\mathcal{N}_{C,m}^*$ i $\mathcal{N}_{C,m}^{**}$ što je direktna posledica Leme 3.19. $\square$

3.2 Kompjuterski rezultati i otvorena pitanja

Ceo proces prebrojavanja za ciklične mrežne grafove je dosta sličan onom za linearne mrežne grafove, iako je u cikličnom slučaju posmatran veći broj grafova za fiksno m usled postojanja različitih stepena uvrtnja ($0 \leq p \leq m-1$) za $TG_m^{(p)}(n)$ i $KB_m^{(p)}(n)$. Napisali smo kompjuterske programe za dobijanje matrica susedstva digrafova $\mathcal{D}_{C,m}, \mathcal{D}_{C,m}^*, \mathcal{N}_{C,m}, \mathcal{N}_{C,m}^*$ i $\mathcal{N}_{C,m}^{**}$ ($m \geq 2$) i početnih članova traženih nizova $f_m^{TnC}(n), f_{m,p}^{TG}(n)$ i $f_{m,p}^{KB}(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Podaci koji se odnose na veličinu ovih digrafova su prikazani u Tabelama 3.5 i 3.6.

Analizirajući kompjuterske podatke za $m \leq 10$ (u slučaju $TnC_m(n)$ za $m \leq 18$), uočili smo neke osobine digrafova $\mathcal{D}_{C,m}, \mathcal{D}_{C,m}^*$ i $\mathcal{N}_{C,m}^*$ koje smo i dokazali u prethodnom poglavlju za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$. Osobine koje se odnose na strukturu digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$ dajemo u poglavlju 3.3.

Na osnovu dobijenih numeričkih rezultata, izračunali smo generativne funkcije

$$\mathcal{F}_m^{TnC}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f_m^{TnC}(n) x^n \quad (2 \leq m \leq 18), \quad \mathcal{F}_{m,p}^{TG}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f_{m,p}^{TG}(n) x^n \quad (2 \leq m \leq 10) \text{ i}$$

$$\mathcal{F}_{m,p}^{KB}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f_{m,p}^{KB}(n) x^n \quad (2 \leq m \leq 10) \text{ koristeći standardne procedure.}$$

Podsetimo se da su to racionalne funkcije čiji imenilac pruža važne informacije o traženim nizovima. Kejli-Hamiltonova teorema garantuje rekurentnu relaciju za svaki takav niz i možemo da je „pročitamo” iz imenioca odgovarajuće generativne funkcije:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ V(\mathcal{D}_{C,m}) $	10	26	82	242	730	2186	6562	19682	59050
$ V(\mathcal{D}_{C,m}^*) $	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$ V(\mathcal{A}_{C,m}^*) $	2	4	6	16	20	64	70	256	252
$ V(\mathcal{B}_{C,m}^{*(1)}) $	2	4	8	16	30	64	112	256	420
$ V(\mathcal{B}_{C,m}^{*(2)}) $	-	-	2	-	12	-	56	-	240
$ V(\mathcal{B}_{C,m}^{*(3)}) $	-	-	-	-	2	-	16	-	90
$ V(\mathcal{B}_{C,m}^{*(4)}) $	-	-	-	-	-	-	2	-	20
$ V(\mathcal{B}_{C,m}^{*(5)}) $	-	-	-	-	-	-	-	-	2

Tabela 3.5: Brojevi čvorova u $\mathcal{D}_{C,m}$, $\mathcal{D}_{C,m}^*$, komponentama digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$.

Primer 13 Generativna funkcija za Klajnovu bocu $KB_4^{(1)}(n)$ je

$$\mathcal{F}_{4,1}^{KB}(x) = -\frac{6(-1+x)x(1+2x)}{(1+x)(1-7x+4x^2)} + \frac{52x^2-100x^4}{(-1+x)(1+x)(-1+5x)(1+5x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2} =$$

$$-\frac{6(x+10x^2-102x^3-44x^4+789x^5-302x^6-1000x^7+600x^8)}{-1+7x+26x^2-210x^3-9x^4+903x^5-416x^6-700x^7+400x^8}.$$

Odgovarajuća rekurentna relacija za niz $f_{4,1}^{KB}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ je

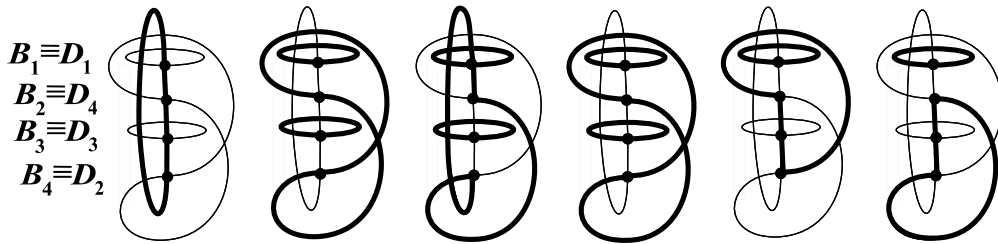
$$f_{4,1}^{KB}(n) = 7f_{4,1}^{KB}(n-1) + 26f_{4,1}^{KB}(n-2) - 210f_{4,1}^{KB}(n-3) - 9f_{4,1}^{KB}(n-4) + 903f_{4,1}^{KB}(n-5) - 416f_{4,1}^{KB}(n-6) - 700f_{4,1}^{KB}(n-7) + 400f_{4,1}^{KB}(n-8).$$

Gornja rekurentna relacija zajedno sa početnim uslovima:

$$f_{4,1}^{KB}(1) = 6 \text{ (videti Sliku 3.22)}, f_{4,1}^{KB}(2) = 102, f_{4,1}^{KB}(3) = 258, f_{4,1}^{KB}(4) = 2934, f_{4,1}^{KB}(5) = 10506,$$

$$f_{4,1}^{KB}(6) = 98334, f_{4,1}^{KB}(7) = 426642 \text{ i } f_{4,1}^{KB}(8) = 3500454$$

potpuno određuje niz $f_{4,1}^{KB}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.



Slika 3.22: Graf $KB_4^{(1)}(1)$ sa svojih šest 2-faktora.

Generativne funkcije $\mathcal{F}_m^{TnC}(x)$, za $2 \leq m \leq 18$, kao i $\mathcal{F}_{m,p}^{TG}(x)$ i $\mathcal{F}_{m,p}^{KB}(x)$, date kao sume generativnih funkcija po komponentama od $\mathcal{D}_{C,m}^*$, za $2 \leq m \leq 10$, mogu se naći u Prilogu. Red rekurentnih relacija, dobijen iz polinoma u imeniocu pridružene racionalne funkcije kao generativne funkcije, za $TnC_m(n)$, $TG_m^{(p)}(n)$ i $KB_m^{(p)}(n)$ je prikazan redom u Tabelama 3.6, 3.7 i 3.8.

Kod torus grafova primetili smo da se neke generativne funkcije poklapaju.

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ \mathcal{F}_{C,m} = \mathcal{L}_{C,m} $	3	4	7	11	18	29	47	76	123
$ V(\mathcal{N}_{C,m}) $	6	13	38	121	282	1093	2214	9841	17906
$ V(\mathcal{N}_{C,m}^*) $	2	4	6	16	20	64	70	256	252
$ V(\mathcal{N}_{C,m}^{**}) $	2	2	3	4	6	9	11	23	26
red	2	2	3	4	6	8	10	16	21

m	11	12	13	14	15	16	17	18
$ \mathcal{F}_{C,m} = \mathcal{L}_{C,m} $	199	322	521	843	1364	2207	3571	5778
$ V(\mathcal{N}_{C,m}^*) $	1024	924	4096	$\ll$	$\ll$	$\ll$	$\ll$	$\ll$
$ V(\mathcal{N}_{C,m}^{**}) $	63	62	190	170	612	487	2056	1530
red	32	39	64	73	$\ll$	$\ll$	$\ll$	$\ll$

Tabela 3.6: Brojevi čvorova u $\mathcal{F}_{C,m}$, $\mathcal{L}_{C,m}$, $\mathcal{N}_{C,m}$, $\mathcal{N}_{C,m}^*$ i $\mathcal{N}_{C,m}^{**}$ i red rekurentne relacije za $TnC_m(n)$.

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p=0$	4	3	8	10	26	35	105	132	370
$p=1$	4	3	8	10	25	35	80	132	369
$p=2$	-	3	7	10	24	35	61	132	370
$p=3$	-	-	8	10	26	35	80	132	369
$p=4$	-	-	-	10	24	35	105	132	370
$p=5$	-	-	-	-	25	35	80	132	369

Tabela 3.7: Red rekurentnih relacija za torus grafove $TG_m^{(p)}(n)$.**Teorema 3.21**

$$\mathcal{F}_{m,p}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{m,m-p}^{TG}(x), \text{ za sve } 1 \leq p \leq m-1.$$

Dokaz. Kako je $(\mathcal{R}_m^*)^m = I$, imamo da je $((\mathcal{R}_m^*)^p)^T = (\mathcal{R}_m^*)^{m-p}$. Dodatno, matrica $\mathcal{T}_{C,m}^*$ i svi njeni stepeni su simetrične matrice. Otuda važi

$$\begin{aligned} f_{m,p}^{TG}(n) &= \text{tr}((\mathcal{R}_m^*)^p \cdot (\mathcal{T}_{C,m}^*)^n) = \text{tr}(((\mathcal{R}_m^*)^p \cdot (\mathcal{T}_{C,m}^*)^n)^T) = \text{tr}\left(\left((\mathcal{T}_{C,m}^*)^n\right)^T \cdot ((\mathcal{R}_m^*)^p)^T\right) = \\ &= \text{tr}((\mathcal{T}_{C,m}^*)^n \cdot (\mathcal{R}_m^*)^{m-p}) = \text{tr}((\mathcal{R}_m^*)^{m-p} \cdot (\mathcal{T}_{C,m}^*)^n) = f_{m,m-p}^{TG}(n). \end{aligned} \quad (3.28)$$

□

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$0 \leq p \leq m-1$	4	2	8	4	17	8	34	16	66

Tabela 3.8: Red rekurentne relacije za Klajnove boce $KB_m^{(p)}(n)$.

Poklapanja generativnih funkcija kod Klajnovne boce su manje očigledna, te ih dajemo u formi hipoteze.

Hipoteza 2 *Ako je m neparno, generativna funkcija $\mathcal{F}_{m,p}^{KB}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1}^{\infty} f_{m,p}^{KB}(n)x^n$ je invarijantna u odnosu na promenu vrednosti stepena uvrtaanja p ($0 \leq p \leq m-1$). Ako je m parno, tada vrednosti $f_{m,p}^{KB}(n)$ zavise jedino od parnosti broja p .*

Slično kao u linearnom slučaju, dobijeni kompjuterski rezultati otkrivaju da se sopstvene vrednosti maksimalnog modula matrice susedstva digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$ i njegove komponente $\mathcal{A}_{C,m}^*$ (one koja sadrži čvor 1^m) poklapaju. Kako je digraf $\mathcal{N}_{C,m}^*$ izomorfan sa $\mathcal{A}_{C,m}^*$ (u skladu sa Lemom 3.18 i Teoremom 3.24), njihove sopstvene vrednosti maksimalnog modula se takođe poklapaju. Ovaj maksimalni karakteristični koren je označen sa $\theta_{C,m}$. Neke od vrednosti $\theta_{C,m}$ i odgovarajućih koeficijenata a_m^{TnC} za $TnC_m(n)$ su date u Tabeli 3.9.

m	$\theta_{C,m}$	a_m^{TnC}	$a_{m,p}^{TG}$	$a_{m,p}^{KB}$
2	3	0.5	1	1
3	3.30277563773199464655961	0.36132495094369271949541	2	2
4	6.37228132326901432992531	0.20648058601107554045568	1	1
5	8.18892699556896444855102	0.14742465083948628541204	2	2
6	14.50643149404807519214675	0.083803607557435033268322	1	1
7	19.73524639197846469681942	0.060124577862634389701985	2	2
8	33.67678695772204595105959	0.033993311467178925450426	1	1
9	47.19198108116434356177681	0.024494324930673487693541	2	2
10	78.81886459182770309510614	0.013795808626212712909327	1	1
11	112.47596764975684359653883	0.0099731885141630148539155		
12	185.23985780663511179029955	0.0056015242668523217503199		
13	267.61048630198595550870131	0.0040594014830894625219171		
14	436.39957118470795413801428	0.0022751952682333538270877		
15	$\approx_{(400)} 636.07041461464648869768059$	$\approx_{(400)} 0.0016519675074264452373550$		
16	$\approx_{(300)} 1029.6591497906007164409665$	$\approx_{(300)} 0.00092436404208619807770845$		
17	$\approx_{(300)} 1510.8614061966116128903621$	$\approx_{(300)} 0.00067217371233189645627886$		
18	$\approx_{(300)} 2431.89478407418442105820$	$\approx_{(300)} 0.00037562107425215551890931$		

Tabela 3.9: Približne vrednosti za $\theta_{C,m}$, a_m^{TnC} za $1 \leq m \leq 18$ i $a_{m,p}^{TG}$ i $a_{m,p}^{KB}$ za $1 \leq m \leq 10$, gde $\approx_{(n)}$ pokazuje procenu zasnovanu na prvih n članova niza.

Svaka komponenta od $\mathcal{D}_{C,m}^*$ je jako povezan digraf i stoga je njena matrica nesvodljiva (ireducibilna). Pošto komponenta $\mathcal{A}_{C,m}^*$ ima petlju $1^m \rightarrow 1^m$, njena matrica $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_{C,m}^*}$ je primitivna (kvadratna nenegativna matrica za koju postoji stepen te matrice čiji su svi elementi pozitivni). Iz Peron–Frobenijusove teorije [66], zaključujemo da matrica $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_{C,m}^*}$ ima jednostruki, pozitivni karakteristični koren $\theta_{C,m}$ za koji je $\theta_{C,m} > |\mu|$, za sve druge sopstvene vrednosti μ digrafa $\mathcal{A}_{C,m}^*$. Ovo implicira da za neparne vrednosti od m , matrica $\mathcal{T}_m^*$ ima dominantni karakteristični koren $\theta_{C,m}$ koji ima algebarsku višestrukost 2 (Teorema 3.24), što koristeći dobro poznatu osobinu za trag matrice implicira da

$$f_{2k-1,0}^{TG} \sim 2\theta_{2k-1}^n, \text{ kada } n \rightarrow \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Međutim, kompjuterski podaci za neparno m pokazuju da je ne samo koeficijent $a_{m,0}^{TG} = 2$, nego i $a_{m,p}^{TG} = 2$, za sve $1 \leq p \leq m-1$, a isto važi i za koeficijent pridružen maksimalnom karakterističnom korenu $\theta_{C,m}$ za mrežni graf $KB_m^p(n)$, tj. $a_{m,p}^{KB} = 2$ za neparno m ($0 \leq p \leq m-1$).

Razlog zbog čega je dominantni (pozitivni) karakteristični koren za bilo koju komponentu $\mathcal{B}_m^{*(s)}$ ($1 \leq s \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$) manji od $\theta_{C,m}$ za parno m ostaje otvoreno pitanje. Ako usvojimo da je to tačno, tada dobijamo $f_{2k,0}^{TG} \sim \theta_{2k}^n$, kada $n \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{N}$).

Pitanje vezano za koeficijente $a_{m,p}^{TG}$ i $a_{m,p}^{KB}$ kada je m parno ostaje otvoreno iako podaci ukazuju da su oni jednaki jedinici za $m \leq 10$.

3.3 Struktura cikličnog 2-faktor transfer digrafa

Teorema 3.22 [31] *Za parno $m \geq 2$, digraf $\mathcal{D}_{C,m}^*$ ima tačno $\frac{m}{2} + 1$ komponenti, tj. $\mathcal{D}_{C,m}^* = \mathcal{A}_{C,m}^* \cup \left(\bigcup_{s=1}^{m/2} \mathcal{B}_{C,m}^{*(s)} \right)$, gde je $\mathcal{A}_{C,m}^*$ komponenta koja sadrži 1^m ,*

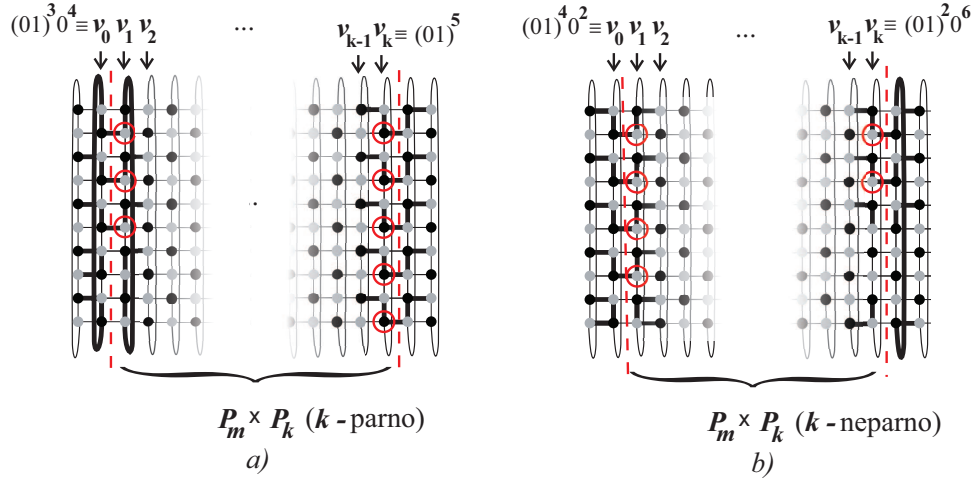
$$|V(\mathcal{A}_{C,m}^*)| = \binom{m}{m/2} \quad \text{ i } \quad |V(\mathcal{B}_{C,m}^{*(s)})| = 2 \binom{m}{m/2 - s}, \quad 1 \leq s \leq m/2.$$

Dokaz. Digraf $\mathcal{D}_{L,m}^*$ je poddigraf od $\mathcal{D}_{C,m}^*$. Jedina razlika je u novim dodatim lukovima. Dokazali smo da isto tvrđenje važi i za $\mathcal{D}_{L,m}^*$ (videti Teoremu 2.13). Stoga, dovoljno je dokazati da dve različite kraljice $Q_m^{(s_1)} = (01)^{s_1} 0^{m-2s_1}$ i $Q_m^{(s_2)} = (01)^{s_2} 0^{m-2s_2}$ ($0 \leq s_1 < s_2$) sa istom parnošću broja jedinica ($s_1 \equiv s_2 \pmod{2}$) nisu povezane u $\mathcal{D}_{C,m}^*$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da u $\mathcal{D}_{C,m}^*$ postoji orijentisana šetnja $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ dužine $k \in \mathbb{N}$, gde je $v_0 = Q_m^{(s_1)}$ i $v_k = Q_m^{(s_2)}$. Deo mreže grafa koji odgovara ovoj usmerenoj šetnji indukovano sa $m \cdot k$ čvorova (tanki cilindar) je bipartitan jer je m parno. Orijetisana šetnja $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ određuje pokrivajuću uniju puteva (otvorenih puteva i kontura) na ovoj mreži. Krajevi ovih otvorenih puteva pripadaju prvoj i/ili poslednjoj koloni cilindrične mreže. Svaka kontura (ako postoji) u ovoj uniji ima isti broj čvorova obe boje (recimo sive i crne). Međutim, za uniju otvorenih puteva to ne važi. Naime, ako je k parno (videti Sliku 3.23 a), razlika u broju otvorenih puteva sa oba krajnja čvora sive boje i broja onih sa krajnjim čvorovima crne boje je tačno $|\frac{s_1 - s_2}{2}| > 0$. Ako je k neparno (videti Sliku 3.23 b), svih $|\frac{s_1 + s_2}{2}|$ otvorenih puteva imaju završne čvorove iste boje. U oba slučaja dolazimo u kontradikciju sa činjenicom da je u posmatranom delu mreže broj čvorova obe boje isti.

Na ovaj način, dobijamo da je $\mathcal{A}_{C,m}^* = \langle S_m^{(0)} \rangle_{\mathcal{D}_{C,m}^*}$ i $\mathcal{B}_{C,m}^{*(s)} = \langle S_m^{(s)} \rangle_{\mathcal{D}_{C,m}^*}$, za $s = 1, 2, \dots, m/2$.

Posledično, $|V(\mathcal{A}_{C,m}^*)| = |S_m^{(0)}| = |V(\mathcal{A}_{L,m}^*)| = \binom{m}{m/2}$ i $|V(\mathcal{B}_{C,m}^{*(s)})| = |S_m^{(s)}| = |V(\mathcal{B}_{L,m}^{*(s)})| = 2 \binom{m}{m/2 - s}$, $1 \leq s \leq m/2$. $\square$



Slika 3.23: Za m parno i $s_1 \equiv s_2 \pmod{2}$ ($0 \leq s_1 < s_2$), kraljice $Q_m^{(s_1)} = (01)^{s_1} 0^{m-2s_1}$ i $Q_m^{(s_2)} = (01)^{s_2} 0^{m-2s_2}$ nisu povezane u $\mathcal{D}_{C,m}^*$.

Teorema 3.23 [31] Za parno m , sve komponente $\mathcal{B}_{C,m}^{*(s)}$ ($1 \leq s \leq \frac{m}{2}$) su bipartitni digrafovi. Čvorovi v i $\bar{v}$ pripadaju istoj komponenti, ali su u različitim klasama (različite boje).

Dokaz. U cilju da pokažemo da je komponenta $\mathcal{B}_{C,m}^{*(s)}$ ($1 \leq s \leq \frac{m}{2}$) bipartitan digraf $(R_m^{(s)}, G_m^{(s)})$, dovoljno je dokazati da svaki luk iz skupa $E(\mathcal{B}_{C,m}^{*(s)}) \setminus E(\mathcal{B}_{L,m}^{*(s)})$ povezuje čvorove različite boje (crvene i zelene). Posmatrajmo jedan takav luk $vw \in E(\mathcal{B}_{C,m}^{*(s)}) \setminus E(\mathcal{B}_{L,m}^{*(s)})$. Tada postoji $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \in V(\mathcal{D}_{C,m})$ za koji važi $i(\alpha) = v = v_1 v_2 \dots v_m$, $o(\alpha) = w = w_1 w_2 \dots w_m$, $\alpha_1 \in \{b, c, f\}$ i $\alpha_m \in \{a, b, d\}$. Kako je $\alpha \neq b^m$ ($o(b^m) = 0^m \in V(\mathcal{A}_{C,m}^*)$), tada postoji $J = \min\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq m-1 \wedge (v_j = 1 \vee w_j = 1)\}$. Oдавde zaključujemo da postoji luk $\rho^J(v) \rightarrow \rho^J(w)$ u $\mathcal{D}_{L,m}^*$. Naime, $\rho^J(\alpha) \in V(\mathcal{D}_{L,m})$, $i(\rho^J(\alpha)) = \rho^J(v)$ i $o(\rho^J(\alpha)) = \rho^J(w)$. Primetimo da za proizvoljnu binarnu reč $x = x_1 x_2 \dots x_m$ i $1 \leq j \leq m-1$, imamo da je $Z(\rho^j(x)) = (-1)^j Z(x)$. Posledično, čvorovi v i w pripadaju istom skupu $S_m^{(s)}$ ($1 \leq s \leq m/2$) koji sadrži $\rho^J(v)$ i $\rho^J(w)$. Kako čvorovi $\rho^J(v)$ i $\rho^J(w)$ pripadaju različitim skupovima $R_m^{(s)}$ i $G_m^{(s)}$ (pripadaju različitim klasama komponente $\mathcal{B}_{L,m}^{*(s)}$ u $\mathcal{D}_{L,m}^*$), to važi i za čvorove v i w . Drugi deo tvrđenja ove teoreme je prosta posledica istog tvrđenja iz linearnog slučaja (Teorema 2.13). $\square$

Teorema 3.24 [31] Za neparno $m \geq 1$, digraf $\mathcal{D}_{C,m}^*$ ima tačno dve komponente $\mathcal{A}_{C,m}^*$ i $\mathcal{N}_m^*$ koje su izomorfne i sa po 2^{m-1} čvorova.

Dokaz. Podsetimo se da kada je m neparno, za dvorske dame $L_m^{(s)} = (10)^{s+1} 0^{m-2s-2} \in G_m^{(s)} \subseteq S_m^{(s)}$, $1 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor - 1$ i $L_m^{(0)} = (10) 0^{m-2} \in S_m^{(0)}$ važi da je $Z(L_m^{(s)}) = -s$, $0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor - 1$. Za kraljice $Q_m^{(s)} = (01)^{(s-1)} 0^{m-2s+2} \in R_m^{(s)} \subseteq S_m^{(s)}$, $1 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor$ imamo da je $Z(Q_m^{(s)}) = s$. Dodatno, kraljica $Q_m^{(\lfloor m/2 \rfloor + 1)} = (01)^{\lfloor m/2 \rfloor} 0 \notin V(\mathcal{D}_{L,m}^*)$ sada pripada skupu $V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$ i $Z(Q_m^{(\lfloor m/2 \rfloor + 1)}) = \lfloor m/2 \rfloor + 1$. Digrafovi indukovani skupovima $S_m^{(s)}$, $s = 0, 1, 2, \dots, \lfloor m/2 \rfloor$ u $\mathcal{D}_{L,m}^*$ su povezani digrafovi. Jasno, oni su poddigrafovi od $\mathcal{D}_{C,m}^*$. Dokazujemo da svi čvorovi $v \in V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$ sa parnim $Z(v)$ pripadaju $\mathcal{A}_{C,m}^*$

- komponenti od $\mathcal{D}_{C,m}^*$ koja sadrži 1^m ($Z(1^m) = 0$), dok svi oni sa neparnim $Z(v)$ pripadaju $\mathcal{N}_{C,m}^*$ - komponenti od $\mathcal{D}_{C,m}^*$ koja sadrži 0^m ($Z(0^m) = 1$, čvorovi 1^m i 0^m nisu povezani jer su brojevi njihovih jedinica različite parnosti).

Primetimo da je broj jedinica u rečima $L_m^{(s)}$ i $Q_m^{(s+2)}$ ($0 \leq s \leq \lfloor m/2 \rfloor - 1$) jednak $(s+1)$. Direktno su povezane lukom u $\mathcal{D}_{C,m}^*$ jer postoji alfa reč $\alpha = f(af)^s ab^{m-2s-2} \in V(\mathcal{D}_{C,m})$ za koju je $i(\alpha) = L_m^{(s)}$ i $o(\alpha) = Q_m^{(s+2)}$. Na ovaj način dobijamo da se $V(\mathcal{A}_{C,m}^*)$ i $V(\mathcal{N}_{C,m}^*)$ sastoje od svih cikličnih binarnih reči v dužine m za koje je $Z(v)$ redom parno i neparno.

Izomorfizam između $\mathcal{A}_{C,m}^*$ i $\mathcal{N}_{C,m}^*$ je posledica izomorfizma između $\mathcal{A}_{C,m}$ - komponente od $\mathcal{D}_{C,m}$ koja sadrži e^m i $\mathcal{N}_{C,m}$ - komponente od $\mathcal{D}_{C,m}$ koja sadrži b^m . Dokažimo ovo drugo. Definišimo funkciju $f : \{a, b, c, d, e, f\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}$ sa $f : \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & d & c & b & a \end{pmatrix}$. Direktnom proverom zaključujemo da je f automorfizam digrafa $\mathcal{D}_{ud}$. Posledično, za svaku reč $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \in V(\mathcal{D}_{C,m})$, reč $f(\alpha_1)f(\alpha_2) \dots f(\alpha_m)$ takođe pripada $V(\mathcal{D}_{C,m})$.

Sada definišemo funkciju $F : V(\mathcal{D}_{C,m}) \rightarrow V(\mathcal{D}_{C,m})$ sa $F(\alpha) = \beta$ akko $\beta_i = f(\alpha_i)$, za sve $i = 1, 2, \dots, m$ gde je $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ i $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \in V(\mathcal{D}_{C,m})$.

Jasno, F je bijekcija i involucija jer isto važi za funkciju f . Funkcija f je takođe automorfizam digrafa $\mathcal{D}_{lr}$, što implicira da

$$(\forall \alpha, \beta \in V(\mathcal{D}_{C,m}))(\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow F(\alpha) \rightarrow F(\beta)).$$

Kako je $F(e^m) = b^m$, zaključujemo da su $\mathcal{A}_{C,m}$ i $\mathcal{N}_{C,m}$ izomorfni. Posledično, $\mathcal{A}_{C,m}^*$ i $\mathcal{N}_{C,m}^*$ su takođe izomorfni. $\square$

PRIMEDBA. Prisetimo da ako je $F(\alpha) = \beta$, gde je $o(\alpha) = v = v_1 v_2 \dots v_m$ i $o(\beta) = w = w_1 w_2 \dots w_m$, tada je $v_i = 0$ akko je $w_i = 1$, za svako $i = 1, 2, \dots, m$. Na ovaj način, izomorfizam između $\mathcal{A}_{C,m}^*$ i $\mathcal{N}_{C,m}^*$ je određen funkcijom $c : V(\mathcal{D}_{C,m}^*) \rightarrow V(\mathcal{D}_{C,m}^*)$ definisanom sa $c(v) = w = w_1 w_2 \dots w_m$, gde $v = v_1 v_2 \dots v_m$ i $w_i = \begin{cases} 0, & \text{if } v_i = 1 \\ 1, & \text{if } v_i = 0 \end{cases}$. Jasno, $c(c(v)) = v$. Možemo reći da su reči v i w međusobno komplementarne.

Zaključak

U ovoj disertaciji prezentovana su dva algoritma za određivanje ukupnog broja pokrivajućih unija kontura (2-faktora) za šest klasa mrežnih grafova fiksne širine m , sa $m \cdot n$ čvorova ($m, n \in \mathbb{N}$) i kvadratnim elementarnim ćelijama i to za: Mrežni graf pravougaonog oblika $RG_m(n)$, Široki cilindar $TkC_m(n)$, Mebijusovu traku $MS_m(n)$, Tanki cilindar $TnC_m(n)$, Torus $TG_m^{(p)}(n)$ i Klajnovu bocu $KB_m^{(p)}(n)$. U tu svrhu, za prve tri klase mrežnih grafova, koje nazivamo linearnim, uvedena su i ispitana dva digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ i $\mathcal{D}_{L,m}^*$, dok su za druge tri klase, koje nazivamo cikličnim uvedeni i ispitani digrafovi u oznaci $\mathcal{D}_{C,m}$ i $\mathcal{D}_{C,m}^*$. Digrafovi koji nose oznaku „*” su dobijeni od onog sa istim oznakama, ali bez tog znaka sažimanjem odgovarajućih čvorova. Za dobijanje traženih vrednosti 2-faktora mrežnog grafa G , u oznaci $f_m^G(n)$ ili $f_{m,p}^G(n)$, ovi algoritmi koriste transfer matrični metod pri čemu transfer matrica predstavlja matricu susedstva jednog od ova četiri digrafa u zavisnosti od klase grafa G . Ovi algoritmi su implementirani i dobijeni su podaci o veličini tih digrafova u linearnom slučaju za $m \leq 12$, dok u slučaju cikličnih mreža za $m \leq 10$. Specijalno, za komponentu $\mathcal{R}_{L,m}^*$ digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$, koja je zadužena za klasu $RG_m(n)$, kao i za digraf $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$, nastao od ovog ponovnim sažimanjem čvorova u drugoj redukciji, ti podaci su dobijeni za $m \leq 14$ i $m \leq 17$, redom. Slično, kod cikličnih mreža za komponentu $\mathcal{N}_{C,m}^*$ digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$, koja je zadužena za klasu $TnC_m(n)$, kao i za njoj pridružen u drugoj redukciji digraf $\mathcal{N}_{C,m}^{**}$, prikupljeni su podaci za $m \leq 13$ i $m \leq 18$, redom.

Dobijeni podaci su analizirani i otkrivene su neke interesantne osobine kako traženih nizova, tako i samih digrafova koji su dobijeni. Uočene osobine su većim delom dokazane u ovoj disertaciji i uglavnom se odnose na strukturu navedenih digrafova, dok je manji broj njih, koje se uglavnom odnose na asimptotsko ponašanje traženih nizova, formulisan u vidu hipoteza.

- Uočeno je da se vrednost $f_m^{TkC}(n)$, kad $n \rightarrow \infty$, ponaša kao n -ti stepen maksimalnog karakterističnog korena digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$, tj. da je koeficijent uz taj stepen jednak jedinici što se pojavilo i prilikom izučavanja Hamiltonovih kontura ranije (slučaj nekontraktibilnih HC). Ovo je u slučaju 2-faktora obrazloženo, no ostalo je za buduća vremena da se objasni zašto se karakteristični koren maksimalnog modula digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ pojavljuje kao jedinstven i po pravilu baš u komponenti koja sadrži petlju (čvor 1^m) (Hipoteza 1). Dokazom ove hipoteze dalo bi se objašnjenje za uočenu osobinu asimptotskog ponašanja koja povezuje široki cilindar $TkC_m(n)$ sa pravougaonom mrežom $RG_m(n)$. Naime, za m - parno dolazi do poklapanja tih njihovih karakterističnih korena, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_m^{TkC}(n)}{f_m^{TkC}(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_m^{RG}(n)}{f_m^{RG}(n-1)}$. Naglasimo da se ta osobina javila ponovo i kod Hamiltonovih kontura, ali kod kontraktibilnih HC.
- Kod cikličnih mrežnih grafova, zbog mogućnosti uvrtnja nekih među njima, dobijen je veći broj generativnih funkcija (za svako $p = 0, 1, \dots, m-1$). Uočeno je poklapanje nekih generativnih funkcija. Za slučaj torusa $TG_m^{(p)}(n)$ odgovarajuće tvrđenje je dokazano, dok za Klajnovu

bocu $KB_m^{(p)}(n)$ ova osobina (posebno neočekivana za slučaj kad je m neparno i gde zapravo ova funkcija uopšte ne zavisi od stepena uvrtnja) je formulisana u vidu hipoteze (Hipoteza 2).

Navedimo sada uočene osobine navedenih transfer digrafova posmatranih mrežnih grafova koje su dokazane u ovoj disertaciji:

1. Uz uvođenje novih definicija vezanih za posmatrane klase grafova kao što su Flat-reprezentacija, Rolling imprints i Bazna figura najpre je dokazano tvrđenje o egzistenciji 2-faktora za linearne, a time i za ciklične mreže.
2. Zatim je dokazano tvrđenje kojim se prebrojavanje 2-faktora svodi na prebrojavanje određenih šetnji u digrafu $\mathcal{D}_{L,m}$ ili $\mathcal{D}_{C,m}$, čime se opravdava transfer matrični metod primenjen u radu za dobijanje konkretnih vrednosti.
3. Za digraf $\mathcal{R}_{L,m}$ ($\mathcal{N}_{L,m}$) koji služi za prebrojavanje 2-faktora u $RG_m(n)$ ($TnC_m(n)$) dokazano je da je kardinalnost skupa prvih $\mathcal{F}_{L,m}$ ($\mathcal{F}_{C,m}$), kao i skupa poslednjih čvorova $\mathcal{L}_{L,m}$ ($\mathcal{L}_{C,m}$) jednaka $(m-1)$ -om članu Fibonačijevog (m -tom članu Lukasovog) niza.
4. Utvrđeno je da je broj čvorova digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ jednak $\frac{1}{2}(3^m + (-1)^m)$, dok je za $\mathcal{D}_{C,m}$ taj broj duplo veći. Dokazano je da su ovi digrafovi za $m \geq 2$ nepovezani, a njihove komponente jako povezani digrafovi.
5. Dokazano je da se komponenta $\mathcal{R}_{L,m}$ ($\mathcal{N}_{C,m}$) digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$ ($\mathcal{D}_{C,m}$) koja sadrži čvor 0^m poklapa sa komponentom $\mathcal{A}_{L,m}$ ($\mathcal{A}_{C,m}$) koja sadrži čvor 1^m ako i samo ako je m parno.
6. Dokazano je tvrđenje kojim se opravdava drugi algoritam za prebrojavanje 2-faktora koji koristi digraf $\mathcal{D}_{L,m}^*$ ili $\mathcal{D}_{C,m}^*$. Dokazano je da brojevi čvorova digrafova $\mathcal{D}_{L,m}^*$ i $\mathcal{D}_{C,m}^*$ iznose 2^m , osim u slučaju digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ za neparno m , kada je taj broj $2^m - 1$. Utvrđeno je da je broj grana digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ jednak broju čvorova digrafa $\mathcal{D}_{L,m}$, dok je isti broj za $\mathcal{D}_{C,m}^*$ jednak broju čvorova digrafa $\mathcal{D}_{C,m}$.
7. Dokazano je da se za parno m svi čvorovi digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ koji su palindromi nalaze u komponenti $\mathcal{R}_{L,m}^*$. Ovo je iskorišćeno za određivanje reda duplo redukovano digrafa $\mathcal{R}_{L,m}^{**}$.
8. Najinteresantniji deo disertacije se odnosi na samu strukturu digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$. Naime, numerički podaci su ukazivali da se kardinalnost njegovih komponenti može izraziti putem binomnih koeficijenata, i da su sve njegove komponente, osim komponente $\mathcal{A}_{L,m}$, bipartitni digrafovi. Ova bipartitnost je najpre delimično dokazana putem tvrđenja da je poddigraf od $\mathcal{D}_{L,m}^*$ indukovano skupom čvorova koji imaju neparan broj nula bipartitan digraf. Iako ovaj dokaz nije neophodan u celoj priči o ovim transfer digrafovima, obzirom da je u daljem radu dokazana bipartitnost svih pomenutih komponenti, značaj tog tvrđenja je u tome što je ono ukazalo na put za dokazivanje glavnog tvrđenja o strukturi digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$, tj. na otkriće karakterizacije skupa čvorova svake komponente ovog digrafa. U tu svrhu uvedena je funkcija Z na skupu svih binarnih reči dužine m kao razlika broja nula koje se pojavljuju u posmatranoj reči na neparnim pozicijama i broja nula koje se pojavljuju na parnim pozicijama, kao i specijalni nazivi za neke istaknute binarne reči (kraljice, deve, dvorske dame, kraljevi) koje igraju ključne uloge u dokazima. Naime, dokazujemo da se skup čvorova komponente $\mathcal{A}_{L,m}^*$ sastoji od svih reči čija je vrednost funkcije

Z jednaka nuli, dok se skupovi čvorova komponenti $\mathcal{B}_{L,m}^{*(k)}$, $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ sastoje od reči za koje je apsolutna vrednost funkcije Z jednaka upravo k (digrafovi $\mathcal{B}_{L,m}^{*(k)}$ su bipartitni, što se dokazuje, a klase su određene znakom funkcije Z).

9. Za ispitivanje strukture digrafa $\mathcal{D}_{C,m}^*$ korišćena su saznanja o digrafu $\mathcal{D}_{L,m}^*$. Naime, prvi se dobija od drugog dodavanjem novih orijentisanih grana i za slučaj neparnog m jednog novog čvora (kraljice sa najvećom vrednosti funkcije Z). U slučaju kad je m parno, dokazali smo da se nove orijentisane grane javljaju unutar iste komponente, te da se broj komponenti i njihova kardinalnost ne menja. U slučaju kad je m neparno, dolazi do spajanja nekih komponenti. Mi smo pokazali da u tom slučaju postoje tačno dve komponente koje su međusobno izomorfne.
10. Za sam kraj, dodajmo još da postoji i veza između skupa čvorova komponente digrafa $\mathcal{D}_{L,m}^*$ i skupova čvorova određenih komponenti digrafa $\mathcal{D}_{L,m-1}^*$ i $\mathcal{D}_{L,m-2}^*$, što je dokazano u disertaciji i što možda može poslužiti za dalje izučavanje ovih digrafova, kao i dokazivanje formulisanih hipoteza.

Literatura

- [1] A. T. Benjamin and J. J. Quinn, Recounting Fibonacci and Lucas Identities, *The College Mathematics Journal* **30** (5) (1999) 359
- [2] O. Bodroža, 2-faktori Dekartove sume lanaca, magistarski rad, UNS, PMF, Novi Sad, 1992.
- [3] O. Bodroža, I. Gutman, S. J. Cyvin and R. Tošić, Number of Kekulé structures of hexagon-shaped benzenoids, *Jornal of Mathematical Chemistry* **2** (1988) 287-298.
- [4] O. Bodroža and R. Tošić, On the number of Hamiltonian cycles of $P_m \times P_n$, *NSJOM*, **24** (2) (1994) 117-136.
- [5] O. Bodroža, An algorithm for generation and enumeration of Hamiltonian cycles in $P_m \times P_n$, *NSJOM*, **24** (1) (1994) 261-267.
- [6] O. Bodroža-Pantić and R. Tošić, On the number of 2-factors in rectangular lattice graphs, *Publications De L'Institut Mathématique*, **56** (70) (1994) 23-33.
- [7] O. Bodroža-Pantić, B. Pantić, I. Pantić and M. Bodroža-Solarov, Enumeration of Hamiltonian cycles in some grid grafs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **70:1** (2013) 181–204.
- [8] O. Bodroža-Pantić, H. Kwong and M. Pantić, A conjecture on the number of Hamiltonian cycles on thin grid cylinder graphs, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **17:1** (2015) 219–240.
- [9] O. Bodroža-Pantić, H. Kwong and M. Pantić, Some new characterizations of Hamiltonian cycles on triangular grid graphs, *Discrete Appl. Math.* **201** (2016) 1–13.
- [10] O. Bodroža-Pantić, H. Kwong, R. Doroslovački and M. Pantić, A limit conjecture on the number of Hamiltonian cycles on thin triangular grid cylinder graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **38** (2018) 405–427.
- [11] O. Bodroža-Pantić, R. Doroslovački, H. Kwong and M. Pantić, Enumeration of Hamiltonian Cycles on a Thick Grid Cylinder — Part I: Non-contractible Hamiltonian Cycles, *Appl. Anal. Discrete Math.* **13** (2019) 028–060.
- [12] O. Bodroža-Pantić, H. Kwong, **J. Đokić**, R. Doroslovački and M. Pantić: Enumeration of Hamiltonian Cycles on a Thick Grid Cylinder — Part II: Contractible Hamiltonian Cycles. *Appl. Anal. Discrete Math.*, **16** 246–287 (2022)
- [13] J. A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics 244, Springer, 2007.

- [14] R. A. Broglia, G. Tiana, D. Provasi and L. Sutto, Molecular recognition through local elementary structures: Transferability of simple models to real proteins, *Protein Folding and Drug Design, PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SCHOOL OF PHYSICS "ENRICO FERMI" Course CLXV* (2007)
- [15] R. A. Brualdi and D. M. Cvetković, *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*, CRC Press, Boca Raton, 2008.
- [16] Chen Rong Si, A note on the number of Kekulé structures of polyhex graphs, *Communications in mathematical and in computer chemistry (match)*, *MATCDY* **41** (2000) 45-56.
- [17] G. L. Chia and C. Thomassen, On the number of longest and almost longest cycles in cubic graphs, *Ars Combinatoria* **104** (2012) 307-320.
- [18] J. des Cloizeaux and G. Jannik, *Polymers in solution: their modelling and structure*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [19] K. L. Collins and L. B. Krompart, The number of Hamiltonian paths in a rectangular grid, *Discrete Mathematics*, **169** (1997) 29–38.
- [20] D. M. Cvetković, M. Doob and H. Sachs, *Spectra of Graphs — Theory and Application*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.
- [21] D. M. Cvetković, *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici*, ZAVOD ZA UDŽBENIKE, Beograd, 2011.
- [22] D. M. Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1986.
- [23] D. M. Cvetković i S. Simić, *Kombinatorika - klasična i moderna*, Naučna knjiga, Beograd, 1984.
- [24] S. J. Cyvin and I. Gutman, *Kekulé structures in Benzenoid Hydrocarbons*, Lecture Notes in Chemistry 46, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.
- [25] R. Diestel, *Graph theory*, Springer - Verlag, New York (2000)
- [26] R. Doroslovački, **J. Đokić**, B. Pantić and O. Bodroža-Pantić, The proof of the Perepechko's conjecture concerning near-perfect matchings on $C_m \times P_n$ cylinders of odd order, *Appl. Anal. Discrete Math.*, **13**, (2019) 361–377.
- [27] **J. Đokić**, *Prebrojavanje 2-faktora u nekim mrežnim grafovima*, master rad, PMF, Novi Sad, 2017.
- [28] **J. Đokić**, O. Bodroža-Pantić and K. Doroslovački: A spanning union of cycles in rectangular grid graphs, thick grid cylinders and Moebius strips. *Transactions on Combinatorics* <http://dx.doi.org/10.22108/toc.2022.131614.1940>, 1–26 (2023)
- [29] **J. Đokić**, K. Doroslovački and O. Bodroža-Pantić, The structure of the 2-factor transfer digraph common for rectangular, thick cylinder and Moebius strip grid graphs., *Appl. Anal. Discrete Math.*, **17**, (2023) 120–137.

- [30] **J. Dokić**, K. Doroslovački and O. Bodroža-Pantić: A spanning union of cycles in thin cylinder, torus and Klein bottle grid graphs. *Mathematics (MDPI)*, **11** (4), 846, 1-21, (2023)
- [31] **J. Dokić**, K. Doroslovački and O. Bodroža-Pantić: The Structure of the 2-factor Transfer Digraph common for Thin Cylinder, Torus and Klein Bottle Grid Graphs., *Filomat*, **38:1**, (2024) 57–65.
- [32] **J. Dokić**, *A short note on the order of the double reduced 2-factor transfer digraph for rectangular grid graphs*, dostupno na <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.04155>, 1–8(2023)
- [33] J. Fournier, *Graph theory and Applications*, Wiley, USA, 2009.
- [34] Gennes P-G de, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell University Press, Ithaca, NY, 1979.
- [35] E. N. Gilbert and J. Riordan, Symmetry Types of Periodic Sequences, *Illinois J.Math.*, **5**(1961) 657–665.
- [36] M. J. Golin, Y. C. Leung, Y. Wang and X. Yong, Counting structures in grid-graphs, cylinders and tori using transfer matrices: survey a new results (extended abstract), *The Proceedings of SIAM ALENEX/ANALCO Workshop–Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO05)*, Canada, Jan. 2005.
- [37] S.J. Cyvin and I. Gutman, Kekulé Structures in Benzenoid Hydrocarbons. Lecture Notes in Chemistry 46, Berlin: Springer-Verlag, (1988).
- [38] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.
- [39] R. Hammack, W. Imrich and S. Klavžar, *Handbook of product graphs*, CRC Press, 2011.
- [40] S. Higuchi, Field theoretic approach to the counting problem of Hamiltonian cycles of graphs, *Physical Review E*, **58** (1998) 128-132.
- [41] S. Higuchi, Counting Hamiltonian cycles on planar random lattices, *Modern Physics Letters A*, **13** (1998) 727-733.
- [42] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis (2nd ed.)*, Cambridge University Press, 2013.
- [43] W. Imrich, S. Klavžar and D. Pall, *Topics in Graph theory - Graphs and Their Cartesian Product*, A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2008.
- [44] N. Idrees, M. J. Saif, S. Nasir, F. B. Farooq, A. Rauf and F. Ashfaq, Omega, Sadhana, and PI Polynomials of Quasi-Hexagonal Benzenoid Chain, *Journal of Analytical Methods in Chemistry* (2020), DOI:10.1155/2020/9057815
- [45] J. L. Jacobsen, Exact enumeration of Hamiltonian circuits, walks and chains in two and three dimensions, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40** (2007) 14667–14678.
- [46] I. Jensen, Self-avoiding walks and polygons on the triangular lattice, *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* **P10008** (2004) 1–25.

- [47] A. Karavaev, <http://www.flowproblem.ru/cycles/hamilton-cycles>
- [48] A. M. Karavaev and S. N. Perepechko, Dimer problem on cylinders: recurrences and generating functions (in Russian), *Matematicheskoe Modelirovanie* **26**:11 (2014) 18–22.
- [49] А. М. Караваев, Кодирование состояний в методе матрицы переноса для подсчета гамильтоновых циклов на прямоугольных решетках, цилиндрах и торах, Информационные процессы, **11**, no. 4 (2011) 476–499.
- [50] A. Karavaev and S. Perepechko, Counting Hamiltonian cycles on triangular grid graphs, *SIMULATION-2012*, May, Kiev, <http://www.flowproblem.ru/references>, (2012) 16–18.
- [51] P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice, *Physica* **27** (1961) 1209–1225.
- [52] D. Klarner and J. Pollack, Domino tilings of rectangles with fixed width, *Discrete Math.* **32** (1980) 45–52.
- [53] M. Klazar, On *abab*-free and *abba*-free set partitions, *European J. Combin.* **17** (1996) no. 1, 53–68.
- [54] A. Kloczkowski and R.L. Jernigan, Computer generation and enumeration of compact self-avoiding walks within simple geometries on lattices, *Comp. and Ther. Polymer Science* **7** (1997) 163–173.
- [55] A. Kloczkowski and R.L. Jernigan, Transfer matrix method for enumeration and generation of compact self-avoiding walks. I. Square lattices, *J. Chem. Phys* **109** (1998) 5134–46.
- [56] A. Kloczkowski and R.L. Jernigan, Transfer matrix method for enumeration and generation of compact self-avoiding walks. II. Cubic lattice, *J. Chem. Phys* **109** (1998) 5147–59.
- [57] A. Kloczkowski, T.Z. Sen and R.L. Jernigan, The transfer matrix method for lattice proteins—an application with cooperative interactions, *Polymer* **45** (2004) 707–716.
- [58] G. Kreweras, Dénombrement des Cycles Hamiltoniens dans un Rectangle Quadrillé, *European Journal of Combinatorics*, **13** (1992) 473–467.
- [59] Y. Kong, Logarithmic corrections in the free energy of monomer-dimer model on plane lattices with free boundaries, *Physical Review* **E74** (2006) 011102.
- [60] Y. H. H. Kwong and D.G. Rogers, A matrix method for counting hamiltonian cycles on grid graphs, *European Journal of Combinatorics*, **15** (3) (1994) 277–283.
- [61] Y. H. H. Kwong, Enumeration of Hamiltonian cycles in $P_4 \times P_n$ and $P_5 \times P_n$, *Ars Combinatoria*, **33** (1992) 87–96.
- [62] T. C. Liang, K. Chakrabarty and R. Karri, Programmable Daisy chaining of Microelectrodes to Secure Bioassay IP in MEDA Biochips, *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems* **25**(5) (2020) 1269–1282.
- [63] S. N. Karp, L.K. Williams and Y. X. Zhang, Decompositions of amplituhedra, *Annales de l'Institut Henri Poincaré D* (2020) DOI: 10.4171/AIHPD/87.

- [64] E. S. Krasko, I. N. Labutin and A. V. Omelchenko, Enumeration of Labeled and Unlabeled Hamiltonian Cycles in Complete k -Partite Graphs *Journal of Mathematical Sciences* **255** (2021) 71–87.
- [65] L. Lovasz and M. D. Plummer, *Matching theory*, Akademiai Kiado, Budapest, 1986.
- [66] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, 2nd ed.; Siam: Philadelphia, PA 19104, USA, 2000.
- [67] E. Mohr and D. Rautenbach, On Hamiltonian cycles in claw-free cubic graphs, *Discussiones Mathematicae: Graph Theory*, **42**(1) (2022) 309–313.
- [68] J. A. Montoya, On the counting complexity of mathematical ,*MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **86**:3 (2021) 453—488.
- [69] R. I. Nishat and S. Whitesides, Reconfiguring Hamiltonian Cycles in L-Shaped Grid Graphs *Graph-theoretic Concepts in Computer Science*, WG, (2019) 325–337.
- [70] S.N. Perepechko, Near-Perfect Matchings on Cylinders $C_m \times P_n$ of Odd Order, *EPJ Web of Conferences, Mathematical Modeling and Computational Physics* 2017 **173** 02016 (2018) 1–4.
- [71] M. Peto, T.Z. Sen, R.L. Jernigan and A. Kloczkowski, Generation and enumeration of compact conformations on the two-dimensional triangular and three-dimensional fcc lattices, *J. Chem. Phys.* **127** (2007) Article 044101
- [72] U. Pferschy, R. Stanek, Generating subtour elimination constraints for the TSP from pure integer solutions, *Central European Journal of Operations Research*, **25** (2017) 231–260.
- [73] J. Quaintance and H. Kwong, A combinatorial interpretation of the Catalan and Bell number difference tables, *Integers*, **13** (2013) #A29.
- [74] J. Sawada, Generating Bracelets in Constant Amortized Time, *SIAM J. COMPUT.*, **31**:1 (2001) 259–268
- [75] T.G. Schmalz, G.E. Hite and D.J. Klein, Compact self-avoiding circuits on two dimensional lattice, *J. Phys. A: Math. Theor.* **17** (1984) 445–453.
- [76] E. Shakhnovich and A. Gutin, Enumeration of all compact conformations of copolymers with random sequence of links, *J. Chem. Phys.*, **93**(1990) 5967–71.
- [77] N.J.A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)*, <https://oeis.org/A082758>
- [78] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Vol. I*, Cambridge University Press, 2002.
- [79] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Vol. II*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [80] R. P. Stanley, *Catalan Addendum to Enumerative Combinatorics*, Volume 2, version of 25 May 2013, <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>, 2013.

- [81] R.P. Stanley, On Dimer Coverings of Rectangles of Fixed Width, *Discrete Applied Mathematics*, **12**(1985) 81-87.
- [82] R. Stoyan and V. Strehl, Enumeration of hamiltonian circuits in rectangular grids, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **21** (1996) 109–127.
- [83] H. Straubing and A. Straubing, A combinatorial proof of the Cayley-Hamilton theorem, *Discrete Math.*, **43** (1983) 273-279.
- [84] H. N. V. Temperley, M. E. Fisher, Dimer problem in statistical mechanics - An exact result, *Phil. Mag.* **6** (1961) 1061-1063. Publishing Company, 1988.
- [85] C. Thomassen, On the number of Hamiltonian cycles in bipartite graphs, *Combinatorics, Probability and Computing* (1996) 437-442.
- [86] C. Thomassen, Tilings of the torus and the Klein bottle and vertex-transitive graphs on a fixed surface, *Trans. Amer. Math. Soc.* **323** (1991) 605-635.
- [87] R. Tošić and O. Bodroža, Enumeration of 2-factors of $P_5 \times P_m$, *NSJOM*, **23** (2) (1993) 211-219.
- [88] R. Tošić, O. Bodroža, Y. H. H. Kwong and H. J. Straight, On the number of Hamiltonian cycles of $P_4 \times P_n$, *Indian J. Pure Appl. Math.* **21** (1990) 403–409.
- [89] W. T. Tutte, *Graph Theory*, Encyclopedia of mathematics and its applications 21, Addison-Wesley (prevod Moskva <<Mir>>) 1988.
- [90] W. T. Tutte, On Hamiltonian circuits, *J. London Math. Soc.* **21** (1946) 98-101.
- [91] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2001.
- [92] H. S. Wilf, A Mechanical Counting Method and Combinatorial Applications, *Journal of Combinatorial Theory*, **4** (1968) 246.
- [93] F. Y. Wu, W.-J. Tzeng and N. Sh. Izmailian, Exact Solution of a Monomer-Dimer Problem, A Single Boundary Monomer on a Nonbipartite Lattice, *Physical Review* **E83**(2011) 011106.
- [94] D. Zeilberger, A combinatorial approach to matrix algebra, *Discrete Math.* **56** (1985) 61-72.

1. DODATAK

Pravougaoni mrežni graf $RG_m(n) \equiv P_m \times P_n$ ($2 \leq m \leq 17$)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^{RG}(x) &= \frac{x^2}{1-x-x^2} = \sum_{n \geq 1} F_{n-1} x^n \\ &= 0x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 8x^7 + 13x^8 + 21x^9 + 34x^{10} + 55x^{11} + 89x^{12} + \\ &\quad 144x^{13} + 233x^{14} + 377x^{15} + 610x^{16} + 987x^{17} + 1597x^{18} + 2584x^{19} + 4181x^{20} + 6765x^{21} + \\ &\quad 10946x^{22} + 17711x^{23} + 28657x^{24} + 46368x^{25} + 75025x^{26} + 121393x^{27} + 196418x^{28} + \\ &\quad 317811x^{29} + 514229x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3^{RG}(x) &= \frac{x^2}{1-3x^2} = \sum_{k \geq 0} 3^k x^{2k+2} \\ &= x^2 + 3x^4 + 9x^6 + 27x^8 + 81x^{10} + 243x^{12} + 729x^{14} + 2187x^{16} + 6561x^{18} + 19683x^{20} + \\ &\quad 59049x^{22} + 177147x^{24} + 531441x^{26} + 1594323x^{28} + 4782969x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4^{RG}(x) &= \frac{x^2(2-x-2x^2+x^3)}{1-2x-7x^2+2x^3+3x^4-x^5} \\ &= 0x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 18x^4 + 54x^5 + 222x^6 + 779x^7 + 2953x^8 + 10771x^9 + \\ &\quad 40043x^{10} + 147462x^{11} + 545603x^{12} + 2013994x^{13} + 7442927x^{14} + 27490263x^{15} + \\ &\quad 101563680x^{16} + 375176968x^{17} + 1386004383x^{18} + 5120092320x^{19} + 18914660608x^{20} + \\ &\quad 69873991466x^{21} + 258127586367x^{22} + 953569519203x^{23} + 3522660270539x^{24} + \\ &\quad 13013344688975x^{25} + 48073663465682x^{26} + 177592838241869x^{27} + \\ &\quad 656060220073148x^{28} + 2423605607111629x^{29} + 8953239432543485x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_5^{RG}(x) &= -\frac{3x(x-6x^3+5x^5)}{-1+24x^2-57x^4+26x^6} \\ &= 3x^2 + 54x^4 + 1140x^6 + 24360x^8 + 521064x^{10} + 11146656x^{12} + 238452456x^{14} + \\ &\quad 5101047216x^{16} + 109123156248x^{18} + 2334395822496x^{20} + 49938107061384x^{22} + \\ &\quad 1068291209653392x^{24} + 22853211220567416x^{26} + 488882861126970624x^{28} + \\ &\quad 10458331198925940456x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_6^{RG}(x) &= -[x^2(5-16x-68x^2+169x^3+184x^4-440x^5+41x^6+159x^7-24x^8-21x^9+2x^{10}+x^{11})]/ \\ &\quad [-1+5x+49x^2-116x^3-363x^4+627x^5+544x^6-1061x^7+133x^8+264x^9- \\ &\quad 47x^{10}-26x^{11}+3x^{12}+x^{13}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5x^2 + 9x^3 + 222x^4 + 1140x^5 + 13903x^6 + 99051x^7 + 972080x^8 + \\
&\quad 7826275x^9 + 71053230x^{10} + 599141127x^{11} + 5285091303x^{12} + \\
&\quad 45349095730x^{13} + 395755191515x^{14} + 3418116104881x^{15} + 29709767180643x^{16} + \\
&\quad 257232791130155x^{17} + 2232466696767889x^{18} + 19346930092499853x^{19} + \\
&\quad 167813061128260612x^{20} + 1454798219804865516x^{21} + 12616086588695738786x^{22} + \\
&\quad 109385021015592147639x^{23} + 948517510315349620643x^{24} + \\
&\quad 8224312539935356519632x^{25} + 71313903875397020754957x^{26} + \\
&\quad 618352836534571281094702x^{27} + 5361744695265385528847028x^{28} + \\
&\quad 46491251251770863340309040x^{29} + 403124503785899198402752468x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_7^{RG}(x) &= [x^2(8 - 589x^2 + 9810x^4 - 59710x^6 + 148304x^8 - 170714x^{10} + 93298x^{12} - 22631x^{14} + \\
&\quad 1904x^{16})]/ \\
&\quad [1 - 171x^2 + 5496x^4 - 56617x^6 + 240021x^8 - 457923x^{10} + 420254x^{12} - 186912x^{14} + \\
&\quad 37569x^{16} - 2584x^{18}] \\
&= 8x^2 + 779x^4 + 99051x^6 + 13049563x^8 + 1729423756x^{10} + 229435550806x^{12} + \\
&\quad 30443972466433x^{14} + 4039769151988768x^{16} + 536061241088972481x^{18} + \\
&\quad 71133264482944200277x^{20} + 9439112402375129121841x^{22} + \\
&\quad 1252534193959746441955912x^{24} + 166206508635573867359551206x^{26} + \\
&\quad 22054969579015463381016539631x^{28} + 2926610318841947932231378200008x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_8^{RG}(x) &= -[x^2(13 - 155x - 1728x^2 + 19243x^3 + 64036x^4 - 794298x^5 - 565784x^6 + 14250929x^7 - \\
&\quad 7187021x^8 - 118967700x^9 + 129305109x^{10} + 492780993x^{11} - 689112311x^{12} - \\
&\quad 1071061947x^{13} + 1713117207x^{14} + 1273147977x^{15} - 2210122027x^{16} - 886182340x^{17} + \\
&\quad 1551922901x^{18} + 391857072x^{19} - 602359977x^{20} - 110992789x^{21} + 129338396x^{22} + \\
&\quad 17394085x^{23} - 16027643x^{24} - 1363285x^{25} + 1191501x^{26} + 43104x^{27} - 52660x^{28} + \\
&\quad 443x^{29} + 1275x^{30} - 59x^{31} - 13x^{32} + x^{33})]/ \\
&\quad [-1 + 14x + 331x^2 - 3474x^3 - 24357x^4 + 237534x^5 + 541266x^6 - 6604103x^7 - \\
&\quad 1905497x^8 + 85855152x^9 - 60009003x^{10} - 545836271x^{11} + 672927757x^{12} + \\
&\quad 1747850343x^{13} - 2763674623x^{14} - 2917536240x^{15} + 5513512152x^{16} + \\
&\quad 2653029943x^{17} - 5852097578x^{18} - 1465977019x^{19} + 3471750395x^{20} + 568784352x^{21} - \\
&\quad 1167520145x^{22} - 154667330x^{23} + 221656480x^{24} + 23823457x^{25} - 24542626x^{26} - \\
&\quad 1818710x^{27} + 1646233x^{28} + 57030x^{29} - 66339x^{30} + 348x^{31} + 1479x^{32} - 61x^{33} - \\
&\quad 14x^{34} + x^{35}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_8^{RG}(x) = & 0x^1 + 13x^2 + 27x^3 + 2953x^4 + 24360x^5 + 972080x^6 + 13049563x^7 + \\
& 360783593x^8 + 6044482889x^9 + 142205412782x^{10} + 2645920282312x^{11} + \\
& 57787769198498x^{12} + 1130122135817708x^{13} + 23838761889677477x^{14} + \\
& 477334902804794530x^{15} + 9905649696435264827x^{16} + 200572437515846530901x^{17} + \\
& 4130348948437378850158x^{18} + 84074883624291031055071x^{19} + \\
& 1725061733607816846672084x^{20} + 35201911945083165877105598x^{21} + \\
& 721041937227213471236222936x^{22} + 14731026760739434523775920272x^{23} + \\
& 301492247130186410656766864436x^{24} + 616296655659442193757310209147x^{25} + \\
& 126086101870795129720839096783333x^{26} + 2578070083185284447937587182277129x^{27} + \\
& 52734387801729163635906223494385644x^{28} + 1078388240037660942562424414577181926x^{29} + \\
& 22056541466571843558470704997624920958x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_9^{RG}(x) = & x[-21x + 14429x^3 - 2977612x^5 + 287882596x^7 - 15396210323x^9 + 495074875987x^{11} - \\
& 10065902326113x^{13} + 134416133040711x^{15} - 1217169158720764x^{17} + \\
& 7672025883235936x^{19} - 34359015998529872x^{21} + 111034237538363778x^{23} - \\
& 261756587386897382x^{25} + 453246428062005818x^{27} - 578310298795433179x^{29} + \\
& 543657156125982437x^{31} - 375278277913632996x^{33} + 188891515846196440x^{35} - \\
& 68536442609580103x^{37} + 17611233979787535x^{39} - 3119350414858553x^{41} + \\
& 365120087483245x^{43} - 26348708004138x^{45} + 1030937887896x^{47} - 16048304096x^{49}] / \\
& [(-1+7x^2)(1-1193x^2+376246x^4-48953410x^6+3288145988x^8-127374411928x^{10}+ \\
& 3015668747782x^{12} - 45191010425846x^{14} + 441384780778588x^{16} - \\
& 2898283223877346x^{18} + 13154666974580501x^{20} - 42187756055653825x^{22} + \\
& 97142224830553641x^{24} - 162322162033938237x^{26} + 198042290945862570x^{28} - \\
& 176799585485005402x^{30} + 115298993750386955x^{32} - 54611642383339285x^{34} + \\
& 18586566465572115x^{36} - 4467086405032683x^{38} + 737944576901349x^{40} - \\
& 80312266104179x^{42} + 5368435066393x^{44} - 193455857453x^{46} + 2735506380x^{48})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_9^{RG}(x) = & 21x^2 + 10771x^4 + 7826275x^6 + 6044482889x^8 + 4738211572702x^{10} + \\
& 3728454567619186x^{12} + 2936793145852970503x^{14} + \\
& 2313819828221792568231x^{16} + 1823117803971861533276785x^{18} + \\
& 1436506068810722263846966803x^{20} + 1131884615499177238765812997622x^{22} + \\
& 891861379870929131575395762708116x^{24} + 702736791667402399627515571022726473x^{26} + \\
& 553717257645251892181598471499890805627x^{28} + \\
& 436298214862451852483213957197628599972855x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10}^{RG}(x) = & [x^2(-34+1347x+35881x^2-1662089x^3-10309779x^4+771197801x^5-346702675x^6- \\
& 181431735340x^7+698129954414x^8+24314041221008x^9-150052606942535x^{10}- \\
& 1955172098649311x^{11}+16342077034176585x^{12}+95187483126478256x^{13}- \\
& 1082538790666807385x^{14}-2632342959447463549x^{15}+47190107143602870694x^{16}+ \\
& 25149352192030341611x^{17}-1420522867178712125486x^{18}+ \\
& 942375457477994083262x^{19}+30544728579120039592509x^{20}- \\
& 45811635254374125870547x^{21}-481024654106604142658754x^{22}+ \\
& 1034639523180001447651336x^{23}+5650755350310331133281764x^{24}- \\
& 15379099750826572124032129x^{25}-50138517276885465580264781x^{26}+ \\
& 165014594468953372583716508x^{27}+338134006349071894103973007x^{28}- \\
& 1333169187054548030456272181x^{29}-1729935216080270865107872599x^{30}+ \\
& 8307485120568915399123891036x^{31}+6606891842108732324100582627x^{32}- \\
& 40537611346244740085982960471x^{33}-17910894279373108316521092023x^{34}+ \\
& 156424654912960078568444931679x^{35}+28639513227693834286646693909x^{36}- \\
& 480217673925082801373266665091x^{37}+6215060674611087974386868437x^{38}+ \\
& 1176546451149220018624683293218x^{39}-196016176729365270408848413341x^{40}- \\
& 2301806795478656683806927108523x^{41}+671482889680656520724854005411x^{42}+ \\
& 3589449311739965939755136676932x^{43}-1430065207899407466173244608566x^{44}- \\
& 4442389907986722561120177476313x^{45}+2198439329420030259008800264867x^{46}+ \\
& 4332308965605070604141219519647x^{47}-2551630188027298209948844954100x^{48}- \\
& 3292910612416258412767808633745x^{49}+2272730860876774276760437655867x^{50}+ \\
& 1918257264947044701126773815295x^{51}-1560552230291000671555830113730x^{52}- \\
& 832978851315941289318293630901x^{53}+824676218354533947168453969998x^{54}+ \\
& 255343919601756250583297382745x^{55}-333495878322041349631842287090x^{56}- \\
& 47558210494863310947937006626x^{57}+102290962816799339382005037827x^{58}+ \\
& 1441759998454840560470630830x^{59}-23511660501016232854983698392x^{60}+ \\
& 2100054136003464406076320001x^{61}+3985059711601160982005723241x^{62}- \\
& 714180858251836658799770366x^{63}-486814987941308989735168779x^{64}+ \\
& 130997898090477219110002544x^{65}+41265311576931652337785265x^{66}- \\
& 15813670343559865739961997x^{67}-2229569111235017818843115x^{68}+ \\
& 1328140074764536970942380x^{69}+54160990055954074415814x^{70}- \\
& 79509464898694123907388x^{71}+1950961185520045979921x^{72}+ \\
& 3439957867838613593851x^{73}-248380845738698994226x^{74}- \\
& 108461186853587325114x^{75}+12130636053499251523x^{76}+ \\
& 2499366907230690769x^{77}-376092051435600570x^{78}-41863262779260293x^{79}+ \\
& 8189167140633561x^{80}+499418309570138x^{81}-129807749028789x^{82}- \\
& 4028121425512x^{83}+1514497739548x^{84}+18856167098x^{85}-12936246167x^{86}- \\
& 15444588x^{87}+79073791x^{88}-376673x^{89}-329233x^{90}+2147x^{91}+841x^{92}-4x^{93}- \\
& x^{94})]/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-1 + 42x + 2133x^2 - 88106x^3 - 1159305x^4 + 59614372x^5 + 152015398x^6 - \\
& 18819762746x^7 + 40034190687x^8 + 3264921562892x^9 - 15997694438884x^{10} - \\
& 336798102365195x^{11} + 2393078617098732x^{12} + 21262382124790258x^{13} - \\
& 203991793583280580x^{14} - 802344394384627520x^{15} + 11100949049156620432x^{16} + \\
& 15124565789332508780x^{17} - 408720018862600116122x^{18} + \\
& 70049454004597571197x^{19} + 10586093658527044258990x^{20} - \\
& 12631025888273228837204x^{21} - 198508817597338205942399x^{22} + \\
& 387402987345930766315590x^{23} + 2753586280130848546932800x^{24} - \\
& 7116726860274335286714358x^{25} - 28694708927568151334441162x^{26} + \\
& 91397507315681115211888499x^{27} + 226797214695129167282089048x^{28} - \\
& 870318027304318790444523656x^{29} - 1363049305769562405267119112x^{30} + \\
& 6338665081932290022053776544x^{31} + 6178413328764184607346600034x^{32} - \\
& 35988003082214887026742513610x^{33} - 20492020074586065235166736101x^{34} + \\
& 161266450872180007915993984787x^{35} + 45099606966665951271693058428x^{36} - \\
& 575001009719437474541893835090x^{37} - 37571777602636385348482415900x^{38} + \\
& 1639314263514932955906264058314x^{39} - 161019967972020863550757762131x^{40} - \\
& 3745699796292066069224199321372x^{41} + 851274013919532238198719327872x^{42} + \\
& 6859539342150922395619895904651x^{43} - 2285177200474388410515202543750x^{44} - \\
& 10046278725288151331993329222702x^{45} + 4263336781464515502088030143628x^{46} + \\
& 11714187061919722875421984542193x^{47} - 5951624800503928235794807036596x^{48} - \\
& 10796511948612809185000930216914x^{49} + 6382964048451425290619045645907x^{50} + \\
& 7780699596208522812005194118918x^{51} - 5309228126699605717428066646335x^{52} - \\
& 4313080247506333381456597185155x^{53} + 3429850650853924016071831349581x^{54} + \\
& 1790273570607001253851113421413x^{55} - 1715098075696198937373310320219x^{56} - \\
& 528375021398399743450311766854x^{57} + 659377687421116918032870695489x^{58} + \\
& 96604393710766619419597252621x^{59} - 193029880068729539119900529947x^{60} - \\
& 4069176647541912150779380527x^{61} + 42490073730573974965749981782x^{62} - \\
& 3413445482746271605206739212x^{63} - 6917976301240196729904525844x^{64} + \\
& 1165798086293282165887806486x^{65} + 814163354061253637176607304x^{66} - \\
& 208629109950888272910391562x^{67} - 66693134076508177810310164x^{68} + \\
& 24445572577097454676637446x^{69} + 3497333010513277273515012x^{70} - \\
& 1989966629028961602789938x^{71} - 83751655748872954401344x^{72} + \\
& 115359756476647736425785x^{73} - 2722708701437214377921x^{74} - \\
& 4826028852207290118097x^{75} + 345815430004445639338x^{76} + \\
& 146771902754630028398x^{77} - 16434126042052261132x^{78} - \\
& 3249431151334904798x^{79} + 493956208888831088x^{80} + 51941522002476761x^{81} - \\
& 10408635523210110x^{82} - 583754494635043x^{83} + 159473348039387x^{84} + \\
& 4295711619291x^{85} - 1796857404178x^{86} - 16067848999x^{87} + 14814596478x^{88} - \\
& 26776331x^{89} - 87402987x^{90} + 632038x^{91} + 351431x^{92} - 2932x^{93} - 868x^{94} + 5x^{95} + x^{96}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10}^{RG}(x) = & 0x^1 + 34x^2 + 81x^3 + 40043x^4 + 521064x^5 + 71053230x^6 + \\
& 1729423756x^7 + 142205412782x^8 + 4738211572702x^9 + \\
& 303872744726644x^{10} + 11986520595161863x^{11} + 674837188667280276x^{12} + \\
& 29188352280018463610x^{13} + 1532451456181020466428x^{14} + \\
& 69707888449637626994606x^{15} + 3524148419679038665338017x^{16} + \\
& 164782546678464075204330111x^{17} + 8161612120472629734758702827x^{18} + \\
& 387404299957157944331168782389x^{19} + 18975092783963004675735587294202x^{20} + \\
& 908104916618474893269843972030000x^{21} + 44209698933437116068409590480429252x^{22} + \\
& 2125264991542391467278261919541938229x^{23} + \\
& 103123528613528669519078412311840825913x^{24} + \\
& 4969501454786829485527284038834319001975x^{25} + \\
& 240699212742310352022631306455020391840255x^{26} + \\
& 11614680633292318140437397088402434381887655x^{27} + \\
& 562008082519876500509235006660432148062016214x^{28} + \\
& 27138757083274637538136034727280002688597205157x^{29} + \\
& 1312480307994378411517307946704246357901598884389x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{11}^{RG}(x) = & 55x^2 + 147462x^4 + 599141127x^6 + 2645920282312x^8 + 11986520595161863x^{10} + \\
& 54755153078468134960x^{12} + 250811052174680822733959x^{14} + \\
& 1149900478069130190749532847x^{16} + 5273548680646779160230746586859x^{18} + \\
& 24187345557092636781475699267236187x^{20} + \\
& 110939825540114835884546566285845762280x^{22} + \\
& 508851861608867456819833568314582960129595x^{24} + \\
& 2333978113478971879379146342461349384545507487x^{26} + \\
& 10705394905474347467310075872932119902375191735556x^{28} + \\
& 49103084149419532904485985834926622182640443919990354x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{12}^{RG}(x) = & 0x^1 + 89x^2 + 243x^3 + 545603x^4 + 11146656x^5 + 5285091303x^6 + 229435550806x^7 + \\
& 57787769198498x^8 + 3728454567619186x^9 + 674837188667280276x^{10} + \\
& 54755153078468134960x^{11} + 8217125138015950451626x^{12} + \\
& 764291947227525464744293x^{13} + 102778523332781609788923496x^{14} + \\
& 10377666858261924113127188462x^{15} + 1307545840659068316275398430609x^{16} + \\
& 138717888384983395400743673070647x^{17} + 16811107880554885949723365263385113x^{18} + \\
& 1837416806334748618002441976965826916x^{19} + \\
& 217546798094878586614776187637251947154x^{20} + \\
& 24207544299916846326223500527520404672797x^{21} + \\
& 2826348353596869316989646072613818424334629x^{22} + \\
& 317913170521025428336656341733279252103645915x^{23} + \\
& 36807752016516373736486909090218756904178467297x^{24} + \\
& 4167154676845333334464279553525507959718825743928x^{25} + \\
& 480044645073281997728004688609940910251915235881911x^{26} + \\
& 54560205876703359925688778263581530252043634665998495x^{27} + \\
& 6266182773788800302528578730998645394708164827181600165x^{28} + \\
& 713864557620383330913701983097695540944505535055335848728x^{29} + \\
& 81837579118030976966882984400592164512413484550125332803113x^{30} + \dots \\
& \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{13}^{RG}(x) = & 144x^2 + 2013994x^4 + 45349095730x^6 + 1130122135817708x^8 + \\
& 29188352280018463610x^{10} + 764291947227525464744293x^{12} + \\
& 20119942924108379011391597989x^{14} + 530757331488177559806803222962531x^{16} + \\
& 14012518359036670226842012669455804921x^{18} + \\
& 370060693927736976102598123201451153750400x^{20} + \\
& 9774237174242112936074588927469304811518971316x^{22} + \\
& 258174575833190416092931230106166876774272922816326x^{24} + \\
& 6819493526917964144433813509795990979935178761456609095x^{26} + \\
& 180133257930816702828649317813228158539407388700258052545414x^{28} + \\
& 4758136595785599184827205547148480043809502832166468626937652141x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{14}^{RG}(x) = & 0x^1 + 233x^2 + 729x^3 + 7442927x^4 + 238452456x^5 + 395755191515x^6 + \\
& 30443972466433x^7 + 23838761889677477x^8 + 2936793145852970503x^9 + \\
& 1532451456181020466428x^{10} + 250811052174680822733959x^{11} + \\
& 102778523332781609788923496x^{12} + 20119942924108379011391597989x^{13} + \\
& 7095967027221343377167292602835x^{14} + 1558052539448513320447263528275071x^{15} + \\
& 499710516860655913807488713037993676x^{16} + 118148889686793059954503676188547861439x^{17} + \\
& 35663187828618798448176359283472706878251x^{18} + \\
& 8844869553721036151571830337235039811285498x^{19} + \\
& 2567902709068972249983061282979663158259005188x^{20} + \\
& 656843753793091466111271960113665150268181910540x^{21} + \\
& 185985360340172624437226057862914191982817411306798x^{22} + \\
& 48531671985430295372643234667885796698180209383007846x^{23} + \\
& 13522045451583935214311942745211781450584019741823946467x^{24} + \\
& 3574230153258805534442262789706227987917456760619395321102x^{25} + \\
& 985574315180475305127558549314931246032163539439255975211553x^{26} + \\
& 262688013352420151641401780917713156435617350757523668540401656x^{27} + \\
& 71951462951957662733223296222348007193287965199739874099102425149x^{28} + \\
& 19280611320272675682366923144444641296515354441079256732526117681312x^{29} + \\
& 5258300742958152860303362507698568462642123253466258390520471533041763x^{30} + \\
& \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{15}^{RG}(x) = & 377x^2 + 27490263x^4 + 3418116104881x^6 + 477334902804794530x^8 + \\
& 69707888449637626994606x^{10} + 10377666858261924113127188462x^{12} + \\
& 1558052539448513320447263528275071x^{14} + 234788223520702255614480389250160811898x^{16} + \\
& 35438872103032923948503473063105831888120296x^{18} + \\
& 5352980916509968569866944597338016618770836593777x^{20} + \\
& 808814487707939424103258442436215917419236785722366089x^{22} + \\
& 122225728569396111511730187227610652723460707513653410334890x^{24} + \\
& 18471534283961665470838147288989010252709658184911178787526609504x^{26} + \\
& 2791611790627002375709359890035431269889691472289917390598410862157068x^{28} + \\
& 421902632488607037181505456822308879531291489513527561733780462073430723695x^{30} + \\
& \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{16}^{RG}(x) = & 0x^1 + 610x^2 + 2187x^3 + 101563680x^4 + 5101047216x^5 + 29709767180643x^6 + \\
& 4039769151988768x^7 + 9905649696435264827x^8 + 2313819828221792568231x^9 + \\
& 3524148419679038665338017x^{10} + 1149900478069130190749532847x^{11} + \\
& 1307545840659068316275398430609x^{12} + 530757331488177559806803222962531x^{13} + \\
& 499710516860655913807488713037993676x^{14} + \\
& 234788223520702255614480389250160811898x^{15} + \\
& 195081705501438193439250404333039349462635x^{16} + \\
& 101199388044301804167035198499446336399419451x^{17} + \\
& 77324499738655428250428753054462763663473289098x^{18} + \\
& 42906124439946680432242192936932389250449772385665x^{19} + \\
& 30980523428299019458567823961648073011309062657974817x^{20} + \\
& 17997177997131365762945853787261691797327217525918292125x^{21} + \\
& 12506395048117034637941019258039871289830975170048857051005x^{22} + \\
& 7495739849844426872239299370840211457131733872858505243081816x^{23} + \\
& 5075148445796857040053104431056506039875319568038077044908910516x^{24} + \\
& 3107230011226517409969202256830258033314041885795677305379697962640x^{25} + \\
& 2066974994609702017007988593816601920999780365479446917196525270118142x^{26} + \\
& 1283970419502603731918140288038253636237197324650286051850270498862486325x^{27} + \\
& 843919599048775485922343383280158888132623141387354468999629362152530427159x^{28} + \\
& 529429090664842091425478647428185270992198760555038102521772553083678245220083x^{29} + \\
& 345149098654298536175064215796331411355131680852917620919233112633273313585965081x^{30} + \\
& \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{17}^{RG}(x) = & 987x^2 + 375176968x^4 + 257232791130155x^6 + 200572437515846530901x^8 + \\
& 164782546678464075204330111x^{10} + 138717888384983395400743673070647x^{12} + \\
& 118148889686793059954503676188547861439x^{14} + 101199388044301804167035198499446336399419451x^{16} + \\
& 86918369741985767628242106496018767545685968221295x^{18} + \\
& 74751308877855238601956611250031893025070379093798275467x^{20} + \\
& 64328517891756221041740151134989268459463141424942999295477530x^{22} + \\
& 55376125908869097780426555401191895400494047978296658342206340169311x^{24} + \\
& 47676741632845917269695972808131435556699492747785589737028049129016308815x^{26} + \\
& 41050835690083594611243421104615824512345671970046160209809624943994676910850163x^{28} + \\
& 35347007379909510253850320656294681456954784652577466801856109957124530806874455817574x^{30} + \\
& \dots
\end{aligned}$$

Široki cilindar $TkC_m(n) \equiv P_m \times C_n$ ($2 \leq m \leq 12$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2^{TkC}(x) &= \frac{x(-1-4x+3x^2+4x^3)}{(1-x)(1+x)(-1+x+x^2)} = -\frac{x(1+2x)}{-1+x+x^2} - \frac{2x^2}{(-1+x)(1+x)} \\
&= x + 5x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 11x^5 + 20x^6 + 29x^7 + 49x^8 + 76x^9 + 125x^{10} + 199x^{11} + \\
&\quad 324x^{12} + 521x^{13} + 845x^{14} + 1364x^{15} + 2209x^{16} + 3571x^{17} + 5780x^{18} + 9349x^{19} + \\
&\quad 15129x^{20} + 24476x^{21} + 39605x^{22} + 64079x^{23} + 103684x^{24} + 167761x^{25} + 271445x^{26} + \\
&\quad 439204x^{27} + 710649x^{28} + 1149851x^{29} + 1860500x^{30} + \dots \\
\mathcal{F}_3^{TkC}(x) &= \frac{x(1+12x-6x^2-36x^3-15x^4)}{(1+x)(-1+2x+x^2)(-1+3x^2)} = \frac{6x^2}{1-3x^2} - \frac{x(1+6x+3x^2)}{(1+x)(-1+2x+x^2)} \\
&= 1x^1 + 13x^2 + 13x^3 + 53x^4 + 81x^5 + 253x^6 + 477x^7 + 1317x^8 + 2785x^9 + \\
&\quad 7213x^{10} + 16237x^{11} + 40661x^{12} + 94641x^{13} + 232861x^{14} + 551613x^{15} + 1344837x^{16} + \\
&\quad 3215041x^{17} + 7801165x^{18} + 18738637x^{19} + 45357173x^{20} + 109216785x^{21} + \\
&\quad 264026941x^{22} + 636562077x^{23} + 1537859685x^{24} + 3710155681x^{25} + 8960296813x^{26} + \\
&\quad 21624372013x^{27} + 52215418133x^{28} + 126036076401x^{29} + 304306702813x^{30} + \dots \\
\mathcal{F}_4^{TkC}(x) &= \frac{(x(1+18x+15x^2-20x^3-10x^4+6x^5))}{(1+x)(-1+2x+7x^2-2x^3-3x^4+x^5)} - \frac{2x^2(-10+30x^2-21x^4+4x^6)}{(-1+x)(1+x)(-1-3x+x^3)(1-3x+x^3)} \\
&\quad - \frac{2x^2}{(-1+x)(1+x)} \\
&= 0 + 1x^1 + 41x^2 + 43x^3 + 341x^4 + 666x^5 + 3725x^6 + 9318x^7 + 44269x^8 + 127897x^9 + \\
&\quad 552136x^{10} + 1747846x^{11} + 7110833x^{12} + 23860994x^{13} + 93547152x^{14} + 325657968x^{15} + \\
&\quad 1247739997x^{16} + 4444339751x^{17} + 16788557123x^{18} + 60652119125x^{19} + \\
&\quad 227129712696x^{20} + 827719193253x^{21} + 3083193286940x^{22} + 11295869268631x^{23} + \\
&\quad 41939971370665x^{24} + 154154492857866x^{25} + 571223860105758x^{26} + \\
&\quad 2103743033971603x^{27} + 7786110865225936x^{28} + 28709735327481674x^{29} + \\
&\quad 106179210831285100x^{30} + \dots \\
\mathcal{F}_5^{TkC}(x) &= \frac{4x^2(15-206x^2+732x^4-882x^6+325x^8)}{(1-x)(1+x)(-1+2x^2)(-1+5x^2)(1-22x^2+13x^4)} \\
&\quad + \frac{x(1+50x+66x^2-296x^3-310x^4+420x^5+196x^6-224x^7+36x^8)}{(1+4x+2x^2-2x^3)(1-5x-7x^2+18x^3+6x^4-12x^5+2x^6)} + \frac{10x^2}{1-5x^2} \\
&= 0 + 1x^1 + 121x^2 + 142x^3 + 2169x^4 + 5431x^5 + 53812x^6 + 181231x^7 + 1474937x^8 + \\
&\quad 5864650x^9 + 42414281x^{10} + 188142923x^{11} + 1258226556x^{12} + 6019949235x^{13} + \\
&\quad 38161604217x^{14} + 192461352562x^{15} + 1176032485833x^{16} + 6151532634859x^{17} + \\
&\quad 36655273043812x^{18} + 196602170924523x^{19} + 1151603700231369x^{20} + \\
&\quad 6283221090447394x^{21} + 36379355621923193x^{22} + 200804265323151235x^{23} + \\
&\quad 1153560534422212652x^{24} + 6417449257742279731x^{25} + 36672154206505187465x^{26} + \\
&\quad 205093366164948581890x^{27} + 1167841438010655902633x^{28} + \\
&\quad 6554516723796443441531x^{29} + 37233853354848282540212x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_6^{T^{kC}}(x) &= [x(1+141x+399x^2-3329x^3-9584x^4+19102x^5+52373x^6-50803x^7-107836x^8+ \\
&\quad 78024x^9+89970x^{10}-59838x^{11}-28625x^{12}+17295x^{13}+4800x^{14}-2128x^{15}- \\
&\quad 462x^{16}+96x^{17}+20x^{18})]/ \\
&\quad [(1-x)(1+x)(-1-5x-5x^2+2x^3+x^4)(-1+5x+49x^2-116x^3-363x^4+ \\
&\quad 627x^5+544x^6-1061x^7+133x^8+264x^9-47x^{10}-26x^{11}+3x^{12}+x^{13})] \\
&\quad -[2x^2(90-4838x^2+84741x^4-686268x^6+3002045x^8-7691820x^{10}+12049212x^{12}- \\
&\quad 11813888x^{14}+7364115x^{16}-2947020x^{18}+757262x^{20}-123048x^{22}+12129x^{24}- \\
&\quad 658x^{26}+15x^{28})]/ \\
&\quad [(-1-3x+6x^2+4x^3-5x^4-x^5+x^6)(-1+3x+6x^2-4x^3-5x^4+x^5+x^6)(1- \\
&\quad 9x+6x^2+53x^3-45x^4-66x^5+52x^6-6x^8+x^9)(-1-9x-6x^2+53x^3+45x^4- \\
&\quad 66x^5-52x^6+6x^8+x^9)] \\
&\quad -\frac{2x^2(-21+140x^2-252x^4+180x^6-55x^8+6x^{10})}{(-1-3x+6x^2+4x^3-5x^4-x^5+x^6)(-1+3x+6x^2-4x^3-5x^4+x^5+x^6)} \\
&\quad -\frac{2x^2}{(-1+x)(1+x)} \\
&= 0 + 1x^1 + 365x^2 + 469x^3 + 13825x^4 + 44466x^5 + 781043x^6 + 3562728x^7 + \\
&\quad 49622793x^8 + 273687040x^9 + 3321537720x^{10} + 20737405360x^{11} + 229320317359x^{12} + \\
&\quad 1563616901289x^{13} + 16179908259446x^{14} + 117686516544594x^{15} + \\
&\quad 1160288515380121x^{16} + 8851836530897104x^{17} + 84238150673398010x^{18} + \\
&\quad 665628453678422066x^{19} + 6172931794568240240x^{20} + 50048363930787424965x^{21} + \\
&\quad 455504059143499103894x^{22} + 3762987077441200385071x^{23} + \\
&\quad 33785095873930763984487x^{24} + 282924063299636353075791x^{25} + \\
&\quad 2515329205574671707105301x^{26} + 21271833119204266130369677x^{27} + \\
&\quad 187783161427523487902032166x^{28} + 1599333925756691726920065197x^{29} + \\
&\quad 14046958280315913526905097038x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_7^{T^{kC}}(x) = & -[2x^2(-266 + 49470x^2 - 3409197x^4 + 121091580x^6 - 2559558540x^8 + \\
& 34862003130x^{10} - 321313648313x^{12} + 2068311266640x^{14} - 9491956496442x^{16} + \\
& 31463254982980x^{18} - 75883794591264x^{20} + 133502684915796x^{22} - \\
& 170943894184804x^{24} + 158097217968018x^{26} - 104102314661145x^{28} + \\
& 47666357585520x^{30} - 14614561483284x^{32} + 2817584069634x^{34} - 303650135577x^{36} + \\
& 13687086240x^{38})]/ \\
& [(-1 + 3x^2)(-1 - 6x - 9x^2 + 3x^4)(-1 + 6x - 9x^2 + 3x^4)(1 - 14x^2 + 17x^4)(1 - \\
& 60x^2 + 454x^4 - 956x^6 + 577x^8)(-1 + 171x^2 - 5496x^4 + 56617x^6 - 240021x^8 + \\
& 457923x^{10} - 420254x^{12} + 186912x^{14} - 37569x^{16} + 2584x^{18})] \\
& -[(x(-1 - 392x - 960x^2 + 39200x^3 + 95200x^4 - 1296168x^5 - 2504264x^6 + \\
& 21332992x^7 + 27475452x^8 - 201282400x^9 - 130694300x^{10} + 1131132504x^{11} + \\
& 131565122x^{12} - 3731908992x^{13} + 988208340x^{14} + 7002895232x^{15} - 3424413360x^{16} - \\
& 7609684680x^{17} + 4621831320x^{18} + 4919663340x^{19} - 3161787279x^{20} - \\
& 1941648016x^{21} + 1132172608x^{22} + 480442536x^{23} - 195103475x^{24} - 73266440x^{25} + \\
& 11158344x^{26} + 5243588x^{27} + 366821x^{28})]/ \\
& [(-1 + x)(-1 + 7x^2)(-1 - 14x - 44x^2 + 52x^3 + 303x^4 + 44x^5 - 462x^6 - 252x^7 + \\
& 107x^8 + 88x^9 + 13x^{10})(-1 + 14x + 37x^2 - 670x^3 + 216x^4 + 7866x^5 - 10202x^6 - \\
& 27170x^7 + 56210x^8 + 5872x^9 - 66223x^{10} + 22200x^{11} + 25320x^{12} - 12008x^{13} - \\
& 2888x^{14} + 1256x^{15} + 139x^{16})] \\
& - \frac{2x^2(77 - 3066x^2 + 36795x^4 - 186700x^6 + 446835x^8 - 496794x^{10} + 205989x^{12})}{(-1 + 3x^2)(1 - 14x^2 + 17x^4)(1 - 60x^2 + 454x^4 - 956x^6 + 577x^8)} + \\
& \frac{14x^2}{1 - 7x^2} \\
= & x + 1093x^2 + 1549x^3 + 88093x^4 + 364061x^5 + 11328703x^6 + 70182449x^7 + \\
& 1670194477x^8 + 12839393125x^9 + 261079885983x^{10} + 2304956480025x^{11} + \\
& 42157390580371x^{12} + 410685863818829x^{13} + 6955967193562675x^{14} + \\
& 72945933567920729x^{15} + 1166255193469341005x^{16} + 12939617301085024529x^{17} + \\
& 197983223809129991221x^{18} + 2294032263176793405709x^{19} + \\
& 33940092430391553332183x^{20} + 406606652245177626433361x^{21} + \\
& 5863258912633455285257837x^{22} + 72061859473867959667019309x^{23} + \\
& 1019002446024036683543413987x^{24} + 12770787731127477795116042761x^{25} + \\
& 177924053187181378492219053991x^{26} + 2263194608166222107070101243149x^{27} + \\
& 31178222232265755481412717950347x^{28} + 401072323924104852077254184227297x^{29} + \\
& 5478470730011608244359772114877693x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_8^{T^{kC}}(x) = & -[x(1 + 1106x + 3456x^2 - 380960x^3 - 1265450x^4 + 48085788x^5 + \\
& 138769869x^6 - 3204566808x^7 - 7166185659x^8 + 130912828640x^9 + \\
& 201000116515x^{10} - 3528895913796x^{11} - 3099483692487x^{12} + 65290376214658x^{13} + \\
& 20601900448935x^{14} - 848910526618144x^{15} + 116762671264678x^{16} + \\
& 7894168967938824x^{17} - 3855259753368817x^{18} - 53370261280411640x^{19} + \\
& 40288771832558214x^{20} + 266680528560477416x^{21} - 254856183979947518x^{22} - \\
& 1001228898109396296x^{23} + 1106050661519880450x^{24} + 2870997403499935710x^{25} - \\
& 3473527801283826489x^{26} - 6391248919845409200x^{27} + 8136198344092308724x^{28} + \\
& 11226645720257794020x^{29} - 14496097136557554582x^{30} - \\
& 15804102272553391872x^{31} + 19907630968767236079x^{32} + \\
& 18069375080025641078x^{33} - 21252793388482968375x^{34} - \\
& 16933496115380147028x^{35} + 17712349720891361206x^{36} + \\
& 13049494614554522258x^{37} - 11522895817209789324x^{38} - \\
& 8243960519699875080x^{39} + 5823007886337424151x^{40} + 4233494797648211340x^{41} - \\
& 2261065609667714676x^{42} - 1746009302105224376x^{43} + 661549210479454725x^{44} + \\
& 570260520422775764x^{45} - 140777566762420997x^{46} - 145295742885744480x^{47} + \\
& 20220218000063669x^{48} + 28439984938628400x^{49} - 1540115674944846x^{50} - \\
& 4213964855453496x^{51} - 46016162958923x^{52} + 466719109628076x^{53} + \\
& 27506894875350x^{54} - 38318301708680x^{55} - 3542688363396x^{56} + \\
& 2324639722354x^{57} + 263472623887x^{58} - 104090681220x^{59} - 12730836091x^{60} + \\
& 3425279156x^{61} + 407727495x^{62} - 81580224x^{63} - 8409635x^{64} + 1350558x^{65} + \\
& 101773x^{66} - 14076x^{67} - 552x^{68} + 70x^{69}))/ \\
& [(1-7x+14x^2-5x^3-5x^4+x^5)(1+4x-10x^2-10x^3+15x^4+6x^5-7x^6-x^7+x^8)(1- \\
& 4x-10x^2+10x^3+15x^4-6x^5-7x^6+x^7+x^8)(1+20x+122x^2+164x^3-690x^4-1751x^5+ \\
& 480x^6+3573x^7+1588x^8-1385x^9-1217x^{10}-266x^{11}+13x^{12}+11x^{13}+x^{14})(-1+ \\
& 14x+331x^2-3474x^3-24357x^4+237534x^5+541266x^6-6604103x^7-1905497x^8+ \\
& 85855152x^9-60009003x^{10}-545836271x^{11}+672927757x^{12}+1747850343x^{13}- \\
& 2763674623x^{14}-2917536240x^{15}+5513512152x^{16}+2653029943x^{17}- \\
& 5852097578x^{18}-1465977019x^{19}+3471750395x^{20}+568784352x^{21}-1167520145x^{22}- \\
& 154667330x^{23}+221656480x^{24}+23823457x^{25}-24542626x^{26}-1818710x^{27}+ \\
& 1646233x^{28}+57030x^{29}-66339x^{30}+348x^{31}+1479x^{32}-61x^{33}-14x^{34}+x^{35})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [2x^2(-784 + 476076x^2 - 116588381x^4 + 15789090382x^6 - \\
& 1356158705385x^8 + 79891719333866x^{10} - 3396666207504809x^{12} + \\
& 108022486126780644x^{14} - 2638606408306440592x^{16} + 50515019900883249532x^{18} - \\
& 770094872481299969229x^{20} + 9468055865340829781546x^{22} - \\
& 94854246821132793986726x^{24} + 780971311623813881054046x^{26} - \\
& 5322216842654634684825502x^{28} + 30203095029547418165520630x^{30} - \\
& 143469074682768685161127425x^{32} + 573006284226316093693515432x^{34} - \\
& 1931783161319310182389650188x^{36} + 5516458536983063883349698292x^{38} - \\
& 13384589486720192919479214353x^{40} + 27668861475144429498976041030x^{42} - \\
& 48853344502932072289147389670x^{44} + 73837554646218155871407449654x^{46} - \\
& 95719065898952727277919257597x^{48} + 106614006027866384160385380476x^{50} - \\
& 102183431711082749008135970704x^{52} + 84382266059163112509904423768x^{54} - \\
& 60100320449233882107856423934x^{56} + 36948907591988335819053998194x^{58} - \\
& 19618292636434482765390118001x^{60} + 8998701999089476593485162284x^{62} - \\
& 3565889922267097744709910317x^{64} + 1220446933427050507410769508x^{66} - \\
& 360583356141429452470446877x^{68} + 91891468200618096273944570x^{70} - \\
& 20176247923305013249869507x^{72} + 3811258839592645070587098x^{74} - \\
& 618248800772164980608457x^{76} + 85929263260820286200628x^{78} - \\
& 10204593695082332193606x^{80} + 1031931740063277446820x^{82} - \\
& 88490109610005877955x^{84} + 6401587098797864482x^{86} - 388181540253454496x^{88} + \\
& 19570500615145706x^{90} - 811788351390113x^{92} + 27326379866244x^{94} - \\
& 732721891153x^{96} + 15246086050x^{98} - 236803536x^{100} + 2579106x^{102} - 17543x^{104} + \\
& 56x^{106}))/ \\
& [(-1+x)(1+x)(1-28x+134x^2+1464x^3-11646x^4-8775x^5+234042x^6- \\
& 318372x^7-1512042x^8+3990140x^9+1327546x^{10}-12508340x^{11}+8235416x^{12}+ \\
& 11304952x^{13}-15649778x^{14}+1400926x^{15}+6404612x^{16}-2944582x^{17}-312236x^{18}+ \\
& 418067x^{19}-31381x^{20}-22903x^{21}+3184x^{22}+556x^{23}-97x^{24}-5x^{25}+x^{26})(1+ \\
& 28x+134x^2-1464x^3-11646x^4+8775x^5+234042x^6+318372x^7-1512042x^8- \\
& 3990140x^9+1327546x^{10}+12508340x^{11}+8235416x^{12}-11304952x^{13}-15649778x^{14}- \\
& 1400926x^{15}+6404612x^{16}+2944582x^{17}-312236x^{18}-418067x^{19}-31381x^{20}+ \\
& 22903x^{21}+3184x^{22}-556x^{23}-97x^{24}+5x^{25}+x^{26})(-1+9x+92x^2-581x^3- \\
& 2083x^4+11003x^5+18456x^6-89508x^7-76454x^8+363004x^9+148765x^{10}- \\
& 782325x^{11}-101940x^{12}+931622x^{13}-46433x^{14}-638214x^{15}+110532x^{16}+ \\
& 256374x^{17}-68466x^{18}-59420x^{19}+20987x^{20}+7328x^{21}-3425x^{22}-351x^{23}+ \\
& 281x^{24}-9x^{25}-9x^{26}+x^{27})(1+9x-92x^2-581x^3+2083x^4+11003x^5-18456x^6- \\
& 89508x^7+76454x^8+363004x^9-148765x^{10}-782325x^{11}+101940x^{12}+931622x^{13}+ \\
& 46433x^{14}-638214x^{15}-110532x^{16}+256374x^{17}+68466x^{18}-59420x^{19}-20987x^{20}+ \\
& 7328x^{21}+3425x^{22}-351x^{23}-281x^{24}-9x^{25}+9x^{26}+x^{27})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [2x^2(-266 + 46706x^2 - 2936661x^4 + 92960520x^6 - 1725727350x^8 + 20491047750x^{10} - \\
& 164350070864x^{12} + 923456110368x^{14} - 3729690794520x^{16} + 11039887243530x^{18} - \\
& 24330288950594x^{20} + 40470025352148x^{22} - 51416302161224x^{24} + \\
& 50406642154750x^{26} - 38453137571055x^{28} + 22972741852096x^{30} - \\
& 10794669605306x^{32} + 3998085999264x^{34} - 1166952360510x^{36} + 267658533100x^{38} - \\
& 47956307721x^{40} + 6645525414x^{42} - 701378744x^{44} + 55073040x^{46} - 3101850x^{48} + \\
& 117936x^{50} - 2700x^{52} + 28x^{54})]/ \\
& [(-1+x)(1+x)(-1+9x+92x^2-581x^3-2083x^4+11003x^5+18456x^6-89508x^7- \\
& 76454x^8+363004x^9+148765x^{10}-782325x^{11}-101940x^{12}+931622x^{13}-46433x^{14}- \\
& 638214x^{15}+110532x^{16}+256374x^{17}-68466x^{18}-59420x^{19}+20987x^{20}+7328x^{21}- \\
& 3425x^{22}-351x^{23}+281x^{24}-9x^{25}-9x^{26}+x^{27})(1+9x-92x^2-581x^3+2083x^4+ \\
& 11003x^5-18456x^6-89508x^7+76454x^8+363004x^9-148765x^{10}-782325x^{11}+ \\
& 101940x^{12}+931622x^{13}+46433x^{14}-638214x^{15}-110532x^{16}+256374x^{17}+68466x^{18}- \\
& 59420x^{19}-20987x^{20}+7328x^{21}+3425x^{22}-351x^{23}-281x^{24}-9x^{25}+9x^{26}+x^{27})] \\
& - [2x^2(-36 + 420x^2 - 1386x^4 + 1980x^6 - 1430x^8 + 546x^{10} - 105x^{12} + 8x^{14})]/ \\
& [(1+4x-10x^2-10x^3+15x^4+6x^5-7x^6-x^7+x^8)(1-4x-10x^2+10x^3+15x^4- \\
& 6x^5-7x^6+x^7+x^8)] \\
& - \frac{(2x^2)}{(-1+x)(1+x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_8^{T^{kC}}(x) = & x + 3281x^2 + 5116x^3 + 561357x^4 + 2981201x^5 + 164342144x^6 + \\
& 1384148396x^7 + 56241588037x^8 + 604211712448x^9 + 20559551095851x^{10} + \\
& 257573508034492x^{11} + 7784584974538368x^{12} + 108680224298965775x^{13} + \\
& 3013814772945044388x^{14} + 45643040884844001536x^{15} + \\
& 1185537358216390245429x^{16} + 19127617320816121366452x^{17} + \\
& 472116548787108690744794x^{18} + 8007718640288679793007567x^{19} + \\
& 189866075873770814991703727x^{20} + 3350817898120123595046160844x^{21} + \\
& 76965624292097393220127868826x^{22} + 1401831762167059299778164115466x^{23} + \\
& 31400919568784474985238557000304x^{24} + 586401753216671829580093021638776x^{25} + \\
& 12877877037714243225365022029863413x^{26} + 245286171577403118116883927290448238x^{27} + \\
& 5303427339483094210044349210160088892x^{28} + \\
& 102598425625894938585872354365515091531x^{29} + \\
& 2191357558208001087370202721666183256764x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_9^{T^{kC}}(x) = & -[(4x^2(1152 - 2206597x^2 + 1807769940x^4 - 860478696692x^6 + \\
& 271394988599842x^8 - 61129048677172881x^{10} + 10325212841842911826x^{12} - \\
& 1353825936442525863750x^{14} + 141392867120412980286438x^{16} - \\
& 11999207460234121959949283x^{18} + 840679654256968498368980410x^{20} - \\
& 49257139757849490877927070484x^{22} + 2439569974008328995823937710340x^{24} - \\
& 103054787449811934712722869675244x^{26} + 3741625339141960685479905918819684x^{28} - \\
& 117531759075853838052008575939685668x^{30} + \\
& 3212523903133186061692420680378232140x^{32} - \\
& 76793155385996505350177192512107604143x^{34} + \\
& 1612576030720239216104735528006452413760x^{36} - \\
& 29865135674377359402357253372254071946470x^{38} + \\
& 489554622438197898118913984319053406012798x^{40} - \\
& 7125612635514102460216877115387631680701028x^{42} + \\
& 92360515626279950365237519661783198749080036x^{44} - \\
& 1068895817380708290533389006273379476977335364x^{46} + \\
& 11071526522007272294397697749779599638271754574x^{48} - \\
& 102860388764696736244891194752685388811296848838x^{50} + \\
& 858853023759632300903892887424256653390801507060x^{52} - \\
& 6456607859451424936977014115658311646553442825244x^{54} + \\
& 43774282328683483950589913363621461498687759002270x^{56} - \\
& 268047175389006192979911264467018887170891433557660x^{58} + \\
& 1484458263317691438899879472117255474928557841522390x^{60} - \\
& 7444202913918183601119169475813074724175649386256522x^{62} + \\
& 33840405900113216368039295505510918386095739251165146x^{64} - \\
& 139585709446719896970995265534998378548498518538133333x^{66} + \\
& 522882889365866854198479790961912955205713697542988958x^{68} - \\
& 1780109772224902337792352028208151332360041376052751632x^{70} + \\
& 5511132451994509012201612959166727678498084741467194038x^{72} - \\
& 15524314278817883298706115695046037857068451538788105266x^{74} + \\
& 39805303523502452222240610846137579209607852072462584968x^{76} - \\
& 92930822910051984285533672559029361475263967498396039188x^{78} + \\
& 197586088267141781898425067964899211878776752057806289444x^{80} - \\
& 382623672367378752492150417243490451926441883893463019981x^{82} + \\
& 674839507453138576123408186500461625002632027549579798834x^{84} - \\
& 108389906552077762714031789808611358078590994960140989406x^{86} + \\
& 1585017953044366797303958249252120447257903476943506240916x^{88} - \\
& 2109516427670921510010239240579282933585091915128628083983x^{90} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2554042935879964380546977423012626041601105303737425649836x^{92} & - \\
& 2811299983123677520405748408047610574298238749051185393900x^{94} & + \\
& 2811237961193741835319891777354506083645198593908837507440x^{96} & - \\
& 2551605650594589508100365226809130758645656466161828122540x^{98} & + \\
& 2099909305583510683942573711811859768984918998577698691786x^{100} & - \\
& 1565054569354074023627420336421691093367501137324583943706x^{102} & + \\
& 1054847267027220888928717267878553076517650022705325092442x^{104} & - \\
& 641918216718905455466201195189961636451702679947248988248x^{106} & + \\
& 352044939047358377943587973140979153816527256061527074638x^{108} & - \\
& 173632116959842677798117796336416002197530474889638111614x^{110} & + \\
& 76830351865625749067652061203856306079429418454537775004x^{112} & - \\
& 30417068650057657079949964083866024730627727561822250049x^{114} & + \\
& 10740534518756801751087841937388013456342038466240406800x^{116} & - \\
& 3370575798268931937605669718640573969136591537041811490x^{118} & + \\
& 936194752338041027150382554160149822725214215170683358x^{120} & - \\
& 229060794567879430879986197916270350229389570933032790x^{122} & + \\
& 49097981020077321821394054308837675408365223310824724x^{124} & - \\
& 9160162908109338279130089543484639952841071997906924x^{126} & + \\
& 1476251218877966473156136661379527905668352737637724x^{128} & - \\
& 203648302833520038046608849670590277759293561306063x^{130} & + \\
& 23783292408157109218404190043013411327197079483912x^{132} & - \\
& 2319630349743410293849352255862856465279294764084x^{134} & + \\
& 185716889380954519854696803288600568148137400608x^{136} & - \\
& 11935732786173705051350546870274420224169228763x^{138} & + \\
& 597365756972132465348125559350976243010717526x^{140} & - \\
& 22291298699609263186012724844614398896394230x^{142} & + \\
& 579480946528436768019023951476570179717540x^{144} & - \\
& 9287440866939596231661962056823280350520x^{146} & + \\
& 68423540017319466905734972657794961920x^{148} \Big) \Big) /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(-1 + 3x)(1 + 3x)(-1 + 7x^2)(-1 + 27x - 258x^2 + 973x^3 - 324x^4 - \\
& 6744x^5 + 12454x^6 + 7362x^7 - 33489x^8 + 15667x^9 + 19476x^{10} - 20253x^{11} + \\
& 3729x^{12} + 2151x^{13} - 966x^{14} + 107x^{15})(1 + 27x + 258x^2 + 973x^3 + 324x^4 - \\
& 6744x^5 - 12454x^6 + 7362x^7 + 33489x^8 + 15667x^9 - 19476x^{10} - 20253x^{11} - \\
& 3729x^{12} + 2151x^{13} + 966x^{14} + 107x^{15})(-1 + 282x^2 - 25297x^4 + 1073828x^6 - \\
& 25390104x^8 + 363078264x^{10} - 3296168948x^{12} + 19596248926x^{14} - 77743595826x^{16} + \\
& 207473742096x^{18} - 371467677512x^{20} + 439852643504x^{22} - 334403214576x^{24} + \\
& 154506971212x^{26} - 38880116221x^{28} + 4020609392x^{30})(-1 + 591x^2 - \\
& 95361x^4 + 6922350x^6 - 272760016x^8 + 6420903257x^{10} - 95828390004x^{12} + \\
& 943120716586x^{14} - 6295303405260x^{16} + 29127727204334x^{18} - 95000584032342x^{20} + \\
& 220996143367594x^{22} - 369011778492872x^{24} + 442338529800436x^{26} - \\
& 377839526215177x^{28} + 226022147292981x^{30} - 91695292950038x^{32} + \\
& 23818609428605x^{34} - 3541207333504x^{36} + 226978239492x^{38})(1 - 1193x^2 + \\
& 376246x^4 - 48953410x^6 + 3288145988x^8 - 127374411928x^{10} + 3015668747782x^{12} - \\
& 45191010425846x^{14} + 441384780778588x^{16} - 2898283223877346x^{18} + \\
& 13154666974580501x^{20} - 42187756055653825x^{22} + 97142224830553641x^{24} - \\
& 162322162033938237x^{26} + 198042290945862570x^{28} - 176799585485005402x^{30} + \\
& 115298993750386955x^{32} - 54611642383339285x^{34} + 18586566465572115x^{36} - \\
& 4467086405032683x^{38} + 737944576901349x^{40} - 80312266104179x^{42} + \\
& 5368435066393x^{44} - 193455857453x^{46} + 2735506380x^{48})] \\
& - [x(-1 - 3138x - 12189x^2 + 3515332x^3 + 15404430x^4 - 1556674230x^5 - 6321089166x^6 + \\
& 382398690520x^7 + 1311805776717x^8 - 60191451351230x^9 - 161714477451835x^{10} + \\
& 6565943755483548x^{11} + 12678569829491020x^{12} - 520824200595298166x^{13} - \\
& 635057264653902600x^{14} + 31018975690335967808x^{15} + 17969042737456614346x^{16} - \\
& 1419104748968250857064x^{17} - 28573194282709941282x^{18} + \\
& 50739971287643233161280x^{19} - 23321605296749449030530x^{20} - \\
& 1437595501278814830945696x^{21} + 1246436276742341171802738x^{22} + \\
& 32653647530636803573858728x^{23} - 39549571533248439377462425x^{24} - \\
& 600747530859523253744627206x^{25} + 901838365992119390863259835x^{26} + \\
& 9036269601831280229461670084x^{27} - 15767174968682617291823228808x^{28} - \\
& 112110393728184116740742129970x^{29} + 218396535574115920591352161252x^{30} + \\
& 1156969110445872340506621316800x^{31} - 2445977215939258136686771457556x^{32} - \\
& 10013021974875673448875473181612x^{33} + 22468753830812884590897349545720x^{34} + \\
& 73254537161346178025352603410184x^{35} - 171116404295705733576070463769138x^{36} - \\
& 456546369711656869175950887422116x^{37} + 1089501611835078838476654071949126x^{38} + \\
& 244179954697745493323303612239360x^{39} - 5837835938120854141503189705750966x^{40} - \\
& 11283222038646959984806437055484328x^{41} + 26459796657217710589610954854748018x^{42} + \\
& 45305655498248473533492601646920280x^{43} - 101830809088972415306050371382356000x^{44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 158769597569467546957236381478241884x^{45} + \\
& 333602480872399458310608825887872060x^{46} + \\
& 486891111829495745400315864384599856x^{47} - \\
& 931512112285624814472562522013924153x^{48} - \\
& 1307621805898576836730254939863124250x^{49} + \\
& 2216858943621280965971203658449091583x^{50} + \\
& 3072311426335150064111784410898873804x^{51} - \\
& 4489893407841152215806825363972580824x^{52} - \\
& 6298780695313693563204719523565583970x^{53} + \\
& 7714682182116505131395647593211352320x^{54} + \\
& 11226004883194166915002239490358455144x^{55} - \\
& 11186932378073136432066627959730632601x^{56} - \\
& 17314097813292462552629492820365378158x^{57} + \\
& 13579058806531715431643941341835603523x^{58} + \\
& 22993197647642170789056440237018698980x^{59} - \\
& 13621068066940280399402107416974207424x^{60} - \\
& 26152891377100473713869813061381754434x^{61} + \\
& 11048521659909951982828945243383497700x^{62} + \\
& 25338494312883572130973760001987138752x^{63} - \\
& 6945789858469200809020665747038605105x^{64} - \\
& 20794403404415553590317797637527775926x^{65} + \\
& 3032860264722045783767482620742503735x^{66} + \\
& 14372377604960769204836570883901477740x^{67} - \\
& 510402517612737823772356095439614600x^{68} - \\
& 8317292140617923673352631136892286490x^{69} - \\
& 492730082201815735591482689949520564x^{70} + \\
& 4005802325781374053712890057445454552x^{71} + \\
& 563733563102550147260095801146488403x^{72} - \\
& 1595648262683964820223988282675689718x^{73} - \\
& 336787073290574339033261345124831525x^{74} + \\
& 522249728624845086759177188585051428x^{75} + \\
& 142066679139061764744439947602204844x^{76} - \\
& 139476132350625289583208947011451178x^{77} - \\
& 45312821551964621122963064573776428x^{78} + \\
& 30173125171564888052177237864679760x^{79} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 11166465509774787347592798792199797x^{80} - 5247668526582028055700229832909050x^{81} - \\
& 2134698340398432305328651032311151x^{82} + 728447057952532535130254335181244x^{83} + \\
& 314716693247201043560851990206550x^{84} - 80222598271908421470783237786410x^{85} - \\
& 35273538383727573759248324022822x^{86} + 6980065935695458245293364595456x^{87} + \\
& 2933330070032759915228223085064x^{88} - 477757230965691698459902340880x^{89} - \\
& 173936904703798126094290246160x^{90} + 25348066369510808199075310400x^{91} + \\
& 6861110985320269301927583648x^{92} - 992686617044143586989227248x^{93} - \\
& 155810662662956739123972640x^{94} + 25345512133505650393850880x^{95} + \\
& 1254708009279296759769216x^{96} - 308540156964491828873728x^{97} + \\
& 10484643019216813894656x^{98}]/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(1+x)(-1+2x)(1+2x)(1-8x^2+11x^4)(1-28x^2+71x^4)(1-8x+20x^2- \\
& 14x^3-5x^4+4x^5)(1-116x^2+1546x^4-4556x^6+3781x^8)(-1-48x-708x^2- \\
& 1640x^3+45946x^4+341664x^5-270194x^6-9936934x^7-22840421x^8+84442096x^9+ \\
& 418028192x^{10}+132842204x^{11}-2217116283x^{12}-3910256042x^{13}+2255114380x^{14}+ \\
& 12952834812x^{15}+9797088008x^{16}-9926380870x^{17}-19739579992x^{18}- \\
& 6238648278x^{19}+8703028142x^{20}+7538491050x^{21}+208212x^{22}-2158389564x^{23}- \\
& 641271414x^{24}+192328290x^{25}+111002758x^{26}+399556x^{27}-5772921x^{28}- \\
& 305408x^{29}+97576x^{30})(1-42x-75x^2+17718x^3-112036x^4-2032663x^5+ \\
& 20898099x^6+68505152x^7-1367337026x^8+1223952387x^9+39924985841x^{10}- \\
& 123520021512x^{11}-507429891185x^{12}+2815200597001x^{13}+1444158632036x^{14}- \\
& 29150884549434x^{15}+26197136927827x^{16}+152864286212934x^{17}- \\
& 281984662214835x^{18}-398046044696312x^{19}+1249282231645481x^{20}+ \\
& 358977981283233x^{21}-3123666474218858x^{22}+675827827012992x^{23}+ \\
& 4889486045969022x^{24}-2485484028220910x^{25}-5032512202755210x^{26}+ \\
& 3593534888276858x^{27}+3475263477225909x^{28}-3098930934608376x^{29}- \\
& 1601027066102163x^{30}+1744452573290918x^{31}+470550625308136x^{32}- \\
& 657690139223493x^{33}-75567716491829x^{34}+165305848427048x^{35}+ \\
& 1498941418335x^{36}-26855694880119x^{37}+1821955387786x^{38}+2634688847668x^{39}- \\
& 334995651352x^{40}-134705018616x^{41}+24157589768x^{42}+2269409656x^{43}- \\
& 605268248x^{44}+22971944x^{45}]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [2x^2(882 - 590354x^2 + 157273161x^4 - 22983115792x^6 + \\
& 2119494744100x^8 - 133590374014446x^{10} + 6058887885974721x^{12} - \\
& 204935302170164648x^{14} + 5306071771929323052x^{16} - 107251721247833706960x^{18} + \\
& 1718345284467307783496x^{20} - 22084257636082742645904x^{22} + \\
& 229857036770612349580820x^{24} - 1952359449465652537576140x^{26} + \\
& 13616617708467269758731900x^{28} - 78367989158751373954628480x^{30} + \\
& 373654558327977301862358522x^{32} - 1480352154646506945693324048x^{34} + \\
& 4883719271006483039945303166x^{36} - 13433591701765415961153857560x^{38} + \\
& 30823850149478993381873048244x^{40} - 58971942961519011103241421464x^{42} + \\
& 93941006726387697717195658180x^{44} - 124286525502217618209539873280x^{46} + \\
& 136049531908889279215906382100x^{48} - 122556391797201522095216232744x^{50} + \\
& 90186798622481620965906398496x^{52} - 53678118116110605690524591388x^{54} + \\
& 25494519661741120363771537818x^{56} - 9485124196343409579683767530x^{58} + \\
& 2692664405977965225731923549x^{60} - 560914565743916029157069344x^{62} + \\
& 80510797349088438843948756x^{64} - 7088230137939231002107176x^{66} + \\
& 287466115066565560292160x^{68}]/ \\
& [(-1 + 3x)(1 + 3x)(-1 + 282x^2 - 25297x^4 + 1073828x^6 - 25390104x^8 + \\
& 363078264x^{10} - 3296168948x^{12} + 19596248926x^{14} - 77743595826x^{16} + \\
& 207473742096x^{18} - 371467677512x^{20} + 439852643504x^{22} - 334403214576x^{24} + \\
& 154506971212x^{26} - 38880116221x^{28} + 4020609392x^{30})(-1 + 591x^2 - \\
& 95361x^4 + 6922350x^6 - 272760016x^8 + 6420903257x^{10} - 95828390004x^{12} + \\
& 943120716586x^{14} - 6295303405260x^{16} + 29127727204334x^{18} - 95000584032342x^{20} + \\
& 220996143367594x^{22} - 369011778492872x^{24} + 442338529800436x^{26} - \\
& 377839526215177x^{28} + 226022147292981x^{30} - 91695292950038x^{32} + \\
& 23818609428605x^{34} - 3541207333504x^{36} + 226978239492x^{38})] \\
& - [8x^2(39 - 3318x^2 + 90522x^4 - 1129606x^6 + 7435280x^8 - 27384066x^{10} + 56511462x^{12} - \\
& 60869058x^{14} + 26576649x^{16})]/ \\
& [(-1 + 2x)(1 + 2x)(1 - 8x^2 + 11x^4)(1 - 28x^2 + 71x^4)(1 - 116x^2 + 1546x^4 - 4556x^6 + \\
& 3781x^8)] \\
& + \frac{18x^2}{1 - 9x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_9^{T^kC}(x) = & 0 + 1x^1 + 9841x^2 + 16897x^3 + 3577121x^4 + 24412606x^5 + \\
& 2384008549x^6 + 27309182412x^7 + 1893972519489x^8 + 28474336325785x^9 + \\
& 1619938572971116x^{10} + 28865363400315608x^{11} + 1440027274442086769x^{12} + \\
& 28885443646068696636x^{13} + 1310571139307486059744x^{14} + \\
& 28724255612327969672932x^{15} + 1212265596856254020971761x^{16} + \\
& 28474590328963725085347639x^{17} + 1135126364276555282932647235x^{18} + \\
& 28182531221515571455363232707x^{19} + 1073280239866322664805781387076x^{20} + \\
& 27871117924536494891873491537509x^{21} + 1022905044375877221224023143033552x^{22} + \\
& 27551901782293541801815673718843291x^{23} + 981327300899811413079069217249330809x^{24} + \\
& 27230675474213911617346695093962018106x^{25} + \\
& 946586555765313010849925032923100801942x^{26} + \\
& 26910336272521921019466721739562952111225x^{27} + \\
& 917202654223319757045260969142997398374748x^{28} + \\
& 26592323189960514104579704865917109070263368x^{29} + \\
& 892038379019266817578176241221901860341244424x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10}^{T^kC}(x) = & -[(x(-1 - 8952x - 42378x^2 + 31475188x^3 + 177149080x^4 - \\
& 46320241878x^5 - 254632814051x^6 + 39369421482240x^7 + 194236107853509x^8 - \\
& 22180531873155530x^9 - 92632975657548205x^{10} + 8946071465390269248x^{11} + \\
& 29944681484503722677x^{12} - 2712694965729684190934x^{13} - \\
& 6821796752863618485930x^{14} + 639653978831376989637792x^{15} + \\
& 1098557890660467400167110x^{16} - 120222998658273772802013624x^{17} - \\
& 117297263165834919423023856x^{18} + 18353971438425771153497758420x^{19} + \\
& 5480569615508704955485178358x^{20} - 2310389450263143868179223573482x^{21} + \\
& 720037287440820029338544329207x^{22} + 242768777209137801637455469908072x^{23} - \\
& 208091773566300940926007919152925x^{24} - 21515681369354051649190671292763682x^{25} + \\
& 28879011434160378642274840827307593x^{26} + \\
& 1622784448261892336647177402088793428x^{27} - \\
& 2875843141277540351611628395850915888x^{28} - \\
& 104987883416770137250477418790679986600x^{29} + \\
& 225980550550802797687300540387263029052x^{30} + \\
& 5867679370199052369983491882588793145120x^{31} - \\
& 14599996646710480565757825057778042587387x^{32} - \\
& 285128556065637548541671502943517240838794x^{33} + \\
& 793781917016602529567172474316700043554090x^{34} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 12118130518074842864122358729876085325584672x^{35} - \\
& 36879427815426645041299766842776121622792875x^{36} - \\
& 452936687853672291908021081597673012496915126x^{37} + \\
& 1480705528326975791403857177622971195770004289x^{38} + \\
& 14964863396962327304831269413978032648202146600x^{39} - \\
& 51826161957336276972803123957811864568926963548x^{40} - \\
& 439164309501526201562880635646576593825874852942x^{41} + \\
& 1592638515348519669981661209285476538792963465060x^{42} + \\
& 11498954785140204403899452134835894854789823900840x^{43} - \\
& 43228474620379937746588821331452978045039176774550x^{44} - \\
& 269777276264675601050026431839280145559475906419312x^{45} + \\
& 1041677058072338574382683123301831738205738835060154x^{46} + \\
& 5693655985450927583185442533273252931322220662984048x^{47} - \\
& 22384199956771306708465192753314385517794235475044367x^{48} - \\
& 108498545283176811247843668274268976099443582383667350x^{49} + \\
& 430618370684300799648919480736073986642571421581577929x^{50} + \\
& 1873239479146494970397758759620142112780582265491838848x^{51} - \\
& 7441892421448850605079876428023690900471063177393961083x^{52} - \\
& 29394490911940650866419867188266739582087612324041776134x^{53} + \\
& 115888208688017331593166415953400467282936637627755880160x^{54} + \\
& 420415587592329561326984783856708261929865470055511604760x^{55} - \\
& 1630550035072904902617619337796910031284018663446932600757x^{56} - \\
& 5494565584059558565016816299687535512242473393836180193522x^{57} + \\
& 20778168986713167498426781885246255996366918952678261621702x^{58} + \\
& 65764505301955891937515813021116716025296469172739956433700x^{59} - \\
& 240312493222727168761837936266677725578346593664077382360907x^{60} - \\
& 722229520474429220289373554936169707626795680681487648259530x^{61} + \\
& 2527249685782626453695730272954910792628423242062889319350561x^{62} + \\
& 7289031655445433053641082900491767646281054197621919014931648x^{63} - \\
& 24206240144840519070837597481244379487712392633759138979219130x^{64} - \\
& 67691289234576618562816688727216914047277393660995099855335936x^{65} + \\
& 211457673279464232410375830609286671709334580295640931633682496x^{66} + \\
& 579036742437762688964673894703526574276360576906661045754817392x^{67} - \\
& 1686771680652499696478401109660679955776261333898053201197809371x^{68} - \\
& 4565962225397745749970454125461167135916360589350941802160222830x^{69} + \\
& 12298712850206874531874456951950586711512901354709701214108142045x^{70} +
\end{aligned}$$

$33210226215513979791105204604794633797946147489369129940753834440x^{71}$ —
 $82031940561043368851947175232697529169184229461663993546891573861x^{72}$ —
 $222905604898387489765390901824896769623204838728843489882454759560x^{73}$ +
 $500830477896174951947773059100488738179889556169446445447199447975x^{74}$ +
 $1381111317608022961850440963926691081492958559170139045112458146396x^{75}$ —
 $2800004223587533515838556031775472603158481135189650468451607668018x^{76}$ —
 $7901529536430293547912988242294534182967734087556513825320383936428x^{77}$ +
 $14337246832555124456595013638897485833275034855798802283201831383576x^{78}$ +
 $41750744882094507723412581090146169544231274020243400314547641991440x^{79}$ —
 $67232629309830396470621253477350010337534240025998906646493163109166x^{80}$ —
 $203785226306391692481086213920187314025855718850286809404929540547634x^{81}$ +
 $288626249091353469449423851713205684902162710931862488254625246422344x^{82}$ +
 $919003992128872190902035316976646879964758649586010255245254926072972x^{83}$ —
 $1133433037665476569734932354977170790684743072948336582827219338596935x^{84}$ —
 $3829833432196321348016803221689518150680112364877236344564683322039946x^{85}$ +
 $4066226786081155362564812413368682003581455806897070025587207428234959x^{86}$ +
 $14751811392408453106510889384718123633784806030417094788160460184076072x^{87}$ —
 $13299113722049662918826638843919440753090674659391087939466507725126442x^{88}$ —
 $52529605240637322469417245612414306994653942175309276265691164635886160x^{89}$ +
 $39526090953218293673350968549985756750752754764296418923442253317024854x^{90}$ +
 $172962610316216673197651634423999477732503903391428891616224755339672548x^{91}$ —
 $106205386031054657152485976349973720765815157584821327015084234709694297x^{92}$ —
 $526733630447860557777926136581438870458493746336658004405936136435493242x^{93}$ +
 $255814219663558696791363703851158734018203229179295314118211149122779085x^{94}$ +
 $1483975596115213214394280210764055795436814717110364244409990981346277344x^{95}$ —
 $544073674261365034080289702636621646736119293160040555073569754737327523x^{96}$ —
 $3868738307705636187167361732469758186684446719113983622311459049894704244x^{97}$ +
 $991211271522653992782257113349745783603575532041050333813784645943455940x^{98}$ +
 $9335370661187883061935691160738188579066094132013061648087449298291540800x^{99}$ —
 $1434297012747987928033581729541889610245109739011752903428613765245979826x^{100}$ —
 $20855843840090880478061008931244201384416734732692206934328553550825300816x^{101}$ +
 $1213300340928846505842933026992264025573889799398288326238141908889994065x^{102}$ +
 $43149212571318267150453473898868490433283941277250961429153450930697172496x^{103}$ +
 $1334027245942203357300530372005042977786207196680004047321016315599257310x^{104}$ —
 $82695398651372370173468960619129274535095844645071290709692658989818755274x^{105}$ —
 $9455310520979043785821277120959746516441765720500871093672929257831064213x^{106}$ +
 $146847393080770441013099675558618972268902703342684075933190161106257286632x^{107}$ +
 $28306974717935828803945921287585219024211838725982737858713387761153803674x^{108}$ —
 $241678726976247766028594502205438015669095927402718656884402732043335354950x^{109}$ —
 $64488139184894935955386979305460083915165260300135672796603187706651859311x^{110}$ +

$$\begin{aligned}
& 368727792487968281249749488677214632478813033598043967374176250347215675536x^{111} + \\
& 124319301006831206210700452397046244764885723265517451178406902350415108907x^{112} - \\
& 521642703538483364417446807511970551707017112375898064867628362576369396480x^{113} - \\
& 210907828007954614433579324094825071330578443331987435594341677893594435025x^{114} + \\
& 684448776260128631270524375712536295518673419408507085340539359751006094068x^{115} + \\
& 320910900261745530325516230510450724955578649763835525632674053751393381727x^{116} - \\
& 833117056414725728723319165621895843369095263683315006573688428004087166164x^{117} - \\
& 442656390266491701076320399913841916900713150667436360959737023566219053639x^{118} + \\
& 940938058390104166517226369130559823817378764335861992129743937298197780080x^{119} + \\
& 557244293616358513102728736259221583246960279006971926422208694045186050326x^{120} - \\
& 986267777254046462970097255625124579030110678971298432750291223175880330326x^{121} - \\
& 643091191413677690215134152788194162412600756136701391241641554162037870016x^{122} + \\
& 959606149897810360494873777895294866162916488512315537870475550077186722356x^{123} + \\
& 682545162344625194936011456703487299326117998371780168730578078429868206125x^{124} - \\
& 866839509097534177211393062951404751579626045905821362069200577495948467568x^{125} - \\
& 667799532013060356350495890606416477235141588991889797155512432299016731329x^{126} + \\
& 727132974471135347186143093878624351879391935158236311339194459151451919104x^{127} + \\
& 603393143285107148028673964695250091114075989659587164253653919305515880214x^{128} - \\
& 566501515224111253735494439754677407543185838104014779035582106369388090750x^{129} - \\
& 504208571844969101268777986488301269025605098592406296359031015723002487917x^{130} + \\
& 410002174433224834671809481524294946610738759333132956996279240646545936360x^{131} + \\
& 390094958170213828757467147252777801745411949560118103592575978052103142752x^{132} - \\
& 275715551080904559219499518926300788603320190731832266533394918232625694760x^{133} - \\
& 279694812374619927946636453278801035989642111895399667877864888825071604380x^{134} + \\
& 172317448662162669944396877108731523834677715548680718165154048197243029704x^{135} + \\
& 185988361825141983169718749282931180674422200026885116065086445700233986837x^{136} - \\
& 100117318734193425709090209602541415447159067117358093768613350084261731268x^{137} - \\
& 114776125436090801920841899814718853301243560082130240764478144164778645093x^{138} + \\
& 54093276488980390744410286845768910829725173160744232463261503386483402140x^{139} + \\
& 65767706114668361207668652371189893258533421841767401848481802611955803199x^{140} - \\
& 27189749735372928492781621384374894287521902249055076783744952513077584768x^{141} - \\
& 35007477758189762841433754637398606911014981905290896093303632025819436792x^{142} + \\
& 12720680069239320123446214150984317210664093363923501304136363272904724736x^{143} + \\
& 17316223845017070495954853620675307582788998047335780399689345755293815765x^{144} - \\
& 5542773319523083966304772320932624387452760195735310395496882709212207522x^{145} - \\
& 7961886254809245744643494578021560689752817777941989210401782354973906663x^{146} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2251072230847618155620955691366879542150238811235312780086984924730991592x^{147} + \\
& 3403661618890617816339700308645928467052653163141115929107971700467010246x^{148} - \\
& 852919920403850426324646716175449080497205722799717298256016644984820800x^{149} - \\
& 1353050279717778359545200555051987081527298996154879460730432250097712308x^{150} + \\
& 301842689006519610607813635022674827521464319608237764789269346264895336x^{151} + \\
& 50021991741978283864084603889530738530333286888483699141744835316034342x^{152} - \\
& 99906198445966833483245016167389380337694252215491855743034051930176576x^{153} - \\
& 171989770701320808082172539304669198482029234545913183932641000140636095x^{154} + \\
& 30974895412117380325995486708194872967629037082996904914199628130737964x^{155} + \\
& 54995379849944774017293303715607862334803936118650071928518188111155259x^{156} - \\
& 9010634131542275402450700619744620539337498555557063482150270763564926x^{157} - \\
& 16352737413700192950781036887279784192481538364595067581604901882617246x^{158} + \\
& 2463559789918447044517484129850286111345470605897347821238160435773280x^{159} + \\
& 4520893340084739550389627212686032066853133559457918816268118158523970x^{160} - \\
& 634035611967485177553290351946922949739992796033982995919167489207288x^{161} - \\
& 1161783417903185938488501935237506297042630739326392662524235958210080x^{162} + \\
& 153798915896146535532813114446585536476156912584130874785168604551136x^{163} + \\
& 277432808383753104515676052084219975789698311454202735717689470819925x^{164} - \\
& 35189310701487586454152002123477762747152983404703963164711026664032x^{165} - \\
& 61539226316370228865217386256654557399726219583982959399175316313144x^{166} + \\
& 7595032591089993535476403401961345503599760907413023564542528739352x^{167} + \\
& 12673626497576182688767071976293841530896127255386691016518388658953x^{168} - \\
& 1545373323775566864583067102002111183627874473252100824378807301560x^{169} - \\
& 2421913762234874881933568994515621986373595417275391608623206387192x^{170} + \\
& 296028372843104808621710506052879031672729737645760318912004714032x^{171} + \\
& 429179031225414973144903873905358440133573222720403772689828227190x^{172} - \\
& 53281474151885337856665765189065226813718010621934432624595256562x^{173} - \\
& 70470931019290730333755485948443991089960557119702138294900556225x^{174} + \\
& 8989145815341109408358577602359586241787992641103218698352186064x^{175} + \\
& 10712645023550199570854579518617646000177598421320850094879013259x^{176} - \\
& 1417775215446936243969349912868125738059570870367978047388676474x^{177} - \\
& 1506166545918499655016712660210174863513040330582682891803581284x^{178} + \\
& 208475281854477165865325746770789810054304312911520738884646800x^{179} + \\
& 195641380302114073187188503545994138270959517189400168862474270x^{180} - \\
& 28502954897099005918331689264152178134222731544820497868773458x^{181} - \\
& 23449044593504153864898761115701649198025497682166576103704949x^{182} + \\
& 3614056628855168174208032064622544872174512726345649153798448x^{183} + \\
& 2589822588158364457205359101426026407856291098762422063677800x^{184} - \\
& 423953098395175149079461676996240599159532882583507907066054x^{185} - \\
& 263166850044641059037462840284581736188195883701552611984460x^{186} + \\
& 45906458459855226219020000865524027211324904309614171436508x^{187} + \\
& 24562273422124707919827941510450610398691144580148824390122x^{188} - \\
& 4578651803345621485133382265260690253851744846373279164250x^{189} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2101625129904254341024603173516493937046030361682131409109x^{190} + \\
& 419788996233280282157770347238879257863886376630419600768x^{191} + \\
& 164498804928973113411064578528756318000940373208518841646x^{192} - \\
& 35310910953256106521470937232599346812734566520008211452x^{193} - \\
& 11750061175895690912029407363823715611106727360972937500x^{194} + \\
& 2719853689247157217669336718671829801326489415268772192x^{195} + \\
& 763807575693260799317608586496353978494641616116679590x^{196} - \\
& 191479571686660752573177861015186151314206202946582926x^{197} - \\
& 45039464604190943698865440762248189486266922718250727x^{198} + \\
& 12297531288346925235787646930518976049476238734403600x^{199} + \\
& 2399932901299950589726776007311400735598702998016871x^{200} - \\
& 719115251322766336087091321690964490900126050841386x^{201} - \\
& 115013983688669250108129506338445939107643281260662x^{202} + \\
& 38213077573414683077938857874495879303136560600524x^{203} + \\
& 4927397712692699305993551794699997142174151087570x^{204} - \\
& 1841545643589425961241725274819720526343386512686x^{205} - \\
& 187165671179348586594378149300351078239519685043x^{206} + \\
& 80316727636009557650737993403738857635941406480x^{207} + \\
& 6227615802621221186853214859882676456662226314x^{208} - \\
& 3163352335124312500203202086333909889504834620x^{209} - \\
& 177942582641173819758830840822689625379031333x^{210} + \\
& 112263421628271321654952820161512034735261148x^{211} + \\
& 4201989658611040094445182362718528943381591x^{212} - \\
& 3581561082891229212386143682420595822642652x^{213} - \\
& 74430429951173160663101115030202851929985x^{214} + \\
& 102471550975703351910872495709334657548288x^{215} + \\
& 621159867915845012227733281979348161099x^{216} - \\
& 2622636973316311289644553360602151467440x^{217} + \\
& 18179428251707696948079451226190234285x^{218} + \\
& 59886517413131220385405540433942693300x^{219} - \\
& 1099582594917931303174334755468354211x^{220} - \\
& 1216634734454528983623551715546070050x^{221} + 34491510314148180206441576421052466x^{222} + \\
& 21924472849356544849249853345100832x^{223} - 810843732524026172630954654308350x^{224} - \\
& 349316612424664860864065467488778x^{225} + 15477491445524123843928807928006x^{226} + \\
& 4902979792801291056162495684924x^{227} - 246760667143790967087421413260x^{228} - \\
& 60376891410047044159702489200x^{229} + 3321323416436357122101802029x^{230} + \\
& 649196915040321174445087384x^{231} - 37831695763386927111947608x^{232} - \\
& 6060180926241810390399624x^{233} + 363675992014020763793570x^{234} + \\
& 48764483872934760132984x^{235} - 2929897130007898165419x^{236} - \\
& 335155514039363727612x^{237} + 19557375076055281692x^{238} + 1943516100568863840x^{239} - \\
& 106343697447226121x^{240} - 9348197170306412x^{241} + 459401826347208x^{242} + \\
& 36386193310788x^{243} - 1517907694695x^{244} - 110366736666x^{245} + 3605313764x^{246} + \\
& 245188672x^{247} - 5484474x^{248} - 355250x^{249} + 4016x^{250} + 252x^{251} \Big) \Big] /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((1+x)(-1+35x-473x^2+3042x^3-8357x^4-3077x^5+69776x^6-115677x^7- \\
& 82259x^8+385137x^9-228633x^{10}-268530x^{11}+373867x^{12}-98551x^{13}-64909x^{14}+ \\
& 49836x^{15}-12711x^{16}+1135x^{17}+73x^{18}-20x^{19}+x^{20})(-1+15x+195x^2- \\
& 2476x^3-9408x^4+128774x^5+151702x^6-3080005x^7-152040x^8+39805335x^9- \\
& 22147982x^{10}-300921194x^{11}+284159318x^{12}+1383107908x^{13}-1722027429x^{14}- \\
& 3930756397x^{15}+6069754917x^{16}+6915053418x^{17}-13500672554x^{18}-7214631815x^{19}+ \\
& 19878551923x^{20}+3475881699x^{21}-19978574007x^{22}+1204754727x^{23}+13960633114x^{24}- \\
& 3214431392x^{25}-6832632284x^{26}+2528557309x^{27}+2326963032x^{28}-1184186750x^{29}- \\
& 534678044x^{30}+369015343x^{31}+75261636x^{32}-78835592x^{33}-4000296x^{34}+11506048x^{35}- \\
& 640379x^{36}-1110448x^{37}+155006x^{38}+65338x^{39}-14541x^{40}-1860x^{41}+680x^{42}- \\
& 2x^{43}-13x^{44}+x^{45})(1+15x-195x^2-2476x^3+9408x^4+128774x^5-151702x^6- \\
& 3080005x^7+152040x^8+39805335x^9+22147982x^{10}-300921194x^{11}-284159318x^{12}+ \\
& 1383107908x^{13}+1722027429x^{14}-3930756397x^{15}-6069754917x^{16}+6915053418x^{17}+ \\
& 13500672554x^{18}-7214631815x^{19}-19878551923x^{20}+3475881699x^{21}+19978574007x^{22}+ \\
& 1204754727x^{23}-13960633114x^{24}-3214431392x^{25}+6832632284x^{26}+2528557309x^{27}- \\
& 2326963032x^{28}-1184186750x^{29}+534678044x^{30}+369015343x^{31}-75261636x^{32}- \\
& 78835592x^{33}+4000296x^{34}+11506048x^{35}+640379x^{36}-1110448x^{37}-155006x^{38}+ \\
& 65338x^{39}+14541x^{40}-1860x^{41}-680x^{42}-2x^{43}+13x^{44}+x^{45})(-1-75x-2106x^2- \\
& 25677x^3-59530x^4+1782084x^5+17272711x^6+16915722x^7-549259769x^8- \\
& 2774119728x^9+1945931095x^{10}+53672650626x^{11}+125905839478x^{12}-255069305286x^{13}- \\
& 1662208525171x^{14}-1706160646334x^{15}+5962148469123x^{16}+17962282960815x^{17}+ \\
& 7082138902898x^{18}-41641400945047x^{19}-71155511878215x^{20}-7096003752745x^{21}+ \\
& 98767225236595x^{22}+104041755500065x^{23}-4751714309754x^{24}-84592421865025x^{25}- \\
& 57545771312940x^{26}+4180055107783x^{27}+24201660957901x^{28}+11084074318344x^{29}- \\
& 364628264623x^{30}-1894529779890x^{31}-523784901608x^{32}+41364917589x^{33}+ \\
& 43581474910x^{34}+4664480242x^{35}-1210342521x^{36}-282744551x^{37}+5619268x^{38}+ \\
& 6144308x^{39}+323744x^{40}-54975x^{41}-5843x^{42}+82x^{43}+30x^{44}+x^{45})(-1+42x+ \\
& 2133x^2-88106x^3-1159305x^4+59614372x^5+152015398x^6-18819762746x^7+ \\
& 40034190687x^8+3264921562892x^9-15997694438884x^{10}-336798102365195x^{11}+ \\
& 2393078617098732x^{12}+21262382124790258x^{13}-203991793583280580x^{14}- \\
& 802344394384627520x^{15}+11100949049156620432x^{16}+15124565789332508780x^{17}- \\
& 408720018862600116122x^{18}+70049454004597571197x^{19}+10586093658527044258990x^{20}- \\
& 12631025888273228837204x^{21}-198508817597338205942399x^{22}+ \\
& 387402987345930766315590x^{23}+2753586280130848546932800x^{24}- \\
& 7116726860274335286714358x^{25}-28694708927568151334441162x^{26}+ \\
& 91397507315681115211888499x^{27}+226797214695129167282089048x^{28}- \\
& 870318027304318790444523656x^{29}-1363049305769562405267119112x^{30}+ \\
& 6338665081932290022053776544x^{31}+6178413328764184607346600034x^{32}- \\
& 35988003082214887026742513610x^{33}-20492020074586065235166736101x^{34}+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 161266450872180007915993984787x^{35} + 45099606966665951271693058428x^{36} - \\
& 575001009719437474541893835090x^{37} - 37571777602636385348482415900x^{38} + \\
& 1639314263514932955906264058314x^{39} - 161019967972020863550757762131x^{40} - \\
& 3745699796292066069224199321372x^{41} + 851274013919532238198719327872x^{42} + \\
& 6859539342150922395619895904651x^{43} - 2285177200474388410515202543750x^{44} - \\
& 10046278725288151331993329222702x^{45} + 4263336781464515502088030143628x^{46} + \\
& 11714187061919722875421984542193x^{47} - 5951624800503928235794807036596x^{48} - \\
& 10796511948612809185000930216914x^{49} + 6382964048451425290619045645907x^{50} + \\
& 7780699596208522812005194118918x^{51} - 5309228126699605717428066646335x^{52} - \\
& 4313080247506333381456597185155x^{53} + 3429850650853924016071831349581x^{54} + \\
& 1790273570607001253851113421413x^{55} - 1715098075696198937373310320219x^{56} - \\
& 528375021398399743450311766854x^{57} + 659377687421116918032870695489x^{58} + \\
& 96604393710766619419597252621x^{59} - 193029880068729539119900529947x^{60} - \\
& 4069176647541912150779380527x^{61} + 42490073730573974965749981782x^{62} - \\
& 3413445482746271605206739212x^{63} - 6917976301240196729904525844x^{64} + \\
& 1165798086293282165887806486x^{65} + 814163354061253637176607304x^{66} - \\
& 208629109950888272910391562x^{67} - 66693134076508177810310164x^{68} + \\
& 24445572577097454676637446x^{69} + 3497333010513277273515012x^{70} - \\
& 1989966629028961602789938x^{71} - 83751655748872954401344x^{72} + \\
& 115359756476647736425785x^{73} - 2722708701437214377921x^{74} - \\
& 4826028852207290118097x^{75} + 345815430004445639338x^{76} + 146771902754630028398x^{77} - \\
& 16434126042052261132x^{78} - 3249431151334904798x^{79} + 49395620888831088x^{80} + \\
& 51941522002476761x^{81} - 10408635523210110x^{82} - 583754494635043x^{83} + \\
& 159473348039387x^{84} + 4295711619291x^{85} - 1796857404178x^{86} - 16067848999x^{87} + \\
& 14814596478x^{88} - 26776331x^{89} - 87402987x^{90} + 632038x^{91} + 351431x^{92} - 2932x^{93} - \\
& 868x^{94} + 5x^{95} + x^{96}] \\
& + 2x^2[6765 - 39834856x^2 + 104523970813x^4 - 164982564885013x^6 + 177906536920343761x^8 - \\
& 140842274713114435797x^{10} + 85779717815477144689740x^{12} - 41544013632033624057516594x^{14} + \\
& 16399568914591554281955684297x^{16} - 5378911095231315451404140851742x^{18} + \\
& 1488575890268219728101042520480867x^{20} - 351994030199792535376574911451604266x^{22} + \\
& 71871884346922333500853886232541044867x^{24} - \\
& 12785595487435798515128463356678397400349x^{26} + \\
& 1996895791506528512332929205178130059708642x^{28} - \\
& 275651883864977780695356681297317352816229428x^{30} + \\
& 33828447728979113683629342660329589506205101207x^{32} - \\
& 3709977469112994599708981916557512065408235588649x^{34} + \\
& 365289948325972345823076805077470890954161877009713x^{36} - \\
& 32425404856480749966662530290729058489056585516438855x^{38} + \\
& 2604616139247698717871459645328404217259966135196184926x^{40} - \\
& 189973147774713810331536112846342972934478308758548175688x^{42} + \\
& 12620622132083263498546715168396675009061385173421055097923x^{44} - \\
& 765854482314104637205303235329436798360280180658644527598753x^{46} +
\end{aligned}$$

42562436526820650860707602166648255414139798711228171581020655 x^{48} −
 2171559463258983354104537024199792919521656639139402410358295711 x^{50} +
 101942345979906885079316490841316223826221488541870800772164392320 x^{52} −
 4412436848474684114470265849454202230730045242271797018981916286878 x^{54} +
 176434918753367226089132827733647336462524534897411315478471499006440 x^{56} −
 6529169327447092979111289719501464302923305251758180210919854340279423 x^{58} +
 223992363959888131556614785346234342043125632543832498958707165387902106 x^{60} −
 7135081291594307765035750042713355457023687312428278457158772113249748020 x^{62} +
 211349719870075782092314373592219762450211190842573213520200973538098023705 x^{64} −
 5829747217962700797775831879989006647967406571886676045401123657389560305135 x^{66} +
 149939528071418231793537280414800452106055638810520348651804752031329332298958 x^{68} −
 3600324290507618056748431686649358313129920169288750702370984438366493499667957 x^{70} +
 80804769009989367675465118287335591309170582951248358572296021608179934575771534 x^{72} −
 1697014116468396675601177265098611425265363921263842227434660212437937449880358576 x^{74} +
 3338447788870027082009969624806188063272868918556863271783628718539911554697003113 x^{76} −
 615812039663158067427035226817313403880194617065071588614438087436284764042158389250 x^{78} +
 10661242870925396694061183900824606932543715327939212858870246765373478111799908168003 x^{80} −
 173386197018949019297092026313015971585981611229799779936169713909400502257051583764237 x^{82} +
 2651183903888434806549726241332429567358981401636316760890289939008725629273625115133647 x^{84} −
 38144978497487720397254343445160000582330183406909700905242551632552633635018282675841231 x^{86} +
 516825168806365635236885234512762320133853856175285856068018482406907535491112616999187870 x^{88} −
 6599018366230807657388479765432604216701703096467182894380148680198084869224733901075500562 x^{90} +
 79460276562185351672912727675623045979195727970212924090131051590777615593147866215541549218 x^{92} −
 902916091161565888595907394540095514693504869745118622625216699664749593627800071984663290108 x^{94} +
 9688343088637406683887382241265119966498757539438741549889158203583075785874532151676508321479 x^{96} −
 98225003054859128414334574438272314112297530773495580047065843635983090790831801167138118074467 x^{98} +
 941496566220322666306287949016344276328171777277670713891809552257172366149255486216992966620125 x^{100} −
 8536542927135374123407067170728273502006163975954671969287632295611146443494549207711986540525045 x^{102} +
 73256079917929564996704779710324870874854319954792365339346245961645736596295777565247129573791711 x^{104} −
 59528547899529166932200574962664493140456483531340456175879580823112219003478102517248622911662832097 x^{106} +
 4582883644240591161777089176136248499570890242792379660286318765482940051059604076091687341143772740 x^{108} −
 33441602567642202244355560644472677788484949162769661997932200886164195606154044498890819435505752185 x^{110} +
 231400382631743375766696661600795477433235330559447587717568528089234226773065974868933214244255050916 x^{112} −
 1518992038583742864039658113161658332623109534341523122909600583133739514950415788045222329965776726659 x^{114} +
 9463223247441931902532986887609413925694579275105045432036181258763123616542853182094092039180879053581 x^{116} −
 55973821482794331259883376616070471193416033900268040332569120650443433662574755980889488059263558187268 x^{118} +
 314453157811414693920007745084380702087401657720856017365629245069339882476297299662747866770671794224797 x^{120} −
 167844830765267384979331939527261819932248161091896135999040312580069139361464104167144554400344266839249 x^{122} +
 8515108649882248872111814284976016327901147570888696316872435779248218875490818097198190552475102180025454 x^{124} −
 41071960717276887795334491030969394937580963006618106935345341725729654686955631753441481693514181395070664 x^{126} +
 188412782082389520732874917882960552373974361973170290296873816530933181606301189717773937829122797016233108 x^{128} −
 822272454585975349969746016449904221502548265718277803172743129475326093156584112843517763911526166417797724 x^{130} +
 3414968313014643877335007207050620159463541240598614585348591222334176383503353608505782921317388964417082507 x^{132} −
 13500281593416878060305643148784521528442654993427569567888296106478582486907432475519025779288027033491821789 x^{134} +
 50815780997254027296137678348743532630965897929853982968995776832135709170741427875990365989513320524941167684 x^{136} −
 182164347596816814304391298592125671354168351879811153110557955945025717468283201235178758896750459780421229641 x^{138} +
 622073464989177921228086947462802118496707770257052628220284743209539730931173951339406505669149304521325138713 x^{140} −
 2024106328011596494279156225552824129561908508941369428683038347036380771601920506313884649842265203364982554252 x^{142} +
 6276732902650129353038044542945420048212902036739145853062014441326535290808139262330083419851433593286216395850 x^{144} −
 18553832605683807234817562435710455253484582526173944405946245784641542771517240026582498114546002446763223570761 x^{146} +
 52290171794313458418869521770385478206903167393994977153126111409767143149636481775310335186800678447663041516329 x^{148} −
 140532152260698769421350047506094592683847247044618255643483106882933735559771459894758139330965189111541827703026 x^{150} +
 360229574506981271617187441598865650884711596063749255728658253988338426592425828961825531623947463913627869489874 x^{152} −
 880858503312266972670216453511522703915427740537726617425539712221805211402842562204364865634722790554151842502628 x^{154} +
 2055074175576266153839688324507158507346811725352374156753897103979916436529465176993852767336627010104562841612929 x^{156} −
 4575213402712356486839626089043573477236709534461955444327646975149337719143969812366535596723395745300419903783775 x^{158} +
 9721253410368269713767144633057250440717503019110853261195827563407340067072422703237630605343963934260579554943153 x^{160} −

19716122507503071136806140162764556379469456468957536640049603940390210828371922510170361048245904340312459644847921 $x^{162}+$
 38173959442683616295928845624050261396522203135115836317559525129071230213978478929427721983208383775203194430687642 $x^{164}-$
 70569076127982414011265213591792482411166452585150068421529723515689200839641735596460575207672920790892872267662896 $x^{166}+$
 124570525967518606095406279998180772247621264525251121537147006233530112490856226925263416723741694488644486562676094 $x^{168}-$
 209999892653006984283471339286231825104552108644610021534509774903481134138455699650152353536496111811510635457372081 $x^{170}+$
 338121092208621488499473755449377319056767761572299884729740497180128022157968497798061217607013460928002147077000959 $x^{172}-$
 520018397132416166762370937978105250409969581457545867167824375194407994526843961993184217810750230081672292221420948 $x^{174}+$
 764011091265892684185648587978169358426514275061927804022440298689136165300452057356436806476470008877280427662982340 $x^{176}-$
 1072392778242539734760062680817567305522418623475769587971482679101517700563688592439228956101382873414623734532120692 $x^{178}+$
 1438194707950002790379402404766343989600934113953467552310733978553816910008881168585894166515747003773182047200058305 $x^{180}-$
 1842998798678072598994854242722581002033917151863434894535937805897242924837994400356151705758964674804944495192908474 $x^{182}+$
 2256875816120841538791970225338037137729003787012682743767588729299178169444552045835375819715004748614941614967808350 $x^{184}-$
 2641161629992199440141827788079575705295126773150172192995479336534446523321696247048621272579822073676085651147397436 $x^{186}+$
 2954025887886099992135923432244633404075419594613830084833996683764618531704656030241229605643331443286503487028240578 $x^{188}-$
 315784492437620178869166636113867575374585622059684260046992661687602501434249750472385763535829176393855529709581804 $x^{190}+$
 3226618389842777376076326359538597077103870780681386873242490559995682584707237636410940647794871675768199885128556805 $x^{192}-$
 3151416574579330746822691645375702073478888078243345298713511600228024066792719177402146878394415497605413017052203059 $x^{194}+$
 2942283720512853982148497568278536935126357362475544542467215832316952359924253544610103973034793904416410821739773829 $x^{196}-$
 2626037840253520740613681740857999456465707505018173215643929626891252126758440694502977618394564013789145207776281617 $x^{198}+$
 2240631116933171713749386090429655847642530932341880436677761599386750154886240791853826785938512319526094551003087913 $x^{200}-$
 182770483007569882983636051830593181402487199742125073385227897333479968739298377911508062153719716317585029561795563 $x^{202}+$
 142534355219319362303516895773448484226137529694522202641350325987191008859621685797363216796073763500861054635754926 $x^{204}-$
 106272396635598857636985691689359823567489014350885562823058803159611805563760711779796754029803733601196041167338019 $x^{206}+$
 757559220178218967502293930391590122947304344246703767731667176430668631239776959519996149635609632298189009555487868 $x^{208}-$
 516313899258746262246819241024954800021751388058408991997204392760431924349088463539988672690373155600276439308231981 $x^{210}+$
 336446665069002882055840075396669594325892355625291932498181670740123021637542786865028510280560111519471542555214670 $x^{212}-$
 209616773543972253921115365368793004779409657484322573894184789302459320691443021957546528440686341967837991089059434 $x^{214}+$
 124865818287375405331822931396408278545067757028188539991869701744246587405082944335030324218134185310246582824946775 $x^{216}-$
 71115994175248601380637577626251686905888629332871618987283678969892430754493351883692635735019514013654005856611852 $x^{218}+$
 3872520520417781952670026499475643065663750797140761765471631802499254043323854503769754528358944161690649231599877 $x^{220}-$
 20161252056594532974486848207571765584172073056723509885250269295098569445392044967498719971750243096072617356384646 $x^{222}+$
 10035320293592922191916633962794017252432898069276532762727869093007460007208813335050239293448051377401405619516957 $x^{224}-$
 4775574009853012299174361201820691694081543522977312389258700900045202438832203367674206010420311391142538044312008 $x^{226}+$
 2172646729153017164061405926555719590595417044108770316407668511566251968257303881517976078476473691082441409443025 $x^{228}-$
 944948957765280281359123963342482224195822510740554042405671901213900545831627091194105240479638263680725294292675 $x^{230}+$
 39288699163142904865402079301910305031822215050034857987846275534821490027358081597762857394776499478868380587213 $x^{232}-$
 156152589722653813209986277203288795860738907054376037024642330826298335831823925184975929692599412437185248759 $x^{234}+$
 59324338633271087550562483139155085171932503850265770943706266741764246399250169629295433733266855792963970440444 $x^{236}-$
 21542515526700778449166012522286681112154273975100806936881010234380831047121754076983888381279800855093147327887 $x^{238}+$
 7476786335622251783133011546708378861795409450303763773874115897029411780740113401952928442087718755087118387205 $x^{240}-$
 2480055395921370071444754405498796956810870022486040374008459659411642922614690294697731006277596354122366741001 $x^{242}+$
 786150957333387059006346571504485426568530039956340468424836297040960154545188640552141879993070945276840684060 $x^{244}-$
 238131242986569793162937840738022502707332725015043426655480540718622621941324569995018539674019654097607292145 $x^{246}+$
 68921975989235177211793485339940745461526225908025270230935161183724209938067206843791988938787995528348593003 $x^{248}-$
 19058655862618388547257726172977901298558127951487471879006285075436942245500692561662731839465859293530552924 $x^{250}+$
 5034768268008391294920381428199468823315225681260038757322410591599569879137445224818328488572074139506292784 $x^{252}-$
 1270503647160352890984144746166801874300168285157191546935819991963513650982945227900094273179484991290677173 $x^{254}+$
 306221080635222405942379792566287064969790054105115530708825128560477165826531618728184696004451285621100132 $x^{256}-$
 70486737622545656838534903405127621219054540237661763586907201497238070102522816122996053248987997433285298 $x^{258}+$
 15493163446200155366520494530910239250991859764309599184798281795957124677109473815817641699420168853158231 $x^{260}-$
 3251449852427068887449989208481123378772059610699735223464177110164734700672963922498589088287393442960395 $x^{262}+$
 651416515652375341905987600716440260756428127441759451855373397246174719471849622058994317212571643675574 $x^{264}-$
 124572497650394275879993057170721842732976050046617470492536497564976491721587387418385052586093036127402 $x^{266}+$
 22735294971307061084815792425115655621753255279530941991378875571585480910820699966251124351638695540145 $x^{268}-$
 3959347134792331189469791279308635433539267186210832329997677813270898968650117310589866661892707409037 $x^{270}+$
 657834731223350160364504356205518561755438666803801049763392361877218057836482345132212778401226157934 $x^{272}-$
 104256202236856291982749429413388959380939378709310804213582154424646932153868847220081493208525622064 $x^{274}+$
 15757829101245602509367987965244076174437748616828592171513766172517931193534662666187888470527993476 $x^{276}-$
 2270980798771618363760238232331263762924417026562403577211630132122295728274277670952541869941070932 $x^{278}+$
 312005243964255094732818745575524674157153257960297349290288807441519916470066043294320790285146412 $x^{280}-$

$$\begin{aligned}
& 40855059029456018506070064588773239836033869895247286996203430918884792720358908941215306182956950x^{282} + \\
& 5097587660212825828186278934241247951149192829131186807278252950627516751609246458843341171380051x^{284} - \\
& 605916698492688423516250074356921238447291031375241722760735000953209187526369433891633630698717x^{286} + \\
& 68593001519864252715143806882743081184214773870900285990131808913036872571715247170435811790897x^{288} - \\
& 7393487261938723490408212827098321911646892220875875983549435003736922817693456306410903751842x^{290} + \\
& 758577392637308279864656300925684169970009524167747854487321793379253658424513093051187532607x^{292} - \\
& 74063481211411381595258737067389675181612116742791286846544146014360353988209237557313836184x^{294} + \\
& 6879051658816123687964438262992032016462142583088699697293157145767284014088008383683746110x^{296} - \\
& 607621989067552613189187400502978206080357398592778597101474912142499738061737117094922662x^{298} + \\
& 51023760738960009046449074432933863376830695488096556782318051464693783220084267951361998x^{300} - \\
& 4071853784698907322107489775043671700538583273543051469295377104141178699918886028557681x^{302} + \\
& 308696671077895078948662194692721599581228275957699781514986780099735792094251892569792x^{304} - \\
& 22224060119629800720382714410540085105739259210675739194792771517849472353300981008299x^{306} + \\
& 1518763039101297355281949385146466740413904636902417316152144473139445669339079639524x^{308} - \\
& 9847968200065217371828248078633373600818559190292403115976150501486909983690531600x^{310} + \\
& 6056182242768880142227176545145182948104360161192935167211533161891881599985498791x^{312} - \\
& 353055381615689862835803046564767804217464904224281086192260791303132991929261155x^{314} + \\
& 19501312781335256104190551650338035006542237486884869111925916390920464163393958x^{316} - \\
& 1020084940767040984395483629753682196190130842817191232077466295696631279561621x^{318} + \\
& 50503642528762218785109881040303222418788964310257412931692061555272461848701x^{320} - \\
& 2365225060288826836548779510988584163965650608151074031898554225206131080716x^{322} + \\
& 104717983364314648907125112708419308722918213301804787548386960765716849875x^{324} - \\
& 4380156951060286466738102009687322229186055113137888618835811633827422913x^{326} + \\
& 172974431296067509222464944769861082541054482930053827410132262202694870x^{328} - \\
& 6444428609425051283998094077998459614535330570938082054554162170447605x^{330} + \\
& 226341489470455684436362799483823645100489588445790924444755297113982x^{332} - \\
& 7488017168159965326577661582244638059388170667830537824771914274479x^{334} + \\
& 233138837364953325388203618892253025743719714533335376872548183958x^{336} - \\
& 6825019896846946665290193267408986035766773057937612889151423978x^{338} + \\
& 187673290047558259467872109835593149931102737150948548595233191x^{340} - \\
& 4842239080835135988283443002724457921485104372565097067049108x^{342} + \\
& 117094295868181578096249292168771870964176344845568558922378x^{344} - \\
& 2650524921394341631467629843136165831773636852869685217082x^{346} + \\
& 5608557996620661358321898617450447104956696301408671810x^{348} - \\
& 1107794791152113528420675194892462676356115970184789937x^{350} + \\
& 20392285541529170864044049477629987416036226356654101x^{352} - \\
& 349232911808186575834411835324605698313593875224192x^{354} + \\
& 5553634127895030853414869279594506533848427062171x^{356} - \\
& 81834596405538825949023871226872439638030117910x^{358} + \\
& 1114756448312869080036910783669761075143270389x^{360} - \\
& 14001571527005665534625142095721810681529099x^{362} + \\
& 161682136395127319455376887239995074151781x^{364} - 1710841163357663171735009970872808242956x^{366} + \\
& 16527274432951996513030939134032579012x^{368} - 145139419130755014621647420370861118x^{370} + \\
& 1152990355728528489095169741790030x^{372} - 8238182888101087108933594665254x^{374} + \\
& 52585320030030488028030429967x^{376} - 297447715429520164887559530x^{378} + 1476373129427972834656035x^{380} - \\
& 6352114911359318056518x^{382} + 23325518029435792577x^{384} - 71626628809713792x^{386} + 178858122357592x^{388} - \\
& 348739187433x^{390} + 497872624x^{392} - 462706x^{394} + 210x^{396}] /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(-1+x)(1+x)(1-2x-x^2+x^3)(-1-2x+x^2+x^3)(-1+9x-27x^2+28x^3-9x^5+x^6)(1-8x+ \\
& 8x^2+6x^3-6x^4-x^5+x^6)(1+8x+8x^2-6x^3-6x^4+x^5+x^6)(-1-9x-27x^2-28x^3+9x^5+x^6)(1- \\
& 90x+2133x^2+19654x^3-1407750x^4+12020085x^5+211505759x^6-4005889491x^7+1140372558x^8+ \\
& 418020172543x^9-2487724623906x^{10}-15524197875990x^{11}+207409855235855x^{12}-168411001997175x^{13}- \\
& 6989852039646672x^{14}+29176347222301350x^{15}+85446200204468703x^{16}-862651296424382517x^{17}+ \\
& 732228455321894508x^{18}+11231294123644498821x^{19}-33803475249656479500x^{20}-54921206512262415741x^{21}+ \\
& 413908203902580672042x^{22}-246207028620567111678x^{23}-2478006706489040058135x^{24}+ \\
& 4892059779725991163731x^{25}+6604769927708293281489x^{26}-29615041041062939657101x^{27}+ \\
& 5692338640092901485984x^{28}+95353352498492938925253x^{29}-102458115245643694623619x^{30}-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 163321849837230400108482x^{31} + 356486700262708176382602x^{32} + 75818151591482233031073x^{33} - \\
& 667256343974500352911503x^{34} + 278039887830219509936100x^{35} + 733454500237993350748973x^{36} - \\
& 68595413322650252610760x^{37} - 427320993379027646418498x^{38} + 781904366023459571507369x^{39} + \\
& 28153248400039056561681x^{40} - 531396998038886850489789x^{41} + 154086139945066863345177x^{42} + \\
& 222672705102690029154612x^{43} - 127277447297634414536733x^{44} - 53175680795563803057275x^{45} + \\
& 53846433449462045531871x^{46} + 3955591274039798235417x^{47} - 13978733150559004421783x^{48} + \\
& 1617114491250147902040x^{49} + 2287879124568249125151x^{50} - 596315566352941519713x^{51} - \\
& 225529529482003369278x^{52} + 97905185502923227626x^{53} + 10648699061080306343x^{54} - \\
& 9487814076406871859x^{55} + 206953141963128534x^{56} + 570333880393160836x^{57} - 62350849780138683x^{58} - \\
& 20789244041051196x^{59} + 4077900882295116x^{60} + 395015565737433x^{61} - 144460876536018x^{62} - 252140561385x^{63} + \\
& 3043888623648x^{64} - 172278608445x^{65} - 36698018483x^{66} + 4110045927x^{67} + 192261069x^{68} - 45656109x^{69} + \\
& 614187x^{70} + 243603x^{71} - 12637x^{72} - 369x^{73} + 45x^{74} - x^{75})(1+90x+2133x^2-19654x^3-1407750x^4-12020085x^5+ \\
& 211505759x^6+4005889491x^7+1140372558x^8-418020172543x^9-2487724623906x^{10}+15524197875990x^{11}+ \\
& 207409855235855x^{12}+168411001997175x^{13}-6989852039646672x^{14}-29176347222301350x^{15}+ \\
& 85446200204468703x^{16}+862651296424382517x^{17}+732228455321894508x^{18}-11231294123644498821x^{19}- \\
& 33803475249656479500x^{20}+54921206512262415741x^{21}+413908203902580672042x^{22}+ \\
& 246207028620567111678x^{23}-2478006706489040058135x^{24}-4892059779725991163731x^{25}+ \\
& 6604769927708293281489x^{26}+29615041041062939657101x^{27}+5692338640092901485984x^{28}- \\
& 9535352498492938925253x^{29}-102458115245643694623619x^{30}+163321849837230400108482x^{31}+ \\
& 356486700262708176382602x^{32}-75818151591482233031073x^{33}-667256343974500352911503x^{34}- \\
& 278039887830219509936100x^{35}+733454500237993350748973x^{36}+68595413322650252610760x^{37}- \\
& 427320993379027646418498x^{38}-781904366023459571507369x^{39}+28153248400039056561681x^{40}+ \\
& 531396998038886850489789x^{41}+154086139945066863345177x^{42}-222672705102690029154612x^{43}- \\
& 127277447297634414536733x^{44}+53175680795563803057275x^{45}+53846433449462045531871x^{46}- \\
& 3955591274039798235417x^{47}-13978733150559004421783x^{48}-1617114491250147902040x^{49}+ \\
& 2287879124568249125151x^{50}+596315566352941519713x^{51}-225529529482003369278x^{52}- \\
& 97905185502923227626x^{53}+10648699061080306343x^{54}+9487814076406871859x^{55}+206953141963128534x^{56}- \\
& 570333880393160836x^{57}-62350849780138683x^{58}+20789244041051196x^{59}+4077900882295116x^{60}- \\
& 395015565737433x^{61}-144460876536018x^{62}+252140561385x^{63}+3043888623648x^{64}+172278608445x^{65}- \\
& 36698018483x^{66}-4110045927x^{67}+192261069x^{68}+45656109x^{69}+614187x^{70}-243603x^{71}-12637x^{72}+369x^{73}+ \\
& 45x^{74}+x^{75})(-1-27x+1032x^2+25802x^3-373186x^4-9247650x^5+68985132x^6+1756981328x^7-7544737839x^8- \\
& 205344558763x^9+520362914282x^{10}+16055543418770x^{11}-22765506950292x^{12}-886185755306711x^{13}+ \\
& 567341618795392x^{14}+35824949732566099x^{15}-2114077619505885x^{16}-1089052544253505079x^{17}- \\
& 434310955869650180x^{18}+25382085183437405700x^{19}+19657336252849199189x^{20}-460196787380533985842x^{21}- \\
& 503282143127348655479x^{22}+6563545564790657680027x^{23}+9019917524975714828718x^{24}- \\
& 74279664653212096085631x^{25}-121126151372353616341848x^{26}+671522546480445322781198x^{27}+ \\
& 1259864230974286367427691x^{28}-4874434339938184506685397x^{29}-10355985403728393543409067x^{30}+ \\
& 2850889789645580528825667x^{31}+68215067001652545430286192x^{32}-134568911549356278360128102x^{33}- \\
& 363861169332415595759624659x^{34}+512191062359197441924007885x^{35}+1584783594082588087382278463x^{36}- \\
& 1564210162255894419536702349x^{37}-5674861959676935021395050413x^{38}+3785132858090620875642211416x^{39}+ \\
& 16803139396061165672290060717x^{40}-7044093577535657561000115327x^{41}-41343132893232215469798457354x^{42}+ \\
& 9285232522254031569698694689x^{43}+84883083360723557875730426434x^{44}-5937121438225419731565543654x^{45}- \\
& 145956035701218221797085712592x^{46}-7890101748188581051360660346x^{47}+210852803270320434959494868010x^{48}+ \\
& 32505194104448575284667024966x^{49}-256625689573728687673431393828x^{50}- \\
& 60386088834617104154813509703x^{51}+263791426465741835712351964159x^{52}+ \\
& 79446568823858899041889805170x^{53}-229529669618761966378616574822x^{54}- \\
& 81368503811164989012654074179x^{55}+169410836644260710451175862716x^{56}+ \\
& 67317485231746697845168652537x^{57}-106273241553496096920653558337x^{58}- \\
& 45836707489100134208832885680x^{59}+56768242863723954140114918264x^{60}+25971874970291859366352369232x^{61}- \\
& 2586841426625024008113790681x^{62}-12334499250260624842980447944x^{63}+10073049237434908783966012615x^{64}+ \\
& 4934518938825367378469146563x^{65}-3357135730239884258076120873x^{66}-1668961310040579145324436854x^{67}+ \\
& 958979388811076795805220259x^{68}+478484381627959740231307898x^{69}-235070462661933368244141645x^{70}- \\
& 116494763716325583154471593x^{71}+49490588354774441565598327x^{72}+24113150837187023305271901x^{73}- \\
& 8953841615972305424578920x^{74}-4245305143743032443594882x^{75}+1392157069027476262098948x^{76}+ \\
& 635580648350932217926483x^{77}-185931065427671751697600x^{78}-80838922982850596922843x^{79}+ \\
& 21306408936395504377734x^{80}+8719476782236791891707x^{81}-2090911132691824012433x^{82}- \\
& 795459886846428765825x^{83}+175226009815304083621x^{84}+61148524359498140722x^{85}- \\
& 12490776292567568868x^{86}-3941245311464514974x^{87}+753388475396092803x^{88}+211610725442247167x^{89}-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 38184703986094031x^{90} - 9385073357203492x^{91} + 1611821886653267x^{92} + 340074435384128x^{93} - \\
& 56011183019777x^{94} - 9923940361375x^{95} + 1578324064638x^{96} + 228740033731x^{97} - 35344978435x^{98} - \\
& 4053271905x^{99} + 611772610x^{100} + 53065630x^{101} - 7859404x^{102} - 481716x^{103} + 70281x^{104} + 2698x^{105} - 389x^{106} - \\
& 7x^{107} + x^{108})(-1+27x+1032x^2-25802x^3-373186x^4+9247650x^5+68985132x^6-1756981328x^7-7544737839x^8+ \\
& 205344558763x^9 + 520362914282x^{10} - 16055543418770x^{11} - 22765506950292x^{12} + 886185755306711x^{13} + \\
& 567341618795392x^{14} - 35824949732566099x^{15} - 2114077619505885x^{16} + 1089052544253505079x^{17} - \\
& 434310955869650180x^{18} - 25382085183437405700x^{19} + 19657336252849199189x^{20} + 460196787380533985842x^{21} - \\
& 503282143127348655479x^{22} - 6563545564790657680027x^{23} + 9019917524975714828718x^{24} + \\
& 74279664653212096085631x^{25} - 121126151372353616341848x^{26} - 671522546480445322781198x^{27} + \\
& 1259864230974286367427691x^{28} + 4874434339938184506685397x^{29} - 10355985403728393543409067x^{30} - \\
& 28508897879645580528825667x^{31} + 68215067001652545430286192x^{32} + 134568911549356278360128102x^{33} - \\
& 363861169332415595759624659x^{34} - 512191062359197441924007885x^{35} + 1584783594082588087382278463x^{36} + \\
& 1564210162255894419536702349x^{37} - 5674861959676935021395050413x^{38} - 3785132858090620875642211416x^{39} + \\
& 16803139396061165672290060717x^{40} + 7044093577535657561000115327x^{41} - 41343132893232215469798457354x^{42} - \\
& 9285232522254031569698694689x^{43} + 8488308336072355730426434x^{44} + 5937121438225419731565543654x^{45} - \\
& 145956035701218221797085712592x^{46} + 7890101748188581051360660346x^{47} + 210852803270320434959494868010x^{48} - \\
& 32505194104448575284667024966x^{49} - 256625689573728687673431393828x^{50} + \\
& 60386088834617104154813509703x^{51} + 263791426465741835712351964159x^{52} - \\
& 79446568823858899041889805170x^{53} - 229529669618761966378616574822x^{54} + \\
& 81368503811164989012654074179x^{55} + 169410836644260710451175862716x^{56} - \\
& 67317485231746697845168652537x^{57} - 106273241553496096920653558337x^{58} + \\
& 45836707489100134208832885680x^{59} + 56768242863723954140114918264x^{60} - 25971874970291859366352369232x^{61} - \\
& 25868414266252042008113790681x^{62} + 12334499250260624842980447944x^{63} + 10073049237434908783966012615x^{64} - \\
& 4934518938825367378469146563x^{65} - 3357135730239884258076120873x^{66} + 1668961310040579145324436854x^{67} + \\
& 958979388811076795805220259x^{68} - 478484381627959740231307898x^{69} - 235070462661933368244141645x^{70} + \\
& 116494763716325583154471593x^{71} + 49490588354774441565598327x^{72} - 24113150837187023305271901x^{73} - \\
& 8953841615972305424578920x^{74} + 4245305143743032443594882x^{75} + 1392157069027476262098948x^{76} - \\
& 635580648350932217926483x^{77} - 185931065427671751697600x^{78} + 80838922982850596922843x^{79} + \\
& 21306408936395504377734x^{80} - 8719476782236791891707x^{81} - 2090911132691824012433x^{82} + \\
& 795459886846428765825x^{83} + 175226009815304083621x^{84} - 61148524359498140722x^{85} - \\
& 12490776292567568868x^{86} + 3941245311464514974x^{87} + 753388475396092803x^{88} - 211610725442247167x^{89} - \\
& 38184703986094031x^{90} + 9385073357203492x^{91} + 1611821886653267x^{92} - 340074435384128x^{93} - \\
& 56011183019777x^{94} + 9923940361375x^{95} + 1578324064638x^{96} - 228740033731x^{97} - 35344978435x^{98} + \\
& 4053271905x^{99} + 611772610x^{100} - 53065630x^{101} - 7859404x^{102} + 481716x^{103} + 70281x^{104} - 2698x^{105} - \\
& 389x^{106} + 7x^{107} + x^{108}]) \\
& - [(2x^2(-2850 + 6723322x^2 - 6759668263x^4 + 3942336304012x^6 - 1522935878054248x^8 + \\
& 420297644798819964x^{10} - 87061420747476801792x^{12} + 14017522325018234443820x^{14} - \\
& 1800691755710287649136536x^{16} + 188339701222253001915401008x^{18} - \\
& 16301340717115495133297512750x^{20} + 1183161780558124120995496715832x^{22} - \\
& 72811713139146107588601162301885x^{24} + 3834865450794129182979163318600488x^{26} - \\
& 174246321502744931429532990462875144x^{28} + 6877788456677265485701921137593457592x^{30} - \\
& 237265725373820790084982826016430065324x^{32} + \\
& 7191857393372354804557967599707792525704x^{34} - \\
& 192454439380257306670502099935970291948287x^{36} + \\
& 4566043270046851019844894427773717398558322x^{38} - \\
& 96413602080128957229656853667253058076966478x^{40} + \\
& 181813867959646263499380549777102207272268828x^{42} - \\
& 30716752962046065733955398527802370463153453468x^{44} + \\
& 466267583012996158423660005909885027589658350532x^{46} - \\
& 6376118596726605408588335027560665019457695744918x^{48} + \\
& 78740535733173513455041562643270803259375995530058x^{50} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 880118246491475601601423751310031046933201491720606x^{52} + \\
& 8922638175355253016485311034187403219400049031380550x^{54} - \\
& 82205438380503609783493365234820961159981095846071378x^{56} + \\
& 689526717426032793861172718026480848694305711950968784x^{58} - \\
& 5274502790200303684138080315604728615280948921373387877x^{60} + \\
& 36853732104768759635963701467203731490491696287517571270x^{62} - \\
& 235557924021941156542669828228788631817828751703098719117x^{64} + \\
& 1379233266102751106680069828991484844090624964080219581054x^{66} - \\
& 7407518667047801024011626478759013550761362805406353959535x^{68} + \\
& 36537648865425956553949459856633538612321320017147092420992x^{70} - \\
& 165709710650234473956541618685483802123998444837800186863433x^{72} + \\
& 691787296298266802163462211187175065445750531644287557378858x^{74} - \\
& 2661124132393193880482903626656542061543206968078106781306641x^{76} + \\
& 9441714766142941114858729559093399652439549276374491612358220x^{78} - \\
& 30926529202300371517259076142607092917939887818672120674748793x^{80} + \\
& 93601949373888484217861098961903359321465957704607022875649956x^{82} - \\
& 261980852719197384074580900183645596880121589285171292981168803x^{84} + \\
& 678613561916244539832896686029719323844649470185047084200549198x^{86} - \\
& 1628028845994958189127456581824194502978441830701064274342183786x^{88} + \\
& 3619831235637093310878667937714674022443929217211014482141028644x^{90} - \\
& 7464213259796436753836641691845287651024187099286634501274407693x^{92} + \\
& 14282874970334852019359262693472291214846115403395852076997066418x^{94} - \\
& 2537662462203352824370596917257229498235588203975067919037421202x^{96} + \\
& 41886545220230362404215108650496969628250043230197153077967711328x^{98} - \\
& 64262751773718460981279526325583380467376706959098687516980920463x^{100} + \\
& 91684569742863751779248206303707694097123651794233523839847845350x^{102} - \\
& 121697163146866032210903318267912517815771127362001581018894303713x^{104} + \\
& 150346963731718494406475483108959291087531042754314087437307752192x^{106} - \\
& 172945693803604434824779951991769055458294368966683842833555750248x^{108} + \\
& 185304189128532505026027209000605167307470573335753634222446877344x^{110} - \\
& 184999133161478796553941778145476670018479100690268555791160880669x^{112} + \\
& 172147673664149903602784491803709786720607137419743075458376278256x^{114} - \\
& 149350770943370141395174331350548880948900909117740282999033461640x^{116} + \\
& 120838840953211958897346923927315670640312889507318262215715247744x^{118} - \\
& 91202481246658997146850952125526719734854605709759176009633796013x^{120} + \\
& 64225357023519175729733018612457705186024790890392698790674424006x^{122} - \\
& 42208074569875646452973183961404319749857646755713675378114388417x^{124} + \\
& 25891293405617484568187234753114516636654531766663785530082971896x^{126} - \\
& 14826951661369991335979744778444815659173301934639077935088838536x^{128} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 7927774017115768349777154280407363734319108396931345538931156406x^{130} - \\
& 3958254838081197025427391291673953083613929149998436362203685537x^{132} + \\
& 1845659039833880103765432953160795924372049443566581274892485312x^{134} - \\
& 803760415939924473352705326930842126751915100980430061626779971x^{136} + \\
& 326927224678450719282675448546850900103446813097950176039294476x^{138} - \\
& 124204167321700166495231700801570066696875646871865557753263312x^{140} + \\
& 44073956621718485588482627020963359229143298504480708888654204x^{142} - \\
& 14607547238068026946501304746588662657658916546086222765483094x^{144} + \\
& 4521664967997477721978081508619506948828662557606481140476048x^{146} - \\
& 1307100318053416842468898250389366360556773144964314211639685x^{148} + \\
& 352824763408083792343698686320361345849486164699883762174526x^{150} - \\
& 88916971792938737901704247929096710605526909216521212354606x^{152} + \\
& 20917341329193841181378149767654984544571248989838272802406x^{154} - \\
& 4592289114413323002128931261581886649124661360017675386462x^{156} + \\
& 940677005417114131694888970306489928079621368667583992830x^{158} - \\
& 179725578226176871763494840587332095791213583343429327910x^{160} + \\
& 32017500639586680646947676844497845958112184109319124640x^{162} - \\
& 5316215400223655932853788080317523269761898748093636387x^{164} + \\
& 822361180335131458413089596241506642610727216197850374x^{166} - \\
& 118454362853823004936265083311731703569123654427110030x^{168} + \\
& 15879103072578820257409119317688928634788599575790130x^{170} - \\
& 1979784187173967953538490446185030773251689578051108x^{172} + \\
& 22941803344808553009081960491599743182847249418966x^{174} - \\
& 24690151645039503212974202281502752118254050446109x^{176} + \\
& 2465699852092291972282508185323173117798802734346x^{178} - \\
& 228282464452576991423943997675937666413157696177x^{180} + \\
& 19573781106855649345981215999443840782086949464x^{182} - \\
& 1552583018599702027759412089108667886921421639x^{184} + \\
& 113781155721621997638138347377663419814008752x^{186} - \\
& 7693475011706994657339312213875138105330997x^{188} + \\
& 479236684585625282931405079285561526771974x^{190} - \\
& 27454978052780940432299251412054225187241x^{192} + \\
& 1443857850655771853208974651709898270296x^{194} - \\
& 69559814412598454831315928221310825287x^{196} + \\
& 3062793890835423527711425984743269830x^{198} - \\
& 122935569661251024307892770722340355x^{200} + \\
& 4485112036898997674033003608307590x^{202} - 148243713573336247868200974798482x^{204} + \\
& 4422445002084556526593775154486x^{206} - 118569346817098273547037977341x^{208} + \\
& 2842888738083317801242622136x^{210} - 60606998232620774044317279x^{212} + \\
& 1141066636699083306980514x^{214} - 18819066524471888592988x^{216} + \\
& 269214632318128784170x^{218} - 3299890687581682338x^{220} + 34122906167736194x^{222} - \\
& 291656209997528x^{224} + 2003699656452x^{226} - 10624233918x^{228} + 40769788x^{230} - \\
& 100672x^{232} + 120x^{234})]/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(-1+x)(1+x)(1-2x-x^2+x^3)(-1-2x+x^2+x^3)(1-8x+8x^2+6x^3-6x^4-x^5+x^6)(1+ \\
& 8x+8x^2-6x^3-6x^4+x^5+x^6)(-1-27x+1032x^2+25802x^3-373186x^4-9247650x^5+ \\
& 68985132x^6+1756981328x^7-7544737839x^8-205344558763x^9+520362914282x^{10}+ \\
& 16055543418770x^{11}-22765506950292x^{12}-886185755306711x^{13}+567341618795392x^{14}+ \\
& 35824949732566099x^{15}-2114077619505885x^{16}-1089052544253505079x^{17}- \\
& 434310955869650180x^{18}+25382085183437405700x^{19}+19657336252849199189x^{20}- \\
& 460196787380533985842x^{21}-503282143127348655479x^{22}+6563545564790657680027x^{23}+ \\
& 9019917524975714828718x^{24}-74279664653212096085631x^{25}- \\
& 121126151372353616341848x^{26}+671522546480445322781198x^{27}+ \\
& 1259864230974286367427691x^{28}-4874434339938184506685397x^{29}- \\
& 10355985403728393543409067x^{30}+28508897879645580528825667x^{31}+ \\
& 68215067001652545430286192x^{32}-134568911549356278360128102x^{33}- \\
& 363861169332415595759624659x^{34}+512191062359197441924007885x^{35}+ \\
& 1584783594082588087382278463x^{36}-1564210162255894419536702349x^{37}- \\
& 5674861959676935021395050413x^{38}+3785132858090620875642211416x^{39}+ \\
& 16803139396061165672290060717x^{40}-7044093577535657561000115327x^{41}- \\
& 41343132893232215469798457354x^{42}+9285232522254031569698694689x^{43}+ \\
& 84883083360723557875730426434x^{44}-5937121438225419731565543654x^{45}- \\
& 145956035701218221797085712592x^{46}-7890101748188581051360660346x^{47}+ \\
& 210852803270320434959494868010x^{48}+32505194104448575284667024966x^{49}- \\
& 256625689573728687673431393828x^{50}-60386088834617104154813509703x^{51}+ \\
& 263791426465741835712351964159x^{52}+79446568823858899041889805170x^{53}- \\
& 229529669618761966378616574822x^{54}-81368503811164989012654074179x^{55}+ \\
& 169410836644260710451175862716x^{56}+67317485231746697845168652537x^{57}- \\
& 106273241553496096920653558337x^{58}-45836707489100134208832885680x^{59}+ \\
& 56768242863723954140114918264x^{60}+25971874970291859366352369232x^{61}- \\
& 25868414266252042008113790681x^{62}-12334499250260624842980447944x^{63}+ \\
& 10073049237434908783966012615x^{64}+4934518938825367378469146563x^{65}- \\
& 3357135730239884258076120873x^{66}-1668961310040579145324436854x^{67}+ \\
& 958979388811076795805220259x^{68}+478484381627959740231307898x^{69}- \\
& 235070462661933368244141645x^{70}-116494763716325583154471593x^{71}+ \\
& 49490588354774441565598327x^{72}+24113150837187023305271901x^{73}- \\
& 8953841615972305424578920x^{74}-4245305143743032443594882x^{75}+ \\
& 1392157069027476262098948x^{76}+635580648350932217926483x^{77}- \\
& 185931065427671751697600x^{78}-80838922982850596922843x^{79}+ \\
& 21306408936395504377734x^{80}+8719476782236791891707x^{81}- \\
& 2090911132691824012433x^{82}-795459886846428765825x^{83}+175226009815304083621x^{84}+ \\
& 61148524359498140722x^{85}-12490776292567568868x^{86}-3941245311464514974x^{87}+ \\
& 753388475396092803x^{88}+211610725442247167x^{89}-38184703986094031x^{90}- \\
& 9385073357203492x^{91}+1611821886653267x^{92}+340074435384128x^{93}- \\
& 56011183019777x^{94}-9923940361375x^{95}+1578324064638x^{96}+228740033731x^{97}- \\
& 35344978435x^{98}-4053271905x^{99}+611772610x^{100}+53065630x^{101}-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 7859404x^{102} - 481716x^{103} + 70281x^{104} + 2698x^{105} - 389x^{106} - 7x^{107} + \\
& x^{108})(-1 + 27x + 1032x^2 - 25802x^3 - 373186x^4 + 9247650x^5 + 68985132x^6 - \\
& 1756981328x^7 - 7544737839x^8 + 205344558763x^9 + 520362914282x^{10} - \\
& 16055543418770x^{11} - 22765506950292x^{12} + 886185755306711x^{13} + 567341618795392x^{14} - \\
& 35824949732566099x^{15} - 2114077619505885x^{16} + 1089052544253505079x^{17} - \\
& 434310955869650180x^{18} - 25382085183437405700x^{19} + 19657336252849199189x^{20} + \\
& 460196787380533985842x^{21} - 503282143127348655479x^{22} - 6563545564790657680027x^{23} + \\
& 9019917524975714828718x^{24} + 74279664653212096085631x^{25} - \\
& 121126151372353616341848x^{26} - 671522546480445322781198x^{27} + \\
& 1259864230974286367427691x^{28} + 4874434339938184506685397x^{29} - \\
& 10355985403728393543409067x^{30} - 28508897879645580528825667x^{31} + \\
& 68215067001652545430286192x^{32} + 134568911549356278360128102x^{33} - \\
& 363861169332415595759624659x^{34} - 512191062359197441924007885x^{35} + \\
& 1584783594082588087382278463x^{36} + 1564210162255894419536702349x^{37} - \\
& 5674861959676935021395050413x^{38} - 3785132858090620875642211416x^{39} + \\
& 16803139396061165672290060717x^{40} + 7044093577535657561000115327x^{41} - \\
& 41343132893232215469798457354x^{42} - 9285232522254031569698694689x^{43} + \\
& 84883083360723557875730426434x^{44} + 5937121438225419731565543654x^{45} - \\
& 145956035701218221797085712592x^{46} + 7890101748188581051360660346x^{47} + \\
& 210852803270320434959494868010x^{48} - 32505194104448575284667024966x^{49} - \\
& 256625689573728687673431393828x^{50} + 60386088834617104154813509703x^{51} + \\
& 263791426465741835712351964159x^{52} - 79446568823858899041889805170x^{53} - \\
& 229529669618761966378616574822x^{54} + 81368503811164989012654074179x^{55} + \\
& 169410836644260710451175862716x^{56} - 67317485231746697845168652537x^{57} - \\
& 106273241553496096920653558337x^{58} + 45836707489100134208832885680x^{59} + \\
& 56768242863723954140114918264x^{60} - 25971874970291859366352369232x^{61} - \\
& 25868414266252042008113790681x^{62} + 12334499250260624842980447944x^{63} + \\
& 10073049237434908783966012615x^{64} - 4934518938825367378469146563x^{65} - \\
& 3357135730239884258076120873x^{66} + 1668961310040579145324436854x^{67} + \\
& 958979388811076795805220259x^{68} - 478484381627959740231307898x^{69} - \\
& 235070462661933368244141645x^{70} + 116494763716325583154471593x^{71} + \\
& 49490588354774441565598327x^{72} - 24113150837187023305271901x^{73} - \\
& 8953841615972305424578920x^{74} + 4245305143743032443594882x^{75} + \\
& 1392157069027476262098948x^{76} - 635580648350932217926483x^{77} - \\
& 185931065427671751697600x^{78} + 80838922982850596922843x^{79} + \\
& 21306408936395504377734x^{80} - 8719476782236791891707x^{81} - \\
& 2090911132691824012433x^{82} + 795459886846428765825x^{83} + 175226009815304083621x^{84} - \\
& 61148524359498140722x^{85} - 12490776292567568868x^{86} + 3941245311464514974x^{87} + \\
& 753388475396092803x^{88} - 211610725442247167x^{89} - 38184703986094031x^{90} + \\
& 9385073357203492x^{91} + 1611821886653267x^{92} - 340074435384128x^{93} - \\
& 56011183019777x^{94} + 9923940361375x^{95} + 1578324064638x^{96} - 228740033731x^{97} - \\
& 35344978435x^{98} + 4053271905x^{99} + 611772610x^{100} - 53065630x^{101} - 7859404x^{102} + \\
& 481716x^{103} + 70281x^{104} - 2698x^{105} - 389x^{106} + 7x^{107} + x^{108})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [2x^2(615 - 262242x^2 + 41898960x^4 - 3512269288x^6 + 179492561770x^8 - 6096366193848x^{10} + \\
& 145494979941521x^{12} - 2535542754193824x^{14} + 33176572069791591x^{16} - \\
& 332854570511823920x^{18} + 2603194747035482556x^{20} - 16086202616248441320x^{22} + \\
& 79449951342676275114x^{24} - 316835773017958293666x^{26} + 1029558822605836522005x^{28} - \\
& 2748968228790112897744x^{30} + 6077130032222836986250x^{32} - \\
& 11200610700373443578820x^{34} + 17318239432637807097927x^{36} - \\
& 22588873120902162099180x^{38} + 24976811408592140276865x^{40} - \\
& 23511283684510389385926x^{42} + 18909973847672503011799x^{44} - \\
& 13034728729155138663696x^{46} + 7719367749577148252450x^{48} - \\
& 3935122847104604482756x^{50} + 1729087729879680905445x^{52} - \\
& 655385761453789840096x^{54} + 214329562544165022798x^{56} - 60448487760081534780x^{58} + \\
& 14686763734847933637x^{60} - 3068282127014427136x^{62} + 549679341236297976x^{64} - \\
& 84128865085674860x^{66} + 10945816897612520x^{68} - 1202836407725052x^{70} + \\
& 110704524241604x^{72} - 8440225044136x^{74} + 525369688896x^{76} - 26180086680x^{78} + \\
& 1016113988x^{80} - 29498700x^{82} + 600452x^{84} - 7612x^{86} + 45x^{88}))/ \\
& [(-1 + 15x + 195x^2 - 2476x^3 - 9408x^4 + 128774x^5 + 151702x^6 - 3080005x^7 - \\
& 152040x^8 + 39805335x^9 - 22147982x^{10} - 300921194x^{11} + 284159318x^{12} + 1383107908x^{13} - \\
& 1722027429x^{14} - 3930756397x^{15} + 6069754917x^{16} + 6915053418x^{17} - 13500672554x^{18} - \\
& 7214631815x^{19} + 19878551923x^{20} + 3475881699x^{21} - 19978574007x^{22} + 1204754727x^{23} + \\
& 13960633114x^{24} - 3214431392x^{25} - 6832632284x^{26} + 2528557309x^{27} + 2326963032x^{28} - \\
& 1184186750x^{29} - 534678044x^{30} + 369015343x^{31} + 75261636x^{32} - 78835592x^{33} - 4000296x^{34} + \\
& 11506048x^{35} - 640379x^{36} - 1110448x^{37} + 155006x^{38} + 65338x^{39} - 14541x^{40} - 1860x^{41} + \\
& 680x^{42} - 2x^{43} - 13x^{44} + x^{45})(1 + 15x - 195x^2 - 2476x^3 + 9408x^4 + 128774x^5 - \\
& 151702x^6 - 3080005x^7 + 152040x^8 + 39805335x^9 + 22147982x^{10} - 300921194x^{11} - \\
& 284159318x^{12} + 1383107908x^{13} + 1722027429x^{14} - 3930756397x^{15} - 6069754917x^{16} + \\
& 6915053418x^{17} + 13500672554x^{18} - 7214631815x^{19} - 19878551923x^{20} + 3475881699x^{21} + \\
& 19978574007x^{22} + 1204754727x^{23} - 13960633114x^{24} - 3214431392x^{25} + 6832632284x^{26} + \\
& 2528557309x^{27} - 2326963032x^{28} - 1184186750x^{29} + 534678044x^{30} + 369015343x^{31} - \\
& 75261636x^{32} - 78835592x^{33} + 4000296x^{34} + 11506048x^{35} + 640379x^{36} - 1110448x^{37} - \\
& 155006x^{38} + 65338x^{39} + 14541x^{40} - 1860x^{41} - 680x^{42} - 2x^{43} + 13x^{44} + x^{45})] \\
& - [(2x^2(-55 + 990x^2 - 5148x^4 + 12012x^6 - 15015x^8 + 10920x^{10} - 4760x^{12} + 1224x^{14} - 171x^{16} + \\
& 10x^{18}))]/ \\
& [1 - 55x^2 + 495x^4 - 1716x^6 + 3003x^8 - 3003x^{10} + 1820x^{12} - 680x^{14} + 153x^{16} - 19x^{18} + x^{20}] \\
& - \frac{2x^2}{-1 + x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10}^{T^{kC}}(x) = & x + 29525x^2 + 55807x^3 + 22794425x^4 + 199912706x^5 + 34583478677x^6 + \\
& 538897819048x^7 + 63782453175969x^8 + 1342851693261496x^9 + \\
& 127666740816792660x^{10} + 3240058791241468318x^{11} + 266592485903824019297x^{12} + \\
& 7697782672223977809178x^{13} + 570941650352643832290496x^{14} + \\
& 18144383836051636673861867x^{15} + 1243579048192809989812145169x^{16} + \\
& 42589885261525799514745869499x^{17} + 2742392002573492985349801499994x^{18} + \\
& 99747165686702441614952745202978x^{19} + 6106442739965045528592404793625380x^{20} + \\
& 233330348371077318790986888910572997x^{21} + 13704758306706316190825701744380567594x^{22} + \\
& 545454160156590238865681796289941865692x^{23} + \\
& 30960502764205283074176988011335478152409x^{24} + \\
& 1274650770709308207856649639205906364343631x^{25} + \\
& 70330983064894193743004668482926028100698862x^{26} + \\
& 2978107397482949463652001340178244580060843958x^{27} + \\
& 160514087920332719815868792799619501992413739904x^{28} + \\
& 6957350295166340134184435628772224999713210715452x^{29} + \\
& 367781299620754736758669478854175346991901525768337x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{11}^{T^{kC}}(x) = & x + 88573x^2 + 184318x^3 + 145252485x^4 + 1637069691x^5 + 501682800748x^6 + \\
& 10634850017387x^7 + 2147983445752757x^8 + 63350881300193974x^9 + \\
& 10062119265462622683x^{10} + 364014089441637130211x^{11} + 49370866298667719771964x^{12} + \\
& 2054738065680739228638707x^{13} + 248946408250205225732190657x^{14} + \\
& 11488975420539457121794585998x^{15} + 1277895262634953569701628954885x^{16} + \\
& 63905315558068166767129771712679x^{17} + 6643863136834483490999934197961784x^{18} + \\
& 354419932121539626627635855762488303x^{19} + 34880518154857844080556760102870914055x^{20} + \\
& 1962349859371378210299064120807482879842x^{21} + \\
& 184567015284713513365573390874875081815257x^{22} + \\
& 10854817365779249881219061645315445576104495x^{23} + \\
& 983009792071692074244201624174027978204956828x^{24} + \\
& 60011264993110778296038980871956735067594275091x^{25} + \\
& 5264523828057269322900568790047120990273047789859x^{26} + \\
& 331671290250618896825564154271703753607683170445470x^{27} + \\
& 28327480833649325978874974048998854014057102254501305x^{28} + \\
& 1832759266061590962705855675730301992067640249118562251x^{29} + \\
& 153042167979062116228157184495496323568383893309232511908x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{12}^{T^k C}(x) = & x + 265721x^2 + 608761x^3 + 925589701x^4 + 13405842666x^5 + \\
& 7277627334803x^6 + 209878072831673x^7 + 72337143245836829x^8 + \\
& 2989171289995095295x^9 + 793072716833845192356x^{10} + 40916785291407964066602x^{11} + \\
& 9144433503092353217515639x^{12} + 549007484897518979688253782x^{13} + \\
& 108594562872624965291980865517x^{14} + 7286202085630847737325323395906x^{15} + \\
& 1314373438943841131293557932317677x^{16} + 96096516725583526494032612816236112x^{17} + \\
& 16121626293866934494559934285910094227x^{18} + 1262780485977348334267781781991467055379x^{19} + \\
& 199724042414660904427470237413507262400756x^{20} + \\
& 16558114341585131120547984869353913374589204x^{21} + \\
& 2493900397938854697670288260556750511325686526x^{22} + \\
& 216838508725758375059954476572184526500702119944x^{23} + \\
& 31343557492605404324253360704947067629992713200607x^{24} + \\
& 2837455189235018400278168812902801322974786027900941x^{25} + \\
& 396094945355495460632836679520098519054199877278433322x^{26} + \\
& 37112678357696754207068876992544302223088398622621632569x^{27} + \\
& 5029131175386992926691728973991724107551644145610067932113x^{28} + \\
& 485284127122604253413359884653261788559391346482048060107639x^{29} + \\
& 64113951070393524282099764277420069836993858131130145451721088x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

Mebijusova traka $MS_m(n)$ ($2 \leq m \leq 12$)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^{MS}(x) &= \frac{-(x(1+2x))}{-1+x+x^2} - \frac{2x}{(-1+x)(1+x)} \\ &= 3x + 3x^2 + 6x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 18x^6 + 31x^7 + 47x^8 + 78x^9 + 123x^{10} + 201x^{11} + 322x^{12} + 523x^{13} + \\ &\quad 843x^{14} + 1366x^{15} + 2207x^{16} + 3573x^{17} + 5778x^{18} + 9351x^{19} + 15127x^{20} + 24478x^{21} + 39603x^{22} + \\ &\quad 64081x^{23} + 103682x^{24} + 167763x^{25} + 271443x^{26} + 439206x^{27} + 710647x^{28} + 1149853x^{29} + \\ &\quad 1860498x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3^{MS}(x) &= \frac{6x^2}{1-3x^2} - \frac{x(3+2x+x^2)}{(1+x)(-1+2x+x^2)} \\ &= 3x + 11x^2 + 15x^3 + 51x^4 + 83x^5 + 251x^6 + 479x^7 + 1315x^8 + 2787x^9 + 7211x^{10} + \\ &\quad 16239x^{11} + 40659x^{12} + 94643x^{13} + 232859x^{14} + 551615x^{15} + 1344835x^{16} + 3215043x^{17} + \\ &\quad 7801163x^{18} + 18738639x^{19} + 45357171x^{20} + 109216787x^{21} + 264026939x^{22} + 636562079x^{23} + \\ &\quad 1537859683x^{24} + 3710155683x^{25} + 8960296811x^{26} + 21624372015x^{27} + 52215418131x^{28} + \\ &\quad 126036076403x^{29} + 304306702811x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4^{MS}(x) &= -\frac{x(3+14x+x^2-16x^3-4x^4+4x^5)}{(1+x)(-1+2x+7x^2-2x^3-3x^4+x^5)} \\ &\quad + \frac{2x(2+3x^2-3x^4+x^6)}{(-1+x)(1+x)(-1-3x+x^3)(1-3x+x^3)} - \frac{2x}{(-1+x)(1+x)} \\ &= 9x + 17x^2 + 93x^3 + 197x^4 + 1064x^5 + 2579x^6 + 12602x^7 + 34813x^8 + \\ &\quad 155109x^9 + 473782x^{10} + 1973442x^{11} + 6461255x^{12} + 25731364x^{13} + 88161636x^{14} + \\ &\quad 341164928x^{15} + 1203089485x^{16} + 4572905761x^{17} + 16418366051x^{18} + 61718041819x^{19} + \\ &\quad 224060510622x^{20} + 836556608393x^{21} + 3057746964212x^{22} + 11369139034731x^{23} + \\ &\quad 41728999487503x^{24} + 154761962184614x^{25} + 569474721891612x^{26} + 2108779476730869x^{27} + \\ &\quad 7771609006274884x^{28} + 28751491766120674x^{29} + 106058977958127364x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_5^{MS}(x) &= -\frac{4x^2(9-52x^2+150x^4-156x^6+65x^8)}{(-1+x)(1+x)(-1+2x^2)(-1+5x^2)(1-22x^2+13x^4)} \\ &\quad - \frac{x(9+18x-42x^2-148x^3-34x^4+156x^5+44x^6-64x^7+12x^8)}{(-1-4x-2x^2+2x^3)(1-5x-7x^2+18x^3+6x^4-12x^5+2x^6)} + \frac{10x^2}{1-5x^2} \\ &= 9x + 73x^2 + 210x^3 + 1857x^4 + 6079x^5 + 51268x^6 + 187679x^7 + 1452017x^8 + 5929338x^9 + \\ &\quad 42196753x^{10} + 188792811x^{11} + 1256103924x^{12} + 6026479923x^{13} + 38140588993x^{14} + \\ &\quad 192526981810x^{15} + 1175822873153x^{16} + 6152192171627x^{17} + 36653174443084x^{18} + \\ &\quad 196608798903531x^{19} + 1151582649902817x^{20} + 6283287697977122x^{21} + \\ &\quad 36379144274981889x^{22} + 200804934692074883x^{23} + 1153558411488272612x^{24} + \\ &\quad 6417455984530684979x^{25} + 36672132877121356337x^{26} + 205093433765461090818x^{27} + \\ &\quad 1167841223686770652161x^{28} + 6554517403144301138299x^{29} + \\ &\quad 37233851201134748834428x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_6^{MS}(x) = & [x(7+107x+63x^2-2167x^3-4608x^4+8548x^5+23235x^6-15711x^7-43966x^8+22258x^9+ \\
& 36534x^{10}-19246x^{11}-11561x^{12}+5877x^{13}+1910x^{14}-758x^{15}-182x^{16}+36x^{17}+8x^{18})]/ \\
& [(1-x)(1+x)(-1-5x-5x^2+2x^3+x^4)(-1+5x+49x^2-116x^3-363x^4+627x^5+ \\
& 544x^6-1061x^7+133x^8+264x^9-47x^{10}-26x^{11}+3x^{12}+x^{13})] \\
& -[2x(6-201x^2+4060x^4-38192x^6+197410x^8-601653x^{10}+1140106x^{12}-1391696x^{14}+ \\
& 1102163x^{16}-558186x^{18}+178482x^{20}-35341x^{22}+4160x^{24}-265x^{26}+7x^{28})]/ \\
& [(-1-3x+6x^2+4x^3-5x^4-x^5+x^6)(-1+3x+6x^2-4x^3-5x^4+x^5+x^6)(1-9x+6x^2+ \\
& 53x^3-45x^4-66x^5+52x^6-6x^8+x^9)(-1-9x-6x^2+53x^3+45x^4-66x^5-52x^6+6x^8+x^9)] \\
& + \frac{2x(3+6x^2-16x^4+17x^6-7x^8+x^{10})}{(-1-3x+6x^2+4x^3-5x^4-x^5+x^6)(-1+3x+6x^2-4x^3-5x^4+x^5+x^6)} \\
& - \frac{2x}{(-1+x)(1+x)} \\
= & 27x + 107x^2 + 1371x^3 + 6415x^4 + 87922x^5 + 446645x^6 + 5847400x^7 + \\
& 32574167x^8 + 395913126x^9 + 2420149972x^{10} + 27298250776x^{11} + 181134018889x^{12} + \\
& 1916020966341x^{13} + 13595224053238x^{14} + 136617755072476x^{15} + 1021501284712391x^{16} + \\
& 9868854731861982x^{17} + 76783359869377940x^{18} + 720264693432184820x^{19} + \\
& 5772464612095502460x^{20} + 52983534685851344203x^{21} + 433990470327409239362x^{22} + \\
& 3920670502127763596399x^{23} + 32629347205036863480113x^{24} + \\
& 291395142403062432504997x^{25} + 2453240099048398652098941x^{26} + \\
& 21726916981450035120472251x^{27} + 184447608098723151001797246x^{28} + \\
& 1623781970639434445578728789x^{29} + 13867765496249055757164990460x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_7^{MS}(x) = & -[2x^2(-110+13706x^2-797065x^4+25766696x^6-510464656x^8+6624939954x^{10}- \\
& 58930004497x^{12}+370288441956x^{14}-1675373801542x^{16}+5518828075268x^{18}- \\
& 13304788221252x^{20}+23490902716736x^{22}-30266698848600x^{24}+28218903583250x^{26}- \\
& 18761650734737x^{28}+8689526543844x^{30}-2701217093484x^{32}+529736859486x^{34}- \\
& 58424749065x^{36}+2737417248x^{38})]/ \\
& [(-1+3x^2)(-1-6x-9x^2+3x^4)(-1+6x-9x^2+3x^4)(1-14x^2+17x^4)(1-60x^2+454x^4- \\
& 956x^6+577x^8)(-1+171x^2-5496x^4+56617x^6-240021x^8+457923x^{10}-420254x^{12}+ \\
& 186912x^{14}-37569x^{16}+2584x^{18})] \\
& -[x(-27-120x+2412x^2+13164x^3-63280x^4-353312x^5+935740x^6+4498708x^7- \\
& 9257992x^8-31760720x^9+61308064x^{10}+129398824x^{11}-258786202x^{12}-299911716x^{13}+ \\
& 665027252x^{14}+378206596x^{15}-1001583056x^{16}-271534384x^{17}+908429872x^{18}+ \\
& 119973056x^{19}-499552689x^{20}-42554924x^{21}+161021916x^{22}+16091064x^{23}-27349437x^{24}- \\
& 4587912x^{25}+1798792x^{26}+520492x^{27}+37947x^{28})]/ \\
& [(-1+x)(-1+7x^2)(-1-14x-44x^2+52x^3+303x^4+44x^5-462x^6-252x^7+107x^8+ \\
& 88x^9+13x^{10})(-1+14x+37x^2-670x^3+216x^4+7866x^5-10202x^6-27170x^7+56210x^8+ \\
& 5872x^9-66223x^{10}+22200x^{11}+25320x^{12}-12008x^{13}-2888x^{14}+1256x^{15}+139x^{16})] \\
& - \frac{2x^2(43-790x^2+6893x^4-28692x^6+62677x^8-68086x^{10}+29427x^{12})}{(-1+3x^2)(1-14x^2+17x^4)(1-60x^2+454x^4-956x^6+577x^8)} + \frac{14x^2}{1-7x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_7^{MS}(x) = & x + 27x + 467x^2 + 3027x^3 + 63563x^4 + 466327x^5 + 9885365x^6 + \\
& 77761767x^7 + 1576019355x^8 + 13410238539x^9 + 254659534737x^{10} + \\
& 2348103031059x^{11} + 41707067330849x^{12} + 413949610094255x^{13} + \\
& 6923710078740005x^{14} + 73192857948396727x^{15} + 1163907957691068795x^{16} + \\
& 12958299547681496355x^{17} + 197810440098798519899x^{18} + 2295445771020812064223x^{19} + \\
& 33927267387694624015233x^{20} + 406713599158978373001435x^{21} + \\
& 5862301338769843254084583x^{22} + 72069951150114502314410907x^{23} + \\
& 1018930653982635230381173233x^{24} + 12771399952923354000903038527x^{25} + \\
& 177918655304268284871263029425x^{26} + 2263240929289963306546494172155x^{27} + \\
& 31177815574907220476475328111613x^{28} + 401075828612326194198324636969703x^{29} + \\
& 5478440052254244075488036134078215x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_8^{MS}(x) = & -[x(16x^{69} - 106x^{68} - 3300x^{67} + 19069x^{66} + 322018x^{65} - 1520881x^{64} - 19540184x^{63} + \\
& 70000745x^{62} + 813402380x^{61} - 2016657129x^{60} - 24229609066x^{59} + 36282942825x^{58} + \\
& 525974379758x^{57} - 354587080920x^{56} - 8382141054110x^{55} + 96041957468x^{54} + \\
& 98434229981132x^{53} + 50073146080067x^{52} - 856318266137178x^{51} - 782642683316906x^{50} + \\
& 5572771563451640x^{49} + 6877679495110129x^{48} - 27497401899346396x^{47} - \\
& 41065478766170299x^{46} + 104459777429437818x^{45} + 178226150870613303x^{44} - \\
& 310495387974992080x^{43} - 582331242990297348x^{42} + 734215010668220576x^{41} + \\
& 1463222964474435545x^{40} - 1404402493924561124x^{39} - 2865484266560851312x^{38} + \\
& 2206696033233984392x^{37} + 4407996779606152990x^{36} - 2880891529521306050x^{35} - \\
& 5344844616793602333x^{34} + 3138031841625354084x^{33} + 5106446404933696315x^{32} - \\
& 2838392903240797068x^{31} - 3829413607863188624x^{30} + 2105703638706576880x^{29} + \\
& 2238182134050490742x^{28} - 1260082905713256950x^{27} - 1008935331527316393x^{26} + \\
& 597524837271834058x^{25} + 345742658107544312x^{24} - 220658210127275750x^{23} - \\
& 88285693006375070x^{22} + 62392443922387784x^{21} + 16326073430547716x^{20} - \\
& 13279291584669980x^{19} - 2092486193456287x^{18} + 2090580626011962x^{17} + \\
& 171726193316100x^{16} - 239303441030292x^{15} - 7302354821989x^{14} + 19606449076710x^{13} - \\
& 27460269177x^{12} - 1132815851256x^{11} + 19319259107x^{10} + 45302493186x^9 - 875572995x^8 - \\
& 1215183364x^7 + 13400891x^6 + 20549832x^5 + 90062x^4 - 191092x^3 - 4164x^2 + 662x + 19)]/ \\
& [(1 - 7x + 14x^2 - 5x^3 - 5x^4 + x^5)(1 + 4x - 10x^2 - 10x^3 + 15x^4 + 6x^5 - 7x^6 - x^7 + \\
& x^8)(1 - 4x - 10x^2 + 10x^3 + 15x^4 - 6x^5 - 7x^6 + x^7 + x^8)(1 + 20x + 122x^2 + 164x^3 - \\
& 690x^4 - 1751x^5 + 480x^6 + 3573x^7 + 1588x^8 - 1385x^9 - 1217x^{10} - 266x^{11} + 13x^{12} + \\
& 11x^{13} + x^{14})(-1 + 14x + 331x^2 - 3474x^3 - 24357x^4 + 237534x^5 + 541266x^6 - 6604103x^7 - \\
& 1905497x^8 + 85855152x^9 - 60009003x^{10} - 545836271x^{11} + 672927757x^{12} + 1747850343x^{13} - \\
& 2763674623x^{14} - 2917536240x^{15} + 5513512152x^{16} + 2653029943x^{17} - 5852097578x^{18} - \\
& 1465977019x^{19} + 3471750395x^{20} + 568784352x^{21} - 1167520145x^{22} - 154667330x^{23} + \\
& 221656480x^{24} + 23823457x^{25} - 24542626x^{26} - 1818710x^{27} + 1646233x^{28} + 57030x^{29} - \\
& 66339x^{30} + 348x^{31} + 1479x^{32} - 61x^{33} - 14x^{34} + x^{35})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [2x(7x^{106} - 2013x^{104} + 271473x^{102} - 22837326x^{100} + 1344929482x^{98}y - \\
& 59001771396x^{96} + 2003687770594x^{94} - 54052302641305x^{92} + 1179766678438145x^{90} - \\
& 21119750730820190x^{88} + 313342566058268162x^{86} - 3884627255914375276x^{84} + \\
& 40508469694380475941x^{82} - 357241905819153023588x^{80} + 2676454522797891427342x^{78} - \\
& 17099572626664510198179x^{76} + 93458497642559882402281x^{74} - \\
& 438122178754594179109914x^{72} + 1765238379012792344117924x^{70} - \\
& 6121625633315557702191520x^{68} + 18285573602229620700662612x^{66} - \\
& 47043716977223741089255092x^{64} + 104136439522045979737927530x^{62} - \\
& 197908247547795197818961672x^{60} + 321736263477162026054021799x^{58} - \\
& 444903527190320804983071579x^{56} + 518838713379473467639889021x^{54} - \\
& 503365156129050659894964377x^{52} + 396737493442153310733272690x^{50} - \\
& 241848026079896682187451681x^{48} + 99017128600728600175281028x^{46} - \\
& 8250124492992517280577465x^{44} - 27128803308564534282557705x^{42} + \\
& 28034219020492249326361451x^{40} - 17428199774635760630410343x^{38} + \\
& 8039292364003021973390218x^{36} - 2916939582709971330165897x^{34} + \\
& 852131433111988876145808x^{32} - 202548778297014269690756x^{30} + \\
& 39351344773252650496937x^{28} - 6255390685011652043507x^{26} + \\
& 812491167862693563189x^{24} - 85935201585787065880x^{22} + 7361461667826596399x^{20} - \\
& 506869718718388616x^{18} + 27766085251949691x^{16} - 1193593543359977x^{14} + \\
& 39522727612450x^{12} - 982459882849x^{10} + 17678093168x^8 - 218447260x^6 + 1716966x^4 - \\
& 7681x^2 + 16)]/ \\
& [(-1+x)(1+x)(1-28x+134x^2+1464x^3-11646x^4-8775x^5+234042x^6-318372x^7- \\
& 1512042x^8+3990140x^9+1327546x^{10}-12508340x^{11}+8235416x^{12}+11304952x^{13}- \\
& 15649778x^{14}+1400926x^{15}+6404612x^{16}-2944582x^{17}-312236x^{18}+418067x^{19}-31381x^{20}- \\
& 22903x^{21}+3184x^{22}+556x^{23}-97x^{24}-5x^{25}+x^{26})(1+28x+134x^2-1464x^3-11646x^4+ \\
& 8775x^5+234042x^6+318372x^7-1512042x^8-3990140x^9+1327546x^{10}+12508340x^{11}+ \\
& 8235416x^{12}-11304952x^{13}-15649778x^{14}-1400926x^{15}+6404612x^{16}+2944582x^{17}- \\
& 312236x^{18}-418067x^{19}-31381x^{20}+22903x^{21}+3184x^{22}-556x^{23}-97x^{24}+5x^{25}+x^{26})(-1+ \\
& 9x+92x^2-581x^3-2083x^4+11003x^5+18456x^6-89508x^7-76454x^8+363004x^9+148765x^{10}- \\
& 782325x^{11}-101940x^{12}+931622x^{13}-46433x^{14}-638214x^{15}+110532x^{16}+256374x^{17}- \\
& 68466x^{18}-59420x^{19}+20987x^{20}+7328x^{21}-3425x^{22}-351x^{23}+281x^{24}-9x^{25}-9x^{26}+x^{27})(1+ \\
& 9x-92x^2-581x^3+2083x^4+11003x^5-18456x^6-89508x^7+76454x^8+363004x^9-148765x^{10}- \\
& 782325x^{11}+101940x^{12}+931622x^{13}+46433x^{14}-638214x^{15}-110532x^{16}+256374x^{17}+ \\
& 68466x^{18}-59420x^{19}-20987x^{20}+7328x^{21}+3425x^{22}-351x^{23}-281x^{24}-9x^{25}+9x^{26}+x^{27})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [2x(10x^{54} - 870x^{52} + 34330x^{50} - 816543x^{48} + 13122246x^{46} - 151378746x^{44} + \\
& 1300146874x^{42} - 8510330887x^{40} + 43108593514x^{38} - 170635526475x^{36} + 530739787448x^{34} - \\
& 1300043069551x^{32} + 2506100333450x^{30} - 3789498307175x^{28} + 4469718348562x^{26} - \\
& 4081472729978x^{24} + 2859659499822x^{22} - 1522831705010x^{20} + 610647347906x^{18} - \\
& 182640864270x^{16} + 40243099424x^{14} - 6410542019x^{12} + 717731134x^{10} - 54281527x^8 + \\
& 2630666x^6 - 76229x^4 + 1189x^2 - 10)]/ \\
& [(-1+x)(1+x)(-1+9x+92x^2-581x^3-2083x^4+11003x^5+18456x^6-89508x^7-76454x^8+ \\
& 363004x^9+148765x^{10}-782325x^{11}-101940x^{12}+931622x^{13}-46433x^{14}-638214x^{15}+ \\
& 110532x^{16}+256374x^{17}-68466x^{18}-59420x^{19}+20987x^{20}+7328x^{21}-3425x^{22}-351x^{23}+ \\
& 281x^{24}-9x^{25}-9x^{26}+x^{27})(1+9x-92x^2-581x^3+2083x^4+11003x^5-18456x^6- \\
& 89508x^7+76454x^8+363004x^9-148765x^{10}-782325x^{11}+101940x^{12}+931622x^{13}+46433x^{14}- \\
& 638214x^{15}-110532x^{16}+256374x^{17}+68466x^{18}-59420x^{19}-20987x^{20}+7328x^{21}+3425x^{22}- \\
& 351x^{23}-281x^{24}-9x^{25}+9x^{26}+x^{27})] \\
& + [2x(x^{14}-11x^{12}+47x^{10}-98x^8+103x^6-50x^4+10x^2+4)]/ \\
& [(1+4x-10x^2-10x^3+15x^4+6x^5-7x^6-x^7+x^8)(1-4x-10x^2+10x^3+15x^4-6x^5- \\
& 7x^6+x^7+x^8)] \\
& - \frac{(2x)}{(-1+x)(1+x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_8^{MS}(x) = & 81x + 681x^2 + 19938x^3 + 214413x^4 + 7038371x^5 + 80708418x^6 + \\
& 2638009924x^7 + 32098743013x^8 + 1005558579804x^9 + 13098751097381x^{10} + \\
& 387302349839244x^{11} + 5413697605176834x^{12} + 150727029170351741x^{13} + \\
& 2251447792306687144x^{14} + 59281316927210554958x^{15} + 939149357512715316501x^{16} + \\
& 23552269407202601688808x^{17} + 392311453180178638708326x^{18} + \\
& 9443291793834966241192225x^{19} + 163992331457474964991423233x^{20} + \\
& 3816596095571035059285183652x^{21} + 68573510908910563426761767810x^{22} + \\
& 1552956371004992979029194886848x^{23} + 28678442547155385562725345847906x^{24} + \\
& 635435137052454220118946894076046x^{25} + 11994608414187692420665420022474599x^{26} + \\
& 261195385744336718141349209941059768x^{27} + 5016853080596606189611124150609224448x^{28} + \\
& 107760278788336250059515948060261673009x^{29} + \\
& 2098377771025447068273229367638586157098x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_9^{MS}(x) = & -[4x^2(3601238948279971942407103824094471680x^{148} \\
& -474259471159898766783550645203555567096x^{146} \\
& +29022425468291559381088932380331238122228x^{144} \\
& -1102045327082881530315053625122143125119982x^{142} \\
& +29270581425690596819984954875235660805417960x^{140} \\
& -581208060624715919750429033694899207521444791x^{138} \\
& +9004001255736396380557126978506011770795971312x^{136} \\
& -112122736430791559024284020193334299425011245410x^{134} \\
& +1147318324233993667347681451338477668847431200326x^{132} \\
& -9812521844207589162729068830834278223401122908641x^{130} \\
& +71094037650858793997196724571050385503536763139418x^{128} \\
& -441151717292710558376915845909327731669642985735590x^{126} \\
& +2365731533743122569651970285447246215414865458702916x^{124} \\
& -11047139424567699096435516722891809058971213852319884x^{122} \\
& +45208871039705347602852171185943706648353113928365286x^{120} \\
& -163029478983338688006043906088027009913605965794128974x^{118} \\
& +520507099686402878979606641569975200152824572493002428x^{116} \\
& -1477341707945106267381691779282415141560207489224445637x^{114} \\
& +3740889015606875416950290158147101280505405433948366392x^{112} \\
& -8477319280331597691761870781703195177903922918621135544x^{110} \\
& +17239095646059741617655046828058940594291844990208203948x^{108} \\
& -31534024720479050017241309031006617959995696590842275242x^{106} \\
& +51995133798665055201527667542288082114741813134146315960x^{104} \\
& -77421469033339217477421998048769861882745272767864686948x^{102} \\
& +104273200485911034539674545575470924804136790549804456680x^{100} \\
& -127205047278705080394168209841694104451769672471294081418x^{98} \\
& +140728946642557850360731567426506013894357696768241068190x^{96} \\
& -141339598802117208570311080695382157164502029207159303542x^{94} \\
& +128983006480943298029155079430726652070978003935100310108x^{92} \\
& -107032235833769809806043314701539889030820727184420259155x^{90} \\
& +80812438948113130909132549950570218540859954167249688590x^{88} \\
& -55544106147779976389121590023450222652712764735321887206x^{86} \\
& +34766282141988819566642009520825284913501446393886483404x^{84} \\
& -19822372432338823932609146237921913321395847754136599787x^{82} \\
& +10296770356875946903898446707381386928143066798669453834x^{80} \\
& -4873277579009059611647285267943665773609114951409821080x^{78} \\
& +2101355679544073267045751996873638803505223445771604500x^{76} \\
& -825424373735364456668440088772133842922158790229701176x^{74} \\
& +295292805814545649214013627674575322689120283075002592x^{72} \\
& -96179398030055520953947740433244806570514904004387838x^{70} \\
& +28508671737510221755889925631416863181848140566391012x^{68} \\
& -7686079213481637816140497035436298760109009082101753x^{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1883589053582694325166193115837859651183600763819318x^{64} \\
& -419268631118072182297281619041879429933812317157668x^{62} \\
& +84692156660452862075933436495539703994338708267852x^{60} \\
& 15509695504934434528817567228852728333156413545316x^{58} \\
& +2572044468709094711531577162700109103981487343524x^{56} \\
& -385755119424184678696259117404499509392709088016x^{54} \\
& +52249038044371347891325325250847539297052211178x^{52} \\
& -6380887727308724840788113418175252944724394300x^{50} \\
& +701366584492067369966091751501453717985633110x^{48} \\
& -69248687598713212959889742224975948877523164x^{46} \\
& +6128187168746732699834238754525465251446260x^{44} \\
& -484910061729718007400292355395071072020176x^{42} \\
& +34217560001928996192905822531236744279340x^{40} \\
& -2146996313569411441872268292963953461030x^{38} \\
& +119403696662056129697656199804407886622x^{36} \\
& -5865124969491300118717654888845705199x^{34} + 253464984182842123124923624969096606x^{32} \\
& -9595362071924435538971864800207280x^{30} + 316670411645212935155666148651968x^{28} \\
& -9061253896687662876071573146384x^{26} + 223411293208638068122042091662x^{24} \\
& -4712421429044314029064168310x^{22} + 84325967173965384196768590x^{20} \\
& -1267430664692520809946133x^{18} + 15808459062940762176132x^{16} \\
& -161207417534678200784x^{14} + 1318985590268390020x^{12} \\
& -8450248836636137x^{10} + 41032351364484x^8 - 144316319446x^6 + 343725546x^4 - 494857x^2 + \\
& 330)]/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(-1+3x)(1+3x)(-1+7x^2)(-1+27x-258x^2+973x^3-324x^4-6744x^5+12454x^6+ \\
& 7362x^7-33489x^8+15667x^9+19476x^{10}-20253x^{11}+3729x^{12}+2151x^{13}-966x^{14}+ \\
& 107x^{15})(1+27x+258x^2+973x^3+324x^4-6744x^5-12454x^6+7362x^7+33489x^8+ \\
& 15667x^9-19476x^{10}-20253x^{11}-3729x^{12}+2151x^{13}+966x^{14}+107x^{15})(-1+282x^2- \\
& 25297x^4+1073828x^6-25390104x^8+363078264x^{10}-3296168948x^{12}+19596248926x^{14}- \\
& 77743595826x^{16}+207473742096x^{18}-371467677512x^{20}+439852643504x^{22}- \\
& 334403214576x^{24}+154506971212x^{26}-38880116221x^{28}+4020609392x^{30})(-1+ \\
& 591x^2-95361x^4+6922350x^6-272760016x^8+6420903257x^{10}-95828390004x^{12}+ \\
& 943120716586x^{14}-6295303405260x^{16}+29127727204334x^{18}-95000584032342x^{20}+ \\
& 220996143367594x^{22}-369011778492872x^{24}+442338529800436x^{26}-377839526215177x^{28}+ \\
& 226022147292981x^{30}-91695292950038x^{32}+23818609428605x^{34}-3541207333504x^{36}+ \\
& 226978239492x^{38})(1-1193x^2+376246x^4-48953410x^6+3288145988x^8-127374411928x^{10}+ \\
& 3015668747782x^{12}-45191010425846x^{14}+441384780778588x^{16}-2898283223877346x^{18}+ \\
& 13154666974580501x^{20}-42187756055653825x^{22}+97142224830553641x^{24}- \\
& 162322162033938237x^{26}+198042290945862570x^{28}-176799585485005402x^{30}+ \\
& 115298993750386955x^{32}-54611642383339285x^{34}+18586566465572115x^{36}- \\
& 4467086405032683x^{38}+737944576901349x^{40}-80312266104179x^{42}+5368435066393x^{44}- \\
& 193455857453x^{46}+2735506380x^{48})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [(x(-953149365383346717696x^{98} + 26114673044757854577152x^{97} - \\
& 88557437460023887090048x^{96} - 2228203846243744835990144x^{95} + \\
& 11536959510745258379188192x^{94} + 93347741439551471495673328x^{93} - \\
& 504874736014387117801293440x^{92} - 2565341866801000262660549696x^{91} + \\
& 12531151351266541072682492400x^{90} + 51137498352941451346463182864x^{89} - \\
& 203878823875170976725652113576x^{88} - 767933760238339305642036596512x^{87} + \\
& 2321872351568696587632779117502x^{86} + 8835331057636262652376567752738x^{85} - \\
& 19121083172126041637000524041666x^{84} - 78797209352098489028589254914996x^{83} + \\
& 11499568849267609738967914891967x^{82} + 550622261992834949317717734554862x^{81} - \\
& 495803969561958312991777971971017x^{80} - 3045528243642151002582270910473608x^{79} + \\
& 1398846804934161918094759164538620x^{78} + 13456757745193420346086689826521562x^{77} - \\
& 1440724690623504240284659391427732x^{76} - 47883984558548846561959812362438988x^{75} - \\
& 8666777473755518366078147016737591x^{74} + 138169310608946998129913783915025470x^{73} + \\
& 58701180282927196132848480009717373x^{72} - 325191764176658349443591714223440620x^{71} - \\
& 208426897357032574335148341822310600x^{70} + 627310979023675251349977976120424674x^{69} + \\
& 529247970253200429314621467669176296x^{68} - 995694549952524453741104080452452028x^{67} - \\
& 1042665061435475970736728878808964563x^{66} + 1303977813890105101301182555644939918x^{65} + \\
& 1652470656609510909465179367232994533x^{64} - 1410868675816252645266095520674557348x^{63} - \\
& 2150938614707116088899214117558459760x^{62} + 1260204556387439730429655116660212430x^{61} + \\
& 2331426428125569394551566891263609020x^{60} - 925507484687189259226850702117561324x^{59} - \\
& 2125635766638185629665544565075409631x^{58} + 553464127474067796010428013354004478x^{57} + \\
& 1642809964940764031122254824140166389x^{56} - 263901363736577168136268569457662644x^{55} - \\
& 1082794795624762266989253691646310000x^{54} + 95525720371886598673048877875053286x^{53} + \\
& 611514178852636175427811806134089436x^{52} - 22562427017346103638783607792072176x^{51} - \\
& 296953691001577521233627775141211039x^{50} + 701156032080053256854692625098098x^{49} + \\
& 124285327407638717604718297599384893x^{48} + 2307829441426671559852895620667892x^{47} - \\
& 44889291031693490526281381208715376x^{46} - 1276658600697241065463703125617264x^{45} + \\
& 13993291530023039253131711080350588x^{44} + 411924352281985537035900320026200x^{43} - \\
& 3761340569909269327666212843998926x^{42} - 88491324616143585956501121986432x^{41} + \\
& 870066214250910712707063555076186x^{40} + 10884547785003587249149206819668x^{39} - \\
& 172693139142129440119278563641174x^{38} + 341202461030475623600025101952x^{37} + \\
& 29300190012360104533601256734494x^{36} - 541612600905852068267380595492x^{35} - \\
& 4230465082419657475304340501464x^{34} + 151393223256430559125259462324x^{33} + \\
& 517165425037228664327652944816x^{32} - 27343465083322387416381358300x^{31} - \\
& 53236452685820726290887653208x^{30} + 3670189334446798039991188294x^{29} + \\
& 4587904751249978039372253020x^{28} - 382494024246534764329357228x^{27} - \\
& 329049186673175730033538655x^{26} + 31477712381545053004787302x^{25} + \\
& 19522487159509485410816637x^{24} - 2057755279113643060500828x^{23} - \\
& 952369858858997313846602x^{22} + 106876557884196527325124x^{21} + \\
& 37962986213100238440250x^{20} - 4394660877077409655812x^{19} - \\
& 1228066093988736853534x^{18} + 142091991144588773900x^{17} + 31973538805566877158x^{16} - \\
& 3575035883148707372x^{15} - 662662275265276628x^{14} + 68933167944024434x^{13} + \\
& 10764844178128464x^{12} - 996260840605620x^{11} - 134045501666733x^{10} + 10444687656494x^9 + \\
& 1238550887327x^8 - 75552258680x^7 - 8090032822x^6 + 347162866x^5 + 34589142x^4 - \\
& 863736x^3 - 84055x^2 + 754x + 81)]/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(1+x)(-1+2x)(1+2x)(1-8x^2+11x^4)(1-28x^2+71x^4)(1-8x+20x^2-14x^3-5x^4+4x^5)(1- \\
& 116x^2+1546x^4-4556x^6+3781x^8)(-1-48x-708x^2-1640x^3+45946x^4+341664x^5- \\
& 270194x^6-9936934x^7-22840421x^8+84442096x^9+418028192x^{10}+132842204x^{11}- \\
& 2217116283x^{12}-3910256042x^{13}+2255114380x^{14}+12952834812x^{15}+9797088008x^{16}- \\
& 9926380870x^{17}-19739579992x^{18}-6238648278x^{19}+8703028142x^{20}+7538491050x^{21}+ \\
& 208212x^{22}-2158389564x^{23}-641271414x^{24}+192328290x^{25}+111002758x^{26}+399556x^{27}- \\
& 5772921x^{28}-305408x^{29}+97576x^{30})(1-42x-75x^2+17718x^3-112036x^4-2032663x^5+ \\
& 20898099x^6+68505152x^7-1367337026x^8+1223952387x^9+39924985841x^{10}- \\
& 123520021512x^{11}-507429891185x^{12}+2815200597001x^{13}+1444158632036x^{14}- \\
& 29150884549434x^{15}+26197136927827x^{16}+152864286212934x^{17}-281984662214835x^{18}- \\
& 398046044696312x^{19}+1249282231645481x^{20}+358977981283233x^{21}- \\
& 3123666474218858x^{22}+675827827012992x^{23}+4889486045969022x^{24}- \\
& 2485484028220910x^{25}-5032512202755210x^{26}+3593534888276858x^{27}+ \\
& 3475263477225909x^{28}-3098930934608376x^{29}-1601027066102163x^{30}+ \\
& 1744452573290918x^{31}+470550625308136x^{32}-657690139223493x^{33}-75567716491829x^{34}+ \\
& 165305848427048x^{35}+1498941418335x^{36}-26855694880119x^{37}+1821955387786x^{38}+ \\
& 2634688847668x^{39}-334995651352x^{40}-134705018616x^{41}+24157589768x^{42}+ \\
& 2269409656x^{43}-605268248x^{44}+22971944x^{45})] \\
& - [2x^2(41066587866652222898880x^{68} - 992758353952415482125432x^{66} + \\
& 11077609155778996489726116x^{64} - 75937875357304272686739204x^{62} + \\
& 359148152735756018858079969x^{60} - 1247813989255646700068478270x^{58} + \\
& 3311448052135607522000845098x^{56} - 6890903677759089743304624336x^{54} + \\
& 11455026870286109405904696648x^{52} - 15419776399897881394577426496x^{50} + \\
& 16979006361774608245851454992x^{48} - 15409236371634600666485663796x^{46} + \\
& 11590835972360315745039290048x^{44} - 7255341364039829631336457944x^{42} + \\
& 3789484771314030044433891392x^{40} - 1654057453037482613678691232x^{38} + \\
& 603652240778687392509345866x^{36} - 184114820410242547277514040x^{34} + \\
& 46866285726514066157069562x^{32} - 9933989942874187006372964x^{30} + \\
& 1747920002743414438604224x^{28} - 254279893889486283307536x^{26} + \\
& 30432921243932040036704x^{24} - 2978546929594730451164x^{22} + \\
& 236662835103954604904x^{20} - 15130466428085744180x^{18} + 769776921839397140x^{16} - \\
& 30730959661308308x^{14} + 945385372794725x^{12} - 21881906116106x^{10} + 369035694784x^8 - \\
& 4338348484x^6 + 33333873x^4 - 150766x^2 + 318)]/ \\
& [(-1+3x)(1+3x)(-1+282x^2-25297x^4+1073828x^6-25390104x^8+363078264x^{10}- \\
& 3296168948x^{12}+19596248926x^{14}-77743595826x^{16}+207473742096x^{18}-371467677512x^{20}+ \\
& 439852643504x^{22}-334403214576x^{24}+154506971212x^{26}-38880116221x^{28}+ \\
& 4020609392x^{30})(-1+591x^2-95361x^4+6922350x^6-272760016x^8+6420903257x^{10}- \\
& 95828390004x^{12}+943120716586x^{14}-6295303405260x^{16}+29127727204334x^{18}- \\
& 95000584032342x^{20}+220996143367594x^{22}-369011778492872x^{24}+442338529800436x^{26}- \\
& 377839526215177x^{28}+226022147292981x^{30}-91695292950038x^{32}+23818609428605x^{34}- \\
& 3541207333504x^{36}+226978239492x^{38})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [8x^2(2952961x^{16} - 6624312x^{14} + 6193068x^{12} - 3126324x^{10} + 924170x^8 - 161984x^6 + 16308x^4 - \\
& 852x^2 + 21)] / \\
& [(-1+2x)(1+2x)(1-8x^2+11x^4)(1-28x^2+71x^4)(1-116x^2+1546x^4-4556x^6+3781x^8)] \\
& + \frac{18x^2}{1-9x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_9^{MS}(x) = & 81x + 2977x^2 + 43869x^3 + 2148297x^4 + 36446086x^5 + 1859277661x^6 + \\
& 33175969740x^7 + 1670274252969x^8 + 31407641485041x^9 + 1519348101693492x^{10} + \\
& 30342339901944756x^{11} + 1393561851576932601x^{12} + 29630625622653835328x^{13} + \\
& 1288717962120945898600x^{14} + 29100441987912020023684x^{15} + \\
& 1201843312383267583490073x^{16} + 28664530577970597174268947x^{17} + \\
& 1130098720537853186076017611x^{18} + 28278438657454112242752450823x^{19} + \\
& 1070832065514275801677136628332x^{20} + 27919545617813707754526340605069x^{21} + \\
& 1021703749526691895346459783179664x^{22} + 27576355061298160788271199625774163x^{23} + \\
& 980734176066852268972595763904905297x^{24} + 27243023028767511712725936258610836086x^{25} + \\
& 946292255083398990605453697630600206206x^{26} + \\
& 26916571107441928663000559345794173964329x^{27} + \\
& 917056053132788309820000325710205811761252x^{28} + \\
& 26595471438495138268329427549921452474114356x^{29} + \\
& 891965127088014389729702685438179850576819096x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10}^{MS}(x) = & -[x(-32x^{251} - 490x^{250} + 45052x^{249} + 664162x^{248} - 31046724x^{247} - \\
& 433169136x^{246} + 13947253330x^{245} + 180856444523x^{244} - 4586038572056x^{243} - \\
& 54250667211984x^{242} + 1174202751866162x^{241} + 12437520421477397x^{240} - \\
& 243088787307593520x^{239} - 2263299964542167788x^{238} + 41710701708969336704x^{237} + \\
& 335097457740003359287x^{236} - 6034339378757215563492x^{235} - \\
& 41040912610306664024866x^{234} + 745224775252874107463670x^{233} + \\
& 4202961118542995434945104x^{232} - 79297168045686211187696724x^{231} - \\
& 362037946881977529805327077x^{230} + 7322948425458736928185396712x^{229} + \\
& 26252948025995287180735769606x^{228} - 590347995375327696410408765078x^{227} - \\
& 1592765877111985321707826169208x^{226} + 41747985732987715922859524086384x^{225} + \\
& 79316301812119820453700773442368x^{224} - 2600629641242444488332871409945568x^{223} - \\
& 3077336492668131041106249316024592x^{222} + 143228606217632762645359663439568494x^{221} + \\
& 77286633396027622346414118047675813x^{220} - 6997169948399738720992771100961224066x^{219} + \\
& 282224504707283222080661229733789803x^{218} + 304137807650666245661429804743957342906x^{217} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 171992954215765211300257561673486407123x^{216} - 11794966351451802767004207837950194455140x^{215} \\
& + 12319875393980380622450002935333638531515x^{214} \\
& + 409216251015034028509859159700416883707142x^{213} \\
& - 607817079961942094515488735137050386778341x^{212} \\
& - 12733048270376626516914991783889224142292710x^{211} \\
& + 24133631450184358870398706985910988935432459x^{210} \\
& + 356188224217281187724527372325651938038524656x^{209} \\
& - 812607746298533133211559307243628412849469942x^{208} \\
& - 8978328498062223467143390278996454657675722756x^{207} \\
& + 23789956973315977766699580887502170258837402447x^{206} \\
& + 204381800743779745494785077727391189859282863806x^{205} \\
& - 614382627666180127639862917329319299754198713916x^{204} \\
& - 4210619200553091165181471471542024084259887198472x^{203} \\
& + 14129970915511009930024023971739813184431426839322x^{202} \\
& + 78668390290854616048388223724989040640823236066678x^{201} \\
& - 291382594644746576122165161084315980115056774998981x^{200} \\
& - 1335579084740349778817270562501901846561099032446490x^{199} \\
& + 5415984761210543615706209943388029851249076975266915x^{198} \\
& + 20644014375263051334112701883929259460173174010153858x^{197} \\
& - 91119091321873373012796213766395532675776009642679650x^{196} \\
& - 291068979954003817352798094154354683323466857863243824x^{195} \\
& + 1392453872763308285144722597061950107095189448231344158x^{194} \\
& + 3750481598841579697524467487884187770371037895117082164x^{193} \\
& - 19386160841147320702914177022312934019808277490711188226x^{192} \\
& - 44246639106380583334856771419962193745428264156547757508x^{191} \\
& + 246532483216281124582841420958536424963473248097833042295x^{190} \\
& + 478853221543793165542095225168991208820029479189838994162x^{189} \\
& - 2870293081267581625661800558944308966892104666798773620684x^{188} \quad - \\
& 4763324680913166659286516899797988842495491538676125701194x^{187} \quad + \\
& 30657513538967887055203409032941978699634480621446137893682x^{186} \quad + \\
& 43642432814308841433768125561282344086115919595876154551502x^{185} \quad - \\
& 300955446498323507179337517554076601833619076127986834964092x^{184} \quad - \\
& 369124249805317011413766222118604242819143717086899748826384x^{183} \quad + \\
& 2719802503233265644902136663147327248420935510469791798583925x^{182} \quad + \\
& 2889098837572387048882492768924255822926865632111628944135398x^{181} \quad - \\
& 22661361376180142625415324919702080629088771847726389294793632x^{180} \quad - \\
& 20981717786002127973573912887169052908331644281745293148171864x^{179} \quad + \\
& 174311820497515312120229397431335877154785238035152522385981136x^{178} \quad + \\
& 141799500977729889366136861505385920564097267744354699574468112x^{177} \quad - \\
& 1239307861144558565862609497349703208821743567012743348889454303x^{176} \quad - \\
& 894572851891631360148860427921373476959998764641712274046690612x^{175} \quad + \\
& 8152809917280400947302662093517156127431575661639309885460581153x^{174} +
\end{aligned}$$

5285146531275407872234991898620804467122276340912108663669426320 x^{173} —
 49673406073438849135102918272857920750966339522986553368622553826 x^{172} —
 29332831668497692753316159102388698085100381785095615353809637482 x^{171} +
 280539165697057636073502010949809564939545357789375484908943590908 x^{170} +
 153361873196672030043683827615007313736318663039584429278110354692 x^{169} —
 1469720844416898145859792931188371043995333147179899220283103943593 x^{168} —
 756998265461855490645040412116909313650482309153825277604498963022 x^{167} +
 7147000288994245075832977567310465843989583665996070703770235302780 x^{166} +
 353238856689871503627355823232417332851932351332749164780346840918 x^{165} —
 32277168481263047148929550743277768561685590639696527407056579095003 x^{164} —
 15588315220262262461978929587005138571504320428563168008193292983240 x^{163} +
 135439805776948989039068266615200797251954479613339287022736703830126 x^{162} +
 65018407362926767038356738874690404866595420543003864603763864768768 x^{161} —
 528246499108523413872039924248014342091228583314283734217393752612480 x^{160} —
 255970582146764139518802571229527690426075233846976601160488231180972 x^{159} +
 1915543469062274675282007383788789112531136438299964420592469091288626 x^{158} +
 949386541505485059221093663660941527026093821410824748158394785461418 x^{157} —
 6459597583976182927919191240886047225191196510839118303246297073268669 x^{156} —
 3310330144231420360592497591616036163445787576122972625350224398448182 x^{155} +
 20259975407883213921607854066709042044495859604187246513867797118380161 x^{154} +
 10827977482106599763161607378969959956928809353873984930378325032691246 x^{153} —
 59105056385135590753811896678091317838224281744629646757763386766725746 x^{152} —
 33159883563614995906703262074590109268929023497468401524914723535523826 x^{151} +
 160385966369574262381883736885303002702580631898602337369105202906837382 x^{150} +
 94911683562035274865329420352205410854239491516204873724111599579567792 x^{149} —
 404799605499906899120266410280585318921589980123042461313806232634060396 x^{148} —
 253537655210641175295602470130857732357894553962368842172879319599835346 x^{147} +
 950154806308051574680683585155643172986717250115005717108371631983324841 x^{146} +
 631359198298414945355053063837921326945655906440367779772052804116988004 x^{145} —
 2073720803026688476525286045178458236304614431572035849491675372280519665 x^{144} —
 1464277875107759686419524539063629621375061272465286609782558539348556688 x^{143} +
 4207271825542383961000636509422740546241916593750498299491920764898593626 x^{142} +
 3160633317328157511047530664261622709286365188832631218775623447777024962 x^{141} —
 7932464208160031549134726559330604885999529142358850157950735118616164759 x^{140} —
 6345853143242121146074065766979991921159492390419623894958728792539698994 x^{139} +
 13893236053807234530592156573354896181767873985742259190886068154734919691 x^{138} +
 11846427568203946149069509726026218995087005411791035194558612221564529572 x^{137} —
 22593352825407561936644602715974576383134232783002913167532045979719681503 x^{136} —
 20555257043451629571130682188210642359077974915659961591813367269085483420 x^{135} +
 34095128603754435776288368539904154828536239730293173536544292390374873272 x^{134} +
 33142258190350440790195259190034856965311986411071000445545615209901164132 x^{133} —
 4771346622299293015985339768285187456416158040600134112418718308349907068 x^{132}

$$\begin{aligned}
& -49644398978466401926241582656168894228631268322590102994991345374460233916x^{131} + \\
& 61868281832996750214009291485197419842925098301715691724387782163025792309x^{130} + \\
& 69072524129053348201904240791760451285141805138914126975794364097973269352x^{129} - \\
& 74257039155826033103242246491236014685575948742012034509305144097065345056x^{128} - \\
& 89250867373326333876838999938200853870687473859551010004136684347013433894x^{127} + \\
& 82397213263780879850884666016933485734786040964326576107946717704847638365x^{126} + \\
& 107082845629342917258623899205996190753955481868900411363210979391221275016x^{125} - \\
& 84395425486659217007458994638308139873389746284167790177857653148840552363x^{124} - \\
& 119276850051111852356847946853801340021903889797079111104981074704430146670x^{123} + \\
& 79632748485839188006741186166343683142199232356911649735891154989069004076x^{122} + \\
& 123324031199571580835792612773307621906671354729733917994834881791151327562x^{121} - \\
& 69037871146574001855918389660787771402823134039946436359555501392648304756x^{120} - \\
& 118336196549377511420998021585895795185997126039999289214200576326901303846x^{119} + \\
& 54794601080374484043906373610241871403653162219010243315769509072820711021x^{118} + \\
& 105362116507845769656487527127143223746829900308642640241152341249728819282x^{117} - \\
& 39608611510653800589216913260784164602960039306557078117589089658034515327x^{116} - \\
& 87028606079637546892430030201885379159427413388832392983846342040362132858x^{115} + \\
& 25870419832609151366255216879836120841349082199490293894060526961135711363x^{114} + \\
& 66674336610610908342718260486470376589658217392200891263769747375548949546x^{113} - \\
& 15068938701509159405513423698173792271680467289151337673224443518482009005x^{112} - \\
& 47367210124019550645870309075239278305109285067130214610950591217043277736x^{111} + \\
& 7638716098024710973022270076075100182144445070160086626989811773323920879x^{110} + \\
& 31197348950665974091595690126410334390215362008013728749321468051404373252x^{109} - \\
& 3190303313507916484751008539318484861951501105584221674248374683604977886x^{108} - \\
& 19044615272579330625003594488095034936363846679685821360850280161942075088x^{107} + \\
& 920346913590899688970753220469148528330486247037305099403176354883613885x^{106} + \\
& 10772866566820613522481634434395859352404532404757653047863787455016542686x^{105} + \\
& 12098606429879860496975533979886775447811741687169680427010002528369988x^{104} - \\
& 5645230746935844057217423016347587350465180449314341803566460592875750548x^{103} - \\
& 262993362163563682748434449929181561198835611789505893128706571244771205x^{102} + \\
& 2739731326514097096190904127478041141074956089939771821956245211732801986x^{101} + \\
& 242462576613490203068847981846506972874934039683928027095351764934310482x^{100} - \\
& 1231100250410500198350533026560371889632311265624791986133833640819970798x^{99} - \\
& 156633267655940791689586471415885891712567791186828724729896761479840962x^{98} + \\
& 512060544004276143752903754326722238236310662858125174342184411565534974x^{97} + \\
& 83515791749751504975699538759764691732341835268366048685144033694698659x^{96} - \\
& 197095286478846899154220734830831557272724555892166711331953554366429658x^{95} - \\
& 38702398571196769370733681364578250205773208277722899933188977394080745x^{94} + \\
& 70185196883915262872053909044930008612919777447933404783621346494150330x^{93} + \\
& 15949129428658702937670488225427191883501616850846349889533545367909805x^{92} - \\
& 23116431007388075993649288750622989768270246272543142908562934288846686x^{91} - \\
& 5915530558965973252084357523734844881687237214751658059859004888248272x^{90} +
\end{aligned}$$

7040435412733505009776214815462480396285275227693347882250733856305272 x^{89}	+
1988601959252906277480529334271348911241358292412369645452029745325478 x^{88}	-
1982378890100438484775112327018164884232939118247376936444918009272614 x^{87}	-
608527378553502111554798372509180558920826279565140895729360249184579 x^{86}	+
515936180494635309877748335857688188649911334383152272519614563953422 x^{85}	+
169978978760766160844613454056520277481818610046737803244806630224797 x^{84}	-
124094090334226487986376706457556464188821384827348727380898649586662 x^{83}	-
43418311663874093985567293373879737770030341997034478774223538826384 x^{82}	+
27579467570788420390500871388425260192723278776742795135741992377032 x^{81}	+
10153325448217632006315464123150582473307934400233924499972603804270 x^{80}	-
5662964001969150496952633524209866819254868852791939987603666701652 x^{79}	-
2175174821576672209587770974062941146984169769888616730861276410204 x^{78}	+
1074176995724727282326552265120340740845484380470302059760202872030 x^{77}	+
427042901525414685135713126200839893877759929651166379390496189976 x^{76}	-
188207236838326016632160140953575996293240182746127514217853558780 x^{75}	-
76835309751722336498306542416442907531518049013135463788108598113 x^{74}	+
30456221766934503189287883385460606056393627856597171232217445338 x^{73}	+
12667233274534083771894388287885992486738162586480808973490145787 x^{72}	-
4551266893725163494864734362443439472757976749629166092254281170 x^{71}	-
1912778945472513387567072125653552053414344671446697551786774359 x^{70}	+
627936191116713167360894358512020663447693096544065495950256284 x^{69}	+
264397904975325957211943416459610720482649626932319907341354187 x^{68}	-
79963552544021481384215766739958937966505508002031674129517564 x^{67}	-
33429528353135334790034860578052766541091796737730841331002360 x^{66}	+
9394304130068268381726768527195673677185797965600914334218336 x^{65}	+
3862526297350995536656932199994482670170515487742329856521520 x^{64}	-
1017537335605569839646377926974593976720351612707887125221268 x^{63}	-
407372063778659884672826584415068413249975056111510665940363 x^{62}	+
101521881179576701769709466020919831725826786351199486359858 x^{61}	+
39166613252555474488960128373734995069934107620985853415999 x^{60}	-
9319159983706976954214894582575891972586698577868569291254 x^{59}	-
3427558093470429587296378458822950054819662124673685520458 x^{58}	+
785859468390309876391912067248871471850538684719138572500 x^{57}	+
272548809932565537384098310058416136294204669816916297489 x^{56}	-
60765515931589757070200646522176274956154618145266128570 x^{55}	-
19653626074111338283017500436302166779873471589652682754 x^{54}	+
4298870402190978852982760261361727420827640981034378576 x^{53}	+
1282398849228981622761622372323589726123489574353575959 x^{52}	-
277541702468794444453292713176650012596380929201966280 x^{51}	-
75529350139956880521038480703659187511924144780917603 x^{50}	
+16305353949605219176101593288883238158231467543547826 x^{49}	
+4004321427719720873899361167177406536067484526553193 x^{48}	

$$\begin{aligned}
& -868924422065040691434478639248236561187995728338972x^{47} \\
& -190519283863720980807148350510306775977463477785764x^{46} \\
& +41858801347597820517419524689911332924701082452300x^{45} \\
& +8107330450039774260655440255161272454253099593340x^{44} \\
& -1816096021954754651413591903131078381731270548598x^{43} \\
& -307410850500532756960305519701754252770493299392x^{42} \\
& +70685378893463013737381280333557287550155707404x^{41} \\
& +10343322751702715605436520242839707069561586012x^{40} \\
& -2457820343923407812327012892611551959148848280x^{39} \\
& -307396971836508984974473222367024862710398731x^{38} \\
& +76013090032333846802488970524268149399030492x^{37} \\
& +8028070190506233160675351280418036737118811x^{36} \\
& -2081237662643148349343338127608426382459798x^{35} \\
& -183192481706820418844797630474336451764682x^{34} \\
& +50199986057943732783453109365829677638946x^{33} \\
& +3629079460543821513251439573961225072483x^{32} \\
& -1061070939942330035142960501676683823986x^{31} \\
& -61961596334968465422309339823608969622x^{30} \\
& +19542643429831579447993706571788260332x^{29} + 904269231261127998194767298205800738x^{28} - \\
& 311709069260363250251696726383783488x^{27} - 11174298026848311497831255691342299x^{26} + \\
& 4276688379766372836916890198565848x^{25} + 115666506078113843231732543285491x^{24} - \\
& 50093539919800877709071405722160x^{23} - 990881453042917703333320029873x^{22} + \\
& 496645781161863721248018799186x^{21} + 6938053534118136835461821918x^{20} - \\
& 4126437790781957217047408768x^{19} - 39328351858168236805821024x^{18} + \\
& 28393432299941148742837432x^{17} + 181163936481532315387292x^{16} - \\
& 159471324966255973616714x^{15} - 706841110728069951800x^{14} + \\
& 717882285530978248402x^{13} + 2578967578254945203x^{12} - 2529459415781845334x^{11} - \\
& 9491409923223955x^{10} + 6754960249210514x^9 + 32285495443523x^8 - 13053710287562x^7 - \\
& 84847183417x^6 + 16976021872x^5 + 146997008x^4 - 13025010x^3 - 140812x^2 + 4288x + 51)/ \\
& [(1+x)(-1+35x-473x^2+3042x^3-8357x^4-3077x^5+69776x^6-115677x^7-82259x^8+ \\
& 385137x^9-228633x^{10}-268530x^{11}+373867x^{12}-98551x^{13}-64909x^{14}+49836x^{15}- \\
& 12711x^{16}+1135x^{17}+73x^{18}-20x^{19}+x^{20})(-1+15x+195x^2-2476x^3-9408x^4+ \\
& 128774x^5+151702x^6-3080005x^7-152040x^8+39805335x^9-22147982x^{10}-300921194x^{11}+ \\
& 284159318x^{12}+1383107908x^{13}-1722027429x^{14}-3930756397x^{15}+6069754917x^{16}+ \\
& 6915053418x^{17}-13500672554x^{18}-7214631815x^{19}+19878551923x^{20}+3475881699x^{21}- \\
& 19978574007x^{22}+1204754727x^{23}+13960633114x^{24}-3214431392x^{25}-6832632284x^{26}+ \\
& 2528557309x^{27}+2326963032x^{28}-1184186750x^{29}-534678044x^{30}+369015343x^{31}+ \\
& 75261636x^{32}-78835592x^{33}-4000296x^{34}+11506048x^{35}-640379x^{36}-1110448x^{37}+ \\
& 155006x^{38}+65338x^{39}-14541x^{40}-1860x^{41}+680x^{42}-2x^{43}-13x^{44}+x^{45})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + 15x - 195x^2 - 2476x^3 + 9408x^4 + 128774x^5 - 151702x^6 - 3080005x^7 + 152040x^8 + \\
& 39805335x^9 + 22147982x^{10} - 300921194x^{11} - 284159318x^{12} + 1383107908x^{13} + \\
& 1722027429x^{14} - 3930756397x^{15} - 6069754917x^{16} + 6915053418x^{17} + 13500672554x^{18} - \\
& 7214631815x^{19} - 19878551923x^{20} + 3475881699x^{21} + 19978574007x^{22} + 1204754727x^{23} - \\
& 13960633114x^{24} - 3214431392x^{25} + 6832632284x^{26} + 2528557309x^{27} - 2326963032x^{28} - \\
& 1184186750x^{29} + 534678044x^{30} + 369015343x^{31} - 75261636x^{32} - 78835592x^{33} + \\
& 4000296x^{34} + 11506048x^{35} + 640379x^{36} - 1110448x^{37} - 155006x^{38} + 65338x^{39} + \\
& 14541x^{40} - 1860x^{41} - 680x^{42} - 2x^{43} + 13x^{44} + x^{45})(-1 - 75x - 2106x^2 - \\
& 25677x^3 - 59530x^4 + 1782084x^5 + 17272711x^6 + 16915722x^7 - 549259769x^8 - \\
& 2774119728x^9 + 1945931095x^{10} + 53672650626x^{11} + 125905839478x^{12} - 255069305286x^{13} - \\
& 1662208525171x^{14} - 1706160646334x^{15} + 5962148469123x^{16} + 17962282960815x^{17} + \\
& 7082138902898x^{18} - 41641400945047x^{19} - 71155511878215x^{20} - 7096003752745x^{21} + \\
& 98767225236595x^{22} + 104041755500065x^{23} - 4751714309754x^{24} - 84592421865025x^{25} - \\
& 57545771312940x^{26} + 4180055107783x^{27} + 24201660957901x^{28} + 11084074318344x^{29} - \\
& 364628264623x^{30} - 1894529779890x^{31} - 523784901608x^{32} + 41364917589x^{33} + \\
& 43581474910x^{34} + 4664480242x^{35} - 1210342521x^{36} - 282744551x^{37} + 5619268x^{38} + \\
& 6144308x^{39} + 323744x^{40} - 54975x^{41} - 5843x^{42} + 82x^{43} + 30x^{44} + x^{45})(-1 + 42x + \\
& 2133x^2 - 88106x^3 - 1159305x^4 + 59614372x^5 + 152015398x^6 - 18819762746x^7 + \\
& 40034190687x^8 + 3264921562892x^9 - 15997694438884x^{10} - 336798102365195x^{11} + \\
& 2393078617098732x^{12} + 21262382124790258x^{13} - 203991793583280580x^{14} - \\
& 802344394384627520x^{15} + 11100949049156620432x^{16} + 15124565789332508780x^{17} - \\
& 408720018862600116122x^{18} + 70049454004597571197x^{19} + 10586093658527044258990x^{20} - \\
& 12631025888273228837204x^{21} - 198508817597338205942399x^{22} + \\
& 387402987345930766315590x^{23} + 2753586280130848546932800x^{24} - \\
& 7116726860274335286714358x^{25} - 28694708927568151334441162x^{26} + \\
& 91397507315681115211888499x^{27} + 226797214695129167282089048x^{28} - \\
& 870318027304318790444523656x^{29} - 1363049305769562405267119112x^{30} + \\
& 6338665081932290022053776544x^{31} + 6178413328764184607346600034x^{32} - \\
& 35988003082214887026742513610x^{33} - 20492020074586065235166736101x^{34} + \\
& 161266450872180007915993984787x^{35} + 4509960696665951271693058428x^{36} - \\
& 575001009719437474541893835090x^{37} - 37571777602636385348482415900x^{38} + \\
& 1639314263514932955906264058314x^{39} - 161019967972020863550757762131x^{40} - \\
& 3745699796292066069224199321372x^{41} + 851274013919532238198719327872x^{42} + \\
& 6859539342150922395619895904651x^{43} - 2285177200474388410515202543750x^{44} - \\
& 10046278725288151331993329222702x^{45} + 4263336781464515502088030143628x^{46} + \\
& 11714187061919722875421984542193x^{47} - 5951624800503928235794807036596x^{48} - \\
& 10796511948612809185000930216914x^{49} + 6382964048451425290619045645907x^{50} + \\
& 7780699596208522812005194118918x^{51} - 5309228126699605717428066646335x^{52} - \\
& 4313080247506333381456597185155x^{53} + 3429850650853924016071831349581x^{54} + \\
& 1790273570607001253851113421413x^{55} - 1715098075696198937373310320219x^{56} - \\
& 528375021398399743450311766854x^{57} + 659377687421116918032870695489x^{58} + \\
& 96604393710766619419597252621x^{59} - 193029880068729539119900529947x^{60} - \\
& 4069176647541912150779380527x^{61} + 42490073730573974965749981782x^{62} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3413445482746271605206739212x^{63} - 6917976301240196729904525844x^{64} + \\
& 1165798086293282165887806486x^{65} + 814163354061253637176607304x^{66} - \\
& 208629109950888272910391562x^{67} - 66693134076508177810310164x^{68} + \\
& 24445572577097454676637446x^{69} + 3497333010513277273515012x^{70} - \\
& 1989966629028961602789938x^{71} - 83751655748872954401344x^{72} + \\
& 115359756476647736425785x^{73} - 2722708701437214377921x^{74} - \\
& 4826028852207290118097x^{75} + 345815430004445639338x^{76} + 146771902754630028398x^{77} - \\
& 16434126042052261132x^{78} - 3249431151334904798x^{79} + 493956208888831088x^{80} + \\
& 51941522002476761x^{81} - 10408635523210110x^{82} - 583754494635043x^{83} + \\
& 159473348039387x^{84} + 4295711619291x^{85} - 1796857404178x^{86} - 16067848999x^{87} + \\
& 14814596478x^{88} - 26776331x^{89} - 87402987x^{90} + 632038x^{91} + 351431x^{92} - 2932x^{93} - \\
& 868x^{94} + 5x^{95} + x^{96}] + \\
& 2x(46x^{396} - 98663x^{394} + 103330923x^{392} - 70441197913x^{390} + 35155964875133x^{388} - \\
& 13698710132496906x^{386} + 4340125105002385014x^{384} - 1149759827746963528917x^{382} + \\
& 259929987100009696284557x^{380} - 50932861135918122223829810x^{378} + 8756638139440990389358313195x^{376} - \\
& 1333985217571940187197451240331x^{374} + 181533443205198151122082022185649x^{372} - \\
& 22217552793147805762981637573011688x^{370} + 2459600715754456504164889912881341506x^{368} - \\
& 247515708877923375980879665810407297661x^{366} + 22738761311491358362702450409780988376752x^{364} - \\
& 1914169087997037720315692655765521487952746x^{362} + 148140783524272534189591569529841509793921495x^{360} - \\
& 10571110365132424605167548167570490005466916653x^{358} + 697354337768081361695832597331203244607312491200x^{356} - \\
& 42627841622839732800715030364971725911757390774307x^{354} + 2419698520729661769408353476413504302049289304962092x^{352} - \\
& 127788867501703032172805587660100147203507795796146580x^{350} + \\
& 6289993657212304809675147080584097670105004493458174674x^{348} - \\
& 289021096163210136767216518331644094038841945366513323131x^{346} + \\
& 12415687292006613696646108266231544782991492014272798253710x^{344} - \\
& 49930196383140713735945597258533977648843967791749897214877x^{342} + \\
& 18821394945607889547976221264436359848702806768813821917606606x^{340} - \\
& 665796183580167320985636989469821908227827674161852292969132421x^{338} + \\
& 22125906217205743117162084624202673828881337560649670615316033773x^{336} - \\
& 691462152110756942550101382023804219195898319683858174832453577993x^{334} + \\
& 20340039138519979280996632551209737449039083523070070175394176335444x^{332} - \\
& 563681131014638341569002226319150452552577166274802601946503474544740x^{330} + \\
& 14728961911425297405747127815089759552263635146635189566154384316814671x^{328} - \\
& 363165569063275748542820740285693036114537773099619359356290932184345234x^{326} + \\
& 8455674581206667977718948142502644109096923941281777176243993323095558709x^{324} - \\
& 186038124966291071296147388609469438486219953863343193338677308238749373817x^{322} + \\
& 3870330774341861708239103249511659728990124935985357906649766675108713727279x^{320} - \\
& 76182211035865467234855531181915188675803788818450436412387248111177499911328x^{318} + \\
& 1419616628662939109960779504743244889516332502212233956180451620146694364967322x^{316} - \\
& 25057630651098414355142839914729267207053574160914981301451237090399477022357602x^{314} + \\
& 419167324583285741038111405021093159189709062945180455307228106738810484677624673x^{312} - \\
& 6648579778523473147710693276408415856334731698103701666897522520417792200333815475x^{310} + \\
& 100038960634997054637544254345841617270810359511684934106854406601464678089809549702x^{308} - \\
& 1428574662843738976180271280243182178849406980566756147313263547278466294260254708961x^{306} + \\
& 19369363615348183925718637949576495829621058386935017546936101229911326184744324705490x^{304} - \\
& 249449468108612971898094179859605296815866260991901605830187862976533920174633866819727x^{302} + \\
& 3052617211466537230943054693452330748221146532983630244493486276700154351918994551133112x^{300} - \\
& 35509483016172287617303901330950686561425462168198356760161083480007569929282120301425730x^{298} + \\
& 392781189980479392361361268700225739320160220392660524224965433785212751899877871405362835x^{296} - \\
& 4132722272592502285820875209978569968769999182742951347425657750511188846743208175377980582x^{294} + \\
& 41375092066857640628256061347050660161909536278898588267645757493931699942942384661923477067x^{292} - \\
& 394266973535866143371341845461626005623496008255914854003496843848939330664807146449198175854x^{290} +
\end{aligned}$$

3576973430439872413841808028939123555453400404643187105660149680165243169704825051514540256725 x^{288} −
 30905385734059454581957858922462230240530576532577811370676787876050253052120898709760832662143 x^{286} +
 254366144294532251099758521854349002146616738567177244020853999495110323012309816503058096209438 x^{284} −
 1994799331100782282867680701792430177522094923740087709224720383121250442743181054750167347260476 x^{282} +
 14909282402886535619430150830770485167338209129045737168015135459356685507651182459667448394936304 x^{280} −
 106225729474632349832942047074987515773973146765093654705125213844467758880514426324329686990538506 x^{278} +
 721624345130202592924891303435954117915693422604324610660288759871197491625913158725905906779911022 x^{276} −
 4675084862017387837410247940644521847669234969903281062868519847858337426274370141403322871006632065 x^{274} +
 28890073091055252735699961120794201502530608851790515851307025242993121846661869184184951201144938746 x^{272} −
 170321033058872414212300304494811339527888792336409153885231235968232769355898020392735234993343140040 x^{270} +
 958129022916945258190673854071555417105044376424818491922996278716577535079573277207830913168393800118 x^{268} −
 5143839350760308870163849990187503661272926119190865471825541862515438538873493505091580189615616887839 x^{266} +
 26358840018154859740885388890094550208764747552059443748544514405702610168410078856915790875088914995872 x^{264} −
 12894509614899568413171615362070397399269188094987306232448274231719704376574973260162920457378548444582 x^{262} +
 602259434621220363966807858114503124730725174725172612531595610253585457799153146585815010660817950503304 x^{260} −
 2686085542543526020121593469342599035711286953648474853674064505254879047914183939604463406550251335241539 x^{258} +
 11441090615896087834971067252509572595477114168607920955495003197503082630163250380066218695547594484105984 x^{256} −
 4654543700185444947959519939335251383621348890388352007844714914186023894252519528979905512322233051390230 x^{254} +
 180882511833166186504480780434432477334655543101204106979171621920723508625834366378936469472558723259966471 x^{252} −
 671537938248400431667521616141322198148235310007454003405013089740928218577094960347401997251286055327806449 x^{250} +
 2381995276334002305717522052674554979256094141228396026773039318734983873063721608831748703104415047971810458 x^{248} −
 8073218581560077155886965032991221994991177071629232520419012348781146327314170671237235912049840280001759105 x^{246} +
 26147154123186640209901470581760304792780264870287275304231391916410328742225677150065586100979182174556352113 x^{244} −
 80929691001025027164361035141814565154108815057828215736547359257109786757545345193759045313267607058871382696 x^{242} +
 239402349196105318692594669968763290677235271722631085229167448904236169938583214642191493090574860053274741535 x^{240} −
 676885016648686495336293803105411115138469155537992041975872444182881348819060094625850977808729638286151441251 x^{238} +
 1829337752498465860454435076736800582614238177192494255679158150053780795285720025694169057537535507972976110716 x^{236} −
 4725955605814772643567200232816305196966831272914026282970837923335050677214071020821587475488770032678443734445 x^{234} +
 11671431654181885490202368181269902415844927813300908528180181816130766922006016466178072200526328201226263377706 x^{232} −
 275560657617187495291799382724044645806575779315381791784627914624237058695679146757086433445392655044039287003216 x^{230} +
 62199457423895509214055326059012623374001681326292809211622177754814735277742810894657267517216175112783732405556 x^{228} −
 134229485917116984021312123745055338152335999338828841812639245646229013603881081994963999074145809839197253994940 x^{226} +
 27695857983333279031606185040082727877991401976057270043286044597456457312233218481643680326665535723705409707954 x^{224} −
 546385193019682632932094721736354445778263704857573347494871698932365966301255590698423299926164345489782962782547 x^{222} +
 103064691616700283066817984858763065574329755102186578392405025128914870774178835210334446460113037486323185203503 x^{220} −
 1858897980248429745727147050676720550877840292063067939434791922103703836851012374508441082455773126843995549095807 x^{218} +
 320583929511034094515572889496715006382679438262291955701100572143230581966693364978679325810861296548331111 x^{216} −
 5286551952312701028415811192821179038579058446558466056540797226649837737968798191929044636489643817595534108287495 x^{214} +
 8335852052643236010880803593171947413823623544345149520345961494440297372017006372178094970248167527852407608641499 x^{212} −
 12568242978840248868590982612074266988730927309380490974232091203685050938702087307025197279238270797498039887576282 x^{210} +
 18119438298297706828877600882535243247057224427490885639067876617153225925976227958386910671307898790169603858972890 x^{208} −
 24977972284870665222145463503141110327194635512192061872526992190138104992279139301901472599594412426108253197742864 x^{206} +
 32923559900991458001060961717260858907831560782659106888464540301256118942401335040744992183538448514655251918145311 x^{204} −
 414941239048447784217315795418688365557701626029539366515048278847375888225755094593062152592818907913836276032291 x^{202} +
 50002050931000668560906442791739081003125555262533065113723705141918770450464575960652002847365731853140755911015756 x^{200} −
 57610253940081409111621026588196730697113001142614415895358967004878232737460505607290990080964909711612341108957255 x^{198} +
 63461448282755849763782204891631232731942281042196777408522542451427265141195040017356873925958468576127686020910512 x^{196} −
 66834998643538788520257931301098532710132006053053805812774043785895522260855719373919435130971625653167961326867190 x^{194} +
 67292288373732871395803498067050012793717645466517800586365742179331699683967668681873774149663241576423911979339369 x^{192} −
 64770264908917988714707069529155313319392016809641127604667691628873274856200166285857436811754629808818906874471148 x^{190} +
 59595666016460851824024259766135813584108153534433187358486180679863612347076129580017780384388014257074934837985708 x^{188} −
 52415512880298154520461005165269678972182176738869742156746730275474555628625732374910802891587068280041778051385442 x^{186} +
 44064267594581987320537139589770870803586652826508967017941307358623667342573289512287459227740383776756361901438494 x^{184} −
 35405279645954469825427706569636986596125494372093066886953846167113123190434948824284423012235041095586056674344422 x^{182} +
 27187870990712318760930713050527511242183327426764338441379911860218476683542296264817001249359173202353073385619163 x^{180} −
 19951551794324622351205550898330134314817945155940205234029181110492080380085166259438211442303822654787785546383755 x^{178} +
 13990674988454925776827969008097977869908896494692254930637363907983240758843569885914046855915219333875876333269694 x^{176} −
 937399837508070645432173450802426300729655836913659592919068927030949358103044280143355603450448327394398032942464 x^{174} +
 60006242328630866324021219778811392982355817974262961224613765353257734597625181160398159893665387841927922105247 x^{172} −
 36695415261124232669716289525260120532984934456871414253192079768608640894018322746127653774089455935617270973693035 x^{170} +
 2143515872718947827539737144658115318847567716002891656557194309218946589476983895583144253731832567125684089528960 x^{168} −
 1195897523518517300893260999400062372289958737043869393030750379409358493149446299209149152105713724966905430212363 x^{166} +
 637181966421592542191226435100702353515440210327685600368802915292338754216538927011724848805953826319917975419780 x^{164} −

324176884282112536775822085782616815009631345499702787023268075263312794304315705399925025923849157587569456058383 $x^{162}+$
 157468360033942062927273338707793692418097356841997421580585748151329367807125908274419875667182095247158646340609 $x^{160}-$
 73019289212808312243575970128049131892122988232350744942368582006344794797357642274920543757458439259541283287389 $x^{158}+$
 32318550227536039174765643684102515658165526746169180824384817057129852350435729485617521771707980422097860518683 $x^{156}-$
 13651158995597954809510487008309797855058959159001102352052717327865838510641357952126074893144168766196530527757 $x^{154}+$
 5501996747888069175626240693213685110555308735076288916476718576045567692498271627531742831488321988278163693989 $x^{152}-$
 2115584018453643886624524963453119773304755875284421198549019741598150091303579224820037834450221816808915182555 $x^{150}+$
 775928071524414772276669518848741539928397017275841055396378469934810756340833837980634438890596084948026917475 $x^{148}-$
 271401317974895971068360778268762057001477188811059022659434045977869503897376116440993598988167287413833923747 $x^{146}+$
 90513975585566147689765188686470910327684750755892977901690785431065123848150277014033719787324260454581977863 $x^{144}-$
 28776775077374740057559473967385090304023947074035370527777284278373016695054898071568418125038429537313932992 $x^{142}+$
 8719599617401979486594012333821447341587774605577528962821397446277543405266792176413275629089065207448105460 $x^{140}-$
 2517557826624048276833446099008503601267351858789288443092272062492037287640426616408205920675460157709954807 $x^{138}+$
 692447188882217823347254920133937354920576087358226862606603225085229597389027704689745512514629623882743481 $x^{136}-$
 18138820379556543594509128505858591418568519827937283894425334840496516737377974764743647899786484408210541 $x^{134}+$
 45241023442337521523669882838198195681663250647420797266304628446933035648193676081836159089433468277157600 $x^{132}-$
 10740818123189917804813505507760127462951915093798210945773150530858004610334770602057776646879945135129839 $x^{130}+$
 2426604473191101597709724263749232855530347490438638833845880686028933822716689503849993508350946848003040 $x^{128}-$
 521539028998598476514973945354690283289641877676388608252339658259473989748368091141580088019068140225212 $x^{126}+$
 106601787876123866582105211779963691439768946689150937835749835539194406414481210697693979636543501124658 $x^{124}-$
 20715223827473502142182665027695326748827667646432803408187460167038202061208504310833067654329240203390 $x^{122}+$
 3825723409411171579445687431531535219366750959740830768988132314828398939780226032077458493428654360015 $x^{120}-$
 6712450587666785038722502983074155480585874037080805448266507427755463418063772533795027635832956224 $x^{118}+$
 111848518157387504216980092807361270723479985990637375784389860531020725985972126511904059926560737516 $x^{116}-$
 17692609619919461295713109360166654736614798249285978070342116913910341082924559795199533640004195763 $x^{114}+$
 2655764936658706488631083576722920738413328646043525097116024716409501123904011202807596393815287329 $x^{112}-$
 378128398527545035891556283840497686437891203300778836217683118107231637771233743347365674733298047 $x^{110}+$
 5104468004669865238507597741241419442612176860871263937878952004215428052003670066171062238329837 $x^{108}-$
 5630059980469033096264434236772193333190510245885155248473196139882062002134505419262298410570012 $x^{106}+$
 791289347710924633723167057775954642487754335831830471959902015229081085860573504351407719684 $x^{104}-$
 90778800413003119145124577142386651565523117003801719402952737676332522186864125945091802052808 $x^{102}+$
 9854534992686291518498439095876345794130669981619125347168165838278350999567793649530172421458 $x^{100}-$
 1011700155333153233491814900918345353333401756546121488214554427383428716755141262181703939069 $x^{98}+$
 98170762957251507760626972530718090626776499780239873229414985945299480010383894132999772211 $x^{96}-$
 8998426685994307063014595509361405250168952322671869458967098432367898026557664413370082365 $x^{94}+$
 778632583871476560604241077945982536014905793500353578715782361089269509652491539318552427 $x^{92}-$
 63561642662005286536513166027862948504105805298151282405760275886085290153231286972116771 $x^{90}+$
 48961656390973669213700277463009229727153271064782291201852876727219543291986333875648007 $x^{88}-$
 354652349595437534969367855187774986142135626974528824081129251084033148831900014120641 $x^{86}+$
 2420520806470843992839476779883016189351183662953532518689102678025138870269111453967 $x^{84}-$
 1553929362178094987762388314581874473108977712558698485180615797459955614730132555717 $x^{82}+$
 93758587503696271629555237454367274832486155076210425468403372595650567575586941025 $x^{80}-$
 5312164249730504152655757025730148047959567889622597687120616440169574331713661183 $x^{78}+$
 282369190862886095823820601319627711892900786762782725311884374246517650888257423 $x^{76}-$
 14068035168649166357478596964498327120795105468678617482742396780178329131351159 $x^{74}+$
 656271881441418544551436728955438689090974298903787290786097964502981880621765 $x^{72}-$
 28635831898243396278103264376674245530069021049968474172016752615670354084401 $x^{70}+$
 1167424770460965225265093888259660577210504514721053725627119841533470676505 $x^{68}-$
 4441532097687761138481650350760462919699694938585363397486561357235712112 $x^{66}+$
 1575018136696732652438847045335982373731767048446118148268031314465653851 $x^{64}-$
 51990187597347140824993195569566581476203931984856721935386073140153813 $x^{62}+$
 15952993714612450223545325752335772888780393251006705266840163788081 $x^{60}-$
 45437535860544136075365165355094452753768994979203971854056345155667 $x^{58}+$
 1199409595012685529348521651006362053090925515252033800127984404484 $x^{56}-$
 29294541352110155702064310714317538435438397418762600091754548426 $x^{54}+$
 660863979381621350365336617165890810123337915626563449620421612 $x^{52}-$
 13744590467813642138525481316334127990751219373013051963818434 $x^{50}+$
 263012532882370586257265329286804196602033000864841457765983 $x^{48}-$
 4620744767454649503096564075611604862853988022487724477636 $x^{46}+$
 74358659745520181754591249520141332469458076467010216318 $x^{44}-$
 1093316070208727410914122061141694248400379600055147098 $x^{42}+$
 14647753403146097990161070687249525562091562655670290 $x^{40}-$ 178285588702625035049557908347308074077121429136687 $x^{38}+$
 1965017074671039012137509923385541700528087397778 $x^{36}-$ 19541728026952993076302956332849201606467489085 $x^{34}+$
 17465507044862276071745136490773211737379501 $x^{32}-$ 1396693027798282481203639295252272911868400 $x^{30}+$
 9944245957019118072212562497355131720419 $x^{28}-$ 62685741380879830139772690160680833543 $x^{26}+$

$$\begin{aligned}
& 347644073978191573408399366999826089x^{24} - 1683861009551491629496156905104469x^{22} + \\
& 7063345853347051702619070353120x^{20} - 25405318432214080934820546240x^{18} + \\
& 77423474731501072394563948x^{16} - 197027124290597542264447x^{14} + 411101003325202086287x^{12} - \\
& 686874946108416584x^{10} + 890292088288392x^8 - 856005798303x^6 + 570469581x^4 - 234309x^2 + 45)/ \\
& [(-1+x)(1+x)(1-2x-x^2+x^3)(-1-2x+x^2+x^3)(-1+9x-27x^2+28x^3-9x^5+x^6)(1-8x+ \\
& 8x^2+6x^3-6x^4-x^5+x^6)(1+8x+8x^2-6x^3-6x^4+x^5+x^6)(-1-9x-27x^2-28x^3+9x^5+x^6)(1- \\
& 90x+2133x^2+19654x^3-1407750x^4+12020085x^5+211505759x^6-4005889491x^7+1140372558x^8+ \\
& 418020172543x^9-2487724623906x^{10}-15524197875990x^{11}+207409855235855x^{12}-168411001997175x^{13}- \\
& 6989852039646672x^{14}+29176347222301350x^{15}+85446200204468703x^{16}-862651296424382517x^{17}+ \\
& 732228455321894508x^{18}+11231294123644498821x^{19}-33803475249656479500x^{20}-54921206512262415741x^{21}+ \\
& 413908203902580672042x^{22}-246207028620567111678x^{23}-2478006706489040058135x^{24}+ \\
& 4892059779725991163731x^{25}+6604769927708293281489x^{26}-29615041041062939657101x^{27}+ \\
& 5692338640092901485984x^{28}+95353352498492938925253x^{29}-102458115245643694623619x^{30}- \\
& 163321849837230400108482x^{31}+356486700262708176382602x^{32}+75818151591482233031073x^{33}- \\
& 667256343974500352911503x^{34}+278039887830219509936100x^{35}+733454500237993350748973x^{36}- \\
& 685954133222650252610760x^{37}-427320993379027646418498x^{38}+781904366023459571507369x^{39}+ \\
& 28153248400039056561681x^{40}-53139699803886850489789x^{41}+154086139945066863345177x^{42}+ \\
& 222672705102690029154612x^{43}-127277447297634414536733x^{44}-53175680795563803057275x^{45}+ \\
& 53846433449462045531871x^{46}+3955591274039798235417x^{47}-13978733150559004421783x^{48}+ \\
& 1617114491250147902040x^{49}+2287879124568249125151x^{50}-596315566352941519713x^{51}- \\
& 225529529482003369278x^{52}+97905185502923227626x^{53}+10648699061080306343x^{54}- \\
& 9487814076406871859x^{55}+206953141963128534x^{56}+570333880393160836x^{57}-62350849780138683x^{58}- \\
& 20789244041051196x^{59}+4077900882295116x^{60}+395015565737433x^{61}-144460876536018x^{62}-252140561385x^{63}+ \\
& 3043888623648x^{64}-172278608445x^{65}-36698018483x^{66}+4110045927x^{67}+192261069x^{68}-45656109x^{69}+ \\
& 614187x^{70}+243603x^{71}-12637x^{72}-369x^{73}+45x^{74}-x^{75})(1+90x+2133x^2-19654x^3-1407750x^4-12020085x^5+ \\
& 211505759x^6+4005889491x^7+1140372558x^8-418020172543x^9-2487724623906x^{10}+15524197875990x^{11}+ \\
& 207409855235855x^{12}+168411001997175x^{13}-6989852039646672x^{14}-29176347222301350x^{15}+ \\
& 85446200204468703x^{16}+862651296424382517x^{17}+732228455321894508x^{18}-11231294123644498821x^{19}- \\
& 33803475249656479500x^{20}+54921206512262415741x^{21}+413908203902580672042x^{22}+ \\
& 246207028620567111678x^{23}-2478006706489040058135x^{24}-4892059779725991163731x^{25}+ \\
& 6604769927708293281489x^{26}+29615041041062939657101x^{27}+5692338640092901485984x^{28}- \\
& 95353352498492938925253x^{29}-102458115245643694623619x^{30}+163321849837230400108482x^{31}+ \\
& 356486700262708176382602x^{32}-75818151591482233031073x^{33}-667256343974500352911503x^{34}- \\
& 278039887830219509936100x^{35}+733454500237993350748973x^{36}+685954133222650252610760x^{37}- \\
& 427320993379027646418498x^{38}-781904366023459571507369x^{39}+28153248400039056561681x^{40}+ \\
& 53139699803886850489789x^{41}+154086139945066863345177x^{42}-222672705102690029154612x^{43}- \\
& 127277447297634414536733x^{44}+53175680795563803057275x^{45}+53846433449462045531871x^{46}- \\
& 3955591274039798235417x^{47}-13978733150559004421783x^{48}-1617114491250147902040x^{49}+ \\
& 2287879124568249125151x^{50}+596315566352941519713x^{51}-225529529482003369278x^{52}- \\
& 97905185502923227626x^{53}+10648699061080306343x^{54}+9487814076406871859x^{55}+206953141963128534x^{56}- \\
& 570333880393160836x^{57}-62350849780138683x^{58}+20789244041051196x^{59}+4077900882295116x^{60}- \\
& 395015565737433x^{61}-144460876536018x^{62}+252140561385x^{63}+3043888623648x^{64}+172278608445x^{65}- \\
& 36698018483x^{66}-4110045927x^{67}+192261069x^{68}+45656109x^{69}+614187x^{70}-243603x^{71}-12637x^{72}+369x^{73}+ \\
& 45x^{74}+x^{75})(-1-27x+1032x^2+25802x^3-373186x^4-9247650x^5+68985132x^6+1756981328x^7-7544737839x^8- \\
& 205344558763x^9+520362914282x^{10}+16055543418770x^{11}-22765506950292x^{12}-886185755306711x^{13}+ \\
& 567341618795392x^{14}+35824949732566099x^{15}-2114077619505885x^{16}-1089052544253505079x^{17}- \\
& 434310955869650180x^{18}+25382085183437405700x^{19}+19657336252849199189x^{20}-460196787380533985842x^{21}- \\
& 503282143127348655479x^{22}+6563545564790657680027x^{23}+9019917524975714828718x^{24}- \\
& 74279664653212096085631x^{25}-121126151372353616341848x^{26}+671522546480445322781198x^{27}+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1259864230974286367427691x^{28} - 4874434339938184506685397x^{29} - 10355985403728393543409067x^{30} + \\
& 28508897879645580528825667x^{31} + 68215067001652545430286192x^{32} - 134568911549356278360128102x^{33} - \\
& 363861169332415595759624659x^{34} + 512191062359197441924007885x^{35} + 1584783594082588087382278463x^{36} - \\
& 1564210162255894419536702349x^{37} - 5674861959676935021395050413x^{38} + 3785132858090620875642211416x^{39} + \\
& 16803139396061165672290060717x^{40} - 7044093577535657561000115327x^{41} - 41343132893232215469798457354x^{42} + \\
& 9285232522254031569698694689x^{43} + 84883083360723557875730426434x^{44} - 5937121438225419731565543654x^{45} - \\
& 145956035701218221797085712592x^{46} - 7890101748188581051360660346x^{47} + 210852803270320434959494868010x^{48} + \\
& 32505194104448575284667024966x^{49} - 256625689573728687673431393828x^{50} - \\
& 60386088834617104154813509703x^{51} + 263791426465741835712351964159x^{52} + \\
& 79446568823858899041889805170x^{53} - 229529669618761966378616574822x^{54} - \\
& 81368503811164989012654074179x^{55} + 169410836644260710451175862716x^{56} + \\
& 67317485231746697845168652537x^{57} - 106273241553496096920653558337x^{58} - \\
& 45836707489100134208832885680x^{59} + 56768242863723954140114918264x^{60} + 25971874970291859366352369232x^{61} - \\
& 25868414266252042008113790681x^{62} - 12334499250260624842980447944x^{63} + 10073049237434908783966012615x^{64} + \\
& 4934518938825367378469146563x^{65} - 3357135730239884258076120873x^{66} - 1668961310040579145324436854x^{67} + \\
& 958979388811076795805220259x^{68} + 478484381627959740231307898x^{69} - 235070462661933368244141645x^{70} - \\
& 116494763716325583154471593x^{71} + 49490588354774441565598327x^{72} + 24113150837187023305271901x^{73} - \\
& 8953841615972305424578920x^{74} - 4245305143743032443594882x^{75} + 1392157069027476262098948x^{76} + \\
& 635580648350932217926483x^{77} - 185931065427671751697600x^{78} - 80838922982850596922843x^{79} + \\
& 21306408936395504377734x^{80} + 8719476782236791891707x^{81} - 2090911132691824012433x^{82} - \\
& 795459886846428765825x^{83} + 175226009815304083621x^{84} + 61148524359498140722x^{85} - \\
& 12490776292567568868x^{86} - 3941245311464514974x^{87} + 753388475396092803x^{88} + 211610725442247167x^{89} - \\
& 38184703986094031x^{90} - 9385073357203492x^{91} + 1611821886653267x^{92} + 340074435384128x^{93} - \\
& 56011183019777x^{94} - 9923940361375x^{95} + 1578324064638x^{96} + 228740033731x^{97} - 35344978435x^{98} - \\
& 4053271905x^{99} + 611772610x^{100} + 53065630x^{101} - 7859404x^{102} - 481716x^{103} + 70281x^{104} + 2698x^{105} - 389x^{106} - \\
& 7x^{107} + x^{108})(-1 + 27x + 1032x^2 - 25802x^3 - 373186x^4 + 9247650x^5 + 68985132x^6 - 1756981328x^7 - 7544737839x^8 + \\
& 205344558763x^9 + 520362914282x^{10} - 16055543418770x^{11} - 22765506950292x^{12} + 886185755306711x^{13} + \\
& 567341618795392x^{14} - 35824949732566099x^{15} - 2114077619505885x^{16} + 1089052544253505079x^{17} - \\
& 434310955869650180x^{18} - 25382085183437405700x^{19} + 19657336252849199189x^{20} + 460196787380533985842x^{21} - \\
& 503282143121734865479x^{22} - 6563545564790657680027x^{23} + 9019917524975714828718x^{24} + \\
& 74279664653212096085631x^{25} - 121126151372353616341848x^{26} - 671522546480445322781198x^{27} + \\
& 1259864230974286367427691x^{28} + 4874434339938184506685397x^{29} - 10355985403728393543409067x^{30} - \\
& 28508897879645580528825667x^{31} + 68215067001652545430286192x^{32} + 134568911549356278360128102x^{33} - \\
& 363861169332415595759624659x^{34} - 512191062359197441924007885x^{35} + 1584783594082588087382278463x^{36} + \\
& 1564210162255894419536702349x^{37} - 5674861959676935021395050413x^{38} - 3785132858090620875642211416x^{39} + \\
& 16803139396061165672290060717x^{40} + 7044093577535657561000115327x^{41} - 41343132893232215469798457354x^{42} - \\
& 9285232522254031569698694689x^{43} + 84883083360723557875730426434x^{44} + 5937121438225419731565543654x^{45} - \\
& 145956035701218221797085712592x^{46} + 7890101748188581051360660346x^{47} + 210852803270320434959494868010x^{48} - \\
& 32505194104448575284667024966x^{49} - 256625689573728687673431393828x^{50} + \\
& 60386088834617104154813509703x^{51} + 263791426465741835712351964159x^{52} - \\
& 79446568823858899041889805170x^{53} - 229529669618761966378616574822x^{54} + \\
& 81368503811164989012654074179x^{55} + 169410836644260710451175862716x^{56} - \\
& 67317485231746697845168652537x^{57} - 106273241553496096920653558337x^{58} + \\
& 45836707489100134208832885680x^{59} + 56768242863723954140114918264x^{60} - 25971874970291859366352369232x^{61} - \\
& 25868414266252042008113790681x^{62} + 12334499250260624842980447944x^{63} + 10073049237434908783966012615x^{64} - \\
& 4934518938825367378469146563x^{65} - 3357135730239884258076120873x^{66} + 1668961310040579145324436854x^{67} + \\
& 958979388811076795805220259x^{68} - 478484381627959740231307898x^{69} - 235070462661933368244141645x^{70} + \\
& 116494763716325583154471593x^{71} + 49490588354774441565598327x^{72} - 24113150837187023305271901x^{73} - \\
& 8953841615972305424578920x^{74} + 4245305143743032443594882x^{75} + 1392157069027476262098948x^{76} - \\
& 635580648350932217926483x^{77} - 185931065427671751697600x^{78} + 80838922982850596922843x^{79} + \\
& 21306408936395504377734x^{80} - 8719476782236791891707x^{81} - 2090911132691824012433x^{82} + \\
& 795459886846428765825x^{83} + 175226009815304083621x^{84} - 61148524359498140722x^{85} - \\
& 12490776292567568868x^{86} + 3941245311464514974x^{87} + 753388475396092803x^{88} - 211610725442247167x^{89} - \\
& 38184703986094031x^{90} + 9385073357203492x^{91} + 1611821886653267x^{92} - 340074435384128x^{93} - \\
& 56011183019777x^{94} + 9923940361375x^{95} + 1578324064638x^{96} - 228740033731x^{97} - 35344978435x^{98} + \\
& 4053271905x^{99} + 611772610x^{100} - 53065630x^{101} - 7859404x^{102} + 481716x^{103} + 70281x^{104} - 2698x^{105} - \\
& 389x^{106} + 7x^{107} + x^{108}]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [2x(10x^{234} - 8036x^{232} + 3116826x^{230} - 777789012x^{228} + 140459010924x^{226} - \\
& 19575732635721x^{224} + 2192869442615256x^{222} - 203043261162959907x^{220} + \\
& 15860744145972836156x^{218} - 1061654259181284618043x^{216} + \\
& 61643963360547268352616x^{214} - 3135746457599683604296319x^{212} + \\
& 140886737267032070016601285x^{210} - 5629077615254845571116674365x^{208} + \\
& 201165226386163759654144405940x^{206} - 6462069799704532075577259175385x^{204} + \\
& 187395979857567378140002165289633x^{202} - 4924357277281107049152267722689820x^{200} + \\
& 117645105057404504579640726367876305x^{198} - \\
& 2562725454400765402055042431701019726x^{196} + \\
& 51034293308071436523183488668662337292x^{194} - \\
& 931237399793732239312211966553659433797x^{192} + \\
& 15602634512294314441189649313507554685928x^{190} - \\
& 240482275692786467550051625210456273912424x^{188} + \\
& 3415406495414351081374726442578445252077521x^{186} - \\
& 44764077716630201301691478595694930358338780x^{184} + \\
& 542167163788803636781807068603978297759503311x^{182} - \\
& 6075508334374411071716951457199106898239679742x^{180} + \\
& 63059999170489825662163196447723262394592428187x^{178} - \\
& 606840600602383959229870119313176797183622474132x^{176} + \\
& 5419103477412572684432052550619792181241997127177x^{174} - \\
& 44942189616982249825479198887395880821019406271228x^{172} + \\
& 346384910969210484185096245002027540977940520462994x^{170} - \\
& 2482621892822958086693781775278061397074567069720187x^{168} + \\
& 16555617927229667969570268291707720440146963633650249x^{166} - \\
& 102770695356854908740257647065530486718258489768992332x^{164} + \\
& 594100129579170378823462201784480041831510692694632935x^{162} - \\
& 3199388466744790495249336717845125750552493347245965291x^{160} + \\
& 16055225676217329751374782258908786485192262905230619098x^{158} - \\
& 75094642941273403041378626430057438804098403158337719201x^{156} + \\
& 327433023820883125518963026189687529134828778493834700142x^{154} - \\
& 1331105763019379795158889731794522577786043586527135794045x^{152} + \\
& 5045603241557583344498373325746057722695150619521008567917x^{150} - \\
& 17833501729304979369314345974854017695813408058914632682222x^{148} + \\
& 58772541749948122214845255572596255677570999051240568603899x^{146} - \\
& 180591175279909027202381528392720014578925584344179474598780x^{144} + \\
& 517309822480873275208546499457644455736211536636942389258663x^{142} - \\
& 1381217716362174367244465109373451473466519778619362217147942x^{140} + \\
& 3436620256209541301910548141600667078334862251467820856067292x^{138} - \\
& 7965873387600970360727235816502646296585416378278973138660594x^{136} + \\
& 17195429906745559114674426294600648856365845435957425008130114x^{134} - \\
& 34552768179460410278870600374548992624890589454868936659536238x^{132} + \\
& 64597698618267132971714047566998938497734146161550987028846418x^{130} - \\
& 112290906560270033525909617129427940442492862307172475566626062x^{128} +
\end{aligned}$$

$181359104629687426659463070872312704869894428155237945075996247x^{126}$	—
$271898318078581701399519546480007008747267814166024259722802731x^{124}$	+
$377974927704379425754725027462140876364714264658452318869284145x^{122}$	—
$486529385203388835050670047855403070592021798362175485697578407x^{120}$	+
$578876299482025002409870854742355528726570590974752914860915984x^{118}$	—
$635196920773577151746829172992610796064860401241853526631383845x^{116}$	+
$640853399908600047946243442098659657847650918630908073670094091x^{114}$	—
$591970536295408179720784009946750875764734601095050210944010318x^{112}$	+
$497552304482021966544519711981501695556695100326458943632090202x^{110}$	—
$376829811003762607378523462595410795596058879978272454741419347x^{108}$	+
$252885489196116744976703777574918146215411400467427417209472804x^{106}$	—
$145444308948941353670145967242207235201116056709382634103361560x^{104}$	+
$65922289867665461956372211013703274573676360090170744296361743x^{102}$	—
$16351455065906411560931632531376233662360981621281204435243995x^{100}$	—
$8282455627204234721382347440269370182428855188274320950926189x^{98}$	+
$16157092683205400960967259838894201297133531158829269467299924x^{96}$	—
$15162337515393528863412058489935141902708334435976632373512518x^{94}$	+
$10983911987042882843642130407476877523724217213606259458751941x^{92}$	—
$6753800026640791164083219552308510616837450604684139020116382x^{90}$	+
$3652467566620375078278661793272252866306533153905993168820243x^{88}$	—
$1767069023866030810306070239181495021499098994779664711520845x^{86}$	+
$771910705055332588227251212064739232484103170875680271333516x^{84}$	—
$306112934962277714939689511552558628833436895786183107683953x^{82}$	+
$110568100844101824830000462024796573300956633775262712468350x^{80}$	—
$36449095125171220366990521053546236550589130001838734318159x^{78}$	+
$10979104367711095727964962115059691639867779216650239566486x^{76}$	—
$3023692504376522986964265942767575067607877199471927807796x^{74}$	+
$761531444496053896930418032650003442822068951831111847983x^{72}$	—
$175376672359602751800785004346069432694044723279695070587x^{70}$	+
$36917955673558441096097017818312627647034835230238649588x^{68}$	—
$7099802080150917197861037360259253413399842069376205020x^{66}$	+
$1246477413369752103302436347221637269353065635247650701x^{64}$	—
$199606039192221659423578654275510349512033517894484627x^{62}$	+
$29125696218087725632079815492782932740414455475687698x^{60}$	—
$3868114755748319915924461553799098260037830123041124x^{58}$	+
$466978540963442736435050225990703945809331057800822x^{56}$	—
$51176590728505655173335936214327809274458550085939x^{54}$	+
$5083617961081068831334147588632573356326603235338x^{52}$	—
$456981168946655750727146821584379959025920122677x^{50}$	+
$37109720124135832189690873664615237728496457257x^{48}$	—
$2717188243122455840236355230205745359318748817x^{46}$	+

$$\begin{aligned}
& 179021253817725854826985158059969333509048275x^{44} - \\
& 10589463180942414699077114389568792852890513x^{42} + \\
& 561006070800630203011718478612945685713873x^{40} - \\
& 26547020923145440962396550828554452727449x^{38} + \\
& 1118708978378399496749381713021395650177x^{36} - \\
& 41841783660021985547383298357725316058x^{34} + \\
& 1383692492853978164771857773349012424x^{32} - 40282351666207191521656215845757314x^{30} + \\
& 1027215481269619466417570326364485x^{28} - 22812022238110302125704020933731x^{26} + \\
& 438222110377238213619954952624x^{24} - 7224848816119891330863513086x^{22} + \\
& 101282735531518125865540357x^{20} - 1194059845570797424172949x^{18} + \\
& 11682778995500607127883x^{16} - 93339661961478848567x^{14} + 596780559030284809x^{12} - \\
& 2975417499924988x^{10} + 11178176933691x^8 - 30180354255x^6 + 54645594x^4 - 59283x^2 + 30]/ \\
& [(-1+x)(1+x)(1-2x-x^2+x^3)(-1-2x+x^2+x^3)(1-8x+8x^2+6x^3-6x^4-x^5+x^6)(1+ \\
& 8x+8x^2-6x^3-6x^4+x^5+x^6)(-1-27x+1032x^2+25802x^3-373186x^4-9247650x^5+ \\
& 68985132x^6+1756981328x^7-7544737839x^8-205344558763x^9+520362914282x^{10}+ \\
& 16055543418770x^{11}-22765506950292x^{12}-886185755306711x^{13}+567341618795392x^{14}+ \\
& 35824949732566099x^{15}-2114077619505885x^{16}-1089052544253505079x^{17}- \\
& 434310955869650180x^{18}+25382085183437405700x^{19}+19657336252849199189x^{20}- \\
& 460196787380533985842x^{21}-503282143127348655479x^{22}+6563545564790657680027x^{23}+ \\
& 9019917524975714828718x^{24} - 74279664653212096085631x^{25} - \\
& 121126151372353616341848x^{26} + 671522546480445322781198x^{27} + \\
& 1259864230974286367427691x^{28} - 4874434339938184506685397x^{29} - \\
& 10355985403728393543409067x^{30} + 28508897879645580528825667x^{31} + \\
& 68215067001652545430286192x^{32} - 134568911549356278360128102x^{33} - \\
& 363861169332415595759624659x^{34} + 512191062359197441924007885x^{35} + \\
& 1584783594082588087382278463x^{36} - 1564210162255894419536702349x^{37} - \\
& 5674861959676935021395050413x^{38} + 3785132858090620875642211416x^{39} + \\
& 16803139396061165672290060717x^{40} - 7044093577535657561000115327x^{41} - \\
& 41343132893232215469798457354x^{42} + 9285232522254031569698694689x^{43} + \\
& 84883083360723557875730426434x^{44} - 5937121438225419731565543654x^{45} - \\
& 145956035701218221797085712592x^{46} - 7890101748188581051360660346x^{47} + \\
& 210852803270320434959494868010x^{48} + 32505194104448575284667024966x^{49} - \\
& 256625689573728687673431393828x^{50} - 60386088834617104154813509703x^{51} + \\
& 263791426465741835712351964159x^{52} + 79446568823858899041889805170x^{53} - \\
& 229529669618761966378616574822x^{54} - 81368503811164989012654074179x^{55} + \\
& 169410836644260710451175862716x^{56} + 67317485231746697845168652537x^{57} - \\
& 106273241553496096920653558337x^{58} - 45836707489100134208832885680x^{59} + \\
& 56768242863723954140114918264x^{60} + 25971874970291859366352369232x^{61} - \\
& 25868414266252042008113790681x^{62} - 12334499250260624842980447944x^{63} + \\
& 10073049237434908783966012615x^{64} + 4934518938825367378469146563x^{65} - \\
& 3357135730239884258076120873x^{66} - 1668961310040579145324436854x^{67} + \\
& 958979388811076795805220259x^{68} + 478484381627959740231307898x^{69} - \\
& 235070462661933368244141645x^{70} - 116494763716325583154471593x^{71} + \\
& 49490588354774441565598327x^{72} + 24113150837187023305271901x^{73} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8953841615972305424578920x^{74} - 4245305143743032443594882x^{75} + \\
& 1392157069027476262098948x^{76} + 635580648350932217926483x^{77} - \\
& 185931065427671751697600x^{78} - 80838922982850596922843x^{79} + \\
& 21306408936395504377734x^{80} + 8719476782236791891707x^{81} - \\
& 2090911132691824012433x^{82} - 795459886846428765825x^{83} + 175226009815304083621x^{84} + \\
& 61148524359498140722x^{85} - 12490776292567568868x^{86} - 3941245311464514974x^{87} + \\
& 753388475396092803x^{88} + 211610725442247167x^{89} - 38184703986094031x^{90} - \\
& 9385073357203492x^{91} + 1611821886653267x^{92} + 340074435384128x^{93} - \\
& 56011183019777x^{94} - 9923940361375x^{95} + 1578324064638x^{96} + 228740033731x^{97} - \\
& 35344978435x^{98} - 4053271905x^{99} + 611772610x^{100} + 53065630x^{101} - \\
& 7859404x^{102} - 481716x^{103} + 70281x^{104} + 2698x^{105} - 389x^{106} - 7x^{107} + \\
& x^{108})(-1 + 27x + 1032x^2 - 25802x^3 - 373186x^4 + 9247650x^5 + 68985132x^6 - \\
& 1756981328x^7 - 7544737839x^8 + 205344558763x^9 + 520362914282x^{10} - \\
& 16055543418770x^{11} - 22765506950292x^{12} + 886185755306711x^{13} + 567341618795392x^{14} - \\
& 35824949732566099x^{15} - 2114077619505885x^{16} + 1089052544253505079x^{17} - \\
& 434310955869650180x^{18} - 25382085183437405700x^{19} + 19657336252849199189x^{20} + \\
& 460196787380533985842x^{21} - 503282143127348655479x^{22} - 6563545564790657680027x^{23} + \\
& 9019917524975714828718x^{24} + 74279664653212096085631x^{25} - \\
& 121126151372353616341848x^{26} - 671522546480445322781198x^{27} + \\
& 1259864230974286367427691x^{28} + 4874434339938184506685397x^{29} - \\
& 10355985403728393543409067x^{30} - 28508897879645580528825667x^{31} + \\
& 68215067001652545430286192x^{32} + 134568911549356278360128102x^{33} - \\
& 363861169332415595759624659x^{34} - 512191062359197441924007885x^{35} + \\
& 1584783594082588087382278463x^{36} + 1564210162255894419536702349x^{37} - \\
& 5674861959676935021395050413x^{38} - 3785132858090620875642211416x^{39} + \\
& 16803139396061165672290060717x^{40} + 7044093577535657561000115327x^{41} - \\
& 41343132893232215469798457354x^{42} - 9285232522254031569698694689x^{43} + \\
& 84883083360723557875730426434x^{44} + 5937121438225419731565543654x^{45} - \\
& 145956035701218221797085712592x^{46} + 7890101748188581051360660346x^{47} + \\
& 210852803270320434959494868010x^{48} - 32505194104448575284667024966x^{49} - \\
& 256625689573728687673431393828x^{50} + 60386088834617104154813509703x^{51} + \\
& 263791426465741835712351964159x^{52} - 79446568823858899041889805170x^{53} - \\
& 229529669618761966378616574822x^{54} + 81368503811164989012654074179x^{55} + \\
& 169410836644260710451175862716x^{56} - 67317485231746697845168652537x^{57} - \\
& 106273241553496096920653558337x^{58} + 45836707489100134208832885680x^{59} + \\
& 56768242863723954140114918264x^{60} - 25971874970291859366352369232x^{61} - \\
& 25868414266252042008113790681x^{62} + 12334499250260624842980447944x^{63} + \\
& 10073049237434908783966012615x^{64} - 4934518938825367378469146563x^{65} - \\
& 3357135730239884258076120873x^{66} + 1668961310040579145324436854x^{67} + \\
& 958979388811076795805220259x^{68} - 478484381627959740231307898x^{69} - \\
& 235070462661933368244141645x^{70} + 116494763716325583154471593x^{71} + \\
& 49490588354774441565598327x^{72} - 24113150837187023305271901x^{73} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8953841615972305424578920x^{74} + 4245305143743032443594882x^{75} + \\
& 1392157069027476262098948x^{76} - 635580648350932217926483x^{77} - \\
& 185931065427671751697600x^{78} + 80838922982850596922843x^{79} + \\
& 21306408936395504377734x^{80} - 8719476782236791891707x^{81} - \\
& 2090911132691824012433x^{82} + 795459886846428765825x^{83} + 175226009815304083621x^{84} - \\
& 61148524359498140722x^{85} - 12490776292567568868x^{86} + 3941245311464514974x^{87} + \\
& 753388475396092803x^{88} - 211610725442247167x^{89} - 38184703986094031x^{90} + \\
& 9385073357203492x^{91} + 1611821886653267x^{92} - 340074435384128x^{93} - \\
& 56011183019777x^{94} + 9923940361375x^{95} + 1578324064638x^{96} - 228740033731x^{97} - \\
& 35344978435x^{98} + 4053271905x^{99} + 611772610x^{100} - 53065630x^{101} - 7859404x^{102} + \\
& 481716x^{103} + 70281x^{104} - 2698x^{105} - 389x^{106} + 7x^{107} + x^{108}] \\
& - [2x(13x^{88} - 2014x^{86} + 146605x^{84} - 6684058x^{82} + 214607499x^{80} - 5171839244x^{78} + \\
& 97349637916x^{76} - 1470395416497x^{74} + 18168277920058x^{72} - 186276230702792x^{70} + \\
& 1601900115787790x^{68} - 11649743426644092x^{66} + 72099676276979782x^{64} - \\
& 381559382114709443x^{62} + 1732783510653519836x^{60} - 6769763225655869704x^{58} + \\
& 22790685693402830977x^{56} - 66170224706676225710x^{54} + 165709351928222533462x^{52} - \\
& 357753031124162384071x^{50} + 665082799548269105712x^{48} - 1062848147457689499528x^{46} + \\
& 145668838847477693433x^{44} - 1707308854259086924372x^{42} + \\
& 1705341973211044143042x^{40} - 1445844652233010877402x^{38} + \\
& 1035740694908714460482x^{36} - 623678825534713664339x^{34} + 31388621747898861886x^{32} - \\
& 131214105820611286529x^{30} + 45256658711873679474x^{28} - 12788112761767770310x^{26} + \\
& 2938516612548843736x^{24} - 544791377615849863x^{22} + 80788217458925372x^{20} - \\
& 9485403181603063x^{18} + 870557118080240x^{16} - 61418979552296x^{14} + 3257801689798x^{12} - \\
& 126146925551x^{10} + 3429952026x^8 - 62220967x^6 + 703330x^4 - 4503x^2 + 15)]/ \\
& [(-1 + 15x + 195x^2 - 2476x^3 - 9408x^4 + 128774x^5 + 151702x^6 - 3080005x^7 - \\
& 152040x^8 + 39805335x^9 - 22147982x^{10} - 300921194x^{11} + 284159318x^{12} + 1383107908x^{13} - \\
& 1722027429x^{14} - 3930756397x^{15} + 6069754917x^{16} + 6915053418x^{17} - 13500672554x^{18} - \\
& 7214631815x^{19} + 19878551923x^{20} + 3475881699x^{21} - 19978574007x^{22} + 1204754727x^{23} + \\
& 13960633114x^{24} - 3214431392x^{25} - 6832632284x^{26} + 2528557309x^{27} + 2326963032x^{28} - \\
& 1184186750x^{29} - 534678044x^{30} + 369015343x^{31} + 75261636x^{32} - 78835592x^{33} - 4000296x^{34} + \\
& 11506048x^{35} - 640379x^{36} - 1110448x^{37} + 155006x^{38} + 65338x^{39} - 14541x^{40} - 1860x^{41} + \\
& 680x^{42} - 2x^{43} - 13x^{44} + x^{45}) \\
& (1 + 15x - 195x^2 - 2476x^3 + 9408x^4 + 128774x^5 - 151702x^6 - 3080005x^7 + \\
& 152040x^8 + 39805335x^9 + 22147982x^{10} - 300921194x^{11} - 284159318x^{12} + 1383107908x^{13} + \\
& 1722027429x^{14} - 3930756397x^{15} - 6069754917x^{16} + 6915053418x^{17} + 13500672554x^{18} - \\
& 7214631815x^{19} - 19878551923x^{20} + 3475881699x^{21} + 19978574007x^{22} + 1204754727x^{23} - \\
& 13960633114x^{24} - 3214431392x^{25} + 6832632284x^{26} + 2528557309x^{27} - 2326963032x^{28} - \\
& 1184186750x^{29} + 534678044x^{30} + 369015343x^{31} - 75261636x^{32} - 78835592x^{33} + 4000296x^{34} + \\
& 11506048x^{35} + 640379x^{36} - 1110448x^{37} - 155006x^{38} + 65338x^{39} + 14541x^{40} - 1860x^{41} - \\
& 680x^{42} - 2x^{43} + 13x^{44} + x^{45})] \\
& - \frac{2x(5 + 15x^2 - 120x^4 + 399x^6 - 651x^8 + 588x^{10} - 308x^{12} + 93x^{14} - 15x^{16} + x^{18})}{1 - 55x^2 + 495x^4 - 1716x^6 + 3003x^8 - 3003x^{10} + 1820x^{12} - 680x^{14} + 153x^{16} - 19x^{18} + x^{20}}
\end{aligned}$$

$$- \frac{2x}{-1+x^2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{10}^{MS}(x) = & 243x + 4339x^2 + 289335x^3 + 7208583x^4 + 557349138x^5 + 14813917645x^6 + \\ & 1168310992742x^7 + 32367098428015x^8 + 2508526689376836x^9 + \\ & 72846770214308764x^{10} + 5438167175629746834x^{11} + 166660359775369207305x^{12} + \\ & 11869288031191866302010x^{13} + 384826885001891958476402x^{14} + \\ & 26078789127448573622443755x^{15} + 893194061641937315759395423x^{16} + \\ & 57693521152843584444897446533x^{17} + 2079093829987015269003038574526x^{18} + \\ & 128506000981368823582428350454466x^{19} + 4847193810363863131811720847193548x^{20} + \\ & 288095571272380905777754568519795243x^{21} + 11310564685538348242297080196540236850x^{22} + \\ & 649746914806473054528002403760009055570x^{23} + \\ & 26404918611405460632931371941391131010049x^{24} + \\ & 1473264417463145000328946008245147035916813x^{25} + \\ & 61659254037383668830146365059477320165773930x^{26} + \\ & 3356346205891159553777527921259811729494274762x^{27} + \\ & 144003585822238461940162752420760425066611780882x^{28} + \\ & 7677667577792836984967162291240962210495794996708x^{29} + \\ & 33634265527868855580771811775700856962283447093445x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{11}^{MS}(x) = & 243x + 18971x^2 + 636294x^3 + 72405251x^4 + 2865394133x^5 + 346333232108x^6 + \\ & 14339574691265x^7 + 1744371456833747x^8 + 74911807866394146x^9 + \\ & 8934977567219006281x^{10} + 400503177347846460273x^{11} + 46117921231297910628644x^{12} + \\ & 2170356332443952851900321x^{13} + 239381475714118359677156039x^{14} + \\ & 11855817324534234060867367874x^{15} + 1249406745153873113163122372739x^{16} + \\ & 65069810472645890709971971827801x^{17} + 6558154178811958578838905708965336x^{18} + \\ & 358117095279294730727085486653815393x^{19} + 34620484884340723505187348938965827981x^{20} + \\ & 1974088696248431529714993418111975138862x^{21} + \\ & 183772407334046331729385220523198276960855x^{22} + \\ & 10892090032097848838272522573175877690407809x^{23} + \\ & 980566565923098316193540422466719582419613988x^{24} + \\ & 60129612469192604047955543919909722358677196033x^{25} + \\ & 5256971509186005448868619622096039433034420962173x^{26} + \\ & 332047065910499908196244384799618051187007013995426x^{27} + \\ & 28304029701782012697664907918893836253432332171757663x^{28} + \\ & 1833952426049529803818042423806158925395919116612080641x^{29} + \\ & 152969068655860077581305837191878326271865416637527963968x^{30} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{12}^{MS}(x) = & 729x + 27649x^2 + 4197441x^3 + 242671317x^4 + 43990083094x^5 + \\
& 2735013840187x^6 + 513036388961013x^7 + 33001000562090573x^8 + \\
& 6183996119428136313x^9 + 411195519550550348744x^{10} + 75467413924966323413178x^{11} + \\
& 5219400130513197754417911x^{12} + 926745562357422442397189350x^{13} + \\
& 67006443578726551251609005993x^{14} + 11434772486683095926038655771716x^{15} + \\
& 866266554823316718931320183103101x^{16} + 141745036012898557606447200294393970x^{17} + \\
& 11247461112679160220579360965613830833x^{18} + \\
& 1765465808313085365375878315016015073557x^{19} + \\
& 146419370376251092476157379465701082724152x^{20} + \\
& 22095541016866680201709536045728640113665686x^{21} + \\
& 1909132066638450767859538197822152206685927422x^{22} + \\
& 277845454863511211153308586587387527064330067408x^{23} + \\
& 24916851849771684400096611711604540245837258911711x^{24} + \\
& 3509619689490759317948988236099526343780347492931469x^{25} + \\
& 325389713056839381650566556870026738398259489443944222x^{26} + \\
& 44518655884104172253523812293782158179853048259529562763x^{27} + \\
& 4250766430684311500575627409107339609794936847318889817965x^{28} + \\
& 566884785403112218068443503536923499155376628229052966355855x^{29} + \\
& 55542145722371139531190149175936554042571018550731891551107342x^{30} + \dots
\end{aligned}$$

Tanki cilindar $TnC_m(n) \equiv C_m \times P_n$ ($2 \leq m \leq 18$)

$$\mathcal{F}_m^{TnC}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f_m^{TnC}(n) x^n$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{TnC}(x) &= \frac{x(1+3x)}{1-2x-3x^2} = \\ &x + 5x^2 + 13x^3 + 41x^4 + 121x^5 + 365x^6 + 1093x^7 + 3281x^8 + 9841x^9 + 29525x^{10} + 88573x^{11} + 265721x^{12} + \\ &797161x^{13} + 2391485x^{14} + 7174453x^{15} + 21523361x^{16} + 64570081x^{17} + 193710245x^{18} + 581130733x^{19} + \\ &1743392201x^{20} + 5230176601x^{21} + 15690529805x^{22} + 47071589413x^{23} + 141214768241x^{24} + 423644304721x^{25} + \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3^{TnC}(x) &= \frac{x(1+x)}{1-3x-x^2} = \\ &x + 4x^2 + 13x^3 + 43x^4 + 142x^5 + 469x^6 + 1549x^7 + 5116x^8 + 16897x^9 + 55807x^{10} + 184318x^{11} + 608761x^{12} + \\ &2010601x^{13} + 6640564x^{14} + 21932293x^{15} + 72437443x^{16} + 239244622x^{17} + 790171309x^{18} + 2609758549x^{19} + \\ &8619446956x^{20} + 28468099417x^{21} + 94023745207x^{22} + 310539335038x^{23} + 1025641750321x^{24} + \\ &3387464586001x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4^{TnC}(x) &= \frac{x(1+3x-4x^2)}{1-6x-3x^2+4x^3} = \\ &x + 9x^2 + 53x^3 + 341x^4 + 2169x^5 + 13825x^6 + 88093x^7 + 561357x^8 + 3577121x^9 + 22794425x^{10} + \\ &145252485x^{11} + 925589701x^{12} + 5898117961x^{13} + 37584466929x^{14} + 239498796653x^{15} + 1526153708861x^{16} + \\ &9725080775409x^{17} + 61970950592425x^{18} + 394896331045333x^{19} + 2516390514947637x^{20} + \\ &16035148280452121x^{21} + 102180475903374305x^{22} + 651122738201811645x^{23} + 4149137263799184301x^{24} + \\ &26439469893787043521x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_5^{TnC}(x) &= \frac{x(1+2x-14x^2+3x^3)}{1-9x+4x^2+22x^3-3x^4} = \\ &x + 11x^2 + 81x^3 + 666x^4 + 5431x^5 + 44466x^6 + 364061x^7 + 2981201x^8 + 24412606x^9 + \\ &199912706x^{10} + 1637069691x^{11} + 13405842666x^{12} + 109779463516x^{13} + 898976005896x^{14} + \\ &7361648869421x^{15} + 60284005131851x^{16} + 493661316969811x^{17} + 4042556485091321x^{18} + \\ &33104199931650186x^{19} + 271087876486546101x^{20} + 2219918829931214536x^{21} + 18178753234393716291x^{22} + \\ &148864483106909524811x^{23} + 1219040384395583776646x^{24} + 9982632712465747775776x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_6^{TnC}(x) &= \frac{x(1+4x-52x^2+85x^3+4x^4-24x^5)}{1-16x+15x^2+108x^3-163x^4-14x^5+24x^6} = \\ &x + 20x^2 + 253x^3 + 3725x^4 + 53812x^5 + 781043x^6 + 11328703x^7 + 164342144x^8 + 2384008549x^9 + \\ &34583478677x^{10} + 501682800748x^{11} + 7277627334803x^{12} + 105572401943143x^{13} + 1531478817520040x^{14} + \\ &22216292548032997x^{15} + 322279125907163021x^{16} + 4675120061914150660x^{17} + 67819308904658336819x^{18} + \\ &983816158598975546575x^{19} + 14271661707453924975056x^{20} + 207030882865408620073765x^{21} + \\ &3003279319439344022622533x^{22} + 43566865704938163454739356x^{23} + 631999752759077987597027603x^{24} + \\ &9168061117654885779896674423x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_7^{TnC}(x) = \frac{x(1+2x-175x^2+557x^3-128x^4-909x^5+564x^6+55x^7)}{1-27x+131x^2+319x^3-1511x^4+598x^5+1473x^6-740x^7-55x^8} =$$

$$x + 29x^2 + 477x^3 + 9318x^4 + 181231x^5 + 3562728x^6 + 70182449x^7 + 1384148396x^8 + 27309182412x^9 +$$

$$538897819048x^{10} + 10634850017387x^{11} + 209878072831673x^{12} + 4141969931423934x^{13} +$$

$$81742600445824746x^{14} + 1613208844972065013x^{15} + 31837062363892428112x^{16} +$$

$$628312180222680689296x^{17} + 12399894995078143327538x^{18} + 244714977626524860954080x^{19} +$$

$$4829510338163034053569033x^{20} + 95311576159624130076274330x^{21} + 1880997437078948822215084651x^{22} +$$

$$37121947864644639377123619563x^{23} + 732610787514210597258594558399x^{24} +$$

$$14458254399899446658426778070807x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_8^{TnC}(x) =$$

$$\frac{x(-1-2x+537x^2-4828x^3+8833x^4+9182x^5-27961x^6+10592x^7+1152x^8-576x^9)}{(1+x)(-1+48x-497x^2+40x^3+16813x^4-54024x^5+54853x^6-15568x^7-1216x^8+576x^9)}$$

$$\mathcal{F}_8^{TnC}(x) =$$

$$x + 49x^2 + 1317x^3 + 44269x^4 + 1474937x^5 + 49622793x^6 + 1670194477x^7 + 56241588037x^8 +$$

$$1893972519489x^9 + 63782453175969x^{10} + 2147983445752757x^{11} + 72337143245836829x^{12} +$$

$$2436082206688156809x^{13} + 82039418438284617401x^{14} + 2762823988969738975165x^{15} +$$

$$93043034632818588850549x^{16} + 3133390453009241673982033x^{17} + 105522522721603955058210641x^{18} +$$

$$3553659516758976044869767493x^{19} + 119675834464582605695436465485x^{20} +$$

$$4030297581237050067157486579097x^{21} + 135727473019414267506176850632809x^{22} +$$

$$4570865193183627479968367145336909x^{23} + 153932053323301682716318949733383589x^{24} +$$

$$5183936965733447442900189278987107425x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_9^{TnC}(x) =$$

$$x(-1+5x+1579x^2-31215x^3+171589x^4+122800x^5-3535489x^6+9094371x^7-2433845x^8-16805943x^9+14544216x^{10}+7056620x^{11}-9282885x^{12}+150158x^{13}+1105012x^{14}-43295x^{15})/$$

$$(-1+81x-1792x^2+7289x^3+113338x^4-948939x^5+891997x^6+9118681x^7-25652726x^8+9992771x^9+33620979x^{10}-29903008x^{11}-9941993x^{12}+14464685x^{13}-684910x^{14}-1263348x^{15}+43295x^{16})$$

$$\mathcal{F}_9^{TnC}(x) =$$

$$x + 76x^2 + 2785x^3 + 127897x^4 + 5864650x^5 + 273687040x^6 + 12839393125x^7 +$$

$$604211712448x^8 + 28474336325785x^9 + 1342851693261496x^{10} + 63350881300193974x^{11} +$$

$$2989171289995095295x^{12} + 141053804754239239840x^{13} + 6656352599557966594252x^{14} +$$

$$314120572018446461135485x^{15} + 14823836337375386181563560x^{16} + 699563077126129766004289882x^{17} +$$

$$33013695479540693113501652143x^{18} + 1557980033613135956810106192973x^{19} +$$

$$73524126061962906254766642604468x^{20} + 3469748286048642692532972906829690x^{21} +$$

$$163744275200677590087354798821692690x^{22} + 7727416270516028098255799127367588354x^{23} +$$

$$364672071690222348813333957553217496592x^{24} +$$

$$17209597260329748447239428698333452150035x^{25} + \dots$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{10}^{TnC}(x) = & -x(-1 + 7x + 4520x^2 - 158777x^3 + 1521893x^4 + 382971x^5 - 74719698x^6 + 329729442x^7 + 106970524x^8 - \\ & 3804028638x^9 + 8216839522x^{10} - 1691243209x^{11} - 12244389652x^{12} + 11435458052x^{13} + 1418185236x^{14} - \\ & 5391746720x^{15} + 1399734576x^{16} + 456158912x^{17} - 153955584x^{18} - 12127232x^{19} + 1990656x^{20})/ \\ & (1 - 132x + 4767x^2 - 37118x^3 - 798843x^4 + 12319598x^5 - 34775915x^6 - 217196970x^7 + 1331532391x^8 - \\ & 746302336x^9 - 9092536778x^{10} + 21085576048x^{11} - 6963045159x^{12} - 23008679746x^{13} + 22066750640x^{14} + \\ & 1148788328x^{15} - 7918550312x^{16} + 1899531616x^{17} + 618171648x^{18} - 184157184x^{19} - 14919680x^{20} + 1990656x^{21}) \end{aligned}$$

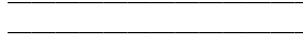
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{10}^{TnC}(x) = & x + 125x^2 + 7213x^3 + 552136x^4 + 42414281x^5 + 3321537720x^6 + 261079885983x^7 + 20559551095851x^8 + \\ & 1619938572971116x^9 + 127666740816792660x^{10} + 10062119265462622683x^{11} + 793072716833845192356x^{12} + \\ & 62508746073022625976096x^{13} + 4926858570367533896154450x^{14} + 388329118012333522559446373x^{15} + \\ & 30607652155303378920835811641x^{16} + 2412460161413885294860293439151x^{17} + \\ & 190147364231734348390327535617975x^{18} + 14987199165829312727697716746010488x^{19} + \\ & 1181274016272528946898501556179154091x^{20} + 93106676579881222044891366351751374216x^{21} + \\ & 7338562529511716808716729856342178425105x^{22} + \\ & 578417166185052464306299085928797905085693x^{23} + \\ & 45590184295478178866479815354627214195160656x^{24} + \\ & 3593366562596992824027936085406987745740233896x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{11}^{TnC}(x) = & x(1 - 44x - 12081x^2 + 1133545x^3 - 37416712x^4 + 493814171x^5 + 373805870x^6 - 85025176253x^7 + \\ & 932415097823x^8 - 3024413960156x^9 - 15533189594719x^{10} + 157561589289988x^{11} - 369165572872227x^{12} - \\ & 756465027265708x^{13} + 5361776208341062x^{14} - 7328194249688806x^{15} - 9594905882891048x^{16} + \\ & 34024877697560525x^{17} - 13685759379919151x^{18} - 44098741194270242x^{19} + 45724243017873625x^{20} + \\ & 14863779838287700x^{21} - 37231721334564025x^{22} + 6572628113135888x^{23} + 11491371455659095x^{24} - \\ & 4771774256671575x^{25} - 1096225371607414x^{26} + 810885158433255x^{27} - 26200483957866x^{28} - \\ & 37952723101002x^{29} + 3921432582660x^{30} + 91766783871x^{31})/ \\ & (1 - 243x + 20039x^2 - 656471x^3 + 4431429x^4 + 227318362x^5 - 5368460917x^6 + 31298257778x^7 + \\ & 293649763644x^8 - 5015233312469x^9 + 21937438967225x^{10} + 31616042052087x^{11} - 598765550430721x^{12} + \\ & 1679928753366531x^{13} + 1326205582238730x^{14} - 15835876424317510x^{15} + 25160905266696190x^{16} + \\ & 16435286891736108x^{17} - 83392084716072564x^{18} + 47653451679066927x^{19} + 81495737922402983x^{20} - \\ & 100306224843907275x^{21} - 13857775303557521x^{22} + 64525643671324017x^{23} - 15743156527963701x^{24} - \\ & 16461505606017185x^{25} + 7609935220125145x^{26} + 1263109560506538x^{27} - 1083745124145697x^{28} + \\ & 47282053928002x^{29} + 43514398016402x^{30} - 4294326180612x^{31} - 91766783871x^{32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{11}^{TnC}(x) = & x + 199x^2 + 16237x^3 + 1747846x^4 + 188142923x^5 + 20737405360x^6 + 2304956480025x^7 + \\
& 257573508034492x^8 + 28865363400315608x^9 + 3240058791241468318x^{10} + 364014089441637130211x^{11} + \\
& 40916785291407964066602x^{12} + 4600517305417776076239962x^{13} + 517344667951564049852195183x^{14} + \\
& 58182367489407130596945718621x^{15} + 6543710936410429529889754407939x^{16} + \\
& 735984616119817916488132820828362x^{17} + 82778971776385485828799271961192790x^{18} + \\
& 9310543698511076212843258446713194344x^{19} + 1047206044378161109688710809509094458969x^{20} + \\
& 117785112741978205895896968461190504584242x^{21} + \\
& 13247969348778085027453077072904755913393268x^{22} + \\
& 1490076588308426360324950466197023081766178323x^{23} + \\
& 167597706555404885963702412107237684319747327535x^{24} + \\
& 18850707958004578841577999432299025065849894780530x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{12}^{TnC}(x) = & x(-1 + 56x + 34371x^2 - 4864597x^3 + 240897321x^4 - 4539302037x^5 - 21305999292x^6 + 2250499820605x^7 - \\
& 32835395212689x^8 + 67641863177208x^9 + 2973508964109849x^{10} - 32672625360812141x^{11} + \\
& 101593694575101540x^{12} + 390701274674888073x^{13} - 3534088510502050536x^{14} + 5294394569279677028x^{15} + \\
& 23673992151915915908x^{16} - 83713587334034214864x^{17} - 16860728113863417992x^{18} + \\
& 389883495876254911488x^{19} - 298642788278585906400x^{20} - 782820582097976003264x^{21} + \\
& 1028399159901266187040x^{22} + 651762671657584482752x^{23} - 1300946698118184948672x^{24} - \\
& 124207182380513596608x^{25} + 687514492586295710080x^{26} - 61062685619092030208x^{27} - \\
& 169059279633977012736x^{28} + 29452032911443639808x^{29} + 19587344454030503936x^{30} - \\
& 4695885856421656576x^{31} - 929084384166322176x^{32} + 320241016195547136x^{33} + 3147630768685056x^{34} - \\
& 7866096317628416x^{35} + 656099510321152x^{36} + 5025355005952x^{37} - 1480421539840x^{38}) / \\
& ((-1 + 2x)(1 - 378x + 47332x^2 - 2280904x^3 + 12808719x^4 + 2389875792x^5 - 75238234902x^6 + \\
& 543593806898x^7 + 11175795915724x^8 - 224307765986366x^9 + 783156388517842x^{10} + 12757301632650108x^{11} - \\
& 135144380202845134x^{12} + 308192305830674750x^{13} + 1763902421105202275x^{14} - 10128104308663148076x^{15} + \\
& 3698870897167759532x^{16} + 75112077594370269840x^{17} - 119470305233424050008x^{18} - \\
& 219141200424866705360x^{19} + 567082778690898661792x^{20} + 229106439400398106656x^{21} - \\
& 1160421178627356937040x^{22} + 59238560866623765184x^{23} + 1128088144206736669952x^{24} - \\
& 236940152142480533248x^{25} - 505989846956029581824x^{26} + 133058523045466635008x^{27} + \\
& 107835619636777944064x^{28} - 31591280389621688320x^{29} - 10611922573161156608x^{30} + \\
& 3655312114963147776x^{31} + 384446534883069952x^{32} - 199316640957022208x^{33} + 3772718451195904x^{34} + \\
& 4066367130304512x^{35} - 377529602932736x^{36} - 699161116672x^{37} + 740210769920x^{38}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{12}^{Tnc}(x) = & x + 324x^2 + 40661x^3 + 7110833x^4 + 1258226556x^5 + 229320317359x^6 + 42157390580371x^7 + \\
& 7784584974538368x^8 + 1440027274442086769x^9 + 266592485903824019297x^{10} + \\
& 49370866298667719771964x^{11} + 9144433503092353217515639x^{12} + 1693831480088780441382206551x^{13} + \\
& 313758480051614385713328975696x^{14} + 58120041000674374495827699035057x^{15} + \\
& 10766104822128945772009775893697705x^{16} + 1994308218312032136468520737923798952x^{17} + \\
& 369425086385808570102911307947404967215x^{18} + 68432227400397660077853587903266565652955x^{19} + \\
& 12676374200261687110601982960285590881424640x^{20} + \\
& 2348169602273990391519270417144794820324148805x^{21} + \\
& 434974590875730148654647846938627993696817466361x^{22} + \\
& 80574630359272258570224416141640937089566975901396x^{23} + \\
& 14925632988960550558242562591180701510404613852892927x^{24} + \\
& 2764822125913864323327329261558606236715960966384783383x^{25} + \dots
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{13}^{TnC}(x) = & -x(1 - 208x - 79892x^2 + 33042137x^3 - 4869390172x^4 + 373483066597x^5 - 15135800458651x^6 + \\
& 191818992781737x^7 + 11079457007481830x^8 - 632841913799364517x^9 + 13918241384529471242x^{10} - \\
& 87693069841230523094x^{11} - 2788059553915657926426x^{12} + 77707843921367359992989x^{13} - \\
& 755415318769706674613309x^{14} - 925018680108455680670626x^{15} + 101487342677058526530184995x^{16} - \\
& 1023078316773348885386226273x^{17} + 2303832047406447741814053167x^{18} + 40152955247861642091072539182x^{19} - \\
& 395878025158363885643482233411x^{20} + 1001811435396844163799570124076x^{21} + \\
& 6394921217172604112892229840005x^{22} - 55668278101946512484697082135321x^{23} + \\
& 109212038343275044549244922004133x^{24} + 513572332823648453020271396810846x^{25} - \\
& 3237182867334606281012564610743853x^{26} + 3841140916525575444614058990336883x^{27} + \\
& 20419196651899602668992374438670226x^{28} - 7856764683766227795702316507343481x^{29} + \\
& 30690951610382047776198221838765067x^{30} + 378094412006368220082564812727239755x^{31} - \\
& 783528468398079487572618201668412839x^{32} - 293990881816337089761981120737863631x^{33} + \\
& 3008104705893398867249496210169025307x^{34} - 2929015291786575133616708599085469355x^{35} - \\
& 3796739592887618722452573683809355005x^{36} + 9746084284316976443626738883590246361x^{37} - \\
& 2754836522155994780666309278884205938x^{38} - 11402646654459649578350510433014541219x^{39} + \\
& 12089306032836145766107047838981155562x^{40} + 2844360951099792863631702261076008755x^{41} - \\
& 11913725326192563296147055326251452013x^{42} + 4933800759563095968000854508039187618x^{43} + \\
& 4360344184704242580238180787164524291x^{44} - 4475179226084075430303128388600609667x^{45} + \\
& 146192922260515937248678600430383775x^{46} + 1450970582806272131232442714816566530x^{47} - \\
& 534809702639522619653312060561575608x^{48} - 175840325453497586039101584055405323x^{49} + \\
& 150523237812662580783224696921029933x^{50} - 7668370815393412314175579358355667x^{51} - \\
& 18233111926513813771882264772114438x^{52} + 4196696982178710871202017611050486x^{53} + \\
& 925936608621152268812931398292294x^{54} - 429825821051533195593212358313691x^{55} + \\
& 897165031534360276341370410761x^{56} + 18895674660195435967037426744133x^{57} - \\
& 178498293065643277798323730463x^{58} - 323509207084312021328443656409x^{59} + \\
& 51766170562066232232343663129x^{60} + 635531816742339296550606824x^{61} - 292979227870435856545576584x^{62} + \\
& 2903180987112106367511999x^{63})/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1 + 729x - 205276x^2 + 28774364x^3 - 2069242947x^4 + 54521238784x^5 + 2540771984406x^6 - \\
& 258270158875831x^7 + 8254277869695393x^8 - 50438475178054008x^9 - 4577922591875751515x^{10} + \\
& 156920730246337867838x^{11} - 1947518869707068863368x^{12} - 6258787718073169065654x^{13} + \\
& 537497696236859675204944x^{14} - 6981499288328474688957601x^{15} + 20034421337134822343796215x^{16} + \\
& 493095821378669850823979955x^{17} - 6544872938919211955859448126x^{18} + 25406303573141864815862984199x^{19} + \\
& 141499498127500753890161896491x^{20} - 2000864943348121099938431452301x^{21} + \\
& 7154865464783049876481048644373x^{22} + 16629955824567304984660205720833x^{23} - \\
& 233729092639295072145786839574244x^{24} + 646116458926462503983936842610559x^{25} + \\
& 1177121779980131876904375050463561x^{26} - 11791744839674393668221649162114373x^{27} + \\
& 21504006059868060173719331448152805x^{28} + 46190334441390263074747993336223894x^{29} - \\
& 256360433605959364284217420577841198x^{30} + 235009735911625906812861513875038323x^{31} + \\
& 870707795924250278511852812478304166x^{32} - 2387383239161720320955338589768157719x^{33} + \\
& 302607738682234190013151193583053376x^{34} + 6860585933858413756505798261386039563x^{35} - \\
& 8822306772787739848623153058208091328x^{36} - 5552856626388077752829058463035375175x^{37} + \\
& 21613448565579102233889724765461627035x^{38} - 10368056116790690392474636985351863102x^{39} - \\
& 20080762265804261087167442626526631317x^{40} + 26113021283068413700974698372414984970x^{41} + \\
& 1390004873389173619205792799047533594x^{42} - 21304487637811693028239371056298770161x^{43} + \\
& 10781189932775001881834059026377855347x^{44} + 6363412216101912926979518415704916003x^{45} - \\
& 7821204017924481120760773240982875216x^{46} + 722046678331614498126502980945559883x^{47} + \\
& 2240930973472927038251157158623351578x^{48} - 919048221800555052277331785586930648x^{49} - \\
& 231337977658386086207508579809234906x^{50} + 228708614752344081036609774647295785x^{51} - \\
& 16913766876412520957797308390311353x^{52} - 25304540394430534938380404952836106x^{53} + \\
& 6236853171309462366457570112380092x^{54} + 1144877899955153902428948327877978x^{55} - \\
& 577206037028759042190137801400852x^{56} + 7529973985103843173848511760413x^{57} + \\
& 23326357953957345784305823318410x^{58} - 2318542877384283583434937750011x^{59} - \\
& 363854240174009045344913754630x^{60} + 59964026528900193652041528729x^{61} + \\
& 515500743628959729859994424x^{62} - 305848740124993418971257480x^{63} + 2903180987112106367511999x^{64})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_{13}^{TnC}(x) = \\
& x + 521x^2 + 94641x^3 + 23860994x^4 + 6019949235x^5 + 1563616901289x^6 + 410685863818829x^7 + \\
& 108680224298965775x^8 + 28885443646068696636x^9 + 7697782672223977809178x^{10} + \\
& 2054738065680739228638707x^{11} + 549007484897518979688253782x^{12} + 146778979981795502904523460553x^{13} + \\
& 39256455963159335499059410183014x^{14} + 10501645621993870751107771050851885x^{15} + \\
& 2809728365013355124287589270028794708x^{16} + 751810737333491167502810631395327329121x^{17} + \\
& 201175700430372387590350775917384172630403x^{18} + \\
& 53833981683801464428474326205942754537286776x^{19} + \\
& 14406087682340513042806512640834731766157769808x^{20} + \\
& 3855146257880058549107041721153429364184928394618x^{21} + \\
& 1031665446779243847361514470733917000217365153177412x^{22} + \\
& 276082504055472631358905615180969234514638921778807699x^{23} + \\
& 73882247078607453109055517073219210939592385510318453725x^{24} + \\
& 19771610577230034420482354351709347816048938574233828605390x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{14}^{TnC}(x) = & -x(1 - 250x - 241465x^2 + 130181673x^3 - 26427230137x^4 + 2708647608986x^5 - 130217217118640x^6 - \\
& 470836804131480x^7 + 419309310152602865x^8 - 22974790326493373041x^9 + 474262067769429561796x^{10} + \\
& 5598507190928637868102x^{11} - 571508536513909558942594x^{12} + 13917902583796228345661803x^{13} - \\
& 117113367375450720200283133x^{14} - 1656259014654120521313749934x^{15} + 54001661463527122847686547042x^{16} - \\
& 486325436495354321002640736880x^{17} - 1605152466339233564549002956640x^{18} + \\
& 74099155369156694584230365258071x^{19} - 570102846866816503384840626169219x^{20} - \\
& 822300642088766387503327511823792x^{21} + 42981048873345720546910836849946004x^{22} - \\
& 257161489141860033549386184964574010x^{23} - 253510390114999310217807632433799594x^{24} + \\
& 10673567481699921074736526517028335402x^{25} - 46946430826474049597337696289782958858x^{26} - \\
& 46277637595578587497426960505134905378x^{27} + 1149337199348125334199654551037368029623x^{28} - \\
& 3522175222040222760434269297713180738268x^{29} - 4369856596077501178153759366651850525419x^{30} + \\
& 55566876535896079206032017528855663008535x^{31} - 113459184423791680593513823627816708409313x^{32} - \\
& 173943889851419628194630861790033520405456x^{33} + \\
& 1215382299008078243475661349251217642694642x^{34} - \\
& 1608119302284289389476015331241378182938774x^{35} - \\
& 2879664522920911409039572843365761888793143x^{36} + \\
& 12055789727468931549127069341186159738828857x^{37} - \\
& 9985929328812497581879337689906031165087764x^{38} - \\
& 20942258352471870193928568975579222497456902x^{39} + \\
& 55392520723838044259412878168157515125889636x^{40} - \\
& 27609686230977138495026565377064966130425637x^{41} - \\
& 67850586447897636496464132692072872436758585x^{42} + \\
& 118802785837761464661211758185967151322113034x^{43} - \\
& 33977631755868264948399893457763079268493366x^{44} - \\
& 99421473490735074981813309603831089689951584x^{45} + \\
& 120256511659972649735756899060884018263658966x^{46} - \\
& 20489478639226596484134815318696239165821201x^{47} - \\
& 64166501630310175972836888096097593046941905x^{48} + \\
& 56899019707905833112640870171779685334896140x^{49} - \\
& 7988423180891978814384159379402438588047584x^{50} - \\
& 16498043402068033174159692237075411690150480x^{51} + \\
& 11566441375465033208057690381308526690265440x^{52} - \\
& 1858480556728317777694402485432190396917760x^{53} - \\
& 1293380582943050706948480926685812206707200x^{54} + \\
& 727602597725014857232079357140843386469888x^{55} - \\
& 76710854904929243688280535862161670205440x^{56} - \\
& 45971146675336357055513757997856051377152x^{57} + 15827629533235547990659315987758396997632x^{58} - \\
& 296353970289794533339234242414949163008x^{59} - 690854642288128089124070699167113347072x^{60} + \\
& 99831018249592940108202590217923198976x^{61} + 10408795298536646682314789739889688576x^{62} - \\
& 3325028631626157528481847618427682816x^{63} + 25338546848544478360952614168821760x^{64} + \\
& 50169288331599343596914886980927488x^{65} - 2402700679322372631085805681508352x^{66} - \\
& 395691346577380311483617642545152x^{67} + 25633128015062785391957603516416x^{68} + \\
& 1640091750757852426975263588352x^{69} - 100486229785123775534189248512x^{70} - \\
& 3089733801952044024971919360x^{71} + 87018482365782313402368000x^{72})/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((1+x)(-1+15x)(1+11x+24x^2+13x^3)(1+39x+164x^2+139x^3)(1+15x+43x^2+14x^3+x^4)(1+123x+ \\
& 4287x^2+56388x^3+340889x^4+1023737x^5+1586768x^6+1283699x^7+557419x^8+135360x^9+18857x^{10}+ \\
& 1486x^{11}+61x^{12}+x^{13})(-1+372x-42413x^2+2173210x^3-60032212x^4+993128332x^5-10485047801x^6+ \\
& 73443641910x^7-349700572708x^8+1150917656464x^9-2655012399456x^{10}+4349572253312x^{11}- \\
& 5116898626432x^{12}+4355854109952x^{13}-2691841916928x^{14}+1205257859072x^{15}-387743512576x^{16}+ \\
& 88113405952x^{17}-13717635072x^{18}+1384644608x^{19}-81264640x^{20}+2097152x^{21})(-1+897x- \\
& 284613x^2+44616593x^3-4029293589x^4+228607904694x^5-8623998744010x^6+225243247921559x^7- \\
& 4196824245744747x^8+57062519353551486x^9-576185381851639467x^{10}+4381096629347262750x^{11}- \\
& 25362753972981226023x^{12}+112745987919002029131x^{13}-387224132372088067387x^{14}+ \\
& 1031345440365206915058x^{15}-2132798841380783388554x^{16}+3419096019693872449756x^{17}- \\
& 4228713744245639777841x^{18}+4000304340185270192004x^{19}-285580074672760988656x^{20}+ \\
& 1508442695853085266432x^{21}-572933701954998116352x^{22}+150113917428371795968x^{23}- \\
& 25482017209198657536x^{24}+2527785821948608512x^{25}-119775081782050816x^{26}+1530848398540800x^{27})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_{14}^{TnC}(x) = \\
& x + 845x^2 + 232861x^3 + 93547152x^4 + 38161604217x^5 + 16179908259446x^6 + 6955967193562675x^7 + \\
& 3013814772945044388x^8 + 1310571139307486059744x^9 + 570941650352643832290496x^{10} + \\
& 248946408250205225732190657x^{11} + 108594562872624965291980865517x^{12} + \\
& 47380824041848615032082234543538x^{13} + 20674860253582882636086734473452690x^{14} + \\
& 9022044500672394796169951103350465307x^{15} + 3937117874038266866017108373849625832406x^{16} + \\
& 1718135244552626203898654459395975826590780x^{17} + \\
& 749788869420890785643183575437392430014238172x^{18} + \\
& 327206540946232850646025525636752798786883194114x^{19} + \\
& 142792577247139636166593093344516530392048619109541x^{20} + \\
& 62314572410495518341343134325594627886014538946907912x^{21} + \\
& 27194042460317564525972154320581961864323701254872880977x^{22} + \\
& 11867466249360362556968273924667166748336830671415324128093x^{23} + \\
& 5178956700196225617404438425797251018982847819819861731612629x^{24} + \\
& 2260094378398440680979300686322330296192434522169114137118638649x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_{15}^{TnC}(x) = \\
& x + 1364x^2 + 551613x^3 + 325657968x^4 + 192461352562x^5 + 117686516544594x^6 + 72945933567920729x^7 + \\
& 45643040884844001536x^8 + 28724255612327969672932x^9 + 18144383836051636673861867x^{10} + \\
& 11488975420539457121794585998x^{11} + 7286202085630847737325323395906x^{12} + \\
& 4625571064261896320140372765529296x^{13} + 2938460832220940936831456750219444994x^{14} + \\
& 1867516598405888914804775809449705242513x^{15} + \\
& 1187226104290641513303717685425133226997878x^{16} + \\
& 754890354123995415719107703048801759286901762x^{17} + \\
& 480051335501492838673135121095806203328961433789x^{18} + \\
& 305299750808514058182597036323917736265092146019244x^{19} + \\
& 194172678923920991475888643778258816520058079987883396x^{20} + \\
& 123499386994065384580259878272101608357026769697620157317x^{21} + \\
& 78550926840805376586585823096710973035451347336859903278567x^{22} + \\
& 49962512246307590120896780660550059579267388047814570691961898x^{23} + \\
& 31779088949936319299332029947934364090037973973942235275728958766x^{24} + \\
& 20213493680676849470640814622587215937195100630627182727303982687346x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{16}^{TnC}(x) = & \\
& x + 2209x^2 + 1344837x^3 + 1247739997x^4 + 1176032485833x^5 + 1160288515380121x^6 + \\
& 1166255193469341005x^7 + 1185537358216390245429x^8 + 1212265596856254020971761x^9 + \\
& 1243579048192809989812145169x^{10} + 1277895262634953569701628954885x^{11} + \\
& 1314373438943841131293557932317677x^{12} + 1352565836514823616126618920708268489x^{13} + \\
& 1392241531890106476062759414188473371689x^{14} + \\
& 1433288723930969312683797470832044615749917x^{15} + \\
& 1475661751488339174448720884931066509880982565x^{16} + \\
& 1519351974798138063352510239397485429264719411585x^{17} + \\
& 1564371765333443333756180310291660713930922038383681x^{18} + \\
& 1610745673603442972346912013817118708336327750901642421x^{19} + \\
& 1658505551969350049980484820890118350456507321682207716957x^{20} + \\
& 1707687862064664321324867899251182896438911982818451145146329x^{21} + \\
& 1758332192736517484633412955904639221829026592583003083532989913x^{22} + \\
& 1810480450502483013757516923306739236326466951416769104534271300797x^{23} + \\
& 1864176424622422017964522716857650762175540568219077044979790831688277x^{24} + \\
& 1919465561436274265978290290338211439781915616861551057610847225732594161x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{17}^{TnC}(x) = & \\
& x + 3571x^2 + 3215041x^3 + 4444339751x^4 + 6151532634859x^5 + 8851836530897104x^6 + \\
& 12939617301085024529x^7 + 19127617320816121366452x^8 + 28474590328963725085347639x^9 + \\
& 42589885261525799514745869499x^{10} + 63905315558068166767129771712679x^{11} + \\
& 96096516725583526494032612816236112x^{12} + 144717421460086179237227147299450659836x^{13} + \\
& 218159686854741111724361184739620835897302x^{14} + \\
& 329102191183638563664798864443258409828820241x^{15} + \\
& 496701121655668982938232734328368052150528489952x^{16} + \\
& 749898916351637898118940193686340894727637366003716x^{17} + \\
& 1132423640596136202261956753918967417943579199078073338x^{18} + \\
& 1710342364351588023476012453033776190031904865314169651567x^{19} + \\
& 2583473277479531260220823597300820365910480560545500758760898x^{20} + \\
& 3902627819968835955248721578281365478246482855981064422162312401x^{21} + \\
& 5895661154947594901443977267554991231621289042216368497546032187540x^{22} + \\
& 8906830825593693661442159214932408949457259307858939336106958487041559x^{23} + \\
& 13456262232647550295196744180048374236536107862397316416427857701132566515x^{24} + \\
& 20329792730599700675924568044783210931387539949914868325206259268106800414972x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{18}^{TnC}(x) = & \\
& x + 5780x^2 + 7801165x^3 + 16788557123x^4 + 36655273043812x^5 + 84238150673398010x^6 + \\
& 197983223809129991221x^7 + 472116548787108690744794x^8 + 1135126364276555282932647235x^9 + \\
& 2742392002573492985349801499994x^{10} + 6643863136834483490999934197961784x^{11} + \\
& 16121626293866934494559934285910094227x^{12} + 39156115632530892545028999376876628331958x^{13} + \\
& 95153141325329485855450526482781928401051570x^{14} + \\
& 231303071218305347597566406802770824393462101445x^{15} + \\
& 562364331191836924937840680006541962007395307421326x^{16} + \\
& 1367412236724940008404355387662509090232141681352022714x^{17} + \\
& 3325121329527473398490899002791157147316127401748635779509x^{18} + \\
& 8085946346778760589100083264115676676177788707823547122857793x^{19} + \\
& 19663604828744357778377718293621252172927077215019804895654629084x^{20} + \\
& 47819014551205735095235300385428033892361857458316584177576367043214x^{21} + \\
& 116289670661881088029330391385128725361964765661104284030666283103331222x^{22} + \\
& 282802621230386706038119542241848749659558713589758116655044031017408316646x^{23} + \\
& 687743912708372591876329863661928036510919481432015721376343008774762855424214x^{24} + \\
& 1672517552800166546609792709261336772742668582850638721533836534157959086106144871x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

Torus $TG_m^{(p)}(n)$ i Klajnova boca $KB_m^{(p)}(n)$ ($2 \leq m \leq 10$)

$$\mathcal{F}_{m,p}^{TG}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f_{m,p}^{TG}(n)x^n \text{ and } \mathcal{F}_{m,p}^{KB}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} f_{m,p}^{KB}(n)x^n$$

$$0 \leq p \leq m-1, TG_m^{(0)}(n) \equiv C_m \times C_n$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2,0}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{2,1}^{KB}(x) = \\ &= -\frac{2x(1+3x)}{(1+x)(-1+3x)} - \frac{8x^2}{(-1+2x)(1+2x)} = \\ &= 2x + 18x^2 + 26x^3 + 114x^4 + 242x^5 + 858x^6 + 2186x^7 + 7074x^8 + 19682x^9 + 61098x^{10} + 177146x^{11} + \\ &+ 539634x^{12} + 1594322x^{13} + 4815738x^{14} + 14348906x^{15} + 43177794x^{16} + 129140162x^{17} + 387944778x^{18} + \\ &+ 1162261466x^{19} + 3488881554x^{20} + 10460353202x^{21} + 31389448218x^{22} + 94143178826x^{23} + 282463090914x^{24} + \\ &+ 847288609442x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2,1}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{2,0}^{KB}(x) = \\ &= -\frac{2x(1+3x)}{(1+x)(-1+3x)} + \frac{4x}{1-4x^2} = \\ &= 6x + 10x^2 + 42x^3 + 82x^4 + 306x^5 + 730x^6 + 2442x^7 + 6562x^8 + 20706x^9 + 59050x^{10} + 181242x^{11} + \\ &+ 531442x^{12} + 1610706x^{13} + 4782970x^{14} + 14414442x^{15} + 43046722x^{16} + 129402306x^{17} + 387420490x^{18} + \\ &+ 1163310042x^{19} + 3486784402x^{20} + 10464547506x^{21} + 31381059610x^{22} + 94159956042x^{23} + 282429536482x^{24} + \\ &+ 847355718306x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{3,0}^{TG}(x) &= \\ &= -\frac{2x(1+11x+4x^2)}{(1+x)(-1+3x+x^2)} = \\ &= 2x + 26x^2 + 68x^3 + 242x^4 + 782x^5 + 2600x^6 + 8570x^7 + 28322x^8 + 93524x^9 + 308906x^{10} + 1020230x^{11} + \\ &+ 3369608x^{12} + 11129042x^{13} + 36756746x^{14} + 121399268x^{15} + 400954562x^{16} + 1324262942x^{17} + 4373743400x^{18} + \\ &+ 14445493130x^{19} + 47710222802x^{20} + 157576161524x^{21} + 520438707386x^{22} + 1718892283670x^{23} + \\ &+ 5677115558408x^{24} + 18750238958882x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{3,1}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{3,2}^{TG}(x) = \\ &= -\frac{2x(4+2x+x^2)}{(1+x)(-1+3x+x^2)} = \\ &= 8x + 20x^2 + 74x^3 + 236x^4 + 788x^5 + 2594x^6 + 8576x^7 + 28316x^8 + 93530x^9 + 308900x^{10} + 1020236x^{11} + \\ &+ 3369602x^{12} + 11129048x^{13} + 36756740x^{14} + 121399274x^{15} + 400954556x^{16} + 1324262948x^{17} + 4373743394x^{18} + \\ &+ 14445493136x^{19} + 47710222796x^{20} + 157576161530x^{21} + 520438707380x^{22} + 1718892283676x^{23} + \\ &+ 5677115558402x^{24} + 1875023895888x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{3,0}^{KB}(x) &= \mathcal{F}_{3,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{3,2}^{KB}(x) = \\ &= \frac{(2x(3+2x))}{-1+3x+x^2} = \\ &= 6x + 22x^2 + 72x^3 + 238x^4 + 786x^5 + 2596x^6 + 8574x^7 + 28318x^8 + 93528x^9 + 308902x^{10} + 1020234x^{11} + \\ &+ 3369604x^{12} + 11129046x^{13} + 36756742x^{14} + 121399272x^{15} + 400954558x^{16} + 1324262946x^{17} + 4373743396x^{18} + \\ &+ 14445493134x^{19} + 47710222798x^{20} + 157576161528x^{21} + 520438707382x^{22} + 1718892283674x^{23} + \\ &+ 5677115558404x^{24} + 18750238958886x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{4,0}^{TG}(x) &= \frac{2x(1+21x+6x^2-20x^3)}{(1+x)(1+2x)(1-7x+4x^2)} - \frac{8x^2(-7+25x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+5x)(1+5x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2} = \\ &= 2x + 114x^2 + 242x^3 + 2970x^4 + 10442x^5 + 98466x^6 + 426386x^7 + 3500970x^8 + 17323226x^9 + 129930354x^{10} + \\ &+ 703463906x^{11} + 4970993658x^{12} + 28564983722x^{13} + 194231313474x^{14} + 1159909450802x^{15} + \\ &+ 7696445791050x^{16} + 47099249906042x^{17} + 307759067766546x^{18} + 1912510703585666x^{19} + \\ &+ 1237779111168410x^{20} + 77659350883118666x^{21} + 499635602835227874x^{22} + 3153433215088906706x^{23} + \\ &+ 20213772870411999978x^{24} + 128048212205068924442x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{4,1}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{4,3}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{4,0}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{4,2}^{KB}(x) = \\ &= -\frac{6(-1+x)x(1+2x)}{(1+x)(1-7x+4x^2)} + \frac{8(x+5x^3)}{(-1+x)(1+x)(-1+5x)(1+5x)} + \frac{4x}{1-4x^2} = \\ &= 18x + 42x^2 + 522x^3 + 1650x^4 + 16818x^5 + 66954x^6 + 583146x^7 + 2718690x^8 + 21231522x^9 + 110395002x^{10} + \\ &+ 801128346x^{11} + 4482696018x^{12} + 31006422738x^{13} + 182024216682x^{14} + 1220944738122x^{15} + \\ &+ 7391269747650x^{16} + 48625129336578x^{17} + 300129672186714x^{18} + 1950657678339066x^{19} + \\ &+ 12187056243692850x^{20} + 78613025207913522x^{21} + 494867231236419402x^{22} + 3177275073032617386x^{23} + \\ &+ 20094563580794109858x^{24} + 128644258652957048418x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{4,2}^{TG}(x) &= -\frac{2x(-5+3x+6x^2+4x^3)}{(1+x)(1+2x)(1-7x+4x^2)} + \frac{48x^2}{(-1+x)(1+x)(-1+5x)(1+5x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2} = \\ &= 10x + 90x^2 + 274x^3 + 2898x^4 + 10570x^5 + 98202x^6 + 426898x^7 + 3499938x^8 + 17325274x^9 + 129926250x^{10} + \\ &+ 703472098x^{11} + 4970977266x^{12} + 28565016490x^{13} + 194231247930x^{14} + 1159909581874x^{15} + \\ &+ 7696445528898x^{16} + 47099250430330x^{17} + 307759066717962x^{18} + 1912510705682818x^{19} + \\ &+ 12377791106974098x^{20} + 77659350891507274x^{21} + 499635602818450650x^{22} + 3153433215122461138x^{23} + \\ &+ 20213772870344891106x^{24} + 128048212205203142170x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{4,1}^{KB}(x) &= \mathcal{F}_{4,3}^{KB}(x) = \\ &= -\frac{6(-1+x)x(1+2x)}{(1+x)(1-7x+4x^2)} + \frac{52x^2-100x^4}{(-1+x)(1+x)(-1+5x)(1+5x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2} = \\ &= 6x + 102x^2 + 258x^3 + 2934x^4 + 10506x^5 + 98334x^6 + 426642x^7 + 3500454x^8 + 17324250x^9 + 129928302x^{10} + \\ &+ 703468002x^{11} + 4970985462x^{12} + 28565000106x^{13} + 194231280702x^{14} + 1159909516338x^{15} + \\ &+ 7696445659974x^{16} + 47099250168186x^{17} + 307759067242254x^{18} + 1912510704634242x^{19} + \\ &+ 12377791109071254x^{20} + 77659350887312970x^{21} + 499635602826839262x^{22} + 3153433215105683922x^{23} + \\ &+ 20213772870378445542x^{24} + 128048212205136033306x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{5,0}^{TG}(x) = \frac{2x(1 + 116x - 250x^2 - 1026x^3 + 1646x^4 + 1675x^5 - 2401x^6 + 58x^7 + 372x^8 - 48x^9)}{(-1 + 9x - 4x^2 - 22x^3 + 3x^4)(-1 - 4x + 4x^2 + 10x^3 - 8x^4 - x^5 + x^6)} =$$

$$2x + 242x^2 + 782x^3 + 10442x^4 + 67832x^5 + 628382x^6 + 4831612x^7 + 40904442x^8 +$$

$$329212322x^9 + 2720543472x^{10} + 22172526752x^{11} + 182023143782x^{12} + 1488626009132x^{13} +$$

$$12198610087752x^{14} + 99857648185292x^{15} + 817880965553242x^{16} + 6696906730979202x^{17} +$$

$$54843316086466622x^{18} + 449095741864069442x^{19} + 3677664470840904912x^{20} + 30115901734205683702x^{21} +$$

$$246617882571678884332x^{22} + 2019531708324695230722x^{23} + 16537815439466805799542x^{24} +$$

$$135426887276826051341032x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{5,1}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{5,4}^{TG}(x) =$$

$$\frac{-2x(-16 + 34x + 125x^2 + 61x^3 - 421x^4 - 290x^5 + 566x^6 - 133x^7 + 3x^8 + 3x^9)}{(-1 + 9x - 4x^2 - 22x^3 + 3x^4)(-1 - 4x + 4x^2 + 10x^3 - 8x^4 - x^5 + x^6)} =$$

$$32x + 92x^2 + 1362x^3 + 7952x^4 + 78402x^5 + 583082x^6 + 5025732x^7 + 40071652x^8 +$$

$$332785472x^9 + 2705210252x^{10} + 22238327242x^{11} + 181740763342x^{12} + 1489837842362x^{13} +$$

$$12193409497792x^{14} + 99879966576102x^{15} + 817785185872272x^{16} + 6697317770881812x^{17} +$$

$$54841552102546412x^{18} + 449103312027847732x^{19} + 3677631983367604002x^{20} + 30116041154693649302x^{21} +$$

$$246617284246523379292x^{22} + 2019534276046249700682x^{23} + 16537804420050484264322x^{24} +$$

$$135426934566819733665752x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{5,2}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{5,3}^{TG}(x) =$$

$$\frac{2x(6 + 46x - 85x^2 - 201x^3 - 84x^4 + 265x^5 + 104x^6 - 67x^7 + 12x^8 - 3x^9)}{(-1 + 9x - 4x^2 - 22x^3 + 3x^4)(-1 - 4x + 4x^2 + 10x^3 - 8x^4 - x^5 + x^6)} =$$

$$12x + 152x^2 + 1022x^3 + 9412x^4 + 71952x^5 + 610862x^6 + 4906052x^7 + 40585712x^8 +$$

$$330578112x^9 + 2714684802x^{10} + 22197663412x^{11} + 181915278242x^{12} + 1489088898082x^{13} +$$

$$12196623621232x^{14} + 99866173082952x^{15} + 817844380915012x^{16} + 6697063734348162x^{17} +$$

$$54842642304392132x^{18} + 449098633409635132x^{19} + 3677652061729775452x^{20} + 30115954988094303612x^{21} +$$

$$246617654031804132482x^{22} + 2019532689107058341092x^{23} + 16537811230424301945262x^{24} +$$

$$135426905339996319417002x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{5,0}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{5,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{5,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{5,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{5,4}^{KB}(x) =$$

$$2 \frac{x(-9 + 8x + 66x^2 - 12x^3)}{-1 + 9x - 4x^2 - 22x^3 + 3x^4} =$$

$$18x + 146x^2 + 1110x^3 + 9034x^4 + 73708x^5 + 603254x^6 + 4939036x^7 + 40443834x^8 +$$

$$331187898x^9 + 2712066716x^{10} + 22208901612x^{11} + 181867045390x^{12} + 1489295898004x^{13} +$$

$$12195735265160x^{14} + 99869985500680x^{15} + 817828019825562x^{16} + 6697133948287830x^{17} +$$

$$54842340980068742x^{18} + 449099926547807034x^{19} + 3677646512207132764x^{20} + 30115978803956317906x^{21} +$$

$$246617551825666781576x^{22} + 2019533127726262262854x^{23} + 16537809348083275643742x^{24} +$$

$$135426913418091631501308x^{25} + \dots$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{6,0}^{TG}(x) = & -(2x(1+155x+215x^2-3684x^3-4669x^4+22509x^5+18491x^6-43072x^7-10982x^8+6708x^9+1368x^{10}))/ \\ & ((-1+x)(-1+2x)(1+2x)(1+3x)(1+3x+x^2)(1+6x+x^2)(-1+17x-37x^2+12x^3))- \\ & (12x^2(35-2508x^2+38371x^4-212774x^6+506293x^8-564506x^{10}+295808x^{12}-68120x^{14}+5376x^{16}))/ \\ & ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-5x+3x^2)(1+5x+3x^2)(-1+14x-22x^2+8x^3)(1+ \\ & 14x+22x^2+8x^3)) \\ & - \frac{12x^2(-3+7x)(3+7x)}{(-1+x)(1+x)(-1+7x)(1+7x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{6,0}^{TG}(x) = & 2x + 858x^2 + 2600x^3 + 98466x^4 + 628382x^5 + 16448400x^6 + 134721638x^7 + 2995602834x^8 + \\ & 28432011752x^9 + 566597492178x^{10} + 5985882924254x^{11} + 109903205061360x^{12} + 1259741716585718x^{13} + \\ & (21736984452051810x^{14} + 265098868583817320x^{15} + 4365796637993895186x^{16} + 55786599952981377950x^{17} + \\ & 887421840845709378960x^{18} + 11739543540193217824262x^{19} + 182043417096228583263666x^{20}) + \\ & 2470429220177037909717224x^{21} + 37601976458209902773864082x^{22} + 519868617913174476410785502x^{23} + \\ & 7806648458062158266900754864x^{24} + 109399360988897448327149426582x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{6,1}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{6,5}^{TG}(x) = & -(2x(10+38x-163x^2-1254x^3-595x^4+6357x^5+4568x^6-6865x^7-1700x^8+1548x^9+216x^{10}))/ \\ & ((-1+x)(-1+2x)(1+2x)(1+3x)(1+3x+x^2)(1+6x+x^2)(-1+17x-37x^2+12x^3))- \\ & (6x(5-282x^2+3121x^4-24860x^6+110739x^8-180644x^{10}+115360x^{12}-26936x^{14}+1472x^{16}))/ \\ & ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-5x+3x^2)(1+5x+3x^2)(-1+14x-22x^2+8x^3)(1+ \\ & 14x+22x^2+8x^3))+ \\ & \frac{12x(1+7x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+7x)(1+7x)} + \frac{4x}{1-4x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{6,1}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{6,5}^{TG}(x) = & 66x + 196x^2 + 7728x^3 + 43276x^4 + 1238826x^5 + 9280810x^6 + 220306950x^7 + 1959709660x^8 + \\ & 41039318112x^9 + 412627702756x^{10} + 7869400145706x^{11} + 86839919979346x^{12} + 1542287856771702x^{13} + \\ & 18274564632840964x^{14} + 307535029174761288x^{15} + 3845645631265057852x^{16} + 62162525468824018554x^{17} + \\ & 809264730153945546874x^{18} + 12697619995607789219814x^{19} + 170298892278149136083116x^{20} + \\ & 2614399472275480088901744x^{21} + 35837112519944207795899156x^{22} + 541503291293519991461336874x^{23} + \\ & 7541438501057517562114538146x^{24} + 112650454910746254596670459126x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{6,2}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{6,4}^{TG}(x) = & -(2x(10+32x-109x^2-714x^3-1207x^4+2265x^5+6872x^6-223x^7-1142x^8+624x^9+72x^{10}))/ \\ & ((-1+x)(-1+2x)(1+2x)(1+3x)(1+3x+x^2)(1+6x+x^2)(-1+17x-37x^2+12x^3))+ \\ & (6x^2(-43+466x^2+97x^4-3308x^6+10207x^8-25688x^{10}+22100x^{12}-6624x^{14}+768x^{16}))/ \\ & ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-5x+3x^2)(1+5x+3x^2)(-1+14x-22x^2+8x^3)(1+ \\ & 14x+22x^2+8x^3))+ \\ & \frac{96x^2}{(-1+x)(1+x)(-1+7x)(1+7x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{6,2}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{6,4}^{TG}(x) =$$

$$20x + 546x^2 + 3266x^3 + 92394x^4 + 649280x^5 + 16288572x^6 + 135413648x^7 + 2990869818x^8 +$$

$$28455356186x^9 + 566448456186x^{10} + 5986674473624x^{11} + 109898350832964x^{12} + 1259768592693176x^{13} +$$

$$21736823342530506x^{14} + 265099781460879026x^{15} + 4365791234629904250x^{16} + 55786630962853983728x^{17} +$$

$$887421658574519641164x^{18} + 11739544593606366893792x^{19} + 182043410928107923513914x^{20} +$$

$$2470429255961988323286218x^{21} + 37601976249114446028812058x^{22} + 519868619128808596283356232x^{23} +$$

$$7806648450967193961130178964x^{24} + 109399361030193216423045910280x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{6,3}^{TG}(x) =$$

$$-(2x(7+95x-295x^2-2292x^3+731x^4+11745x^5+2153x^6-15772x^7-4148x^8+2808x^9+648x^{10}))/$$

$$((-1+x)(-1+2x)(1+2x)(1+3x)(1+3x+x^2)(1+6x+x^2)(-1+17x-37x^2+12x^3))-$$

$$(12x(1+102x^2-1225x^4+9488x^6-31443x^8+41180x^{10}-14362x^{12}-2836x^{14}+1120x^{16}))/$$

$$((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-5x+3x^2)(1+5x+3x^2)(-1+14x-22x^2+8x^3)(1+14x+22x^2+8x^3))+$$

$$\frac{12x(1+7x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+7x)(1+7x)} + \frac{4x}{1-4x^2}$$

$$\mathcal{F}_{6,3}^{TG}(x) =$$

$$42x + 274x^2 + 6840x^3 + 46498x^4 + 1211262x^5 + 9396232x^6 + 219469278x^7 + 1963685122x^8 +$$

$$41013093312x^9 + 412763242834x^{10} + 7868553742014x^{11} + 86844528775432x^{12} + 1542259952215518x^{13} +$$

$$18274721236048642x^{14} + 307534097147126400x^{15} + 3845650951522451074x^{16} + 62162494103450793390x^{17} +$$

$$809264910889307863816x^{18} + 12697618935604681128702x^{19} + 170298898417860124862338x^{20} +$$

$$2614399436368451516402304x^{21} + 35837112728513906398644274x^{22} + 541503290075625092403221982x^{23} +$$

$$7541438508142749946738210312x^{24} + 112650454869408625049062420062x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{6,0}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{6,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{6,4}^{KB}(x) =$$

$$\frac{2x(7+17x-207x^2-106x^3+850x^4+12x^5-168x^6)}{(-1+2x)(1+2x)(1+3x+x^2)(-1+17x-37x^2+12x^3)} -$$

$$\frac{24x(-1+3x^2-66x^4+48x^6)}{(-1+2x)(1+2x)(-1+14x-22x^2+8x^3)(1+14x+22x^2+8x^3)} +$$

$$\frac{12x(1+7x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+7x)(1+7x)} - \frac{4x}{(-1+2x)(1+2x)}$$

$$\mathcal{F}_{6,0}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{6,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{6,4}^{KB}(x) =$$

$$54x + 230x^2 + 7416x^3 + 44382x^4 + 1229574x^5 + 9319412x^6 + 220027470x^7 + 1961035326x^8 +$$

$$41030575488x^9 + 412672884830x^{10} + 7869118007046x^{11} + 86841456252900x^{12} + 1542278555236590x^{13} +$$

$$18274616833942958x^{14} + 307534718498817456x^{15} + 3845647404684319998x^{16} + 62162515013699348022x^{17} +$$

$$809264790399066843476x^{18} + 12697619642273418807534x^{19} + 170298894324719467773342x^{20} +$$

$$2614399460306470560540960x^{21} + 35837112589467440671869470x^{22} + 541503290887555025091854694x^{23} +$$

$$7541438503419261690355983300x^{24} + 112650454896967044747400670574x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{6,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{6,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{6,5}^{KB}(x) =$$

$$\frac{2x(-9+15x+177x^2-110x^3-524x^4+16x^5+120x^6)}{(-1+2x)(1+2x)(1+3x+x^2)(-1+17x-37x^2+12x^3)}$$

$$\frac{8x^2(-39+434x^2-828x^4+256x^6)}{(-1+2x)(1+2x)(-1+14x-22x^2+8x^3)(1+14x+22x^2+8x^3)}$$

$$\frac{4x^2(-5+7x)(5+7x)}{(-1+x)(1+x)(-1+7x)(1+7x)} - \frac{8x^2}{(-1+2x)(1+2x)}$$

$$\mathcal{F}_{6,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{6,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{6,5}^{KB}(x) =$$

$$18x + 642x^2 + 3060x^3 + 94386x^4 + 642378x^5 + 16341720x^6 + 135183234x^7 + 2992446978x^8 +$$

$$28447575732x^9 + 566498132802x^{10} + 5986410627930x^{11} + 109899968900904x^{12} + 1259759634007074x^{13} +$$

$$21736877045671506x^{14} + 265099477168590660x^{15} + 4365793035751103490x^{16} + 55786620626230043946x^{17} +$$

$$887421719331582362808x^{18} + 11739544242468651585858x^{19} + 182043412984148141333346x^{20} +$$

$$2470429244033671522957524x^{21} + 37601976318812931602107458x^{22} + 519868618723597223009276538x^{23} +$$

$$7806648453332182063020149832x^{24} + 109399361016427960391147524578x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{7,0}^{TG}(x) =$$

$$-2x(1+1079x-11309x^2-163017x^3+1411227x^4+8050358x^5-59600093x^6-173474945x^7+1206163636x^8+$$

$$1756819829x^9-13269562704x^{10}-7839247762x^{11}+83351457555x^{12}+7438024735x^{13}-308734737505x^{14}+$$

$$53387827262x^{15}+698371664770x^{16}-196250242748x^{17}-995090049606x^{18}+287671218042x^{19}+$$

$$906343826977x^{20}-210199757682x^{21}-523958371651x^{22}+71335687392x^{23}+185805053315x^{24}-$$

$$4904925295x^{25}-37609720308x^{26}-2746138593x^{27}+3804635885x^{28}+559321665x^{29}-156088534x^{30}-$$

$$33319916x^{31}+1060080x^{32}+523880x^{33}+23870x^{34}) /$$

$$((-1+27x-131x^2-319x^3+1511x^4-598x^5-1473x^6+740x^7+55x^8)(1+13x-72x^2-1030x^3+1281x^4+$$

$$25514x^5-10606x^6-289247x^7+70298x^8+1694810x^9-310132x^{10}-5443990x^{11}+538711x^{12}+9882395x^{13}+$$

$$197366x^{14}-10127513x^{15}-1486842x^{16}+5648377x^{17}+1517144x^{18}-1533577x^{19}-597207x^{20}+147951x^{21}+$$

$$84616x^{22}-1225x^{23}-4389x^{24}-336x^{25}+63x^{26}+7x^{27}))$$

$$\mathcal{F}_{7,0}^{TG}(x) =$$

$$2x + 2186x^2 + 8570x^3 + 426386x^4 + 4831612x^5 + 134721638x^6 + 2142911388x^7 +$$

$$48506694658x^8 + 878082461552x^9 + 18309402983496x^{10} + 348982663373192x^{11} +$$

$$7041475309154414x^{12} + 137028579300015678x^{13} + 2728527055102059808x^{14} +$$

$$53544239536458527320x^{15} + 1060515253541792576418x^{16} + 20881817475671338188760x^{17} +$$

$$412705594209438378631232x^{18} + 8137355045911556964755608x^{19} + 160686577635260457567848056x^{20} +$$

$$3170012863499006576524131402x^{21} + 62575725299441382116431374292x^{22} +$$

$$1234762642850384408406181694538x^{23} + 24370659626838874175976096699838x^{24} +$$

$$480931967635756920300968526068362x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{7,1}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{7,6}^{TG}(x) =$$

$$2x(-64+685x+9405x^2-68067x^3-491175x^4+2286528x^5+11364290x^6-39380117x^7-133150016x^8+$$

$$419766765x^9+843825807x^{10}-2859633578x^{11}-2793548158x^{12}+11845391151x^{13}+4887555986x^{14}-$$

$$30035595233x^{15}-6484474349x^{16}+50321690006x^{17}+10166277620x^{18}-56681098507x^{19}-14630592369x^{20}+$$

$$41052266316x^{21}+13322442008x^{22}-17711965765x^{23}-6758877104x^{24}+4060686354x^{25}+1753182339x^{26}-$$

$$397957684x^{27}-199772595x^{28}+10591357x^{29}+8427503x^{30}+300951x^{31}-24213x^{32}+7280x^{33}+385x^{34}) /$$

$$((-1 + 27x - 131x^2 - 319x^3 + 1511x^4 - 598x^5 - 1473x^6 + 740x^7 + 55x^8)(1 + 13x - 72x^2 - 1030x^3 + 1281x^4 + 25514x^5 - 10606x^6 - 289247x^7 + 70298x^8 + 1694810x^9 - 310132x^{10} - 5443990x^{11} + 538711x^{12} + 9882395x^{13} + 197366x^{14} - 10127513x^{15} - 1486842x^{16} + 5648377x^{17} + 1517144x^{18} - 1533577x^{19} - 597207x^{20} + 147951x^{21} + 84616x^{22} - 1225x^{23} - 4389x^{24} - 336x^{25} + 63x^{26} + 7x^{27}))$$

$$\mathcal{F}_{7,1}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{7,6}^{TG}(x) =$$

$$128x + 422x^2 + 24474x^3 + 226186x^4 + 7202610x^5 + 104855690x^6 + 2512184138x^7 +$$

$$43867474800x^8 + 936009899568x^9 + 17582816323228x^{10} + 358078499108052x^{11} +$$

$$6927458003305128x^{12} + 138456926552174358x^{13} + 2710626515293975644x^{14} +$$

$$53768532907100055242x^{15} + 1057704536580601904710x^{16} + 20917037738011516021104x^{17} +$$

$$412264244230916452785342x^{18} + 8142885565313287985192096x^{19} + 160617274442569182417892638x^{20} +$$

$$3170881300284945353876423922x^{21} + 62564842903179537055071304118x^{22} +$$

$$1234899010119684176870242642914x^{23} + 24368950807461578197509718153998x^{24} +$$

$$480953380854744384385606313513380x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{7,2}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{7,5}^{TG}(x) =$$

$$2x(-15 - 358x + 6500x^2 + 20581x^3 - 379686x^4 - 614349x^5 + 9623516x^6 + 6871193x^7 - 133665881x^8 +$$

$$16050270x^9 + 1034270306x^{10} - 832552543x^{11} - 4149076038x^{12} + 5536086744x^{13} + 8088738201x^{14} -$$

$$16598435294x^{15} - 3468558824x^{16} + 24425985465x^{17} - 13759119120x^{18} - 16229019938x^{19} + 26995435172x^{20} +$$

$$1959375906x^{21} - 22448277564x^{22} + 2696371002x^{23} + 9963775850x^{24} - 1062648142x^{25} - 2407422144x^{26} +$$

$$69471796x^{27} + 295592527x^{28} + 18818870x^{29} - 13539904x^{30} - 1719872x^{31} + 95417x^{32} + 18060x^{33} + 385x^{34}) /$$

$$((-1 + 27x - 131x^2 - 319x^3 + 1511x^4 - 598x^5 - 1473x^6 + 740x^7 + 55x^8)(1 + 13x - 72x^2 - 1030x^3 + 1281x^4 +$$

$$25514x^5 - 10606x^6 - 289247x^7 + 70298x^8 + 1694810x^9 - 310132x^{10} - 5443990x^{11} + 538711x^{12} + 9882395x^{13} +$$

$$197366x^{14} - 10127513x^{15} - 1486842x^{16} + 5648377x^{17} + 1517144x^{18} - 1533577x^{19} - 597207x^{20} + 147951x^{21} +$$

$$84616x^{22} - 1225x^{23} - 4389x^{24} - 336x^{25} + 63x^{26} + 7x^{27}))$$

$$\mathcal{F}_{7,3}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{7,4}^{TG}(x) =$$

$$30x + 1136x^2 + 11664x^3 + 365766x^4 + 5281838x^5 + 127985958x^6 + 2214495516x^7 +$$

$$47553306474x^8 + 889459669478x^9 + 18163991799382x^{10} + 350778866259390x^{11} +$$

$$7018826147346050x^{12} + 137311199904697394x^{13} + 2724978632865004126x^{14} +$$

$$53588649260529868984x^{15} + 1059958419863026829840x^{16} + 20888792565117299348136x^{17} +$$

$$412618173146784864901112x^{18} + 8138450397877849657730138x^{19} + 160672850996776147614394756x^{20} +$$

$$3170184866337306023656675304x^{21} + 62573569893828338148584827972x^{22} +$$

$$1234789651977316214729121486960x^{23} + 24370321173568753474896143092952x^{24} +$$

$$480936208782384939197706128173860x^{25} + \dots$$

$$\mathcal{F}_{7,3}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{7,4}^{TG}(x) =$$

$$2x(-15 - 99x + 515x^2 + 19678x^3 + 5209x^4 - 643315x^5 - 679399x^6 + 8497104x^7 + 5597117x^8 - 72162939x^9 +$$

$$81359410x^{10} + 372723641x^{11} - 1374105581x^{12} - 605370011x^{13} + 7017383133x^{14} - 1228664409x^{15} -$$

$$18147310002x^{16} + 6393165275x^{17} + 26715714916x^{18} - 11222971387x^{19} - 22578171631x^{20} + 10522127180x^{21} +$$

$$10866240778x^{22} - 5344380437x^{23} - 3041644711x^{24} + 1293688512x^{25} + 511424493x^{26} - 110852572x^{27} -$$

$$31933238x^{28} + 1560783x^{29} - 1355067x^{30} - 368263x^{31} + 50617x^{32} + 12670x^{33} + 385x^{34}) /$$

$$((-1 + 27x - 131x^2 - 319x^3 + 1511x^4 - 598x^5 - 1473x^6 + 740x^7 + 55x^8)(1 + 13x - 72x^2 - 1030x^3 + 1281x^4 +$$

$$25514x^5 - 10606x^6 - 289247x^7 + 70298x^8 + 1694810x^9 - 310132x^{10} - 5443990x^{11} + 538711x^{12} + 9882395x^{13} +$$

$$197366x^{14} - 10127513x^{15} - 1486842x^{16} + 5648377x^{17} + 1517144x^{18} - 1533577x^{19} - 597207x^{20} + 147951x^{21} +$$

$$84616x^{22} - 1225x^{23} - 4389x^{24} - 336x^{25} + 63x^{26} + 7x^{27}))$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{7,3}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{7,4}^{TG}(x) = \\
&30x + 618x^2 + 16382x^3 + 282368x^4 + 6242980x^5 + 114844424x^6 + 2375085764x^7 + \\
&45491597510x^8 + 915087730818x^9 + 17840615564606x^{10} + 354820611593730x^{11} + \\
&6968077366210606x^{12} + 137946609575486742x^{13} + 2717011641917464824x^{14} + \\
&53688457838042204844x^{15} + 1058707502097050507466x^{16} + 20904466559904256508804x^{17} + \\
&412421752194947373969974x^{18} + 8140911688520111488953128x^{19} + 160642008082884457694695846x^{20} + \\
&3170571356074785654054128186x^{21} + 62568726767188747969016427850x^{22} + \\
&1234850341076421412471622715496x^{23} + 24369560677167046111278862657074x^{24} + \\
&480945738559287010379566254808738x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{7,0}^{KB}(x) &= \mathcal{F}_{7,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,4}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,5}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,6}^{KB}(x) = \\
&\frac{2x(-27 + 262x + 957x^2 - 6044x^3 + 2990x^4 + 8838x^5 - 5180x^6 - 440x^7)}{-1 + 27x - 131x^2 - 319x^3 + 1511x^4 - 598x^5 - 1473x^6 + 740x^7 + 55x^8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{7,0}^{KB}(x) &= \mathcal{F}_{7,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,4}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,5}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{7,6}^{KB}(x) = \\
&54x + 934x^2 + 16230x^3 + 310718x^4 + 6040924x^5 + 118584826x^6 + 2335206032x^7 + \\
&46047350318x^8 + 908456723040x^9 + 17926321479704x^{10} + 353762659613648x^{11} + \\
&6981456906125426x^{12} + 137779721623533238x^{13} + 2719108662179278428x^{14} + \\
&53662217078257540780x^{15} + 1059036595803307294350x^{16} + 20900344457391068849264x^{17} + \\
&412473419050676537420584x^{18} + 8140264335619150746929476x^{19} + 160650120668531433288830648x^{20} + \\
&3170469701270440091385512318x^{21} + 62570000632547804065968070596x^{22} + \\
&1234834378456746859506879340754x^{23} + 24369760706176232820477934929698x^{24} + \\
&480943232004084226889532274151474x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,0}^{TG}(x) = & 2x(1 + 1155x - 12424x^2 - 384908x^3 + 3652149x^4 + 39134559x^5 - 397978970x^6 - 1325446682x^7 + \\
& 19166357954x^8 - 4538659130x^9 - 385677721008x^{10} + 853933290216x^{11} + 2271727081046x^{12} - \\
& 8951163335278x^{13} - 1303075634316x^{14} + 32748415590308x^{15} - 16992774066247x^{16} - 56226830515941x^{17} + \\
& 42301303866136x^{18} + 53709870617604x^{19} - 40205849888523x^{20} - 32521295586161x^{21} + 17363173153318x^{22} + \\
& 12143542140342x^{23} - 2895586231932x^{24} - 2156940376804x^{25} + 138822154976x^{26} + 146741481824x^{27} - \\
& 1366377600x^{28} - 3443059968x^{29} - 38983680x^{30} + 16671744x^{31}) / \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+3x)(-1+9x)(1+9x)(1+6x+x^2)(1+10x+9x^2+2x^3)(1-8x+20x^2-16x^3+x^4)(1- \\
& 10x+29x^2-26x^3+4x^4)(1-45x+415x^2-1171x^3+1264x^4-512x^5+64x^6)(1+28x+234x^2+776x^3+1213x^4+ \\
& 964x^5+390x^6+72x^7+4x^8)) \\
& -16x^2(210 - 167438x^2 + 40334531x^4 - 4621804256x^6 + 300002141022x^8 - 12034896543418x^{10} + \\
& 313705813053022x^{12} - 5495025669054056x^{14} + 66442956971597534x^{16} - 567362486710974600x^{18} + \\
& 3486823149562258817x^{20} - 15656403239930721918x^{22} + 51952386721895018640x^{24} - \\
& 128453782496846285630x^{26} + 237955842490205821743x^{28} - 331260008529177488392x^{30} + \\
& 346819322354225766064x^{32} - 272717367155082963572x^{34} + 160497980150868303944x^{36} - \\
& 70270735446821798072x^{38} + 22683671153127961776x^{40} - 5329748411900492656x^{42} + \\
& 895330914574433520x^{44} - 104854721754153696x^{46} + 8245570080796608x^{48} - 409892218061056x^{50} + \\
& 11569362093056x^{52} - 148430451200x^{54} + 472817664x^{56}) / \\
& ((-1+2x)(1+2x)(-1-2x+2x^2)(-1+2x+2x^2)(-1+6x-5x^2+x^3)(1+6x+5x^2+x^3)(-1+8x-6x^2-4x^3+ \\
& 2x^4)(-1-8x-6x^2+4x^3+2x^4)(1-38x+265x^2-509x^3+264x^4)(1+38x+265x^2+509x^3+264x^4)(-1+12x- \\
& 37x^2+41x^3-16x^4+2x^5)(1+12x+37x^2+41x^3+16x^4+2x^5)(1-28x+276x^2-1310x^3+3381x^4-4998x^5+ \\
& 4269x^6-2044x^7+508x^8-56x^9+2x^{10})(1+28x+276x^2+1310x^3+3381x^4+4998x^5+4269x^6+2044x^7+508x^8+ \\
& 56x^9+2x^{10})) \\
& -8x^2(147 - 33512x^2 + 1954689x^4 - 48736404x^6 + 618388328x^8 - 4267898812x^{10} + 16333809700x^{12} - \\
& 35136967144x^{14} + 44267544512x^{16} - 34076687840x^{18} + 16407177664x^{20} - 4932389632x^{22} + 893827072x^{24} - \\
& 88756224x^{26} + 3686400x^{28}) / \\
& ((-1+2x)(1+2x)(-1+3x)(1+3x)(1-5x+2x^2)(1-4x+2x^2)(-1-2x+2x^2)(-1+2x+2x^2)(1+4x+2x^2)(1+ \\
& 5x+2x^2)(-1+21x-26x^2+8x^3)(1+21x+26x^2+8x^3)(-1+8x-6x^2-4x^3+2x^4)(-1-8x-6x^2+4x^3+2x^4)) \\
& + \frac{16x^2(11-81x^2)}{1-82x^2+81x^4} + \frac{8x^2}{1-4x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,0}^{TG}(x) = & 2x + 7074x^2 + 28322x^3 + 3500970x^4 + 40904442x^5 + 2995602834x^6 + 48506694658x^7 + 2901094068042x^8 + \\
& 55552654729898x^9 + 2938658810744994x^{10} + 63145273515340370x^{11} + 3049469798814523722x^{12} + \\
& 71652138555461676474x^{13} + 3218226920211928101138x^{14} + 81272482607385417610722x^{15} + \\
& 3441994018739506356665514x^{16} + 92175870041745601933702730x^{17} + 3722302328182703609943479250x^{18} + \\
& 104539748840959783379179264498x^{19} + 4062808105933711353421113028170x^{20} + \\
& 118561430934917292221051125848154x^{21} + 4468567183903910361175202236507650x^{22} + \\
& 134463648376982602891252560891661954x^{23} + 4945840131592037075156768922329963514x^{24} + \\
& 152498730067609316115438024585263736042x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,1}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{8,7}^{TG}(x) = \\
&-2x(35 - 352x - 8820x^2 + 31894x^3 + 678486x^4 + 16722x^5 - 28665874x^6 + 11376898x^7 + 580383868x^8 - \\
&1422165502x^9 - 1155510466x^{10} + 6534180246x^{11} - 970156690x^{12} - 13680938914x^{13} + 8245651762x^{14} + \\
&8896179374x^{15} - 5387736095x^{16} - 3166721746x^{17} + 1081209174x^{18} + 605907460x^{19} - 34699780x^{20} - \\
&32512224x^{21} - 1247616x^{22} + 155520x^{23}) / \\
&((-1+x)(-1+3x)(-1+9x)(1+9x)(1+6x+x^2)(1-8x+20x^2-16x^3+x^4)(1-45x+415x^2-1171x^3+1264x^4- \\
&512x^5+64x^6)(1+28x+234x^2+776x^3+1213x^4+964x^5+390x^6+72x^7+4x^8))- \\
&16x(7 - 4835x^2 + 777672x^4 - 53700277x^6 + 1973210074x^8 - 42111638648x^{10} + 530559598533x^{12} - \\
&3824608351502x^{14} + 16263660067215x^{16} - 41026773171432x^{18} + 58406879392463x^{20} - 36858830222949x^{22} - \\
&11435596336624x^{24} + 36679846968046x^{26} - 26764580426334x^{28} + 9779554720360x^{30} - 1896056631852x^{32} + \\
&175950474200x^{34} - 4784086536x^{36} - 166360080x^{38} + 2917200x^{40}) / \\
&((-1+6x-5x^2+x^3)(1+6x+5x^2+x^3)(-1+8x-6x^2-4x^3+2x^4)(-1-8x-6x^2+4x^3+2x^4)(1-38x+265x^2- \\
&509x^3+264x^4)(1+38x+265x^2+509x^3+264x^4)(1-28x+276x^2-1310x^3+3381x^4-4998x^5+4269x^6-2044x^7+ \\
&508x^8-56x^9+2x^{10})(1+28x+276x^2+1310x^3+3381x^4+4998x^5+4269x^6+2044x^7+508x^8+56x^9+2x^{10}))- \\
&8x(7-1243x^2+30344x^4-527732x^6+4970334x^8-18158020x^{10}+26844948x^{12}-18432776x^{14}+6174656x^{16}- \\
&948800x^{18}+49920x^{20}) / ((-1+2x)(1+2x)(-1+3x)(1+3x)(1-4x+2x^2)(1+4x+2x^2)(-1+21x-26x^2+ \\
&8x^3)(1+21x+26x^2+8x^3)(-1+8x-6x^2-4x^3+2x^4)(-1-8x-6x^2+4x^3+2x^4))+ \\
&\frac{16x(1+9x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+9x)(1+9x)} + \frac{4x}{1-4x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,1}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{8,7}^{TG}(x) = \\
&258x + 906x^2 + 122970x^3 + 1193458x^4 + 98122050x^5 + 1432602986x^6 + 92170349130x^7 + \\
&1647401456738x^8 + 91916712721410x^9 + 1874451697845274x^{10} + 94419822463975098x^{11} + \\
&2127485426337270546x^{12} + 98878616824501947666x^{13} + 2413267137345084941770x^{14} + \\
&105087917204613414240762x^{15} + 2737063321207611201239234x^{16} + 113047671005824033157621058x^{17} + \\
&3104204990401867912554208122x^{18} + 122846314863361522066752950730x^{19} + \\
&3520567590733086151373754801522x^{20} + 134623435267957989067437505160946x^{21} + \\
&3992769309773621586556190357722666x^{22} + 148558323044818455419976063830003610x^{23} + \\
&4528303974210709640776752177341476642x^{24} + 164867809702181958255884858725382062098x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,2}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{8,6}^{TG}(x) = \\
&2x(-21 + 301x + 2142x^2 - 31558x^3 - 85695x^4 + 1226087x^5 + 2599204x^6 - 46907676x^7 + 143510797x^8 - \\
&97239221x^9 - 304897698x^{10} + 687865258x^{11} - 544697417x^{12} + 142538593x^{13} + 62742304x^{14} - 63141192x^{15} + \\
&18193424x^{16} - 2640960x^{17} + 62208x^{19}) / \\
&((-1+x)(1+x)(-1+3x)(-1+9x)(1+9x)(1+6x+x^2)(1+10x+9x^2+2x^3)(1-10x+29x^2-26x^3+4x^4)(1- \\
&45x+415x^2-1171x^3+1264x^4-512x^5+64x^6))+ \\
&16x^2(-100+6734x^2-290409x^4+7598896x^6-87806785x^8+600533949x^{10}-2497352040x^{12}+ \\
&5307004114x^{14}-3877527102x^{16}-1464694334x^{18}+3686927028x^{20}-2013217248x^{22}+477885104x^{24}- \\
&47721632x^{26}+1672704x^{28}) / \\
&((-1+2x)(1+2x)(-1-2x+2x^2)(-1+2x+2x^2)(-1+6x-5x^2+x^3)(1+6x+5x^2+x^3)(1-38x+265x^2- \\
&509x^3+264x^4)(1+38x+265x^2+509x^3+264x^4)(-1+12x-37x^2+41x^3-16x^4+2x^5)(1+12x+37x^2+41x^3+ \\
&16x^4+2x^5))+ \\
&16x^2(-43-187x^2+19686x^4-194658x^6+631266x^8-844368x^{10}+513280x^{12}-137984x^{14}+13824x^{16}) / \\
&((-1+2x)(1+2x)(-1+3x)(1+3x)(1-5x+2x^2)(-1-2x+2x^2)(-1+2x+2x^2)(1+5x+2x^2)(-1+21x- \\
&26x^2+8x^3)(1+21x+26x^2+8x^3))+ \\
&\frac{160x^2}{(-1+x)(1+x)(-1+9x)(1+9x)} - \frac{8x^2}{(-1+2x)(1+2x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{8,2}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{8,6}^{TG}(x) = \\ &42x + 3618x^2 + 39522x^3 + 3128370x^4 + 43440602x^5 + 2927798394x^6 + 49136765762x^7 + 2886264949986x^8 + \\ &55716321149994x^9 + 2935165787515578x^{10} + 63188436935121298x^{11} + 3048615263959972914x^{12} + \\ &71663576269352269946x^{13} + 3218012820930136965210x^{14} + 81275517882661740507362x^{15} + \\ &3441939475524946178698050x^{16} + 92176675886656076462974410x^{17} + 3722288264942729324525277738x^{18} + \\ &104539962816630877105039922482x^{19} + 4062804448343867896109857271730x^{20} + \\ &118561487754176728036632187133978x^{21} + 4468566226712191347899136905075514x^{22} + \\ &134463663465005452261663283406005890x^{23} + 4945839879990147997782340020550314978x^{24} + \\ &152498734074161580730944989626029361002x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{8,3}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{8,5}^{TG}(x) = \\ &-2x(15 + 412x - 9492x^2 - 55978x^3 + 870046x^4 + 2529242x^5 - 27049786x^6 - 38174246x^7 + 436907996x^8 - \\ &66374206x^9 - 3321440314x^{10} + 5209671710x^{11} + 2740680742x^{12} - 9419375018x^{13} + 41160282x^{14} + \\ &8248514518x^{15} - 2000260459x^{16} - 3066704782x^{17} + 914663662x^{18} + 528379964x^{19} - 82926724x^{20} - \\ &26623200x^{21} + 867456x^{22} + 155520x^{23}) / \\ &((-1+x)(-1+3x)(-1+9x)(1+9x)(1+6x+x^2)(1-8x+20x^2-16x^3+x^4)(1-45x+415x^2-1171x^3+1264x^4- \\ &512x^5+64x^6)(1+28x+234x^2+776x^3+1213x^4+964x^5+390x^6+72x^7+4x^8))+ \\ &16x(-1 - 1558x^2 + 290772x^4 - 18543808x^6 + 568017419x^8 - 8628095973x^{10} + 42904133425x^{12} + \\ &366587839840x^{14} - 4324466854832x^{16} + 17596586188137x^{18} - 39661828333732x^{20} + 56167093516791x^{22} - \\ &51844948050210x^{24} + 30943111617414x^{26} - 11455460450038x^{28} + 2304439605736x^{30} - 110372301292x^{32} - \\ &46175831064x^{34} + 8206127304x^{36} - 413798736x^{38} + 3773616x^{40}) / \\ &((-1+6x-5x^2+x^3)(1+6x+5x^2+x^3)(-1+8x-6x^2-4x^3+2x^4)(-1-8x-6x^2+4x^3+2x^4)(1-38x+265x^2- \\ &509x^3+264x^4)(1+38x+265x^2+509x^3+264x^4)(1-28x+276x^2-1310x^3+3381x^4-4998x^5+4269x^6-2044x^7+ \\ &508x^8-56x^9+2x^{10})(1+28x+276x^2+1310x^3+3381x^4+4998x^5+4269x^6+2044x^7+508x^8+56x^9+2x^{10}))- \\ &8x(3+397x^2-5048x^4+41044x^6-390886x^8+2407564x^{10}-3292980x^{12}+1718856x^{14}-239168x^{16}-57664x^{18}+ \\ &13056x^{20}) / \\ &((-1+2x)(1+2x)(-1+3x)(1+3x)(1-4x+2x^2)(1+4x+2x^2)(-1+21x-26x^2+8x^3)(1+21x+26x^2+ \\ &8x^3)(-1+8x-6x^2-4x^3+2x^4)(-1-8x-6x^2+4x^3+2x^4))+ \\ &\frac{16x(1+9x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+9x)(1+9x)} + \frac{4x}{1-4x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{8,3}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{8,5}^{TG}(x) = \\ &90x + 1514x^2 + 94362x^3 + 1387122x^4 + 92162898x^5 + 1485327978x^6 + 90828455850x^7 + \\ &1661455264354x^8 + 91600780892322x^9 + 1878185846862106x^{10} + 94343121781431066x^{11} + \\ &2128477108273623058x^{12} + 98859556057492818690x^{13} + 2413530478272486804170x^{14} + \\ &105083094553825097045610x^{15} + 2737133250428499047824578x^{16} + 113046434109082928272163778x^{17} + \\ &3104223559811864961759678074x^{18} + 122845994423835057869228842458x^{19} + \\ &3520572521759994096242175873138x^{20} + 134623351644902885173940369410098x^{21} + \\ &3992770619186522756263173185080106x^{22} + 148558301108128862764536464874694458x^{23} + \\ &4528304321919647817704326349628896546x^{24} + 164867803926291157295966137332587684850x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,4}^{TG}(x) = & 2x(41 - 413x - 15840x^2 + 50300x^3 + 2359725x^4 - 4375985x^5 - 165478450x^6 + 443450094x^7 + 5192096930x^8 - \\
& 21582548570x^9 - 53441593856x^{10} + 399917164216x^{11} - 319969463706x^{12} - 1690918438062x^{13} + \\
& 2931087071332x^{14} + 2518195738036x^{15} - 7381107127935x^{16} - 1396275636325x^{17} + 9358426269312x^{18} - \\
& 5633688660x^{19} - 6653330191507x^{20} - 1343499553x^{21} + 2667240608782x^{22} + 222728854430x^{23} - \\
& 542256944460x^{24} - 96086497060x^{25} + 43324394784x^{26} + 10305897696x^{27} - 1079294080x^{28} - 305921280x^{29} + \\
& 165888x^{30} + 746496x^{31}) / \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+3x)(-1+9x)(1+9x)(1+6x+x^2)(1+10x+9x^2+2x^3)(1-8x+20x^2-16x^3+x^4)(1- \\
& 10x+29x^2-26x^3+4x^4)(1-45x+415x^2-1171x^3+1264x^4-512x^5+64x^6)(1+28x+234x^2+776x^3+1213x^4+ \\
& 964x^5+390x^6+72x^7+4x^8))+ \\
& 32x^2(-34+288x^2+951531x^4-127953686x^6+7707175326x^8-251997212110x^{10}+4572837437749x^{12}- \\
& 40496311634298x^{14}+8552238075793x^{16}+3581342748552186x^{18}-39624588209529114x^{20}+ \\
& 231144282506449358x^{22}-858372624857577962x^{24}+2163429734007596828x^{26}-3814083013353228292x^{28}+ \\
& 4773225202601871392x^{30}-4256752027902923568x^{32}+2684197421453858678x^{34}- \\
& 1166840204758900552x^{36}+328560423973435556x^{38}-49409819933986792x^{40}-437884684114088x^{42}+ \\
& 1751272126622784x^{44}-350647188754800x^{46}+35628237884640x^{48}-2185939682944x^{50}+87861671296x^{52}- \\
& 2103543040x^{54}+13381632x^{56}) / \\
& ((-1+2x)(1+2x)(-1-2x+2x^2)(-1+2x+2x^2)(-1+6x-5x^2+x^3)(1+6x+5x^2+x^3)(-1+8x-6x^2-4x^3+ \\
& 2x^4)(-1-8x-6x^2+4x^3+2x^4)(1-38x+265x^2-509x^3+264x^4)(1+38x+265x^2+509x^3+264x^4)(-1+12x- \\
& 37x^2+41x^3-16x^4+2x^5)(1+12x+37x^2+41x^3+16x^4+2x^5)(1-28x+276x^2-1310x^3+3381x^4-4998x^5+ \\
& 4269x^6-2044x^7+508x^8-56x^9+2x^{10})(1+28x+276x^2+1310x^3+3381x^4+4998x^5+4269x^6+2044x^7+508x^8+ \\
& 56x^9+2x^{10})) - \\
& 8x^2(83-4480x^2+221313x^4-6117684x^6+87506312x^8-649648852x^{10}+2459686052x^{12}-4746232984x^{14}+ \\
& 5239933088x^{16}-3510660768x^{18}+1460030784x^{20}-375567616x^{22}+57466880x^{24}-4681728x^{26}+147456x^{28}) / \\
& ((-1+2x)(1+2x)(-1+3x)(1+3x)(1-5x+2x^2)(1-4x+2x^2)(-1-2x+2x^2)(-1+2x+2x^2)(1+4x+2x^2)(1+ \\
& 5x+2x^2)(-1+21x-26x^2+8x^3)(1+21x+26x^2+8x^3)(-1+8x-6x^2-4x^3+2x^4)(-1-8x-6x^2+4x^3+2x^4))+ \\
& \frac{160x^2}{8x^2} \\
& \frac{(-1+x)(1+x)(-1+9x)(1+9x)}{(-1+2x)(1+2x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,4}^{TG}(x) = & 82x + 2898x^2 + 46498x^3 + 2891562x^4 + 45545722x^5 + 2868866562x^6 + 49729274306x^7 + 2872061882730x^8 + \\
& 55876850613994x^9 + 2931718484241138x^{10} + 63231342283558674x^{11} + 3047764139803694010x^{12} + \\
& 71674992873372235130x^{13} + 3217798980157715938530x^{14} + 81278551435034414932258x^{15} + \\
& 3441884952158681678200266x^{16} + 92177481591073602079199370x^{17} + 3722274203243322471377657394x^{18} + \\
& 104540176780849548385092275378x^{19} + 4062800790874696129687192838202x^{20} + \\
& 118561544572502736215457104022554x^{21} + 4468565269529996976224046889468770x^{22} + \\
& 134463678552952226901453862332146114x^{23} + 4945839628389015474829403515287198570x^{24} + \\
& 152498738080707645357839362774243546922x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,0}^{KB}(x) &= \mathcal{F}_{8,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{8,4}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{8,6}^{KB}(x) = \\
&2x(-19 + 44x + 6760x^2 - 32292x^3 - 265118x^4 + 1305548x^5 - 1068528x^6 - 1614876x^7 + 2507865x^8 - 798040x^9 - \\
&64800x^{10} + 33696x^{11}) / \\
&((-1+x)(1+x)(-1+9x)(1+9x)(1+6x+x^2)(1-45x+415x^2-1171x^3+1264x^4-512x^5+64x^6)) + \\
&8x(-8 + 1005x^2 - 27576x^4 + 346147x^6 - 267177x^8 - 156480x^{10} + 53526x^{12}) / \\
&((-1+6x-5x^2+x^3)(1+6x+5x^2+x^3)(1-38x+265x^2-509x^3+264x^4)(1+38x+265x^2+509x^3+264x^4)) - \\
&\quad 8x(5-103x^2+2436x^4-5868x^6+1968x^8) \\
&\frac{(-1+2x)(1+2x)(-1+3x)(1+3x)(-1+21x-26x^2+8x^3)(1+21x+26x^2+8x^3)}{16x(1+9x^2)} + \\
&\frac{4x}{(-1+x)(1+x)(-1+9x)(1+9x)} + \frac{4x}{1-4x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,0}^{KB}(x) &= \mathcal{F}_{8,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{8,4}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{8,6}^{KB}(x) = \\
&162x + 1394x^2 + 107262x^3 + 1303578x^4 + 95024862x^5 + 1460029826x^6 + 91489840926x^7 + \\
&1654514467114x^8 + 91757972005254x^9 + 1876325746040594x^{10} + 94381409360938158x^{11} + \\
&2127981832165582650x^{12} + 98869081357268915166x^{13} + 2413398853562380348834x^{14} + \\
&105085505467437020151702x^{15} + 2737098289524095588329034x^{16} + 113047052524099117573839606x^{17} + \\
&3104214275407055708525782322x^{18} + 122846154640896586534969435350x^{19} + \\
&3520570056270855454733052763738x^{20} + 134623393456211599142446833273510x^{21} + \\
&3992769964482041713214111755986370x^{22} + 148558312076455933216017147636514830x^{23} + \\
&4528304148065338262126693573363986282x^{24} + 164867806814235121979950116018384551862x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,1}^{KB}(x) &= \mathcal{F}_{8,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{8,5}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{8,7}^{KB}(x) = \\
&-2x(-27 + 438x + 2322x^2 - 27866x^3 - 122068x^4 + 704506x^5 - 392098x^6 - 1315518x^7 + 1666463x^8 - 501048x^9 - \\
&48672x^{10} + 23328x^{11}) / \\
&((-1+x)(1+x)(-1+9x)(1+9x)(1+6x+x^2)(1-45x+415x^2-1171x^3+1264x^4-512x^5+64x^6)) - \\
&4x^2(470 - 55846x^2 + 1447257x^4 - 7171386x^6 + 8483145x^8 - 3075627x^{10} + 243936x^{12}) / \\
&((-1+6x-5x^2+x^3)(1+6x+5x^2+x^3)(1-38x+265x^2-509x^3+264x^4)(1+38x+265x^2+509x^3+264x^4)) - \\
&\quad 4x^2(201 - 5433x^2 + 27732x^4 - 26144x^6 + 5760x^8) \\
&\frac{(-1+2x)(1+2x)(-1+3x)(1+3x)(-1+21x-26x^2+8x^3)(1+21x+26x^2+8x^3)}{4x^2(-41+81x^2)} - \\
&\frac{8x^2}{(-1+x)(1+x)(-1+9x)(1+9x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{8,1}^{KB}(x) &= \mathcal{F}_{8,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{8,5}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{8,7}^{KB}(x) = \\
&54x + 4086x^2 + 39870x^3 + 3148902x^4 + 43450454x^5 + 2928951690x^6 + 49136936686x^7 + 2886335354070x^8 + \\
&55716311712582x^9 + 2935170243809226x^{10} + 63188435179050334x^{11} + 3048615551774372274x^{12} + \\
&71663576075613080886x^{13} + 3218012839803884885586x^{14} + 81275517863718063880910x^{15} + \\
&3441939476780979633744054x^{16} + 92176675884887202375765542x^{17} + 3722288265027681911221986654x^{18} + \\
&104539962816469474926609307454x^{19} + 4062804448349720487906909287442x^{20} + \\
&118561487754162209105685255046678x^{21} + 4468566226712602966494950715892446x^{22} + \\
&134463663465004159455247364224789166x^{23} + 4945839879990177603501558809666430594x^{24} + \\
&152498734074161466529767223663491822854x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{9,0}^{TG}(x) = & -(2x(-1 - 9800x + 359083x^2 + 16427291x^3 - 610797257x^4 - 10367246765x^5 + 419467480970x^6 + \\
& 3271713224707x^7 - 159387915091771x^8 - 532793040194260x^9 + 38298388185121443x^{10} + \\
& 27528294151330576x^{11} - 6270569447266278576x^{12} + 6330866652133000181x^{13} + \\
& 734139949111726104650x^{14} - 1646671463137717739484x^{15} - 63589707904290138859679x^{16} + \\
& 202605153305015367613358x^{17} + 4180235346070316976909123x^{18} - 16549316774066151856124921x^{19} - \\
& 212717703591028771713946565x^{20} + 987196592557237768194072372x^{21} + 8510343085758647848438794430x^{22} - \\
& 45039456040594841954111521297x^{23} - 270951310971092477590360357988x^{24} + \\
& 1616949814715881221037930917164x^{25} + 6926989952773808495556682950829x^{26} - \\
& 46595391796390347805018716401847x^{27} - 143029807464313492758527896722438x^{28} + \\
& 1094016814924062628435464659431235x^{29} + 2389956227807518140976599231134577x^{30} - \\
& 21176292404353007582432350317178603x^{31} - 32200987369979466783264528354915163x^{32} + \\
& 341166273603656291654746808444027176x^{33} + 345092568242648114282783041476327934x^{34} - \\
& 4611138156199533636619770727592623594x^{35} - 2834587753227632927274941414952428056x^{36} + \\
& 52634633889435772825983348626968761355x^{37} + 15890857035822729086776887751918914308x^{38} - \\
& 510306487717336142003564865151071822647x^{39} - 27324678365155749893067330382835184065x^{40} + \\
& 4223052141706574917364770209959800039278x^{41} - 608712206598178809588916714383700113406x^{42} - \\
& 29958887771534993168817018210559085822548x^{43} + 9020739953725239922620163083622478673412x^{44} + \\
& 182881624736372061109142884993629891705916x^{45} - \\
& -77669314780852491882422759538440392914863x^{46} - \\
& -963840298509073190956930797415637277181057x^{47} + \\
& +501657036824161407289050322441222062233670x^{48} + \\
& +4398455890744031925855351032495505883371193x^{49} - \\
& -2607235304757243219612258403963369571058152x^{50} - \\
& -17424503752343213730439006353333425448579947x^{51} + \\
& +11239123592612211062639562778159999105104346x^{52} + \\
& +60052504197509240391983675422140158245281774x^{53} - \\
& -40844642854390528671749230032414150257885968x^{54} - \\
& -180384953234555852463785364855361724601213457x^{55} + \\
& +126393394998188618722631962173561519719053026x^{56} + \\
& +472932268656311302299305113288163321238735414x^{57} - \\
& -335278270632828284263245112930823019579179230x^{58} - \\
& -1083433544313444881365952188508642523005068109x^{59} + \\
& +766037676985480927415111468593924900501823951x^{60} + \\
& +2170366382682205296407762434906709643885957386x^{61} - \\
& -1512881154229893990745371071933083045523711759x^{62} - \\
& -3803359331926731601173575617393141913236909440x^{63} + \\
& +2589771602796994700487014678672589603582230100x^{64} + \\
& +5830995414946424862562121177906382036656511359x^{65} - \\
& -3850861209510910475036354303453450580817325600x^{66} - \\
& -7819291373856199242106778977212668791015616982x^{67} + \\
& +4982368410441227670377883403072114524318945194x^{68} + \\
& +9167053748855525034544934831120538350111880652x^{69} - \\
& -5616585607685453687222510622094190031802133025x^{70} - \\
& -9388704056669986782487498406887434105465753160x^{71} + \\
& +5521940417786212009445539719556946163576682827x^{72} + \\
& +8391947729795989236879659154142149485746478836x^{73} - \\
& -4737653624282941370684007595500260842382714340x^{74} - \\
& -6538251345452713068078942885960343048732835523x^{75} + \\
& +3548052958227782985668965268515165868501505596x^{76} + \\
& +4433557480976635259284838732269310542392490573x^{77} - \\
& -2318947371053232849711104818657538657334219389x^{78} - \\
& -2611971844711786550309516743150809566433200994x^{79} + \\
& +1321846614354603660037651659426951751024353803x^{80} + \\
& +1334191278993962390114122100232110558267411345x^{81} - \\
& -656380259392679891778248299080766897969529065x^{82} - \\
& -589485711127887576027631906259151530931057378x^{83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +283450691350787209149331063609782519240650072x^{84} \\
& +224677172180454596376482191289111161857532481x^{85} \\
& -106212550099712195733516319877763466435808558x^{86} \\
& -73644608565084126739027705044830155465216009x^{87} \\
& +34439023112344323340694497351998623823291655x^{88} \\
& +20687758554886147710876930337979324355430384x^{89} \\
& -9631385000502561585439191271206784624962829x^{90} \\
& -4961168852829536804935377327620615500073172x^{91} \\
& +2314629901504294868886192907618384653379998x^{92} \\
& +1011240586274196238351415160659890347313734x^{93} \\
& -476045699325188881713822005593441880566914x^{94} \\
& -174338436438015256755848229178002905245395x^{95} \\
& +83417351982555357787029253609794579110355x^{96} + \\
& 25280865375617832798040497534864896365038x^{97} - 12394586777360308482213056922298187716656x^{98} - \\
& 3064064857180539080760448553722127024241x^{99} + 1553704891388032396756223000182870623210x^{100} + \\
& 308105318378920920842921174948070662487x^{101} - 163424572550351656285793539371759738312x^{102} - \\
& 25475679190337193798690592444222485630x^{103} + 14340549440696628740066875031882933475x^{104} + \\
& 1712710735758596942785458635211725859x^{105} - 1043260137093016999512250554401757765x^{106} - \\
& 92199808860212864167223745220780428x^{107} + 62487654943816613503297369926930645x^{108} + \\
& 3883823249084069631509213997618429x^{109} - 3057526712398502455144785071787771x^{110} - \\
& 122933510722791389849648662115766x^{111} + 121103155670861695041765346646592x^{112} + \\
& 2665737825027239527869597836832x^{113} - 3840436635553736102851239030138x^{114} - \\
& 27214348799419765458187216077x^{115} + 96191119182392354333208577518x^{116} - \\
& 481454351622633105341159175x^{117} - 1870161222854269116288436671x^{118} + 27388193160562613049845106x^{119} + \\
& 27586882126692398139141438x^{120} - 611375980770868106877705x^{121} - 299295232121840994450954x^{122} + \\
& 8329083449137020167535x^{123} + 2284087833532022975181x^{124} - 72759349025611434882x^{125} - \\
& 11442895851123712422x^{126} + 393304622439348567x^{127} + 33291200297708901x^{128} - 1179649024779960x^{129} - \\
& 42085722577626x^{130} + 1479376641960x^{131})) / \\
& ((1+3x)(-1+2x+7x^2)(-1+81x-1792x^2+7289x^3+113338x^4-948939x^5+891997x^6+9118681x^7- \\
& 25652726x^8+9992771x^9+33620979x^{10}-29903008x^{11}-9941993x^{12}+14464685x^{13}-684910x^{14}- \\
& 1263348x^{15}+43295x^{16})(-1-27x-30x^2+3263x^3+10255x^4-128271x^5-422489x^6+2034868x^7+ \\
& 6331921x^8-14787664x^9-46140893x^{10}+49195065x^{11}+177327440x^{12}-56000703x^{13}-357184328x^{14}- \\
& 43503000x^{15}+357901011x^{16}+120196901x^{17}-183392047x^{18}-80222831x^{19}+48816126x^{20}+23044935x^{21}- \\
& 6865887x^{22}-3172062x^{23}+503757x^{24}+213075x^{25}-17955x^{26}-6750x^{27}+243x^{28}+81x^{29})(-1- \\
& 12x+1296x^2+6760x^3-558339x^4-1161243x^5+118840379x^6+34612254x^7-14636101794x^8+ \\
& 11650032630x^9+1139067517383x^{10}-1675685198967x^{11}-59425014210170x^{12}+112413543683178x^{13}+ \\
& 2171147767245072x^{14}-4673729741871850x^{15}-57423564754079904x^{16}+132752592370932042x^{17}+ \\
& 1127413588825996376x^{18}-2710891411914111867x^{19}-16748804440629896181x^{20}+ \\
& 41076234964519891361x^{21}+191073085446307327887x^{22}-471751936975189881282x^{23}- \\
& 1693441623773186077195x^{24}+4168981592750804837106x^{25}+11769841572576724100388x^{26}- \\
& 28667256121124059466103x^{27}-64650834761329667094285x^{28}+154709707930302466051638x^{29}+ \\
& 282472949704888959670555x^{30}-659784412595668698793188x^{31}-986747002345947660623415x^{32}+ \\
& 2235928540752665118157037x^{33}+2766102104157402845641392x^{34}-6048596568103168034002953x^{35}- \\
& 6235862859792016465952094x^{36}+13109354010298653133950159x^{37}+11311529009445116059397322x^{38}- \\
& 22829191668429273215380050x^{39}-16491985570921054148696568x^{40}+32012050759806836634743418x^{41}+ \\
& 19274557174365641463936649x^{42}-36194090036067799457234367x^{43}-17977866789394483635892473x^{44}+ \\
& 33010263268427485989896780x^{45}+13294805056149648548039391x^{46}-24269111871425405879756730x^{47}- \\
& 7719715827397162309377098x^{48}+14354944271362017116072472x^{49}+3467347525245472903206939x^{50}- \\
& 6808062303404022976704068x^{51}-1174671001995294266317512x^{52}+2576330363368357032796665x^{53}+ \\
& 285539149598812572013492x^{54}-772973767306693551468021x^{55}-43493796133268719517643x^{56}+ \\
& 182435806074644884579263x^{57}+1578291814221380714235x^{58}-33560515290021718006404x^{59}+ \\
& 1085611778689724348088x^{60}+4761258378023303618643x^{61}-319945226855087846232x^{62}- \\
& 514768561243945226721x^{63}+49664633878454946921x^{64}+41857441719264765459x^{65}- \\
& 5059221729603564351x^{66}-2523288763225221867x^{67}+356134240037245131x^{68}+111006922260938166x^{69}- \\
& 17560157208954669x^{70}-3498962768541387x^{71}+605417634344259x^{72}+77202421595082x^{73}- \\
& 14421262679676x^{74}-1155401508177x^{75}+232152034824x^{76}+11204841699x^{77}-2436730722x^{78}- \\
& 65443302x^{79}+15699744x^{80}+201609x^{81}-55404x^{82}-243x^{83}+81x^{84}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{9,1}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{9,8}^{TG}(x) = \\
&2x(256 - 9523x - 425476x^2 + 15516100x^3 + 267654407x^4 - 10137498520x^5 - \\
&86210435846x^6 + 3657020332670x^7 + 15599413664458x^8 - 836292224795891x^9 - \\
&1490639437226235x^{10} + 131094693618246140x^{11} + 20976358801026762x^{12} - \\
&14815609503165511484x^{13} + 14492478755925630436x^{14} + 1250575592131503419406x^{15} - \\
&2271988501858134682240x^{16} - 80970413199362959442624x^{17} + 198898988548906024176885x^{18} + \\
&4108844693427633645615839x^{19} - 12150496891363701675253969x^{20} - 166437784650071719589558637x^{21} + \\
&558739345231834539436075547x^{22} + 5468369973384975789385493599x^{23} - \\
&20134072158417162774086404948x^{24} - 147750598875752939567215299638x^{25} + \\
&583709057127073169103879791510x^{26} + 3320946768587065127907745387944x^{27} - \\
&13877311455886941191075848438065x^{28} - 62658295593998069225665025082929x^{29} + \\
&274487699834608070500714875287505x^{30} + 998867403404942479967869877460361x^{31} - \\
&4566428265605950238348696101620719x^{32} - 13510132251931951616965396477885966x^{33} + \\
&64410621533342852521655954176030862x^{34} + 155376601145314837770328687399012315x^{35} - \\
&774762131817861834853075851810609218x^{36} - 1520461003637141051553960597728704459x^{37} + \\
&7979306252735603247315458712928648651x^{38} + 12653914204973825498400623595573464153x^{39} - \\
&70564270344673990326372139554453504754x^{40} - 89439474182377408689229748336634539082x^{41} + \\
&536960482652747303931383391550264875643x^{42} + 535621450181306275017553446602923056181x^{43} - \\
&3521915369904598389768992931495198981586x^{44} - 2707520536475096285516014157639669063662x^{45} + \\
&19941622219504651944162038449558536789212x^{46} + 11480984932881191144649176349360767005150x^{47} - \\
&97618148897501308156163488447298504013429x^{48} - 40397739782677654984144072525505515248274x^{49} + \\
&413742533309376061550231726327049486928382x^{50} + \\
&115496607610595444066426688329271091874423x^{51} - \\
&1520533097062640973758522438455020518390002x^{52} - \\
&255809501294899644856083752911674901285635x^{53} + \\
&4852281970792844264066622510725183392942243x^{54} + \\
&378681801357985046954316453403664244570301x^{55} - \\
&13463621437560335371111673718445551950074503x^{56} - \\
&78718146032641225653212252196724609685067x^{57} + \\
&32521337726560030688531324592108575265981475x^{58} - \\
&1651817900389582126258771587697633383429601x^{59} - \\
&68456895074337938780038057564187225262617447x^{60} + \\
&6440670982751893282261277102199892124029666x^{61} + \\
&125682081401107225593375491985839763200040569x^{62} - \\
&15841100492120447680067399537769336637444593x^{63} - \\
&201375398182943627967965590076896887434807580x^{64} + \\
&29904901914589641363919869944683676054976748x^{65} + \\
&281698984295293927652899230541442671627458542x^{66} - \\
&4595896795425530225791441319459996067072438x^{67} - \\
&344093609485730064450467471751146711287987586x^{68} + \\
&59012854435261524887207805037030841974746836x^{69} + \\
&366982297737121921439062026766298726578617288x^{70} - \\
&64196281289772335491808082360583094148327719x^{71} - \\
&341629127493946825515270959139230647709145696x^{72} + \\
&59663405859467602954138972684198769698030151x^{73} + \\
&277440828487324889553426577489262846382276270x^{74} - \\
&47636462010951632528927910464520074934927354x^{75} - \\
&196406629311498817796232165055300113951824228x^{76} + \\
&32801026862515441374834240263055383321908676x^{77} + \\
&121080677017851731403575544976125066953471108x^{78} - \\
&19534356322584265992196134386337807177924585x^{79} - \\
&64920613619166573214746021493294384712149760x^{80} + \\
&10084157728533266563086982972641680100823915x^{81} + \\
&30228844205052614736407790438450170638135615x^{82} - \\
&4520335900319551526789576365649057982052473x^{83} - \\
&12201361576343292063684127121733914101032788x^{84} + \\
&1761858337107910678532883426113231012214205x^{85} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4260085359740534051688678789905890550774063x^{86} - \\
& 597587782849770481763897967486230851111151x^{87} - \\
& 1283407364111767833124140228695015719906450x^{88} + \\
& 176408971409475384767276189214102963646835x^{89} + \\
& 332636884549440503765301009973289437578163x^{90} - \\
& 45285347823218354185604151043163568598857x^{91} - \\
& 73915682432345613699249975400553006996844x^{92} + 10087448764957430552694919252562460165399x^{93} + \\
& 14024959035464121143031586576454174029923x^{94} - 1942663998428242508893071990051902697090x^{95} - \\
& 2261496459716668799978123661194784794757x^{96} + 321749955767205283765511886870682360263x^{97} + \\
& 308167910462815456767564735079985130867x^{98} - 45520900151234895464942959860657177702x^{99} - \\
& 35254283577574707707768022441668089992x^{100} + 5457692019799603423053969955717477800x^{101} + \\
& 3359491704405954218279641111223658603x^{102} - 549599214119596216665325469504489403x^{103} - \\
& 264169841958960468901923458682046944x^{104} + 46042435024809013901270009519688051x^{105} + \\
& 16941988825835758858950012199612656x^{106} - 3176315605841964497522380112175234x^{107} - \\
& 872711463468836289901577299082829x^{108} + 178486559593162069024680082022466x^{109} + \\
& 35327941631953592253811555024494x^{110} - 8071817641852705088270697144027x^{111} - \\
& 1084481308801276995119276027790x^{112} + 289698452417658032438373993051x^{113} + \\
& 23478102343958042392800657822x^{114} - 8110050663068985394153808811x^{115} - \\
& 285270912875643824296125819x^{116} + 173081504892834190211730111x^{117} - 105875483203807762527839x^{118} - \\
& 2724484919094654297427530x^{119} + 126321035614224190035696x^{120} + 29983974235231632304338x^{121} - \\
& 2751491806187380745094x^{122} - 207397402857267286743x^{123} + 33241924908973835892x^{124} + \\
& 637564544815655484x^{125} - 238291722911777220x^{126} + 1701602497586205x^{127} + 937355756130927x^{128} - \\
& 19311690472965x^{129} - 1538244814239x^{130} + 41756598765x^{131} / \\
& ((1+3x)(-1+2x+7x^2)(-1+81x-1792x^2+7289x^3+113338x^4-948939x^5+891997x^6+9118681x^7- \\
& 25652726x^8+9992771x^9+33620979x^{10}-29903008x^{11}-9941993x^{12}+14464685x^{13}-684910x^{14}- \\
& 1263348x^{15}+43295x^{16})(-1-27x-30x^2+3263x^3+10255x^4-128271x^5-422489x^6+2034868x^7+ \\
& 6331921x^8-14787664x^9-46140893x^{10}+49195065x^{11}+177327440x^{12}-56000703x^{13}-357184328x^{14}- \\
& 43503000x^{15}+357901011x^{16}+120196901x^{17}-183392047x^{18}-80222831x^{19}+48816126x^{20}+23044935x^{21}- \\
& 6865887x^{22}-3172062x^{23}+503757x^{24}+213075x^{25}-17955x^{26}-6750x^{27}+243x^{28}+81x^{29})(-1-12x+ \\
& 1296x^2+6760x^3-558339x^4-1161243x^5+118840379x^6+34612254x^7-14636101794x^8+11650032630x^9+ \\
& 1139067517383x^{10}-1675685198967x^{11}-59425014210170x^{12}+112413543683178x^{13}+2171147767245072x^{14}- \\
& 4673729741871850x^{15}-57423564754079904x^{16}+132752592370932042x^{17}+ \\
& 1127413588825996376x^{18}-2710891411914111867x^{19}-16748804440629896181x^{20}+ \\
& 41076234964519891361x^{21}+191073085446307327887x^{22}-471751936975189881282x^{23}- \\
& 1693441623773186077195x^{24}+4168981592750804837106x^{25}+11769841572576724100388x^{26}- \\
& 28667256121124059466103x^{27}-64650834761329667094285x^{28}+154709707930302466051638x^{29}+ \\
& 282472949704888959670555x^{30}-659784412595668698793188x^{31}-986747002345947660623415x^{32}+ \\
& 2235928540752665118157037x^{33}+2766102104157402845641392x^{34}-6048596568103168034002953x^{35}- \\
& 6235862859792016465952094x^{36}+13109354010298653133950159x^{37}+11311529009445116059397322x^{38}- \\
& 22829191668429273215380050x^{39}-16491985570921054148696568x^{40}+32012050759806836634743418x^{41}+ \\
& 19274557174365641463936649x^{42}-36194090036067799457234367x^{43}-17977866789394483635892473x^{44}+ \\
& 33010263268427485989896780x^{45}+13294805056149648548039391x^{46}-24269111871425405879756730x^{47}- \\
& 7719715827397162309377098x^{48}+14354944271362017116072472x^{49}+3467347525245472903206939x^{50}- \\
& 6808062303404022976704068x^{51}-1174671001995294266317512x^{52}+2576330363368357032796665x^{53}+ \\
& 285539149598812572013492x^{54}-772973767306693551468021x^{55}-43493796133268719517643x^{56}+ \\
& 182435806074644884579263x^{57}+1578291814221380714235x^{58}-33560515290021718006404x^{59}+ \\
& 1085611778689724348088x^{60}+4761258378023303618643x^{61}-319945226855087846232x^{62}- \\
& 514768561243945226721x^{63}+49664633878454946921x^{64}+41857441719264765459x^{65}- \\
& 5059221729603564351x^{66}-2523288763225221867x^{67}+356134240037245131x^{68}+111006922260938166x^{69}- \\
& 17560157208954669x^{70}-3498962768541387x^{71}+605417634344259x^{72}+77202421595082x^{73}- \\
& 14421262679676x^{74}-1155401508177x^{75}+232152034824x^{76}+11204841699x^{77}-2436730722x^{78}- \\
& 65443302x^{79}+15699744x^{80}+201609x^{81}-55404x^{82}-243x^{83}+81x^{84}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{9,2}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{9,7}^{TG}(x) = & \\
& 2x(31 + 2969x - 178588x^2 - 2861945x^3 + 180708818x^4 + 1149202778x^5 - 85242050741x^6 - \\
& 226448839081x^7 + 23776862205904x^8 + 16072225985047x^9 - 4394001689464458x^{10} + \\
& 2568720303994433x^{11} + 575000137331856909x^{12} - 853237425710411600x^{13} - \\
& 55549691402673241247x^{14} + 120611596025123106081x^{15} + 4074100239821587910807x^{16} - \\
& 11049124193058988617344x^{17} - 231651086214573892657119x^{18} + 726598274767858525180241x^{19} + \\
& 10395903439221716812362362x^{20} - 35967734629047318471860550x^{21} - 374350798195441830980115145x^{22} + \\
& 1380643975349217128077557322x^{23} + 10985931159010305843941081111x^{24} - \\
& 41994067450210537190323155770x^{25} - 266580571155366898580252852317x^{26} + \\
& 1029293042565437005412244801387x^{27} + 5419220993762883134681465449167x^{28} - \\
& 20602725029393270159979865339085x^{29} - 93342310884129617069853456607623x^{30} + \\
& 340293085937554201075292735099812x^{31} + 1375001344843856823537747969120517x^{32} - \\
& 4673427761373051677006233539478180x^{33} - 17450184944820208796486251746885217x^{34} + \\
& 53625526187963433125709389656052410x^{35} + 191876012293794229781371262223152326x^{36} - \\
& 515020882898039672642880265310157751x^{37} - 1835997549968244259104326149230918764x^{38} + \\
& 4131381529856504490320694517824108233x^{39} + 15342951757504366802207846643765090578x^{40} - \\
& 27467412642989500928377788927616463520x^{41} - 112320736311313274776222413505735921514x^{42} + \\
& 148618757470175356513982212112065730836x^{43} + 722210359114109441086262850089014049051x^{44} - \\
& 626589469496183000386335895341108188572x^{45} - 4087246640936655852811390409069436852703x^{46} + \\
& 1802437137004171445381319759301492053166x^{47} + 20388166887105599108452731988442338304844x^{48} - \\
& 1188949068275551169681319090444271394842x^{49} - 89698130295496733478577574805216574678801x^{50} - \\
& 24174504399367301570894868208072473932995x^{51} + 348009073220089551779303460480363214185878x^{52} + \\
& 186800970253536885265831483040823831777795x^{53} - \\
& 1189788117629036097745938209961142642831691x^{54} - \\
& 884127707018248102166280265658293890948689x^{55} + \\
& 3580219899751001334341190713219406938898021x^{56} + \\
& 3195595687319789114805357206158406236895958x^{57} - \\
& 9469305671408718050651968929713277672867389x^{58} - \\
& 9395397714499887620681608775578311379188775x^{59} + \\
& 21983759090035783503570240321665045767556290x^{60} + \\
& 23089315278846659080279604287497559865755600x^{61} - \\
& 44742511643770297574644269756120419423302276x^{62} - \\
& 48106348852914907447023580006937222975631102x^{63} + \\
& 79745763317487228620111402954831443544029593x^{64} + \\
& 85677698388628384560906639864787981703271280x^{65} - \\
& 124357567191443292400320089382851877312229309x^{66} - \\
& 131099193749904757818250922133349834981761585x^{67} + \\
& 169543046422270372358883325185383808128536414x^{68} + \\
& 172883413758867790300329745431481180456699697x^{69} - \\
& 201942715025410959758593606214741481886910238x^{70} - \\
& 196843406824013496415180594257640298932846526x^{71} + \\
& 209998245511058586707360052055251673236621132x^{72} + \\
& 193680684714428101983041090715963104679724793x^{73} - \\
& 190507458731589925952197130209633016629575864x^{74} - \\
& 164706716016946172149532697814714320132114042x^{75} + \\
& 150635545839667647748787809408843420378723324x^{76} + \\
& 121000747887454109608038914425883779639961156x^{77} - \\
& 103701471821795876139514970310930247576388473x^{78} - \\
& 76713468855734350770152122311586591686946320x^{79} + \\
& 62071739533568112371533902846993680373626263x^{80} + \\
& 41908302241796690551010168537091218135802169x^{81} - \\
& 32249914173187990695631054624846877179733594x^{82} - \\
& 19688235006606097730929640521620603050572728x^{83} + \\
& 14514765545875912407282353930805101026116733x^{84} + \\
& 7934646525596436849793390719925058738837479x^{85} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5645404037588077033182365290690555678299265x^{86} - \\
& 2735292101266018615595276168734759285846976x^{87} + \\
& 1892218375039972077225897076936898869102520x^{88} + \\
& 803860600136126273282934927210016301528801x^{89} - \\
& 544828281962994437234978795022461704880888x^{90} - \\
& 200632792292911936949649311442422338786875x^{91} + \\
& 134283422448481013810942977728286679847522x^{92} + \\
& 42344069526588886372533397904105415336039x^{93} - 28221107701768028425342801953152242413573x^{94} - \\
& 7520211315740421283592871876736129118640x^{95} + 5036068825144956148718836661767179757239x^{96} + \\
& 1117606598148513717714224303230901592090x^{97} - 759660364399428444911663555421550858341x^{98} - \\
& 138084924367825577886967157484745050195x^{99} + 96396944985542559606707193788825753772x^{100} + \\
& 14073920724117765760938596023458397860x^{101} - 10236922338603655147424133861099050511x^{102} - \\
& 1171781592505633915824572318862001593x^{103} + 904655996709262659832942892054536686x^{104} + \\
& 78661555161397042618740910274472546x^{105} - 66112359861020188909244086108822239x^{106} - \\
& 4177003654076905873494470430919143x^{107} + 3967113662233114619275635847395231x^{108} + \\
& 169958930157680923839847952357424x^{109} - 193844607140658668314657139048268x^{110} - \\
& 4965148689969141146255082849882x^{111} + 7636646334105522578743681101642x^{112} + \\
& 85361049460727497994792147991x^{113} - 239619583914771636922544009730x^{114} + \\
& 184378699519960949414845452x^{115} + 5897359565401568126967397629x^{116} - \\
& 61956659223934412321402379x^{117} - 111625272308018377588349754x^{118} + 2040430202641315227302757x^{119} + \\
& 1583391582962589495924198x^{120} - 38481714006779143468044x^{121} - 16249756963364137225638x^{122} + \\
& 467176331902195299924x^{123} + 114749582241566383659x^{124} - 3641175954753495570x^{125} - \\
& 516181843115882946x^{126} + 17172088744681188x^{127} + 1292513482761624x^{128} - 42964979521788x^{129} - \\
& 1323496592019x^{130} + 41756598765x^{131}) / \\
& ((1 + 3x)(-1 + 2x + 7x^2)(-1 + 81x - 1792x^2 + 7289x^3 + 113338x^4 - 948939x^5 + 891997x^6 + 9118681x^7 - \\
& 25652726x^8 + 9992771x^9 + 33620979x^{10} - 29903008x^{11} - 9941993x^{12} + 14464685x^{13} - 684910x^{14} - \\
& 1263348x^{15} + 43295x^{16})(-1 - 27x - 30x^2 + 3263x^3 + 10255x^4 - 128271x^5 - 422489x^6 + 2034868x^7 + \\
& 6331921x^8 - 14787664x^9 - 46140893x^{10} + 49195065x^{11} + 177327440x^{12} - 56000703x^{13} - 357184328x^{14} - \\
& 43503000x^{15} + 357901011x^{16} + 120196901x^{17} - 183392047x^{18} - 80222831x^{19} + 48816126x^{20} + 23044935x^{21} - \\
& 6865887x^{22} - 3172062x^{23} + 503757x^{24} + 213075x^{25} - 17955x^{26} - 6750x^{27} + 243x^{28} + 81x^{29})(-1 - \\
& 12x + 1296x^2 + 6760x^3 - 558339x^4 - 1161243x^5 + 118840379x^6 + 34612254x^7 - 14636101794x^8 + \\
& 11650032630x^9 + 1139067517383x^{10} - 1675685198967x^{11} - 59425014210170x^{12} + 112413543683178x^{13} + \\
& 2171147767245072x^{14} - 4673729741871850x^{15} - 57423564754079904x^{16} + 132752592370932042x^{17} + \\
& 1127413588825996376x^{18} - 271089141191411867x^{19} - 16748804440629896181x^{20} + \\
& 41076234964519891361x^{21} + 191073085446307327887x^{22} - 471751936975189881282x^{23} - \\
& 1693441623773186077195x^{24} + 4168981592750804837106x^{25} + 11769841572576724100388x^{26} - \\
& 28667256121124059466103x^{27} - 64650834761329667094285x^{28} + 154709707930302466051638x^{29} + \\
& 282472949704888959670555x^{30} - 659784412595668698793188x^{31} - 986747002345947660623415x^{32} + \\
& 2235928540752665118157037x^{33} + 2766102104157402845641392x^{34} - 6048596568103168034002953x^{35} - \\
& 6235862859792016465952094x^{36} + 13109354010298653133950159x^{37} + 11311529009445116059397322x^{38} - \\
& 22829191668429273215380050x^{39} - 16491985570921054148696568x^{40} + 32012050759806836634743418x^{41} + \\
& 19274557174365641463936649x^{42} - 36194090036067799457234367x^{43} - 17977866789394483635892473x^{44} + \\
& 33010263268427485989896780x^{45} + 13294805056149648548039391x^{46} - 24269111871425405879756730x^{47} - \\
& 7719715827397162309377098x^{48} + 14354944271362017116072472x^{49} + 3467347525245472903206939x^{50} - \\
& 6808062303404022976704068x^{51} - 1174671001995294266317512x^{52} + 2576330363368357032796665x^{53} + \\
& 285539149598812572013492x^{54} - 772973767306693551468021x^{55} - 43493796133268719517643x^{56} + \\
& 182435806074644884579263x^{57} + 1578291814221380714235x^{58} - 33560515290021718006404x^{59} + \\
& 1085611778689724348088x^{60} + 4761258378023303618643x^{61} - 319945226855087846232x^{62} - \\
& 514768561243945226721x^{63} + 49664633878454946921x^{64} + 41857441719264765459x^{65} - \\
& 5059221729603564351x^{66} - 2523288763225221867x^{67} + 356134240037245131x^{68} + 111006922260938166x^{69} - \\
& 17560157208954669x^{70} - 3498962768541387x^{71} + 605417634344259x^{72} + 77202421595082x^{73} - \\
& 14421262679676x^{74} - 1155401508177x^{75} + 232152034824x^{76} + 11204841699x^{77} - 2436730722x^{78} - \\
& 65443302x^{79} + 15699744x^{80} + 201609x^{81} - 55404x^{82} - 243x^{83} + 81x^{84}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{9,3}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{9,6}^{TG}(x) = \\
&2x(37 + 116x - 23347x^2 - 1857623x^3 + 23054138x^4 + 1658327258x^5 - 17417701382x^6 - \\
&649807102243x^7 + 7250324620789x^8 + 145892379295639x^9 - 1826533024906947x^{10} - \\
&20882240179401760x^{11} + 304971711617604024x^{12} + 1994020382395576351x^{13} - 35899777358788691585x^{14} - \\
&126482024084706850179x^{15} + 3107954076294109597487x^{16} + 4769063027348182649695x^{17} - \\
&203997283075072018280322x^{18} - 30796727137599657444262x^{19} + 10391684355656479304128160x^{20} - \\
&8889790953446751473431800x^{21} - 418692808075182722899176511x^{22} + 677534735097561716635658086x^{23} + \\
&13557081006078163679004027536x^{24} - 30096303941410726327492346153x^{25} - \\
&357572117456073321570928032796x^{26} + 970629421114119355188072797346x^{27} + \\
&7770334598705133902395140968889x^{28} - 24385655353329307903247323759838x^{29} - \\
&140447020509725992912002934371873x^{30} + 494002959452453981192005910339782x^{31} + \\
&2127826709463796246366810653957409x^{32} - 8237450711645200462095793863515701x^{33} - \\
&27188253902642500039450652397258859x^{34} + 114626058616922437235619476025685813x^{35} + \\
&294396135512961980192556588404013907x^{36} - 1344050071175848514152407548203052272x^{37} - \\
&2711440926459327393705605565546421088x^{38} + 13374818665468335020701471366820039873x^{39} + \\
&21303190827817726536861084202487105147x^{40} - 113566908548934930480545351369497111521x^{41} - \\
&143116707967186098828707117011637301005x^{42} + 826317235300924604308880090011290190615x^{43} + \\
&823822805373559725406060735609933523144x^{44} - 5169618364457182037830149789348587769832x^{45} - \\
&4071307680553448788985143986422752984432x^{46} + 27888246117260876974428061303414407314818x^{47} + \\
&17309536584610691517766617348306798760623x^{48} - \\
&130041370174145404585997620607523828835036x^{49} - \\
&63456803833519549992042725911808727002578x^{50} + \\
&525210717726756596993094082616487926160344x^{51} + \\
&201114272119935019403514705790237651321418x^{52} - \\
&1840501651309957697447669266685914146009438x^{53} - \\
&552686500538060751093637947981163333080029x^{54} + \\
&5604289116866772449217279054349337415691054x^{55} + \\
&1321442212373257033736668530226649291870862x^{56} - \\
&14845457980693056804830460113428745911144308x^{57} - \\
&2758718910988368220120863673268295731769638x^{58} + \\
&34240673073616315886807632692993077149353977x^{59} + \\
&5045918324752776979782843081498003092194639x^{60} - \\
&68808008924629424902653118569849935809327403x^{61} - \\
&8107039923472720701621914994517330147693006x^{62} + \\
&120517229401056560197301293293022258976330916x^{63} + \\
&11450048653857330340685697833843219365607214x^{64} - \\
&184009253208087679596679163597644603293154607x^{65} - \\
&-14185430326650963152006871743476054189110730x^{66} + \\
&244898842258228863416490985378354168016898939x^{67} + \\
&15320039924369011905195347260630645952220268x^{68} - \\
&284041241478779349093029310904430679337930648x^{69} - \\
&14254331689316738359831240299313941860932683x^{70} + \\
&286967088390849635071109608801431443079995101x^{71} + \\
&11197732400520137313058811735950130785356399x^{72} - \\
&252384982272215060945883244229103969149946955x^{73} - \\
&7157254869792406692086349601183785585603060x^{74} + \\
&193068914026006736251245981970019452947635808x^{75} + \\
&3418104114406704697507050232820883115647634x^{76} - \\
&12832777098796982550549905207773487791248021x^{77} - \\
&866676417948185498200097129379562121875510x^{78} + \\
&74016396208936238604803388083982718570997751x^{79} - \\
&343244762360597330558729349575909912194103x^{80} - \\
&36988224395917779836206444587956521556424311x^{81} + \\
&609688590350078061889758313752736630349923x^{82} + \\
&15985989888689235493205146921647609138849984x^{83} - \\
&458754682980422641994255289295454118916709x^{84} - \\
&5962740932128082535154159620694597548129155x^{85} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 245188667698978289907968803368854501122616x^{86} + \\
& 1914899291477973168196809825318011453169712x^{87} - \\
& 102538207963238991005653039036052574637783x^{88} - \\
& 528046087922705788550263368051218290561957x^{89} + \\
& 34721966677282892897306077574246805796453x^{90} + \\
& 124657517716325433033826461848132979155649x^{91} - \\
& 9663653748921129291559963941103333014753x^{92} - 25109136235865310705212439539798645313822x^{93} + \\
& 2225690643221080168123371969412652724585x^{94} + 4299215098313300650501034977190737398552x^{95} - \\
& 425333796028671614696987485463114217945x^{96} - 623117616085336186919220078676483385817x^{97} + \\
& 67447521779360066018021309585618803671x^{98} + 76087851926994247260583756758172853070x^{99} - \\
& 8858331910663314132940890286526034342x^{100} - 7785358123155709143171306133933539774x^{101} + \\
& 960043961885231999108424386426197110x^{102} + 663394063022520816346501459443542127x^{103} - \\
& 85381995220129919784268078439018598x^{104} - 46742094844290537596318253899040822x^{105} + \\
& 6182891448591506876905377453622119x^{106} + 2701150294363639182935799864099408x^{107} - \\
& 360678361583665996972799854563252x^{108} - 126837646150147970033595650674437x^{109} + \\
& 16698093437864022496266948686496x^{110} + 4788801023595342364085346938979x^{111} - \\
& 600174248828417135482901674131x^{112} - 143694131752400660841117412170x^{113} + \\
& 16155848412954608122413857637x^{114} + 3386503800730502899294338918x^{115} - \\
& 303369068308412780079057189x^{116} - 62104863688059170776717638x^{117} + 3227565770769017117973798x^{118} + \\
& 886018513223091179911365x^{119} + 4339109835241241753637x^{120} - 10021783495826405771145x^{121} - \\
& 771872417151952497255x^{122} + 93278865090048547914x^{123} + 12830634432227320731x^{124} - \\
& 720260973021852279x^{125} - 106840747154565450x^{126} + 4211112043399635x^{127} + 458551859100894x^{128} - \\
& 15261801128280x^{129} - 794483135775x^{130} + 23860913580x^{131} / \\
& ((1+3x)(-1+2x+7x^2)(-1+81x-1792x^2+7289x^3+113338x^4-948939x^5+891997x^6+9118681x^7- \\
& 25652726x^8+9992771x^9+33620979x^{10}-29903008x^{11}-9941993x^{12}+14464685x^{13}-684910x^{14}- \\
& 1263348x^{15}+43295x^{16})(-1-27x-30x^2+3263x^3+10255x^4-128271x^5-422489x^6+2034868x^7+ \\
& 6331921x^8-14787664x^9-46140893x^{10}+49195065x^{11}+177327440x^{12}-56000703x^{13}-357184328x^{14}- \\
& 43503000x^{15}+357901011x^{16}+120196901x^{17}-183392047x^{18}-80222831x^{19}+48816126x^{20}+23044935x^{21}- \\
& 6865887x^{22}-3172062x^{23}+503757x^{24}+213075x^{25}-17955x^{26}-6750x^{27}+243x^{28}+81x^{29})(-1- \\
& 12x+1296x^2+6760x^3-558339x^4-1161243x^5+118840379x^6+34612254x^7-14636101794x^8+ \\
& 11650032630x^9+1139067517383x^{10}-1675685198967x^{11}-59425014210170x^{12}+112413543683178x^{13}+ \\
& 2171147767245072x^{14}-4673729741871850x^{15}-57423564754079904x^{16}+132752592370932042x^{17}+ \\
& 1127413588825996376x^{18}-2710891411914111867x^{19}-16748804440629896181x^{20}+ \\
& 41076234964519891361x^{21}+191073085446307327887x^{22}-471751936975189881282x^{23}- \\
& 1693441623773186077195x^{24}+4168981592750804837106x^{25}+11769841572576724100388x^{26}- \\
& 28667256121124059466103x^{27}+64650834761329667094285x^{28}+154709707930302466051638x^{29}+ \\
& 282472949704888959670555x^{30}-659784412595668698793188x^{31}-986747002345947660623415x^{32}+ \\
& 2235928540752665118157037x^{33}+2766102104157402845641392x^{34}-6048596568103168034002953x^{35}- \\
& 6235862859792016465952094x^{36}+13109354010298653133950159x^{37}+11311529009445116059397322x^{38}- \\
& 22829191668429273215380050x^{39}-16491985570921054148696568x^{40}+32012050759806836634743418x^{41}+ \\
& 19274557174365641463936649x^{42}-36194090036067799457234367x^{43}-17977866789394483635892473x^{44}+ \\
& 33010263268427485989896780x^{45}+13294805056149648548039391x^{46}-24269111871425405879756730x^{47}- \\
& 7719715827397162309377098x^{48}+14354944271362017116072472x^{49}+3467347525245472903206939x^{50}- \\
& 6808062303404022976704068x^{51}-1174671001995294266317512x^{52}+2576330363368357032796665x^{53}+ \\
& 285539149598812572013492x^{54}-772973767306693551468021x^{55}-43493796133268719517643x^{56}+ \\
& 182435806074644884579263x^{57}+1578291814221380714235x^{58}-33560515290021718006404x^{59}+ \\
& 1085611778689724348088x^{60}+4761258378023303618643x^{61}-319945226855087846232x^{62}- \\
& 514768561243945226721x^{63}+49664633878454946921x^{64}+41857441719264765459x^{65}- \\
& 5059221729603564351x^{66}-2523288763225221867x^{67}+356134240037245131x^{68}+111006922260938166x^{69}- \\
& 17560157208954669x^{70}-3498962768541387x^{71}+605417634344259x^{72}+77202421595082x^{73}- \\
& 14421262679676x^{74}-1155401508177x^{75}+232152034824x^{76}+11204841699x^{77}-2436730722x^{78}- \\
& 65443302x^{79}+15699744x^{80}+201609x^{81}-55404x^{82}-243x^{83}+81x^{84}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{9,4}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{9,5}^{TG}(x) = & 2x(31 + 602x - 62128x^2 - 58391x^3 + 34270988x^4 - 285377827x^5 - 8059003382x^6 + \\
& 177790238036x^7 + 618410529394x^8 - 52720475798255x^9 + 123512524582362x^{10} + \\
& 9704448702305672x^{11} - 41847987558005235x^{12} - 1233105448397528192x^{13} + 6098719240153252291x^{14} + \\
& 115383858654790586625x^{15} - 571022906872928214019x^{16} - 8335558852092814790267x^{17} + \\
& 38284698185589306324930x^{18} + 481728026053094138134598x^{19} - 1946183370909462881959906x^{20} - \\
& 22818007427343440525301891x^{21} + 78196816060271487050861855x^{22} + 897888019651364101278384526x^{23} - \\
& 2571362729896620700282934032x^{24} - 29513384773013776775289099986x^{25} + \\
& 71221872670999826288486788814x^{26} + 811521320687415415127242509546x^{27} - \\
& 1695750562083087963017621966625x^{28} - 18678314840799062874190631743739x^{29} + \\
& 35050990985687022136494917074428x^{30} + 360364299102434639565886383276124x^{31} - \\
& 629420079142777899235394235948710x^{32} - 5842638826243642457691370704749449x^{33} + \\
& 9776264862610987426315534812933455x^{34} + 79876007029710867764051068254909937x^{35} - \\
& 130636055605627341007741087359981362x^{36} - 924380571330583710172747815743562106x^{37} + \\
& 1495845679305990225160093639189628782x^{38} + 9092089025833971680305452772394630339x^{39} - \\
& 14648806418206992446073170945966253940x^{40} - 76307751285063665359668050105532336579x^{41} + \\
& 122662870819778111328096620086311910519x^{42} + 548504502704133783250728583747951528543x^{43} - \\
& 879059595240098569007623129581037237042x^{44} - 3388291610718301850600761624622016147643x^{45} + \\
& 5399927011716624504134817183990138849392x^{46} + 18042901001129661376917216739496915146711x^{47} - \\
& 28484216251741782505424257091794045950741x^{48} - 83050338609167435721338619853247026650376x^{49} + \\
& 129259919802387560654542295961547523557814x^{50} + 331220362657552916931042314031583957072778x^{51} - \\
& 505501919662968615237649815844526775724042x^{52} - \\
& 1146854709876173546732874146878392724664946x^{53} + \\
& 1706361505310498240935428889886622938002252x^{54} + \\
& 3453264181961807015744654464912115034645046x^{55} - \\
& 4978787099684469109990480419928978891219014x^{56} - \\
& 90573739159698123236542724578977065381130337x^{57} + \\
& 12572467013408961417486603793792708214963974x^{58} + \\
& 20685972664237534250707926579221660430719186x^{59} - \\
& 27506266088296020671511251310888187007016236x^{60} - \\
& 41206883029254161321568625742010295742424968x^{61} + \\
& 52186889070388129542837432174698053357522283x^{62} + \\
& 71569830596167508886445266871716499926763782x^{63} - \\
& 85931425830090720836068628754512823117957630x^{64} - \\
& 108344764397933829801236245066891148860744613x^{65} + \\
& 122880170754388257331558487263426496325261545x^{66} + \\
& 142854779958750270533725889429027284949588124x^{67} - \\
& 152670962260577911276211698379512123365609206x^{68} - \\
& 163881552357509524524997873677791178511382467x^{69} + \\
& 164850727062374330365085785299506868797425821x^{70} + \\
& 163344789816947261923391516958629047512365245x^{71} - \\
& 154696547131462428865119407574750433702116306x^{72} - \\
& 141207812031643786085233462443607902927795091x^{73} + \\
& 126113657648345685800007320261549058372375129x^{74} + \\
& 105647410281875085219152457387827318680106682x^{75} - \\
& 89240522194618244088005119943722145425528199x^{76} - \\
& 68229849082260969599361519502317406791030427x^{77} + \\
& 54731386456054392221266195284707825852014712x^{78} + \\
& 37916620206596841759322248618333094180954680x^{79} - \\
& 29026687823631807740938289321189220296729480x^{80} - \\
& 18061000773875435280552791453437231629650153x^{81} + \\
& 13268607664479011329783660785340186235965549x^{82} + \\
& 7338965547068730635108321833618810117214721x^{83} - \\
& 5204174614680949367097056078540062478516681x^{84} - \\
& 2528796174779026440622152570792252181745219x^{85} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1740560729330149347898601197925776748230130x^{86} + \\
& 733279596195519438448753494194702437540504x^{87} - \\
& 492198695473440115367180945786577355455370x^{88} - \\
& 177150997364736816040887788597739907143955x^{89} + \\
& 116262710292005292850067102681927755061929x^{90} + \\
& 35163164631392939675837449983938085577959x^{91} - \\
& 22517426427067004704098734282185266987102x^{92} - \\
& 5615388955065139699307482825410977173149x^{93} + 3461626757265782976025446241428824829498x^{94} + \\
& 695779812741289700648526772084179309606x^{95} - 393401993279283138159958768904853935916x^{96} - \\
& 61822699353433287175557137924848600176x^{97} + 25812270996211253576946595513230789750x^{98} + \\
& 2985375898085984475566575780423749771x^{99} + 937369013566333099250034234345529434x^{100} + \\
& 106565329356341600420634395456692455x^{101} - 541489212594673337864196311479176765x^{102} - \\
& 35940101033480717301336403308550782x^{103} + 86328675926524247747720836894334109x^{104} + \\
& 3538747260753841644126614490303756x^{105} - 9074344187155068160071771704407443x^{106} - \\
& 18932029946952989446385688507679x^{107} + 707853639339186336678519901542447x^{108} + \\
& 3329457270154587620097507014634x^{109} - 42482614550803139963140441822269x^{110} + \\
& 344897686005821078120470950138x^{111} + 1984420174540513431179145762441x^{112} - \\
& 35905415462483512503632787180x^{113} - 72169164215957833763740271892x^{114} + \\
& 1851054193769077238320669635x^{115} + 2029255579724550560138579283x^{116} - \\
& 63240177787467630324374907x^{117} - 43525404524172780590079771x^{118} + 1522327290640351898257629x^{119} + \\
& 697515553781480029001832x^{120} - 26066459309785602251445x^{121} - 8101345709182717927089x^{122} + \\
& 312521014755158955552x^{123} + 65193537548917994607x^{124} - 2525557581716525577x^{125} - \\
& 338785060827590559x^{126} + 12837256720911612x^{127} + 1004062961221668x^{128} - 36087360798015x^{129} - \\
& 1269809536464x^{130} + 41756598765x^{131}) / \\
& ((1 + 3x)(-1 + 2x + 7x^2)(-1 + 81x - 1792x^2 + 7289x^3 + 113338x^4 - 948939x^5 + 891997x^6 + 9118681x^7 - \\
& 25652726x^8 + 9992771x^9 + 33620979x^{10} - 29903008x^{11} - 9941993x^{12} + 14464685x^{13} - 684910x^{14} - \\
& 1263348x^{15} + 43295x^{16})(-1 - 27x - 30x^2 + 3263x^3 + 10255x^4 - 128271x^5 - 422489x^6 + 2034868x^7 + \\
& 6331921x^8 - 14787664x^9 - 46140893x^{10} + 49195065x^{11} + 177327440x^{12} - 56000703x^{13} - 357184328x^{14} - \\
& 43503000x^{15} + 357901011x^{16} + 120196901x^{17} - 183392047x^{18} - 80222831x^{19} + 48816126x^{20} + 23044935x^{21} - \\
& 6865887x^{22} - 3172062x^{23} + 503757x^{24} + 213075x^{25} - 17955x^{26} - 6750x^{27} + 243x^{28} + 81x^{29})(-1 - \\
& 12x + 1296x^2 + 6760x^3 - 558339x^4 - 1161243x^5 + 118840379x^6 + 34612254x^7 - 14636101794x^8 + \\
& 11650032630x^9 + 1139067517383x^{10} - 1675685198967x^{11} - 59425014210170x^{12} + 112413543683178x^{13} + \\
& 2171147767245072x^{14} - 4673729741871850x^{15} - 57423564754079904x^{16} + 132752592370932042x^{17} + \\
& 1127413588825996376x^{18} - 271089141191411867x^{19} - 16748804440629896181x^{20} + \\
& 41076234964519891361x^{21} + 191073085446307327887x^{22} - 471751936975189881282x^{23} - \\
& 1693441623773186077195x^{24} + 4168981592750804837106x^{25} + 11769841572576724100388x^{26} - \\
& 28667256121124059466103x^{27} - 64650834761329667094285x^{28} + 154709707930302466051638x^{29} + \\
& 282472949704888959670555x^{30} - 659784412595668698793188x^{31} - 986747002345947660623415x^{32} + \\
& 2235928540752665118157037x^{33} + 2766102104157402845641392x^{34} - 6048596568103168034002953x^{35} - \\
& 6235862859792016465952094x^{36} + 13109354010298653133950159x^{37} + 11311529009445116059397322x^{38} - \\
& 22829191668429273215380050x^{39} - 16491985570921054148696568x^{40} + 32012050759806836634743418x^{41} + \\
& 19274557174365641463936649x^{42} - 36194090036067799457234367x^{43} - 17977866789394483635892473x^{44} + \\
& 33010263268427485989896780x^{45} + 13294805056149648548039391x^{46} - 24269111871425405879756730x^{47} - \\
& 7719715827397162309377098x^{48} + 14354944271362017116072472x^{49} + 3467347525245472903206939x^{50} - \\
& 6808062303404022976704068x^{51} - 1174671001995294266317512x^{52} + 2576330363368357032796665x^{53} + \\
& 285539149598812572013492x^{54} - 772973767306693551468021x^{55} - 43493796133268719517643x^{56} + \\
& 182435806074644884579263x^{57} + 1578291814221380714235x^{58} - 33560515290021718006404x^{59} + \\
& 1085611778689724348088x^{60} + 4761258378023303618643x^{61} - 319945226855087846232x^{62} - \\
& 514768561243945226721x^{63} + 49664633878454946921x^{64} + 41857441719264765459x^{65} - \\
& 5059221729603564351x^{66} - 2523288763225221867x^{67} + 356134240037245131x^{68} + 111006922260938166x^{69} - \\
& 17560157208954669x^{70} - 3498962768541387x^{71} + 605417634344259x^{72} + 77202421595082x^{73} - \\
& 14421262679676x^{74} - 1155401508177x^{75} + 232152034824x^{76} + 11204841699x^{77} - 2436730722x^{78} - \\
& 65443302x^{79} + 15699744x^{80} + 201609x^{81} - 55404x^{82} - 243x^{83} + 81x^{84}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{9,0}^{TG}(x) = & 2x + 19682x^2 + 93524x^3 + 17323226x^4 + 329212322x^5 + 28432011752x^6 + 878082461552x^7 + \\ & 55552654729898x^8 + 2132941421905988x^9 + 116306062547543522x^{10} + 4958358771587057828x^{11} + \\ & 251329211093805920936x^{12} + 11279496913606980300530x^{13} + 551467123545121317792872x^{14} + \\ & 25385504162517911001366644x^{15} + 1219155378352018709924802122x^{16} + \\ & 56830091153236092352304798696x^{17} + 2705278285367600567705111414600x^{18} + \\ & 126891148055785602672485993306402x^{19} + 6014007162408033910079155162601306x^{20} + \\ & 282956991958974571162226344697994140x^{21} + 13381716290026149071316106980725715704x^{22} + \\ & 630565873382416175092989923883359477120x^{23} + 29788991646554019144315781518130939668488x^{24} + \\ & 1404760707866092787952973880341347611130872x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{9,1}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{9,8}^{TG}(x) = & 512x + 1946x^2 + 439202x^3 + 6299282x^4 + 656565692x^5 + 17594491250x^6 + \\ & 1226485102814x^7 + 43937205514832x^8 + 2514403471437956x^9 + 103599732118131110x^{10} + \\ & 5378551863832846706x^{11} + 237352093034087642312x^{12} + 11742882034081066779986x^{13} + \\ & 536066318783898296950466x^{14} + 25896591033787222616098172x^{15} + 1202176502875288256476167434x^{16} + \\ & 57393772736506764620828358704x^{17} + 2686555983308620473457947952094x^{18} + \\ & 127512813472592633115034928692166x^{19} + 5993360903047359045133640862863048x^{20} + \\ & 283642590152288706874076231594752178x^{21} + 13358947707870269363501184403403075606x^{22} + \\ & 631321970380500838514137593512361615842x^{23} + 29763882285739346946762455633018909249438x^{24} + \\ & 1405594548223937510578673458656900828693482x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{9,2}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{9,7}^{TG}(x) = & 62x + 8480x^2 + 137072x^3 + 14210138x^4 + 363462332x^5 + 26532003710x^6 + \\ & 91555394790x^7 + 53914258528706x^8 + 2176161943348964x^9 + 114670545449448656x^{10} + \\ & 5007516324469120688x^{11} + 249596894049237312338x^{12} + 11334597592658842230830x^{13} + \\ & 549588085827578958461546x^{14} + 25446749939033251837348298x^{15} + 1217097404125626538920277424x^{16} + \\ & 56897881395054910975811696630x^{17} + 2703015329182348287645876379988x^{18} + \\ & 126966032665145462695913910346544x^{19} + 601151464444855103579794806875086x^{20} + \\ & 283039637604878712217084941098443106x^{21} + 13378968973784682198341681329010893754x^{22} + \\ & 630657046658161443304774645270935448424x^{23} + 29785962563889394025535498143753699848088x^{24} + \\ & 1404861270062874242661195330285432136118762x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{9,3}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{9,6}^{TG}(x) = & 74x + 3266x^2 + 262148x^3 + 7911458x^4 + 544354964x^5 + 19596376844x^6 + 1131327794972x^7 + \\ & 46330377148466x^8 + 2420680879349042x^9 + 106356601817379116x^{10} + 5279958847445383736x^{11} + \\ & 240458297140884450428x^{12} + 11636274357637640578604x^{13} + 539526552908365784839508x^{14} + \\ & 25779995022870311375877998x^{15} + 1206010136418493293262113074x^{16} + \\ & 57265642694742304204932407954x^{17} + 2690792573456768162701834939058x^{18} + \\ & 127371723915042979126239574314290x^{19} + 5998037422344075827100765499725548x^{20} + \\ & 283487096263156378225598193422631764x^{21} + \\ & 13364107174651935060195394772723475284x^{22} + 631150537929216637202743139271246555782x^{23} + \\ & 29769573266566030463726598764257042784972x^{24} + 1405405513079478142247631257165439831264914x^{25} + \\ & \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{9,4}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{9,5}^{TG}(x) = \\ 62x + 3746x^2 + 175898x^3 + 10217936x^4 + 436406162x^5 + 22829200760x^6 + \\ 1010175275654x^7 + 50160909680426x^8 + 2287267619640590x^9 + 110686584320790536x^{10} + \\ 5133314650417419902x^{11} + 245277146687916214622x^{12} + 11474916366982044692240x^{13} + \\ 544859576007540551875442x^{14} + 25602264782906657432963132x^{15} + 1211899751598998868201637346x^{16} + \\ 57069758021633766370530343418x^{17} + 2697291483166647988938039090980x^{18} + \\ 127155761131991008479105941423036x^{19} + 6005206256008264542881364899900432x^{20} + \\ 283248960369775483820801745840547736x^{21} + 13372013892532434686796439722545979536x^{22} + \\ 630887933367539681987436563158641597776x^{23} + 29778293309209194216031866839553472715330x^{24} + \\ 1405115916111221404744271544679934700480692x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{9,0}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{9,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{9,2}^{KB}(x) = \dots = \mathcal{F}_{9,8}^{KB}(x) = \\ -2x(81 - 3584x + 21867x^2 + 453352x^3 - 4744695x^4 + 5351982x^5 + 63830767x^6 - 205221808x^7 + 89934939x^8 + \\ 336209790x^9 - 328933088x^{10} - 119303916x^{11} + 188040905x^{12} - 9588740x^{13} - 18950220x^{14} + 692720x^{15}) / \\ (-1 + 81x - 1792x^2 + 7289x^3 + 113338x^4 - 948939x^5 + 891997x^6 + 9118681x^7 - 25652726x^8 + 9992771x^9 + \\ 33620979x^{10} - 29903008x^{11} - 9941993x^{12} + 14464685x^{13} - 684910x^{14} - 1263348x^{15} + 43295x^{16})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{9,0}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{9,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{9,2}^{KB}(x) = \dots = \mathcal{F}_{9,8}^{KB}(x) = \\ 162x + 5954x^2 + 235704x^3 + 10509978x^4 + 481196722x^5 + 22392890660x^6 + \\ 1049463249472x^7 + 49359794952522x^8 + 2325552138201720x^9 + 109659221103616794x^{10} + \\ 5173004682647753432x^{11} + 244077563657520119748x^{12} + 11517426401813873331550x^{13} + \\ 543505354511098122072640x^{14} + 25648522857745864224017944x^{15} + 1210391440932092505047153962x^{16} + \\ 57120466761012398267514757872x^{17} + 2695621002621818932450534427948x^{18} + \\ 127211534491703307722312706167998x^{19} + 6003360623788571438605965682391618x^{20} + \\ 283310395637685903715253987621223424x^{21} + 13369976865300532409887251655415617332x^{22} + \\ 630955650005917041901241431720829943204x^{23} + 29776046055262438938714290747872606532484x^{24} + \\ 1405190578091235043157390783155692506293072x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,0}^{TG}(x) = & -((2x(-1 - 9151x + 347945x^2 + 32630909x^3 - 1111958814x^4 - 43059427711x^5 + \\
& 1454258019400x^6 + 27897573145887x^7 - 1026234961927855x^8 - 9626609938852254x^9 + \\
& 439838356451493758x^{10} + 1628133610322615893x^{11} - 122753309907463820397x^{12} - \\
& 12165541576960418735x^{13} + 23396064432092877164330x^{14} - 55479828982332399840627x^{15} - \\
& 3156778227985365662914842x^{16} + 13305008163630408742288033x^{17} + 310433388026323234253833161x^{18} - \\
& 1780846057357121293505876042x^{19} - 22792857035567496860423638641x^{20} + \\
& 162922006430776639152654652722x^{21} + 1274313922487530381959727996331x^{22} - \\
& 10987581502323951838783094283475x^{23} - 55081249560236801856083928794799x^{24} + \\
& 569581697130976963801381811678395x^{25} + 1860211422063105079751121545305182x^{26} - \\
& 23332601101252367030733797918191661x^{27} - 49348269836403883592769356882049772x^{28} + \\
& 770618136484896262258099447574152201x^{29} + 1026992805510492088903425455653980263x^{30} - \\
& 20836036554592199246423868188724971034x^{31} - 16573974562165266647090224837533918371x^{32} + \\
& 466721674683114699071654609351639204872x^{33} + 200926466489825538448264946086852868981x^{34} - \\
& 8742269375230143447817788080202549189973x^{35} - 1676799734991725628732806337912008685148x^{36} + \\
& 137936049161637717961352946672178189862174x^{37} + 6625227492896686553628879144818552433565x^{38} - \\
& 1843482710437592550239575408748402713583236x^{39} + 43644530383607927636339840658529182219497x^{40} + \\
& 20955584957992526063541157506131710655568721x^{41} - \\
& 861790766400524637156684131612739418597862x^{42} - \\
& 203201390724040837312671982470373739395790156x^{43} + \\
& 3831822153971494196536700675415440451263716x^{44} + \\
& 1684091069034456953156348867312100123659566069x^{45} + \\
& 52181956441857109176676523459189483560487729x^{46} - \\
& 11944024254666937113793585759056577061038638033x^{47} - \\
& 1173778148424135508231435116156684814132109699x^{48} + \\
& 72546666541158499993317581343874374307863076526x^{49} + \\
& 12675137612308776695357437268529139983044090502x^{50} - \\
& 377584025518565663291556330183036915312815237865x^{51} - \\
& 95808266272635295530324745024226596208209392686x^{52} + \\
& 1685001088194340853348604241492944760818293716422x^{53} + \\
& 556584614149605931664617899058800489648174541113x^{54} - \\
& 6452604793842113875169329824955125191445807360414x^{55} - \\
& 2585893805203607517622630862346213828983636147364x^{56} + \\
& 21229132325735453853388899194622136109851492357478x^{57} + \\
& 9816804787372121120299810404061487694729355927931x^{58} - \\
& 60102559527735875686107702087183652815935728627741x^{59} - \\
& 30863478638081393444183045432252651407407470115347x^{60} + \\
& 146726216853128534798567966621635711715961294066747x^{61} + \\
& 81110592878143379227573850825040143276794720183670x^{62} - \\
& 309621213005285945544931156045339688800673056118659x^{63} - \\
& 179420700319817687802626961833497916657548401686502x^{64} + \\
& 566279477652227705803407878142138840370349063877955x^{65} + \\
& 335857008503568516947766715486327625014734116633612x^{66} - \\
& 900170464089421945590395323819094883834995058866319x^{67} - \\
& 534242939127592612991590306559086913589559561479697x^{68} + \\
& 1247093884550591982313533609358694129347689522910186x^{69} + \\
& 72444221401602193284373981539748822970226707072508x^{70} - \\
& 1509487343895047224650012935294153419066721459683587x^{71} - \\
& 839271168212553709169756832163656736950668232441832x^{72} + \\
& 1599572707256452103095507966069918905634929051245092x^{73} + \\
& 831632150351437120693073974786756141316736490976905x^{74} - \\
& 1486142516369902350036432348249790668123105372025652x^{75} - \\
& 704781821972242576557127944923937138521488523545922x^{76} + \\
& 1211551285099572872747379473132969089206092774952666x^{77} + \\
& 509989157853116593058567471481648160183329689566777x^{78} - \\
& 866708219687141380076155070123957374746816733077413x^{79} - \\
& 313905899485261248470325492192336440677983634506572x^{80} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 543696896205934524511646796995027934063312690130012x^{81} + \\
& 163180063313296811897779558945233322917702114677823x^{82} - \\
& 298664940720626262100714965046936447441329897633830x^{83} - \\
& 70713301360488195932621639394412544181287142896122x^{84} + \\
& 143366409062186817764099502330812423796748548496434x^{85} + \\
& 24906704011680864154765370399726626081102437061420x^{86} - \\
& 59972219544087831608373314199303218526868045124116x^{87} - \\
& 6731239318115495847334328999546848337423397208807x^{88} + \\
& 21787376329068211553727304382557845337126346231301x^{89} + \\
& 1156125990564889559214368647082722873742098074257x^{90} - \\
& 6845592608181034939712806942210122315516232962599x^{91} + \\
& 23844497421084482974481218881731411456159403536x^{92} + \\
& 1850998162622180993633545006202720661679479060631x^{93} - \\
& 106469208965877682345326448691473373424462297494x^{94} - \\
& 428135945761179213276661103833830436788414323811x^{95} + \\
& 46923908040885779396362911701229134077100532333x^{96} + \\
& 84090794684063816224639066567057159073265996804x^{97} - \\
& 13520419688157051956572237498076551647579012246x^{98} - \\
& 1389673681575929398462511673299669261522231381x^{99} + \\
& 2957685154146647389968860264219751525105519082x^{100} + \\
& 1909391759965272903454522450894972712174443452x^{101} - \\
& 513073792593596873714296154410994534028389867x^{102} - \\
& 214588305972369288186442559814146192735891502x^{103} + \\
& 71626195801538526399512872232844091347811728x^{104} + \\
& 19252571403473135237214420040871485319832852x^{105} - \\
& 8069188152442193498330722485469055366321591x^{106} - \\
& 1322708122930232301704108897975588485152163x^{107} + \\
& 730760995108537555632664350434153924720548x^{108} + \\
& 63499207149871357540336093402805870542506x^{109} - 52746321582381669438250228722772178106273x^{110} - \\
& 1496196721579050079617663944643865674440x^{111} + 2996281218014420061168398797091409934070x^{112} - \\
& 51980157745494094967471589784766408560x^{113} - 131704170461599489961387419506815291350x^{114} + \\
& 7109707286601427648085026491346312800x^{115} + 4382330595020159556031761516095691000x^{116} - \\
& 369029482469239650589666771909951600x^{117} - 107275945584063726503451845613872800x^{118} + \\
& 11816162475785331177592299057128000x^{119} + 1860471871970364152365855865536000x^{120} - \\
& -248730207344469916899991298880000x^{121} - 21734158909515171677120768880000x^{122} + \\
& 3403380725721404654558468000000x^{123} + 160240657641720476168152000000x^{124} - \\
& 28732432086756426026768000000x^{125} - 704779451485724979072000000x^{126} + \\
& 135499142872993306880000000x^{127} + 2036097084471582720000000x^{128} - 298168596631449600000000x^{129} - \\
& 47715178012672000000000x^{130} + 203108376576000000000x^{131} + 3837984768000000000x^{132})) / \\
& ((-1+x)(1+x)(1+2x)(-1+4x)(1+4x)(1-8x+4x^2)(1+5x+5x^2)(1+7x+8x^2)(1+18x+63x^2+50x^3+13x^4+ \\
& x^5)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+18x-91x^2+110x^3+ \\
& 175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+175x^7+25x^8)(-1+ \\
& 121x-3901x^2+49003x^3-293115x^4+896942x^5-1381585x^6+970100x^7-264304x^8+15552x^9)(-1+8x+ \\
& 14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+302x^4+65x^5-120x^6- \\
& 62x^7+4x^8+7x^9+x^{10})(1-36x+504x^2-3603x^3+14416x^4-33263x^5+44489x^6-34794x^7+16069x^8-4345x^9+ \\
& 653x^{10}-47x^{11}+x^{12})(1+53x+951x^2+7589x^3+32774x^4+84127x^5+133734x^6+133056x^7+81936x^8+ \\
& 30215x^9+6265x^{10}+650x^{11}+25x^{12})(1+92x+3048x^2+50453x^3+483576x^4+2928888x^5+11832412x^6+ \\
& 32949126x^7+64377394x^8+88750186x^9+85833700x^{10}+57206921x^{11}+25441290x^{12}+7182529x^{13}+ \\
& 1203428x^{14}+111956x^{15}+5340x^{16}+120x^{17}+x^{18})(1-66x+1833x^2-28651x^3+283174x^4-1881547x^5+ \\
& 8719340x^6-28859906x^7+69342834x^8-122339404x^9+159752386x^{10}-155169581x^{11}+112318552x^{12}- \\
& 60476870x^{13}+24066800x^{14}-6990095x^{15}+1450676x^{16}-207780x^{17}+19365x^{18}-1050x^{19}+25x^{20})))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -((20x^2(1395 - 10498446x^2 + 29534328219x^4 - 44962185811984x^6 + 43313020335654151x^8 - \\
& 28790160274050440896x^{10} + 13952606364650668570418x^{12} - 5122525183178332979714504x^{14} + \\
& 1465606225295080443499814135x^{16} - 334001055654838940923381631142x^{18} + \\
& 6169689555372946658371608398260x^{20} - 9371065799739996444209867470746342x^{22} + \\
& 1184503190700523363931367496108174258x^{24} - 125873847120266594700589074184590986574x^{26} + \\
& 11344834830006609241007414340813175962903x^{28} - \\
& 873842489680814103936875801650855210599904x^{30} + \\
& 57907359971798417848233686641575233706022820x^{32} - \\
& 3320812268179294358204334604806491772747303602x^{34} + \\
& 165657978475671321362400699182472698198694568952x^{36} - \\
& 7221545224672198500014257691817957619188402208714x^{38} + \\
& 276228270124730321172471466072121221008101667866506x^{40} - \\
& 9304694183914723348006039786741894531472168340301972x^{42} + \\
& 276907880953847085086437287897372785475019321356677065x^{44} - \\
& 7301576915110758180634769803322294003932348734570932318x^{46} + \\
& 171023510685604924139689623520714942817835675358492548115x^{48} - \\
& 3566447900281137024307343060578168612205432568968847462682x^{50} + \\
& 66347446909327938830992487845965683100434068427687071237261x^{52} - \\
& 1103015887452521380635163175757711698032859550816066654144668x^{54} + \\
& 16412373368163821280781570897031453307942086956673492968028772x^{56} - \\
& 218859448891740400621199528307947000606528891519988011464042062x^{58} + \\
& 2618496631038043496963760995802467321362483006344261374878222375x^{60} - \\
& 28134736548930259326557059719903729906254185679109933567244714668x^{62} + \\
& 271692816610864608627941120206874649343769324621546506638650315757x^{64} - \\
& 2359573015932305442438512344717322830043626761790797714857545826226x^{66} + \\
& 18438487574361840147231151293489327092847730619973130347501491544800x^{68} - \\
& 129693313979105951923356528018350389884972343260608426027988043534730x^{70} + \\
& 821348184337626735131004749997957901358062638811657029110805738888567x^{72} - \\
& 4684149040659253218080356892686712665895839636325024621901530451155146x^{74} + \\
& 24058549763509608253643215800785297074909236387032764850969481068523107x^{76} - \\
& 111290133750663185113119266316739726324307850446684482518585078820392412x^{78} + \\
& 463642331187130942872032557996634341912284570942109214236126043294324903x^{80} - \\
& 1739494005668525928603987080304993788760050437434022486206499352918312636x^{82} + \\
& 5876783952491307312500617998657940146305566006583368180407883657137544712x^{84} - \\
& 17876873443500286928830963161375413691980437605242812862398760595868799372x^{86} + \\
& 48959399868922071101775253850186455279797897834511746377256280093323265341x^{88} - \\
& 120707614560141400371154017037364619693063066905917611685399626092063367954x^{90} + \\
& 267889639134957233391123221383595764297350957130066266269670609241761561628x^{92} - \\
& 535153340560911923747416719989046744462199539639218602298156637400325127050x^{94} + \\
& 962257798369553642176404310911523528936752524200954022898009542694688066802x^{96} - \\
& 1557389676242939690964718764820921304429144257410135379168619027928784877626x^{98} + \\
& 2268867499669128738095447565151916396237775176281576049585318798924089803177x^{100} - \\
& 2975435327786708654457225199791039823504126016407255329525621664495980526412x^{102} + \\
& 3512796801961120156367485640538130806660750734606120794614561406863230964953x^{104} - \\
& 3733820885516339916939972994788301323114685586021102231112592184576654482250x^{106} + \\
& 3573473324143548611591038150435840683680223412926436828745623086816913445526x^{108} - \\
& 3079647912702619595172957557057038155388131953918495662022922646795054627874x^{110} + \\
& 2390100555657890569842817178175813395058661542528666718340761457188820895825x^{112} - \\
& 1670541510225799156648502053116314501707523241628852928156742789632568038398x^{114} + \\
& 1051555212789828473896482704143053990908213964758242869285324939457517514741x^{116} - \\
& 596115883824954436499688752528621606054604169572033126577473154283291889508x^{118} + \\
& 304313862971460245626129595444719249388134313341162595367372101629392066320x^{120} - \\
& 139877736704528344586003947229262673250084069541282964739477455803641233300x^{122} + \\
& 57879623708654705450983440739182443279867141818597326383494355698585913998x^{124} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 21554342757642145440453183250793493101312439796467779036241626625039162688x^{126} + \\
& 7221395160062704788603662388730656469065539266895520455783818977029641494x^{128} - \\
& 2175652316238552701649676552668784158856814678588799693298260718458059374x^{130} + \\
& 589115020596673091498039722192528620912783838470353405649601454579492541x^{132} - \\
& 143272830066040175042410165236815448427153455240621936927209345769202740x^{134} + \\
& 31270679215976194988613696643856615165810693180943541664002081667052890x^{136} - \\
& 6119515563398381264354386635125111650469391712590450777844115312384382x^{138} + \\
& 1072587998756312977701031692943554845304123415010941155182397176584088x^{140} - \\
& 168166977608434260695843529900004682752475667639647969010939937484786x^{142} + \\
& 23551207523233927325171285179391331040088851514246334934791180951790x^{144} - \\
& 2941235801219027721156632256494176557526041731755142360144887869024x^{146} + \\
& 326937581247772078045617049193150296196128135707331902355426907181x^{148} - \\
& 32275463289519537535752963423926680721082658666566950325209921590x^{150} + \\
& 2822733858020670971524873241108544944320003350642471675840970427x^{152} - \\
& 218080241052350094444950750248167634075885214761472487703696344x^{154} + \\
& 14834988596438495074307143267693640743929737502075137472093912x^{156} - \\
& 885203618742010986193286520653698283660735056432402221646040x^{158} + \\
& 46130750512598204049027343233885057192922197555890722002980x^{160} - \\
& 2088968303602671457805327560112447728375335704774745736550x^{162} + \\
& 81715229105323435143424062634493516702733025349169811700x^{164} - \\
& 2742152230163637736794448099795976508315245771547802250x^{166} + \\
& 78294331746974078627014438546475178604560005418196125x^{168} - \\
& 1883458617179795955823811992656799415438680271348750x^{170} + \\
& 37724174593224404947378346603725468691501908587500x^{172} - \\
& 620050207121892953400022652194264801552782768750x^{174} + \\
& 8214413735975041444755179568141897103549556250x^{176} - \\
& 85752762699520608679205773115282855229250000x^{178} + \\
& 685248778001013593988941840285985417500000x^{180} - \\
& 4035126800571803976550788405666750000000x^{182} + 16631007480485006982183011180000000000x^{184} - \\
& 445951646318279466445431200000000000x^{186} + 69561806631999823257600000000000x^{188} - \\
& 52374089642845696000000000000000x^{190} + 145126277120000000000000000x^{192})) / \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-13x+11x^2)(1-8x+ \\
& 11x^2)(1+8x+11x^2)(1+13x+11x^2)(1-12x^2+8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(-1+104x-2661x^2+24090x^3- \\
& 91993x^4+158236x^5-121128x^6+44736x^7-7808x^8+512x^9)(1+104x+2661x^2+24090x^3+91993x^4+ \\
& 158236x^5+121128x^6+44736x^7+7808x^8+512x^9)(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6- \\
& 4525x^7+1975x^8+2500x^9-875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6- \\
& 4525x^7+1975x^8-2500x^9-875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+ \\
& 60858x^6-12548x^7-46005x^8+16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+ \\
& 22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}- \\
& 329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})(1-82x+2898x^2-59227x^3+789803x^4-7334275x^5+49339066x^6- \\
& 246611784x^7+930982131x^8-2681675595x^9+5927069364x^{10}-10071216252x^{11}+13140900495x^{12}- \\
& 13114381556x^{13}+9943609371x^{14}-5673467839x^{15}+2404556811x^{16}-744137999x^{17}+164387022x^{18}- \\
& 25156085x^{19}+2562619x^{20}-164923x^{21}+6260x^{22}-125x^{23}+x^{24})(1+82x+2898x^2+59227x^3+789803x^4+ \\
& 7334275x^5+49339066x^6+246611784x^7+930982131x^8+2681675595x^9+5927069364x^{10}+10071216252x^{11}+ \\
& 13140900495x^{12}+13114381556x^{13}+9943609371x^{14}+5673467839x^{15}+2404556811x^{16}+744137999x^{17}+ \\
& 164387022x^{18}+25156085x^{19}+2562619x^{20}+164923x^{21}+6260x^{22}+125x^{23}+x^{24})(1-104x+4410x^2- \\
& 104155x^3+1561045x^4-15952817x^5+116275468x^6-623060570x^7+2507306175x^8-7693787635x^9+ \\
& 18199448138x^{10}+47933912805x^{11}-53730741510x^{12}+47072037995x^{13}-32132854819x^{14}+ \\
& 16992690151x^{15}-6899340865x^{16}+2123302560x^{17}-486469225x^{18}+80870375x^{19}-9387875x^{20}+715250x^{21}- \\
& 31875x^{22}+625x^{23})(1+104x+4410x^2+104155x^3+1561045x^4+15952817x^5+116275468x^6+623060570x^7+ \\
& 2507306175x^8+7693787635x^9+18199448138x^{10}+33436393552x^{11}+47933912805x^{12}+53730741510x^{13}+ \\
& 47072037995x^{14}+32132854819x^{15}+16992690151x^{16}+6899340865x^{17}+2123302560x^{18}+486469225x^{19}+ \\
& 80870375x^{20}+9387875x^{21}+715250x^{22}+31875x^{23}+625x^{24})))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -((20x^2(594 - 1804554x^2 + 1861067073x^4 - 980843342138x^6 + 312271486068241x^8 - \\
& 65745220858591243x^{10} + 9687425374674323038x^{12} - 1038831237350709728110x^{14} + \\
& 83458218228361655487358x^{16} - 5138793668486066172756627x^{18} + 247053756207980542996136827x^{20} - \\
& 9419200761604590794195183553x^{22} + 288563111422071718470665921122x^{24} - \\
& 7183020595820022918356293143191x^{26} + 146652249608919689717899944278935x^{28} - \\
& 2475119608958112116008084298092578x^{30} + 34758125569891291721733111044716670x^{32} - \\
& 408304515747043069333312170291563122x^{34} + 4029449548707334703065632689075530706x^{36} - \\
& 33520664098879279530846935348951084554x^{38} + 235672643031643784431539474426952002775x^{40} - \\
& 1402984966041861133179528890471348738574x^{42} + 7080937105693023633976720410573018906241x^{44} - \\
& 30320071126392282095132323456378758467169x^{46} + 110172038060616666751347384033916095236232x^{48} - \\
& 33965430131479740777153865619599548204754x^{50} + \\
& 887985454364155231342962388893289072575681x^{52} - \\
& 1967193073973489077747887034156386489102131x^{54} + \\
& 3689432161691671920569060944667608096392527x^{56} - \\
& 5852119578251451581944352085122158040704060x^{58} + \\
& 7843136224187563187226124828706969966528880x^{60} - \\
& 8874030077853675225145693452723432706700712x^{62} + \\
& 8470662807268393313340334637925976926072906x^{64} - \\
& 6818435626776523787742731932422831662587020x^{66} + \\
& 4627235068497006366393774486518345216647229x^{68} - \\
& 2647281955658943924493368557219644884136624x^{70} + \\
& 1276826796481948530558612094007072047328791x^{72} - \\
& 519184186877237814267298561395368846269221x^{74} + 177956576580743269622848780662126557731099x^{76} - \\
& 51397351204492036816439862004619872030622x^{78} + 12498597071276042509524782837533790404985x^{80} - \\
& 2555674675066458205582629945069159959078x^{82} + 438542422244921221766078573463986639711x^{84} - \\
& 62973228671754616635759571412982109611x^{86} + 7538270982475572478351765733687307547x^{88} - \\
& 748421432953615982992344042701918850x^{90} + 61219012082088331470745014081798155x^{92} - \\
& 4090101472901437592294988836303100x^{94} + 220699636373609972767521846072825x^{96} - \\
& 9477025744173262424135480148125x^{98} + 317515492537202322240501006125x^{100} - \\
& 8077133667540703264127475000x^{102} + 149998872943707676049412500x^{104} - 1913445101529246015000000x^{106} + \\
& 15080477594669686400000x^{108} - 58396676207056000000x^{110} + 44735868320000000x^{112})) / \\
& (-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(-1+9x-6x^2+x^3)(1+9x+6x^2+x^3)(1-12x^2+8x^3)(-1+ \\
& 12x^2+8x^3)(1-59x+402x^2-863x^3+572x^4)(1+59x+402x^2+863x^3+572x^4)(1-18x+93x^2-195x^3+164x^4- \\
& 37x^5+x^6)(1+18x+93x^2+195x^3+164x^4+37x^5+x^6)(1-33x+375x^2-1922x^3+5192x^4-7883x^5+6797x^6- \\
& 3252x^7+834x^8-105x^9+5x^{10})(1+33x+375x^2+1922x^3+5192x^4+7883x^5+6797x^6+3252x^7+834x^8+ \\
& 105x^9+5x^{10})(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6-4525x^7+1975x^8+2500x^9-875x^{10}-375x^{11}+ \\
& 125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+4525x^7+1975x^8-2500x^9-875x^{10}+375x^{11}+ \\
& 125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+60858x^6-12548x^7-46005x^8+16340x^9+10377x^{10}- \\
& 5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+2783x^5+60858x^6+ \\
& 12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}-329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})) \\
& -((40x^2(-66 + 36093x^2 - 5516439x^4 + 388236010x^6 - 15014461407x^8 + 345537603621x^{10} - \\
& 4913151745670x^{12} + 43979525538890x^{14} - 251882028246762x^{16} + 944748415928748x^{18} - \\
& 2385367130666279x^{20} + 4170446377769406x^{22} - 5178850852983665x^{24} + 4663663884891106x^{26} - \\
& 3092886616570548x^{28} + 1525543183091576x^{30} - 561928143366458x^{32} + 154231144536537x^{34} - \\
& 31238675921445x^{36} + 4578594704312x^{38} - 469127758800x^{40} + 31622131840x^{42} - 1247296000x^{44} + \\
& 21504000x^{46})) / \\
& ((-1+4x)(1+4x)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+ \\
& 18x-91x^2+110x^3+175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+ \\
& 175x^7+25x^8)(-1+8x+14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+ \\
& 302x^4+65x^5-120x^6-62x^7+4x^8+7x^9+x^{10}))) - \frac{20x^2(-13+121x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,1}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{10,9}^{TG}(x) = & -2x(-126 + 4714x + 437565x^2 - 12611526x^3 - 567388479x^4 + 13753278349x^5 + 385520884470x^6 - \\
& 8284187953578x^7 - 160641003614150x^8 + 3215643247348036x^9 + 43980670674459483x^{10} - \\
& 870993551869846297x^{11} - 8074506245787202467x^{12} + 169625772037234381120x^{13} + \\
& 995921851945576442660x^{14} - 24047780344636955674382x^{15} - 82143064794651585210552x^{16} + \\
& 2527651631607405145222893x^{17} + 4381806202685160800918991x^{18} - 202495312238122666408663282x^{19} - \\
& 123707903557328312369562631x^{20} + 12753493024361174683538336762x^{21} - \\
& 1682890068179646582089711519x^{22} - 649696714907241335201343229620x^{23} + \\
& 407750580971314579666991272521x^{24} + 27368646178933360013158281840695x^{25} - \\
& 26519445629173125277129099646898x^{26} - 967211735916993519624158100682906x^{27} + \\
& 1176901464597591561699677739388018x^{28} + 28900838281550657791369813850233161x^{29} - \\
& 40616088351630299146161711679315317x^{30} - 732835110694018892941454065351244804x^{31} + \\
& 1135512287366392931640220881030442719x^{32} + 15799142494128738264306882481440048382x^{33} - \\
& 26105491550343884048588120518419200419x^{34} - 290073832704770629997335680514994110268x^{35} + \\
& 496620724524413814467519288195583692037x^{36} + 4544322241429391928765420772990545048589x^{37} - \\
& 7843709988408787645582149802807257247835x^{38} - 60873696920504343519414091014698850003696x^{39} + \\
& 103095577116858005240460087581066904041397x^{40} + \\
& 698595604170265734661315942081013616465696x^{41} - \\
& 1129708193863219306235648147833588263568512x^{42} - \\
& 6877982050309429179957619985827908643818456x^{43} + \\
& 10334041184834306381779332507166494619734746x^{44} + \\
& 58132302604340536673323040208135718269388369x^{45} - \\
& 78976324149437543259900553640138054268911236x^{46} - \\
& 421750002060523489070341947802324679311694583x^{47} + \\
& 504402788450555133787241504130514062822892126x^{48} + \\
& 2624761587323542739562610535631750438166150761x^{49} - \\
& 2691906469918894092320492985940558738727910243x^{50} - \\
& 13999895897935552439860249455745960564552686465x^{51} + \\
& 11999089612286543467874011680943055552808716669x^{52} + \\
& 63943232236245797051918900395814124786677206522x^{53} - \\
& 44640872183812406197139214510725225101293543907x^{54} - \\
& 249971776271555347747289472912416721033538634114x^{55} + \\
& 138483655156632952275567060779112531466726829591x^{56} + \\
& 836463558039531139582619885408440950298551362918x^{57} - \\
& 357773093966464250496510754685314065020434327459x^{58} - \\
& 2397572132773692449972745475889858361918040101546x^{59} + \\
& 768528992524023637411936421724095555722647022253x^{60} + \\
& 5894374669015964035425375364530645589183432463532x^{61} - \\
& 1369878675319019487740616996254165186121553118035x^{62} - \\
& 12451823157746928283548944649431479142417501938179x^{63} + \\
& 2022017238374635811740832236539463905035910815113x^{64} + \\
& 22651018398777680925240151182656344585747949218000x^{65} - \\
& 2470836229919363567724020370226514132619460448548x^{66} - \\
& 35562588638577680510810869956837080084202151152784x^{67} + \\
& 2518748272826072507089151832184552533824420185028x^{68} + \\
& 48297231429038403721493579182376418837576996542856x^{69} - \\
& 2214314443233722111215154885122804984730629745017x^{70} - \\
& 56853662633089501387197039794860584577625202506807x^{71} + \\
& 1840060686834467071509838088596287620109406716253x^{72} + \\
& 58108956893985244792626631820819874852827595734482x^{73} - \\
& 1663686318314317841079372547640439377944773040445x^{74} - \\
& 51633961702169960176764777680735921351860558195322x^{75} + \\
& 1702269096045947570656987398162066715282497575553x^{76} + \\
& 39919921295002750153428727622724287368812740977576x^{77} - \\
& 1748460580007129897131836443795052033963692270273x^{78} - \\
& 26862395467212628355493055696360534462358413570308x^{79} + \\
& 1602868306377267328085956018975174526702132429113x^{80} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 15729895582837114540582097103218373920855680131592x^{81} - \\
& 1246947738060531925950689457494415226204395086642x^{82} - \\
& 8010417440869034806227486695246210894546864191445x^{83} + \\
& 812807805724756266170556008275489454254614708238x^{84} + \\
& 3543809487121956695769622373636215496253184082939x^{85} - \\
& 444047531170570566328567191327647026125783327570x^{86} - \\
& 1360034665691746377203076235209263222629638097106x^{87} + \\
& 204017601948080197825246313532836477553968615368x^{88} + \\
& 452005466074584079311602817561736138432313847316x^{89} - \\
& 79112922645690820922042018468673398611689947423x^{90} - \\
& 129838744234419019077702710246793796130819268894x^{91} + \\
& 25968473803066199452124961642296567223184176771x^{92} + \\
& 32167056962134644928083456897538846715468365081x^{93} - \\
& 7232427115622104105998830078306131616319083994x^{94} - \\
& 6857463982703248151332637844915957945040702486x^{95} + \\
& 1712456199002200066896315799138249491193357028x^{96} + \\
& 1254571553584855464912237849307490250766083294x^{97} - \\
& 345327340100126832187138513088378059038657851x^{98} - \\
& 196263443310593359268470079121057609170887801x^{99} + \\
& 59400289741450268891445972905820058752203347x^{100} + \\
& 26104619635872942573075637798466637583572162x^{101} - \\
& 8722094424514298052035003744342160705370027x^{102} - \\
& 2922823833139123594746827968542006899881092x^{103} + \\
& 1091950273483654811578742537601320664026133x^{104} + \\
& 270567900193658604720850900713961997988772x^{105} - \\
& 115986992642117906114003026051797096310821x^{106} - \\
& 20027321510484134803187989302890303887708x^{107} + \\
& 10345495768987909273727671318275530307593x^{108} + \\
& 1106579110698492290202506674951204294666x^{109} - \\
& 761896202381901597750883899954791545308x^{110} - 37490123025815057443063363473317568345x^{111} + \\
& 45245548871473318675276948248599232790x^{112} - 69845834029567070116227562026057635x^{113} - \\
& 2102011492986728979703912229378590670x^{114} + 97711651716729205271894427916703800x^{115} + \\
& 73555151848859315408266337151110000x^{116} - 6454962259090450989492008598241600x^{117} - \\
& 1844456054559257765597850962737200x^{118} + 238967514825930526075828819460000x^{119} + \\
& 30739514002710801839359729248000x^{120} - 5591717031117774150418451640000x^{121} - \\
& 293032539128210872669883680000x^{122} + 82386001607040137727041600000x^{123} + \\
& 871059440237948873552000000x^{124} - 722384265447172393584000000x^{125} + \\
& 8234562669686880000000000x^{126} + 3391177756974129920000000x^{127} - 58940876047165440000000x^{128} - \\
& 7380395951001600000000x^{129} + 54189660569600000000x^{130} + 5954215936000000000x^{131} + \\
& 47775744000000000x^{132}) / \\
& ((-1+x)(1+x)(1+2x)(-1+4x)(1+4x)(1-8x+4x^2)(1+5x+5x^2)(1+7x+8x^2)(1+18x+63x^2+50x^3+13x^4+ \\
& x^5)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+18x-91x^2+110x^3+ \\
& 175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+175x^7+25x^8)(-1+ \\
& 121x-3901x^2+49003x^3-293115x^4+896942x^5-1381585x^6+970100x^7-264304x^8+15552x^9)(-1+8x+ \\
& 14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+302x^4+65x^5-120x^6- \\
& 62x^7+4x^8+7x^9+x^{10})(1-36x+504x^2-3603x^3+14416x^4-33263x^5+44489x^6-34794x^7+16069x^8-4345x^9+ \\
& 653x^{10}-47x^{11}+x^{12})(1+53x+951x^2+7589x^3+32774x^4+84127x^5+133734x^6+133056x^7+81936x^8+ \\
& 30215x^9+6265x^{10}+650x^{11}+25x^{12})(1+92x+3048x^2+50453x^3+483576x^4+2928888x^5+11832412x^6+ \\
& 32949126x^7+64377394x^8+88750186x^9+85833700x^{10}+57206921x^{11}+25441290x^{12}+7182529x^{13}+ \\
& 1203428x^{14}+111956x^{15}+5340x^{16}+120x^{17}+x^{18})(1-66x+1833x^2-28651x^3+283174x^4-1881547x^5+ \\
& 8719340x^6-28859906x^7+69342834x^8-122339404x^9+159752386x^{10}-155169581x^{11}+112318552x^{12}- \\
& 60476870x^{13}+24066800x^{14}-6990095x^{15}+1450676x^{16}-207780x^{17}+19365x^{18}-1050x^{19}+25x^{20})) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 10x(-42 + 313864x^2 - 851142342x^4 + 1235764748147x^6 - 1130051840878650x^8 + 711776772859760335x^{10} - \\
& 326808647822865467172x^{12} + 113746719527560037690911x^{14} - 30882824693724401421476206x^{16} + \\
& 6685785526149426988979143964x^{18} - 1174395530723402676670266857496x^{20} + \\
& 169787858338662268550962070725389x^{22} - 20447624321970200692815309411305688x^{24} + \\
& 2072486682581050038132580005319863544x^{26} - 178378165031459557413137310844961534002x^{28} + \\
& 13140613813827635294551010663030721400270x^{30} - \\
& 83436190935833738818982963523260507772794x^{32} + \\
& 45949346183864680072918093762551215377347315x^{34} - \\
& 2207189611066353743874973361342771591837328318x^{36} + \\
& 92950077601265825709297627456440947651076556442x^{38} - \\
& 3447599576641764810918654136816230774514796386460x^{40} + \\
& 113099555040864112998132343225638149527092703409572x^{42} - \\
& 3294037009849222735481930981652981527994459178101348x^{44} + \\
& 85467355920785875887506546322683528920065446095040666x^{46} - \\
& 1981501993103321464977498652187042497986559330536679380x^{48} + \\
& 41159223063649420115408008431119917827653388745530863803x^{50} - \\
& 767733968495092808641072045451177305261207106665326586854x^{52} + \\
& 12884088271253271927947296246117730762555055135866016240025x^{54} - \\
& 194832687457259468087278107720230470490843494153683260959844x^{56} + \\
& 2657929857601800051153891612245796291758739851730136878366341x^{58} - \\
& 32738515584454881345855021030693888247111599798817043104592162x^{60} + \\
& 364278662366944196978569695940572497001506478922098037569576304x^{62} - \\
& 3662481313316366767319493197768343024435170684728101420568864792x^{64} + \\
& 33273067189236408214698788940655843200761627850306821734694498691x^{66} - \\
& 273096217009350901800040911285975831728643715709406174552697244274x^{68} + \\
& 2024481149545022365184511724303612665903492826755559296230430391829x^{70} - \\
& 13549226399353760094452922786305674279247489848279385355134230614622x^{72} + \\
& 81831153372179192707289350315822852529937431121635370233968701727658x^{74} - \\
& 445772438867631837266182716247949117396455096916351783398792708217488x^{76} + \\
& 2189182799263529530654515168823671592260568498940750798325264389021197x^{78} - \\
& 9687562414044150105829596300708578291192808627674188126416367089884512x^{80} + \\
& 38611110700755436269236964409736594630710832673889663424913234790832251x^{82} - \\
& 138546144639359591068732290848007552523448617267006332701427139013129812x^{84} + \\
& 447405696394706376198597483305419137272274034181274240871531788595314525x^{86} - \\
& 1299865841576273613761701443266421230567765761742941402339374338262038198x^{88} + \\
& 3396856726106366392645924319574043893374131641404506686507999438374175222x^{90} - \\
& 7982839265228523478281247823351084560339331794647678554957075955052145470x^{92} + \\
& 16868926548951469899928723924287621948430107464872844263693427932028062077x^{94} - \\
& 32051201701686736796035211969036638398713261706142549038799559577412636628x^{96} + \\
& 54756067413833880108800038019197116428476534398815345424142499733199689076x^{98} - \\
& 84116428856431987450497875214510152632789374971245335234373903935407700272x^{100} + \\
& 116209593690478590774299229200101703480209878294271640801103917286808641080x^{102} - \\
& 144406286502293100272056216024615887671310821635766905142830755770851881228x^{104} + \\
& 161434830593758860883462763006696567086788248705659441374774310160696992061x^{106} - \\
& 162393125192600024300745473933059205037158521537869945356220247541005527076x^{108} + \\
& 147025126734291550558084933415921346658856781537816043080259487976085360647x^{110} - \\
& 119828120546339826383406669606868572885516437140154031617109391756956593132x^{112} + \\
& 87932121515729300014343507030655810476533180306989529451900217898082341476x^{114} - \\
& 58105601281303824810400477131287154123082930771268693941708015656151466080x^{116} + \\
& 34578401109947820251526098874007332074505087242622980402791400190538573085x^{118} - \\
& 18531527768350768903955133894128040095396248937133246986327603756194477178x^{120} + \\
& 8943381048386568229770163431879018794275728311067420377392501633845078913x^{122} - \\
& 3885950097942957253543669426596472161078784818414557879048781683259698910x^{124} + \\
& 1519739400721375416874073631095812738914433828454132253328903861353696004x^{126} - \\
& 534730218820996724487414090898744856830627416881002519575707424200421110x^{128} + \\
& 169181449268700732022768576581979072653789357328542536510795271695542822x^{130} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 48097129127070040774771899300916907929305076085635659101947088719076332x^{132} + \\
& 12276176832594508346366575366484654498329064751834013738455362036811212x^{134} - \\
& 2810235064489231077029533098439043286398257023301653096148996475543742x^{136} + \\
& 576287812517470580530577828240339641030413956992145114517601453147511x^{138} - \\
& 105718970529165839532622368262894087751056370743326307527966406064532x^{140} + \\
& 17321782246578449507536703928824102708052660661470229487773139661698x^{142} - \\
& 2530276925018341797904936864100643494147857521233103374358475270804x^{144} + \\
& 328833913321337246618649319418020949345078318804252358692922274802x^{146} - \\
& 37930331383452395272392254586869353387290643030741766220069676836x^{148} + \\
& 3872723717303709475093538522228919041281720671027582887414515176x^{150} - \\
& 348904622825961341705930089455120449886760849754688780952903620x^{152} + \\
& 27636507074247403253215204934323013412422159426991326884328925x^{154} - \\
& 1916495090976212998851907979462263809055814145275746084290884x^{156} + \\
& 10430950519870815402120276740507496451374763236449582800x^{164} + \\
& 336343214263458003667277345626013161094409447476815750x^{166} - \\
& 8984504210731988900438530973514548043759658509323750x^{168} + \\
& 194204573884366489143173291826736961135001039337500x^{170} - \\
& 3267692220850107774517111035703187810808592182500x^{172} + \\
& 39541220457391557236964949469685704043566209375x^{174} - \\
& 266665955532110137591464036389141582138856250x^{176} - \\
& 880294790033078497219602036905620090000000x^{178} + \\
& 47052457070586921926313171546035372500000x^{180} - 600945674879069863433016053011350000000x^{182} + \\
& 4329105872907071408304286126000000000x^{184} - 18614930530108161917762400000000000x^{186} + \\
& 44979276158405373945600000000000x^{188} - 52407753203528448000000000000x^{190} + \\
& 2085530568704000000000000000x^{192})/ \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-13x+11x^2)(1-8x+ \\
& 11x^2)(1+8x+11x^2)(1+13x+11x^2)(1-12x^2+8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(-1+104x-2661x^2+24090x^3- \\
& 91993x^4+158236x^5-121128x^6+44736x^7-7808x^8+512x^9)(1+104x+2661x^2+24090x^3+91993x^4+ \\
& 158236x^5+121128x^6+44736x^7+7808x^8+512x^9)(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6- \\
& 4525x^7+1975x^8+2500x^9-875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+ \\
& 4525x^7+1975x^8-2500x^9-875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+ \\
& 60858x^6-12548x^7-46005x^8+16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+ \\
& 22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}- \\
& 329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})(1-82x+2898x^2-59227x^3+789803x^4-7334275x^5+49339066x^6- \\
& 246611784x^7+930982131x^8-2681675595x^9+5927069364x^{10}-10071216252x^{11}+13140900495x^{12}- \\
& 13114381556x^{13}+9943609371x^{14}-5673467839x^{15}+2404556811x^{16}-744137999x^{17}+164387022x^{18}- \\
& 25156085x^{19}+2562619x^{20}-164923x^{21}+6260x^{22}-125x^{23}+x^{24})(1+82x+2898x^2+59227x^3+789803x^4+ \\
& 7334275x^5+49339066x^6+246611784x^7+930982131x^8+2681675595x^9+5927069364x^{10}+10071216252x^{11}+ \\
& 13140900495x^{12}+13114381556x^{13}+9943609371x^{14}+5673467839x^{15}+2404556811x^{16}+744137999x^{17}+ \\
& 164387022x^{18}+25156085x^{19}+2562619x^{20}+164923x^{21}+6260x^{22}+125x^{23}+x^{24})(1-104x+4410x^2- \\
& 104155x^3+1561045x^4-15952817x^5+116275468x^6-623060570x^7+2507306175x^8-7693787635x^9+ \\
& 18199448138x^{10}-33436393552x^{11}+47933912805x^{12}-53730741510x^{13}+47072037995x^{14}-32132854819x^{15}+ \\
& 16992690151x^{16}-6899340865x^{17}+2123302560x^{18}-486469225x^{19}+80870375x^{20}-9387875x^{21}+715250x^{22}- \\
& 31875x^{23}+625x^{24})(1+104x+4410x^2+104155x^3+1561045x^4+15952817x^5+116275468x^6+623060570x^7+ \\
& 2507306175x^8+7693787635x^9+18199448138x^{10}+33436393552x^{11}+47933912805x^{12}+53730741510x^{13}+ \\
& 47072037995x^{14}+32132854819x^{15}+16992690151x^{16}+6899340865x^{17}+2123302560x^{18}+486469225x^{19}+ \\
& 80870375x^{20}+9387875x^{21}+715250x^{22}+31875x^{23}+625x^{24}))+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -20x(12 - 36233x^2 + 35693525x^4 - 18015088281x^6 + 5544243396574x^8 - 1140498928876223x^{10} + \\
& 165784297773487726x^{12} - 17659082811422467959x^{14} + 1413747980204751728411x^{16} - \\
& 86712812542489990236049x^{18} + 4139783491801797354374336x^{20} - 155976703325674603887820165x^{22} + \\
& 4695170776839340840967375255x^{24} - 114132018850569329682605350253x^{26} + \\
& 2260921906876186678981281116392x^{28} - 36771687605301104127340111100417x^{30} + \\
& 493809392736966628417744981828282x^{32} - 5496514036146995436911463800815519x^{34} + \\
& 50801602467190410672105857414795571x^{36} - 389638103580670814183312541635836105x^{38} + \\
& 2470500312785634497681191154896104823x^{40} - 12837177451800051118585034431008799804x^{42} + \\
& 53707861081585046034005118053286201463x^{44} - 174115790501291591107223590801974694251x^{46} + \\
& 393881431087274978644674738635632440874x^{48} - 351103829225154254734893983224668896264x^{50} - \\
& 171272740039317529261208419925226403602x^{52} + 10533391603117541298754751466523385355409x^{54} - \\
& 34228559924503375918144129551284191775333x^{56} + 80288657332318482346781605324023689202959x^{58} - \\
& 146569330004818274830798372339984793020723x^{60} + \\
& 214485835521386635407406558034397997694437x^{62} - \\
& 255269964316562780616534033897514913410482x^{64} + \\
& 249100865204895186426356477997558201184145x^{66} - \\
& 200326432092412817356607982959633536599604x^{68} + \\
& 133231849164372820331579064825007668419343x^{70} - \\
& 73467374652032533560455497947111132742429x^{72} + 33652874976731492525893788655422058390791x^{74} - \\
& 12822449712227472973878582738869948148858x^{76} + 4066977863853705603986355769215115494264x^{78} - \\
& 1073928383588405271419554429292303079964x^{80} + 235941613641636492215234204957809084050x^{82} - \\
& 43061906258254333102247139321023972679x^{84} + 6511919119987911315675092886316998195x^{86} - \\
& 812746119034732679187931909889357613x^{88} + 83260609150888784743201085359158870x^{90} - \\
& 6948602517050959224143088698286450x^{92} + 467658564024256759618996160805700x^{94} - \\
& 25038227012225248707574504136100x^{96} + 1046682062822702699778633624000x^{98} - \\
& 33276179695900052675350996250x^{100} + 773608690503924003517654375x^{102} - \\
& 12328139666261194870390000x^{104} + 118258166454843810700000x^{106} - 440077648384537400000x^{108} - \\
& 2116229832156000000x^{110} + 17656673320000000x^{112})/ \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(-1+9x-6x^2+x^3)(1+9x+6x^2+x^3)(1-12x^2+ \\
& 8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(1-59x+402x^2-863x^3+572x^4)(1+59x+402x^2+863x^3+572x^4)(1-18x+93x^2- \\
& 195x^3+164x^4-37x^5+x^6)(1+18x+93x^2+195x^3+164x^4+37x^5+x^6)(1-33x+375x^2-1922x^3+5192x^4- \\
& 7883x^5+6797x^6-3252x^7+834x^8-105x^9+5x^{10})(1+33x+375x^2+1922x^3+5192x^4+7883x^5+6797x^6+ \\
& 3252x^7+834x^8+105x^9+5x^{10})(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6-4525x^7+1975x^8+2500x^9- \\
& 875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+4525x^7+1975x^8-2500x^9- \\
& 875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+60858x^6-12548x^7-46005x^8+ \\
& 16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+ \\
& 2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}-329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})) \\
& -10x(-9+4699x^2-611640x^4+39853698x^6-1654541277x^8+47171448683x^{10}-907848961210x^{12}+ \\
& 11283990656808x^{14}-87630117751305x^{16}+424309837572525x^{18}-1316944054137175x^{20}+ \\
& 2715321651741897x^{22}-3844967038911191x^{24}+3841989868583469x^{26}-2764056440448407x^{28}+ \\
& 1450624056331021x^{30}-558782965472919x^{32}+157793958793899x^{34}-32350122050946x^{36}+ \\
& 4715296752120x^{38}-470462657040x^{40}+30019059200x^{42}-1072166400x^{44}+15360000x^{46})/ \\
& ((-1+4x)(1+4x)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+ \\
& 18x-91x^2+110x^3+175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+ \\
& 175x^7+25x^8)(-1+8x+14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+ \\
& 302x^4+65x^5-120x^6-62x^7+4x^8+7x^9+x^{10}))+ \\
& \frac{20x(1+11x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)} + \frac{4x}{1-4x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,2}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{10,8}^{TG}(x) = \\
&2x(46 + 1376x - 217625x^2 - 3180944x^3 + 345272944x^4 + 2490792541x^5 - 270947482370x^6 - 869665513372x^7 + \\
&126629126161460x^8 + 98949137339289x^9 - 39376684889493468x^{10} + 42285392372031707x^{11} + \\
&8584595987201580737x^{12} - 23283523171385601670x^{13} - 1335302299814544715435x^{14} + \\
&5591333078113361960712x^{15} + 149360639878168136676722x^{16} - 824089151275096662900673x^{17} - \\
&12157213128401490596058106x^{18} + 82301527251852610260951207x^{19} + 732909361120852753953328426x^{20} - \\
&5895879797569636310659879862x^{21} - 33381771502384436510944678661x^{22} + \\
&315427428241304314512677601615x^{23} + 1171670620109532384089041441404x^{24} - \\
&12987244764595246253258802545575x^{25} - 32336082777167266312396782218377x^{26} + \\
&420925951025249041794783348621726x^{27} + 718419992365757170664898344964382x^{28} - \\
&10918053790902226856605466458871501x^{29} - 13271957917324789528048438726531448x^{30} + \\
&229171334962491461628745738446414019x^{31} + 213443441025950269955959028000690656x^{32} - \\
&3914234058789326860692196284312129082x^{33} - 3148734347714652982231344767589293571x^{34} + \\
&54323429284989387948670246212459893123x^{35} + 43912818088464812257037761730749993098x^{36} - \\
&605089443498881414084357682635175774439x^{37} - 569044389491347853877462049307892156000x^{38} + \\
&5220878715557154021521940649621624708556x^{39} + 6508844235431769745634483161682747172238x^{40} - \\
&31312949416002620684089448770078672506466x^{41} - \\
&62035830840273142151188778864117775173393x^{42} + \\
&67512628467109223629597552547600738952341x^{43} + \\
&462907281695254776364394321916294822366064x^{44} + \\
&1150124058798841207872277950691887252424236x^{45} - \\
&2410182015256556554130934737402442011296299x^{46} - \\
&18754721304177397859154779848784596070275562x^{47} + \\
&4962104925741844239442989645754202672438839x^{48} + \\
&169758079278535377469176905380650808809742304x^{49} + \\
&54052188532350338377479734227653232530498138x^{50} - \\
&1131008694484192945943456981819758756987583345x^{51} - \\
&759034479578625186383320251391183487501152119x^{52} + \\
&5954762641859609723077421357174788441276243938x^{53} + \\
&5612173118486469325689348069142749587262366922x^{54} - \\
&25489175486849636471886692127487291959461863406x^{55} - \\
&30019686442850459092441957656457165179295004306x^{56} + \\
&89985461770519080059824895833497768232283164842x^{57} + \\
&125691788607120374541898678027073834967579401174x^{58} - \\
&264366614752423292209687714467067498056940890129x^{59} - \\
&425820964430437903944612588986299081415885400978x^{60} + \\
&650976669947374612296683257977166112910923720123x^{61} + \\
&1188703767239106054126143922355195992679894728960x^{62} - \\
&1353296239898151274059150672954433907226753504806x^{63} - \\
&2767281816129362135768674864514868778733773403653x^{64} + \\
&2395621671027669188498243311822840507575709395500x^{65} + \\
&5420566816035425459789297705449835170964008715468x^{66} - \\
&3650625899243473324174186157879930401833690632566x^{67} - \\
&8997976453880767229880718788619205251627196849578x^{68} + \\
&4854819742548640375441950937784538235836118141929x^{69} + \\
&12731557017044046684671074340866010238708468090132x^{70} - \\
&5724208601734121665800860540698772826573127087233x^{71} - \\
&15426783914798362981527390347385743704957570089333x^{72} + \\
&6077797748927983466026725091623157745811805483448x^{73} + \\
&16063353171802888804627345774351313761042115444640x^{74} - \\
&5875682027878365971877426842763458962810581443698x^{75} - \\
&14405586845732333037850316400535990454391828922158x^{76} + \\
&5186036756143243526701553286115820157105851667504x^{77} + \\
&11136286258416877782524292946881844145240727987288x^{78} - \\
&4153802824303357314079316825108239450773342885167x^{79} - \\
&7416572048805349048127510539219254423365083376368x^{80} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2984265773587600318869087312497624561619586174703x^{81} + \\
& 4245518590261815168573619073151459546774801293537x^{82} - \\
& 1898435914021288164803623857464026933895627941070x^{83} - \\
& 2079937923475563486330468292587554114548440743983x^{84} + \\
& 1057210719172001069112356503595008899583148477781x^{85} + \\
& 865944715115122099326420674211937384288933422460x^{86} - \\
& 510734652696903103332658964865624399826584743324x^{87} - \\
& 302901037843214641894844222443821209138136544428x^{88} + \\
& 212530933938864837536292678753092572360096982854x^{89} + \\
& 87309084084137500607540885183987263384304327603x^{90} - \\
& 75734576997170395238432074996691684149914395296x^{91} - \\
& 19974064830365800389464801498909415866432312556x^{92} + \\
& 22985323372962285318373270166478668391125030269x^{93} + \\
& 3304460544302352241560753768707271516305254934x^{94} - \\
& 5907731266157350861142552516140918155755433094x^{95} - \\
& 259528667464077236283453436569295472213918308x^{96} + \\
& 1277479490924279792619375439640087922462799641x^{97} - \\
& 53203266964195556918208247846968114802813954x^{98} - \\
& 230529761578347467223073696774946655307690019x^{99} + \\
& 27252543052661342103050406885836549509517623x^{100} + \\
& 34351237308971591042846502793485554346765628x^{101} - \\
& 6565382661406655339356714288977195154418648x^{102} - \\
& 416523166605994909120688460553707425838888x^{103} + \\
& 1112683444078636053151050947679836406781002x^{104} + \\
& 402029938059366565160971118106761505237548x^{105} - \\
& 143724121948666277674972862479485096687194x^{106} - \\
& 29743081168358793753045310712143140234077x^{107} + \\
& 14496299929026094319092178814968444596222x^{108} + \\
& 1553736431253179444912012128817607803139x^{109} - 1147387095010303616425607954772857449487x^{110} - \\
& 42648478160269384804251550283231418570x^{111} + 70922276437071877542468838023316116985x^{112} - \\
& 1055374653794311655436952413967693165x^{113} - 3382762184718203434466266747444119700x^{114} + \\
& 187508486538742325262154515889915800x^{115} + 122145945422660334353025075463146600x^{116} - \\
& 10807608789892071407961638630040400x^{117} - 3247293087244926802378830712639200x^{118} + \\
& 379503922816969678282015518328000x^{119} + 61099223165915795540454289944000x^{120} - \\
& 8736442405643690427276805160000x^{121} - 769610406856795845379585920000x^{122} + \\
& 130258585332331027154256000000x^{123} + 6013684165721471766720000000x^{124} - \\
& 1187971120530700538640000000x^{125} - 26851833413180858368000000x^{126} + \\
& 5926564650703299840000000x^{127} + 74087465438689280000000x^{128} - 13022898156236800000000x^{129} - \\
& 186621766860800000000x^{130} + 8236163072000000000x^{131} + 143327232000000000x^{132}) / \\
& ((-1+x)(1+x)(1+2x)(-1+4x)(1+4x)(1-8x+4x^2)(1+5x+5x^2)(1+7x+8x^2)(1+18x+63x^2+50x^3+13x^4+ \\
& x^5)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+18x-91x^2+110x^3+ \\
& 175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+175x^7+25x^8)(-1+ \\
& 121x-3901x^2+49003x^3-293115x^4+896942x^5-1381585x^6+970100x^7-264304x^8+15552x^9)(-1+8x+ \\
& 14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+302x^4+65x^5-120x^6- \\
& 62x^7+4x^8+7x^9+x^{10})(1-36x+504x^2-3603x^3+14416x^4-33263x^5+44489x^6-34794x^7+16069x^8-4345x^9+ \\
& 653x^{10}-47x^{11}+x^{12})(1+53x+951x^2+7589x^3+32774x^4+84127x^5+133734x^6+133056x^7+81936x^8+ \\
& 30215x^9+6265x^{10}+650x^{11}+25x^{12})(1+92x+3048x^2+50453x^3+483576x^4+2928888x^5+11832412x^6+ \\
& 32949126x^7+64377394x^8+88750186x^9+85833700x^{10}+57206921x^{11}+25441290x^{12}+7182529x^{13}+ \\
& 1203428x^{14}+111956x^{15}+5340x^{16}+120x^{17}+x^{18})(1-66x+1833x^2-28651x^3+283174x^4-1881547x^5+ \\
& 8719340x^6-28859906x^7+69342834x^8-122339404x^9+159752386x^{10}-155169581x^{11}+112318552x^{12}- \\
& 60476870x^{13}+24066800x^{14}-6990095x^{15}+1450676x^{16}-207780x^{17}+19365x^{18}-1050x^{19}+25x^{20})) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 10x^2(-1104 + 5489423x^2 - 11166526727x^4 + 12992482181651x^6 - 9970482068563665x^8 + \\
& 5463389849244066039x^{10} - 2247593052404730178653x^{12} + 717994844547678609637470x^{14} - \\
& 182334854645136459340349488x^{16} + 37440189828668690609959232069x^{18} - \\
& 6297027295578297540584449391469x^{20} + 876550965774781289080259532128824x^{22} - \\
& 101877845327018065269714137272473196x^{24} + 9962683575392788477859919262886347506x^{26} - \\
& 825322123947922609252892814717057679516x^{28} + 58271170299859004098568603799993894174099x^{30} - \\
& 3525352970006782250450029168391184616533527x^{32} + \\
& 183621735164227590804154775053000140402220648x^{34} - \\
& 8267983639168737809249500398007700850024626488x^{36} + \\
& 3229533831172839259761629034957305196473808326282x^{38} - \\
& 10974405200407601633684939620120463026087146971786x^{40} + \\
& 325130800347790286980601863591328563457431826782290x^{42} - \\
& 8409462008138200207569142861794144623991160010655192x^{44} + \\
& 189971039388045686773284792960863481711769015687733985x^{46} - \\
& 3744776736631884218707526296039909502689469086987196969x^{48} + \\
& 6423268970339222018657101730261546132417343525391255545x^{50} - \\
& 952953187598434172676732640196393299241186881743478300249x^{52} + \\
& 12083749961002920693284516648690254498358820989186450750753x^{54} - \\
& 127758882843339023010133437955070856652150374218565986826205x^{56} + \\
& 1060436894984722647355390033262675461605698143869707636470258x^{58} - \\
& 5578379141164463376614546655685636069840073343987765045294554x^{60} - \\
& 10427656698488101417875342523887690886263909091754325463653911x^{62} + \\
& 725442888058351328437001423058924356121735217718522933326895415x^{64} - \\
& 11283871457189743038866632267211015171196313817367509084441149037x^{66} + \\
& 123953790298522306390293990368999496946345721526170198757538671151x^{68} - \\
& 1103440027186411439525322079826094067237820514889803835049239911308x^{70} + \\
& 8341853473056395483062733123650716637104917836373184312279992156092x^{72} - \\
& 54735259583826639715075136217830108711357098803422894443015967897123x^{74} + \\
& 315476015292533985446527594231872942098819557292288865080166151837941x^{76} - \\
& 1608913298121882475600130126947086520991155295288579927774622946385145x^{78} + \\
& 7295210745830573214615062539664771995602228448456647080760360259761735x^{80} - \\
& 29505256306569733592036724868735223209887363780739351770305902928783111x^{82} + \\
& 106688599723094166420838178302588828173607020290382466689712885648565229x^{84} - \\
& 345473772001966422860870668895843542278295816551743187357102775499577074x^{86} + \\
& 1003038951507466297073599664538120582275966218493624000842531349973293020x^{88} - \\
& 2613457322529287088157561993775973185678172326968841477836792229068505179x^{90} + \\
& 6115025411967736538022887659443140334121681950470623627424520141804910195x^{92} - \\
& 12855411954205705282780857733283133752777361686908028384141399028046170644x^{94} + \\
& 24291163719594743808249036669579249075294296823518204448323548152336046430x^{96} - \\
& 41268652918348465205108886806108028081309596840096840922452243872342556226x^{98} + \\
& 63054084658527857988642951409933325866248806355931062915906886536825961060x^{100} - \\
& 86660659739172570039038765406127146302167719816871622044646736639539796443x^{102} + \\
& 107159169194901307945439981715053201179114757308066644634855855635929910401x^{104} - \\
& 119236102642969254186727449597031896009856206687964454218282254651890395457x^{106} + \\
& 119404182756961980107198326922607471895150502977923449530589844389718579427x^{108} - \\
& 107625510919584127409765271065993521918724926108183003878761949009520584410x^{110} + \\
& 87323557920550269807819385823470661631930223616892123471967000168610351334x^{112} - \\
& 63780493049113840339124144934440624517891039195968729241835444310634412105x^{114} + \\
& 41935746697584809479042402513817088437682973866062658446966636772125324075x^{116} - \\
& 24819767393875362365976905518674291340772264932492866999736943427229759795x^{118} + \\
& 13221434170975841307671978878796767714367069310416273974919498385525265347x^{120} - \\
& 6337949554158998135228007691556653964516511007021738736572075453308259606x^{122} + \\
& 2733370741706075247824304531703266812227772175523565438228171653849775934x^{124} - \\
& 1060190194469032444391708630235555751446628004968337690280254496218389322x^{126} + \\
& 369677874895650267165368737393457933933133905708985012065238074251974296x^{128} - \\
& 115823500925066771247257491935543452420478836067286994317996610282812354x^{130} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 32586639489960221090642892175330800805491477093055717864050705956177268x^{132} - \\
& 8227001374346177821969032220749017786837257001661541147736631270934417x^{134} + \\
& 1862263703755046686915929765647974894660271606313311907212125161047017x^{136} - \\
& 377590353425249818266299858942934875413754617415496566482067809546802x^{138} + \\
& 68501660497029754352400168967407895507258531456907942410368713926120x^{140} - \\
& 11105365183430858507629457683684843169630429304793560853163166939810x^{142} + \\
& 1606531109473718534594530182665952079562954439432361598630717186236x^{144} - \\
& 207040173678939354726729332698936652911106381521251519357889105280x^{146} + \\
& 23725381454208217615297576176963428232818874679802766445008594690x^{148} - \\
& 2412310961657048946296173910145662411783527155642611007337012021x^{150} + \\
& 217095118910027467160288291483232288984125117244905095790365759x^{152} - \\
& 17244238890870092795654597417700220025987925425589658553559407x^{154} + \\
& 1205077512777402031615916716203648867995217155679218833218371x^{156} - \\
& 73815890507916320676911789220378258814331426144792858248950x^{158} + \\
& 3946234528864430181274400320996867933891840096143776755490x^{160} - \\
& 183208374687979113510601425933222783247296920338183962750x^{162} + \\
& 7343470634529034263997971855872818683791273206571064850x^{164} - \\
& 252386024928336323757054707034042564283133498762815500x^{166} + \\
& 7377219808182764935914860042284586198735853854686500x^{168} - \\
& 181608181279946828536236488212847960492136084478125x^{170} + \\
& 3720870390260477293342366907407412832343772765625x^{172} - \\
& 62531478159246985678688894033140505718654706250x^{174} + \\
& 846486577971149809174369696179591097754012500x^{176} - \\
& 9020287465658281265111985694080724339000000x^{178} + \\
& 73447683765231069508597890169422765000000x^{180} - \\
& 439311193933486419544786460231500000000x^{182} + 1829042325676928704927548200000000000x^{184} - \\
& 4909393424488807413731360000000000x^{186} + 755922424068229524480000000000x^{188} - \\
& 5500825133923328000000000000x^{190} + 145126277120000000000000x^{192}))/ \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-13x+11x^2)(1-8x+ \\
& 11x^2)(1+8x+11x^2)(1+13x+11x^2)(1-12x^2+8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(-1+104x-2661x^2+24090x^3- \\
& 91993x^4+158236x^5-121128x^6+44736x^7-7808x^8+512x^9)(1+104x+2661x^2+24090x^3+91993x^4+ \\
& 158236x^5+121128x^6+44736x^7+7808x^8+512x^9)(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6- \\
& 4525x^7+1975x^8+2500x^9-875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+ \\
& 4525x^7+1975x^8-2500x^9-875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+ \\
& 60858x^6-12548x^7-46005x^8+16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+ \\
& 22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}- \\
& 329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})(1-82x+2898x^2-59227x^3+789803x^4-7334275x^5+49339066x^6- \\
& 246611784x^7+930982131x^8-2681675595x^9+5927069364x^{10}-10071216252x^{11}+13140900495x^{12}- \\
& 13114381556x^{13}+9943609371x^{14}-5673467839x^{15}+2404556811x^{16}-744137999x^{17}+164387022x^{18}- \\
& 25156085x^{19}+2562619x^{20}-164923x^{21}+6260x^{22}-125x^{23}+x^{24})(1+82x+2898x^2+59227x^3+789803x^4+ \\
& 7334275x^5+49339066x^6+246611784x^7+930982131x^8+2681675595x^9+5927069364x^{10}+10071216252x^{11}+ \\
& 13140900495x^{12}+13114381556x^{13}+9943609371x^{14}+5673467839x^{15}+2404556811x^{16}+744137999x^{17}+ \\
& 164387022x^{18}+25156085x^{19}+2562619x^{20}+164923x^{21}+6260x^{22}+125x^{23}+x^{24})(1-104x+4410x^2- \\
& 104155x^3+1561045x^4-15952817x^5+116275468x^6-623060570x^7+2507306175x^8-7693787635x^9+ \\
& 18199448138x^{10}-33436393552x^{11}+47933912805x^{12}-53730741510x^{13}+47072037995x^{14}-32132854819x^{15}+ \\
& 16992690151x^{16}-6899340865x^{17}+2123302560x^{18}-486469225x^{19}+80870375x^{20}-9387875x^{21}+715250x^{22}- \\
& 31875x^{23}+625x^{24})(1+104x+4410x^2+104155x^3+1561045x^4+15952817x^5+116275468x^6+623060570x^7+ \\
& 2507306175x^8+7693787635x^9+18199448138x^{10}+33436393552x^{11}+47933912805x^{12}+53730741510x^{13}+ \\
& 47072037995x^{14}+32132854819x^{15}+16992690151x^{16}+6899340865x^{17}+2123302560x^{18}+486469225x^{19}+ \\
& 80870375x^{20}+9387875x^{21}+715250x^{22}+31875x^{23}+625x^{24}))+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 20x^2(-234 + 320088x^2 - 136124684x^4 + 19593775368x^6 + 2051776259798x^8 - 1228350029049507x^{10} + \\
& 222968262737347774x^{12} - 24260112070770702232x^{14} + 1822705736380052048069x^{16} - \\
& 100916244524214917441711x^{18} + 4280351276362169014606513x^{20} - 142714587242091466173878208x^{22} + \\
& 3809244824928988744064951017x^{24} - 82520285133755774770493062281x^{26} + \\
& 1467444186063988950248319979540x^{28} - 21645799220520736094505619118872x^{30} + \\
& 267673821756028722432428512055244x^{32} - 2806982839652108649030286648082110x^{34} + \\
& 25272503448488173051336420691992951x^{36} - 197780012316676527080052996403029466x^{38} + \\
& 1359169178626735798084611650934559940x^{40} - 8248031136427815283635899573046948609x^{42} + \\
& 44177863065405964773884157087947265203x^{44} - 207622415152659005897709259821867905936x^{46} + \\
& 848497628761386032955407146818233252549x^{48} - 2986630066500259391059753396810405403376x^{50} + \\
& 8978250680997615844943555979241325835152x^{52} - 22895948659860885033520654294356119238385x^{54} + \\
& 49283420613392374626429789336199914351832x^{56} - 89218926571231646024024810770340452641720x^{58} + \\
& 135504944868856507823416830950748516957057x^{60} - 172389160906176314420710885275180212724527x^{62} + \\
& 183547316219318903960320280829096116071264x^{64} - 163511137364714938845665108789571404106054x^{66} + \\
& 121892330878948391165227140997734856300186x^{68} - 76072332280581439617597030145837199231769x^{70} + \\
& 39768616467462574761163933983127050741442x^{72} - 17423630167343235325212146702079447097908x^{74} + \\
& 6399637265892835771340913358933746610354x^{76} - 1970513471030550875880140613668297005840x^{78} + \\
& 508394838137195907177822243919451418219x^{80} - 109789516243417400238915411635236675515x^{82} + \\
& 19810446202617140638361529402358493938x^{84} - 2978992033214528091220468262602926129x^{86} + \\
& 371971689389903353069545144071327698x^{88} - 38379338936238591743463114713161240x^{90} + \\
& 3251185572664588565055860085862595x^{92} - 224233918626783202070571619435700x^{94} + \\
& 12454497048355022000718356741550x^{96} - 549122212654098218823400038125x^{98} + \\
& 18852262128595778955123212625x^{100} - 490751406011489188851217500x^{102} + \\
& 9320772012592835172937500x^{104} - 121647973242146321200000x^{106} + 981927330967529600000x^{108} - \\
& 3885738425184000000x^{110} + 2771248480000000x^{112}))/ \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(-1+9x-6x^2+x^3)(1+9x+6x^2+x^3)(1-12x^2+ \\
& 8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(1-59x+402x^2-863x^3+572x^4)(1+59x+402x^2+863x^3+572x^4)(1-18x+93x^2- \\
& 195x^3+164x^4-37x^5+x^6)(1+18x+93x^2+195x^3+164x^4+37x^5+x^6)(1-33x+375x^2-1922x^3+5192x^4- \\
& 7883x^5+6797x^6-3252x^7+834x^8-105x^9+5x^{10})(1+33x+375x^2+1922x^3+5192x^4+7883x^5+6797x^6+ \\
& 3252x^7+834x^8+105x^9+5x^{10})(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6-4525x^7+1975x^8+2500x^9- \\
& 875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+4525x^7+1975x^8-2500x^9- \\
& 875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+60858x^6-12548x^7-46005x^8+ \\
& 16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+ \\
& 2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}-329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16}))/ \\
& 10x^2(153-29597x^2+1087980x^4+42425030x^6-3931103503x^8+114477354009x^{10}-1757059345360x^{12}+ \\
& 16138162540382x^{14}-94374636014721x^{16}+361278697104035x^{18}-926515970968211x^{20}+ \\
& 1633115810080701x^{22}-2029670985218743x^{24}+1818156169145257x^{26}-1193705004547281x^{28}+ \\
& 580696031421991x^{30}-210302687884583x^{32}+56589053389377x^{34}-11202352029008x^{36}+1598514878512x^{38}- \\
& 158589514560x^{40}+10266827840x^{42}-384000000x^{44}+6144000x^{46}))/ \\
& ((-1+4x)(1+4x)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+ \\
& 18x-91x^2+110x^3+175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+ \\
& 175x^7+25x^8)(-1+8x+14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+ \\
& 302x^4+65x^5-120x^6-62x^7+4x^8+7x^9+x^{10}))/+ \\
& \frac{240x^2}{(-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,3}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{10,7}^{TG}(x) = & -2x(-36 - 1916x + 168735x^2 + 5010324x^3 - 274378534x^4 - 4757396231x^5 + 228843935150x^6 + \\
& 2025044991592x^7 - 111577291533350x^8 - 351784868410599x^9 + 34709854247997148x^{10} - \\
& 34224714438481007x^{11} - 7228139570023107567x^{12} + 31484087151192214710x^{13} + \\
& 1022544557324685448165x^{14} - 7726403586188404895132x^{15} - 96927246923228013595192x^{16} + \\
& 1110292692380516699256673x^{17} + 5787032606728018989068536x^{18} - 107024913198782087817627047x^{19} - \\
& 161936681754414137310937526x^{20} + 7363849217031780970200396412x^{21} - \\
& 5103265539648415668733523649x^{22} - 377007276918192621691983323335x^{23} + \\
& 814424380614062430253250143406x^{24} + 14854797156536370812767804103645x^{25} - \\
& 47444804546241151730315447453123x^{26} - 464807852968619111518109495428186x^{27} + \\
& 1811873185531787270465347762924488x^{28} + 11930197928982070276439367794697501x^{29} - \\
& 50797582722824878493282804727691372x^{30} - 259986161076557036689640239414096519x^{31} + \\
& 1090776426980624605622189726780448964x^{32} + 4969547018363442145475560980703270892x^{33} - \\
& 18211073820660843827319672959217077929x^{34} + 85135169833414862520908525451264813903x^{35} + \\
& 234772295338935068809824990236485723882x^{36} + 1311251933592394296445067090264572153729x^{37} - \\
& 2233938586334662638636245659125876508990x^{38} - 17926309036444108577185692626715264379976x^{39} + \\
& 13057535908042630686034170038972661451122x^{40} + \\
& 213503897268271369291205614772900281740876x^{41} + \\
& 11942703203239479252622866715936665605983x^{42} - \\
& 2179643296990347355591253994135364500009211x^{43} - \\
& 1400332310309499241938435675019641359806534x^{44} + \\
& 18867496983220826568169506882617368827379464x^{45} + \\
& 20221436637104425292971526317275687933765789x^{46} - \\
& 137648914756743532843556306205509510025923348x^{47} - \\
& 191451061106249771522974055941451069353101089x^{48} + \\
& 844165244475461400543956274507100420448139056x^{49} + \\
& 1382404398775516625584271594630147301334133962x^{50} - \\
& 4350569921243651172165308859465882298992407885x^{51} - \\
& 7997835350801929281998017686821726079764334791x^{52} + \\
& 18867944017272600388961468253894418273069526052x^{53} + \\
& 37923903961575131564776043748056924014809725008x^{54} - \\
& 69051116005894445846938834684153259489987283484x^{55} - \\
& 149292783277158409938890178952977240380261269884x^{56} + \\
& 214128943684090145833646407125392402737492559008x^{57} + \\
& 492147658986179500815073230736569819493983577106x^{58} - \\
& 565734019821988649775796329605823969557792979851x^{59} - \\
& 1367589248484230250289518027124766412971441247652x^{60} + \\
& 1282101525337831397831399640179867037217958276087x^{61} + \\
& 3221262140039836175406543937752562410298848886090x^{62} - \\
& 2512109952571249121285404582729418334150525500754x^{63} - \\
& 6462631108446716063860559605318793409605106728837x^{64} + \\
& 4292410502638103736617386264622176038468532872040x^{65} + \\
& 11090608632794755540037476442617132770684107747052x^{66} - \\
& 6450967502022728552624652596886874199633565483404x^{67} - \\
& 16340394528514224460352930271543579137143790685532x^{68} + \\
& 8590783629340927231223030228549252522418485800541x^{69} + \\
& 20732941366425606820638218969191703723055871444598x^{70} - \\
& 10189967962701197804045503177647253969425181371737x^{71} - \\
& 22708605957959876839421247633531256215800348715717x^{72} + \\
& 10789546426634996532849475119997603196871152735092x^{73} + \\
& 21506936307411287369259389782946888449347349247870x^{74} - \\
& 10190492654169351518317593508843893787658278015062x^{75} - \\
& 17628471249633504173415860543025600400997152054412x^{76} + \\
& 8559304260765623984619410294466164590804168593886x^{77} + \\
& 12505920532346866707087441097482649399627136909022x^{78} - \\
& 6366255619740655357299366212575030653293867360313x^{79} - \\
& 7671314125552612910659128615463488597155255665462x^{80} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4173841459066035523630590859289795540296006308627x^{81} + \\
& 4060129773656062830513291382887072135261415926063x^{82} - \\
& 2401528027750720332911111979568835391311111689570x^{83} - \\
& 1847110705100133652247168856585744119018940801527x^{84} + \\
& 1207814202812711595768462298351485236383125314439x^{85} + \\
& 717935783248206530641262116237831800033117205110x^{86} - \\
& 529015240726349040459348935526421277410621669676x^{87} - \\
& 236074515095465841918522486527477088250531080282x^{88} + \\
& 201061589024348389785817914650665157471527960706x^{89} + \\
& 64586932647694501290681726703266943669718879747x^{90} - \\
& 66061881749215181108610074962727799952933803044x^{91} - \\
& 14246289880628663983127902407151714357822730944x^{92} + \\
& 18686159159803262350807232538694428815188675551x^{93} + \\
& 2354969865021389684484798074355442693094877156x^{94} - \\
& 4528292840022064554946645760527744494477780546x^{95} - \\
& 222979309586946537733886101580663340672685812x^{96} + \\
& 934762157241035392240145387464924568014652569x^{97} - \\
& 16310382302301099357939512280958189475626626x^{98} - \\
& 163240549167171917628614142832851854163662451x^{99} + \\
& 12486324140443905088460189522686374507002677x^{100} + \\
& 23916605194993724961756722842770694637641942x^{101} - \\
& 3113615636906831580264512497699747490684672x^{102} - \\
& 2910123122887909578140795582029463434826802x^{103} + \\
& 526492210810517257755405625091807788838068x^{104} + \\
& 290422425775152621330145950103904170459752x^{105} - \\
& 67233194380924146428815639872844417067586x^{106} - \\
& 23399408200317334916422711040101343373183x^{107} + \\
& 6688880744417021037524526118998530451568x^{108} + \\
& 1490969312450495634801382726014192521101x^{109} - 522493346107885097091398951520140132033x^{110} - \\
& 72995970232301946385277269709301064610x^{111} + 31965568239313812611014774131543921065x^{112} + \\
& 2624326919216007470130970868200137915x^{113} - 1519024845577441160073185013926343670x^{114} - \\
& 63350510078567124003738981822693800x^{115} + 55385339062745059619974689082766000x^{116} + \\
& 762820258695875590863590180838400x^{117} - 1524898406969209282514771091817200x^{118} + \\
& 7233652169272220117438357244000x^{119} + 31037166475816379824971933208000x^{120} - \\
& 503501276797022466754815080000x^{121} - 452200065221602358330196480000x^{122} + \\
& 10354100042319884708192000000x^{123} + 4456516208552562339248000000x^{124} - \\
& 118522096312353717232000000x^{125} - 26803219242657227520000000x^{126} + 7373170940125580800000000x^{127} + \\
& 83077840933058560000000x^{128} - 1828120427008000000000x^{129} - 120046659174400000000x^{130} + \\
& 889987072000000000x^{131} + 47775744000000000x^{132}) / \\
& ((-1+x)(1+x)(1+2x)(-1+4x)(1+4x)(1-8x+4x^2)(1+5x+5x^2)(1+7x+8x^2)(1+18x+63x^2+50x^3+13x^4+ \\
& x^5)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+18x-91x^2+110x^3+ \\
& 175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+175x^7+25x^8)(-1+ \\
& 121x-3901x^2+49003x^3-293115x^4+896942x^5-1381585x^6+970100x^7-264304x^8+15552x^9)(-1+8x+ \\
& 14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+302x^4+65x^5-120x^6- \\
& 62x^7+4x^8+7x^9+x^{10})(1-36x+504x^2-3603x^3+14416x^4-33263x^5+44489x^6-34794x^7+16069x^8-4345x^9+ \\
& 653x^{10}-47x^{11}+x^{12})(1+53x+951x^2+7589x^3+32774x^4+84127x^5+133734x^6+133056x^7+81936x^8+ \\
& 30215x^9+6265x^{10}+650x^{11}+25x^{12})(1+92x+3048x^2+50453x^3+483576x^4+2928888x^5+11832412x^6+ \\
& 32949126x^7+64377394x^8+88750186x^9+85833700x^{10}+57206921x^{11}+25441290x^{12}+7182529x^{13}+ \\
& 1203428x^{14}+111956x^{15}+5340x^{16}+120x^{17}+x^{18})(1-66x+1833x^2-28651x^3+283174x^4-1881547x^5+ \\
& 8719340x^6-28859906x^7+69342834x^8-122339404x^9+159752386x^{10}-155169581x^{11}+112318552x^{12}- \\
& 60476870x^{13}+24066800x^{14}-6990095x^{15}+1450676x^{16}-207780x^{17}+19365x^{18}-1050x^{19}+25x^{20})) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -10x(5 + 12116x^2 - 79418156x^4 + 137140867371x^6 - 126508615717472x^8 + 74767076102836781x^{10} - \\
& 30942949149634802119x^{12} + 9474224318337889138895x^{14} - 2232969550357170034098693x^{16} + \\
& 418666074569555119051522960x^{18} - 64398858149144925068715966395x^{20} + \\
& 8380549398143979118631696745651x^{22} - 950353277648081037400875899749218x^{24} + \\
& 96166253683043030683405714746310640x^{26} - 8792671215727369494525660472248856129x^{28} + \\
& 726431573860985445629172152338973849642x^{30} - 53798911213912575702326451029551494505063x^{32} + \\
& 3537041647440449141091748495572121759171627x^{34} - \\
& 204921187006042892771855403946720565775891226x^{36} + \\
& 10420451672656398773177209637593960317776673940x^{38} - \\
& 464574261578436636974365554081388609823037887244x^{40} + \\
& 18173213589595381981298097198477475680225585776658x^{42} - \\
& 624908252678769459968024882300955823830594046178503x^{44} + \\
& 18932972835331332900494207397483318358405483346878536x^{46} - \\
& 506645827276974021061686954398768831988005446790414876x^{48} + \\
& 12003413445861334707963534368389598629541759708354889745x^{50} - \\
& 252331412959443401022688614962893956206296850502898884612x^{52} + \\
& 4715795006592029282544383550848335485940811875647240445403x^{54} - \\
& 78487285463193038364584002227312381535862216674549935342749x^{56} + \\
& 1165046290521685133214209718327497791570656140136198298109117x^{58} - \\
& 15442812909805651340672989975528735982914073474512388259682979x^{60} + \\
& 182977750311047710034345040083038068561084101369340495943426800x^{62} - \\
& 1939663773210336010648372584343908539911860679341498590418276668x^{64} + \\
& 18407972063428115196727823647040468291087661753116450203992748767x^{66} - \\
& 156483275436745088163493327124237157527383915894910147614127604443x^{68} + \\
& 1192032663588453188636719530285268875420447867964754432031081460355x^{70} - \\
& 8139450714520556617631586123457434234058573567496087323586845586213x^{72} + \\
& 49828495446843377107558048069230075854878576225379936862269833932662x^{74} - \\
& 273522688760435447683941721355414268996739648431776542650301532681392x^{76} + \\
& 1346401325180100284214171590687485399563700464728372399915910200599243x^{78} - \\
& 5943421964008175511708926578056651344116897808780805082502953702381898x^{80} + \\
& 23527945857702709573936161343767789953265247293219975356432250361804601x^{82} - \\
& 83525073888832706915791705619488426178753343416477542876432340041041581x^{84} + \\
& 265910823567429568614445517131522099821535138339159760419321110141507911x^{86} - \\
& 759185171579093056810065374765768522799159734093044958218155861957088189x^{88} + \\
& 1943868869176729791208920065518878574471329118608259392191255594937396422x^{90} - \\
& 4463951590575857864845925749111540779398612798411265031683371489478392313x^{92} + \\
& 9194798929902132275679830302034860240699544487890965937510047811852078371x^{94} - \\
& 16989576360092651399188099561997843627512750816477144463253853993691771492x^{96} + \\
& 28164087047319318264900705315803002488133099370226233533165596637417849460x^{98} - \\
& 41892978838686483195497319334134016970652660371262642296182535869955627951x^{100} + \\
& 55921476431718526318975650434431995277386842605498694329110096282384030776x^{102} - \\
& 66997973808755369796112943793634994220136455402164648700188296147308129474x^{104} + \\
& 72049808293548540767760266431693622548580954761803915204469275049003110499x^{106} - \\
& 69553194411943777834266005659860482482633803800107573186654319196098070075x^{108} + \\
& 60271979747886817678692147417517488277285764394829973545715540572955695623x^{110} - \\
& 46881143548794248642431957083066699715374137915368058857257154576986182241x^{112} + \\
& 32726318466471098605114887198050551084612284665705165762957145792468286678x^{114} - \\
& 20497314121136849362189361591842619709961214856986553953580334352499902524x^{116} + \\
& 11513946116651347159013570955103452008331834498101419443461571533756318473x^{118} - \\
& 5797402717328986514251230556474300092287212890897992439415700302276897215x^{120} + \\
& 261450097016382332323492592644809292916890668890970542261118441971434577x^{122} - \\
& 1054964580013359327689484487031375380100209082989886573323001904092263934x^{124} + \\
& 380342789334010891582609761777148294258923192432266575791633625238020242x^{126} - \\
& 12228903245247418717767777755412177221482682549858300520133740887344744x^{128} + \\
& 34975957438918481379966994161919059670729272785641699683433127096289836x^{130} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8867216335858408485217966795135537628625490781859865415911624430361503x^{132} + \\
& 1982624968515707637882074749906573421341207210557318049774437204700534x^{134} - \\
& 387989956867150841539685396282870602794296777489383115051049176531255x^{136} + \\
& 65643439581663042595026003087583729005006126850300437025068914527619x^{138} - \\
& 9392978584589560782463227527721090762503409838765585137809104047858x^{140} + \\
& 1085079304345741842178680500123055802538537940244207945025150841960x^{142} - \\
& 88495250760041851373048611707004737239783763224475009416367975128x^{144} + \\
& 1790052550388233104048219091304253202990729749372583270202309066x^{146} + \\
& 1003651541025064484844332148522101800594356584488486112086238211x^{148} - \\
& 237744796217808129585073596645411533868824824815971527447233894x^{150} + \\
& 34955479540841192462625004541662671964556133838389234629589100x^{152} - \\
& 3978498491577539079609191812924069506324893217877858023989683x^{154} + \\
& 372170923315028263281435005279062208055390030676997320391049x^{156} - \\
& 29285215996028369935028045814603066957693117403020564430595x^{158} + \\
& 1957223619862996298504154794316123978047628015601370232650x^{160} - \\
& 111459186075598287557357052611641746335074322313046302550x^{162} + \\
& 5405339264174080415093851046473072210522644367389902550x^{164} - \\
& 222505700416139768735317491851352491491658997664218500x^{166} + \\
& 7731495850912541731260091645150134812023365828796875x^{168} - \\
& 225017823393816165756080531458991265025745174253750x^{170} + \\
& 5429584089654686978951872937358530273323065666875x^{172} - \\
& 107204318171259230142700949209717874664888165625x^{174} + \\
& 1703161891355082735952840513091010492878731250x^{176} - \\
& 21305578284273495288972444199134108364500000x^{178} + \\
& 204007873783900670205110921677009827500000x^{180} - \\
& 1440110752865636403817658922898850000000x^{182} + 7121003927421030307978111698000000000x^{184} - \\
& 22957124325133939279933280000000000x^{186} + 4337764566135517968000000000000x^{188} - \\
& 403643782147781120000000000000x^{190} + 1368474826752000000000000x^{192}) / \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-13x+11x^2)(1-8x+ \\
& 11x^2)(1+8x+11x^2)(1+13x+11x^2)(1-12x^2+8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(-1+104x-2661x^2+24090x^3- \\
& 91993x^4+158236x^5-121128x^6+44736x^7-7808x^8+512x^9)(1+104x+2661x^2+24090x^3+91993x^4+ \\
& 158236x^5+121128x^6+44736x^7+7808x^8+512x^9)(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6- \\
& 4525x^7+1975x^8+2500x^9-875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+ \\
& 4525x^7+1975x^8-2500x^9-875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+ \\
& 60858x^6-12548x^7-46005x^8+16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+ \\
& 22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}- \\
& 329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})(1-82x+2898x^2-59227x^3+789803x^4-7334275x^5+49339066x^6- \\
& 246611784x^7+930982131x^8-2681675595x^9+5927069364x^{10}-10071216252x^{11}+13140900495x^{12}- \\
& 13114381556x^{13}+9943609371x^{14}-5673467839x^{15}+2404556811x^{16}-744137999x^{17}+164387022x^{18}- \\
& 25156085x^{19}+2562619x^{20}-164923x^{21}+6260x^{22}-125x^{23}+x^{24})(1+82x+2898x^2+59227x^3+789803x^4+ \\
& 7334275x^5+49339066x^6+246611784x^7+930982131x^8+2681675595x^9+5927069364x^{10}+10071216252x^{11}+ \\
& 13140900495x^{12}+13114381556x^{13}+9943609371x^{14}+5673467839x^{15}+2404556811x^{16}+744137999x^{17}+ \\
& 164387022x^{18}+25156085x^{19}+2562619x^{20}+164923x^{21}+6260x^{22}+125x^{23}+x^{24})(1-104x+4410x^2- \\
& 104155x^3+1561045x^4-15952817x^5+116275468x^6-623060570x^7+2507306175x^8-7693787635x^9+ \\
& 18199448138x^{10}-33436393552x^{11}+47933912805x^{12}-53730741510x^{13}+47072037995x^{14}-32132854819x^{15}+ \\
& 16992690151x^{16}-6899340865x^{17}+2123302560x^{18}-486469225x^{19}+80870375x^{20}-9387875x^{21}+715250x^{22}- \\
& 31875x^{23}+625x^{24})(1+104x+4410x^2+104155x^3+1561045x^4+15952817x^5+116275468x^6+623060570x^7+ \\
& 2507306175x^8+7693787635x^9+18199448138x^{10}+33436393552x^{11}+47933912805x^{12}+53730741510x^{13}+ \\
& 47072037995x^{14}+32132854819x^{15}+16992690151x^{16}+6899340865x^{17}+2123302560x^{18}+486469225x^{19}+ \\
& 80870375x^{20}+9387875x^{21}+715250x^{22}+31875x^{23}+625x^{24})) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 20x(-1 - 7462x^2 + 10821110x^4 - 5831400069x^6 + 1697820496893x^8 - 308858374732578x^{10} + \\
& 37702475169808132x^{12} - 3185614084338056754x^{14} + 185590028685218837998x^{16} - \\
& 6977471751331290769044x^{18} + 116319318777276366674463x^{20} + 3999608763470504622094343x^{22} - \\
& 377737416256394840648610318x^{24} + 15519679525165384897331544882x^{26} - \\
& 433927200141827426983587685042x^{28} + 9125056924927835556655466937503x^{30} - \\
& 150536536854634405519175680765654x^{32} + 1993544783725378630249399433052553x^{34} - \\
& 21499362635105896408621603402843080x^{36} + 190641781155325395202533674826755142x^{38} - \\
& 1399217823032215716335407078488612543x^{40} + 8539127744177678958060920648882825538x^{42} - \\
& 43463945090054981464218242987508598032x^{44} + 184864845779386486382692454012059277145x^{46} - \\
& 657688834829591094722077056371086082332x^{48} + 1957766585510085808050179364694581126812x^{50} - \\
& 4875232794264694656151162666299958638316x^{52} + 10151155868176949128615346944290379140933x^{54} - \\
& 17663636894646983285752078518863185757343x^{56} + 25675826594048285268183840759942792750132x^{58} - \\
& 31179991896285055472961990580261975987806x^{60} + 31654893677412544844443219632667434433441x^{62} - \\
& 26901116475608043194315960173902454931844x^{64} + 19158139606098240680001128673664551962516x^{66} - \\
& 11424361390006327607950339936180762768054x^{68} + 5668976093562867051564563126606570777766x^{70} - \\
& 2299354022466441346099809259718404773236x^{72} + 729434661055564132571856270866151396569x^{74} - \\
& 159439615475006473968083099727921925278x^{76} + 10344118514096746041938408544272297229x^{78} + \\
& 9561257817018618562109881539028346644x^{80} - 5369756299516475821266336994021720743x^{82} + \\
& 1718144171830579878909467633407256974x^{84} - 399219702188962880466123482662543144x^{86} + \\
& 71662605680566682337258252423059683x^{88} - 10163082704123961106407234076358225x^{90} + \\
& 1147519550739261609993649422486375x^{92} - 103161083863250469590135854626400x^{94} + \\
& 7344296866782507412058917789350x^{96} - 409753388119012653712344902750x^{98} + \\
& 17626639128811501846661608750x^{100} - 570757985824669654350612500x^{102} + \\
& 13421821873595697379427500x^{104} - 216707453609405809250000x^{106} + 2180021700889543400000x^{108} - \\
& 11153092053400000000x^{110} + 14806523160000000x^{112})/ \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(-1+9x-6x^2+x^3)(1+9x+6x^2+x^3)(1-12x^2+ \\
& 8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(1-59x+402x^2-863x^3+572x^4)(1+59x+402x^2+863x^3+572x^4)(1-18x+93x^2- \\
& 195x^3+164x^4-37x^5+x^6)(1+18x+93x^2+195x^3+164x^4+37x^5+x^6)(1-33x+375x^2-1922x^3+5192x^4- \\
& 7883x^5+6797x^6-3252x^7+834x^8-105x^9+5x^{10})(1+33x+375x^2+1922x^3+5192x^4+7883x^5+6797x^6+ \\
& 3252x^7+834x^8+105x^9+5x^{10})(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6-4525x^7+1975x^8+2500x^9- \\
& 875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+4525x^7+1975x^8-2500x^9- \\
& 875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+60858x^6-12548x^7-46005x^8+ \\
& 16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+ \\
& 2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}-329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})) - \\
& 10x(-5 + 843x^2 - 119678x^4 + 10867994x^6 - 458965303x^8 + 8922095485x^{10} - 61636790888x^{12} - \\
& 401648853762x^{14} + 9116648473545x^{16} - 57595864199635x^{18} + 187629020347989x^{20} - 369284813892781x^{22} + \\
& 476512235911457x^{24} - 423463849180949x^{26} + 266671095305693x^{28} - 120427555936855x^{30} + \\
& 38823243083667x^{32} - 8699482508427x^{34} + 1260261232950x^{36} - 91964916840x^{38} - 2608957200x^{40} + \\
& 1217168000x^{42} - 102336000x^{44} + 3072000x^{46})/ \\
& ((-1+4x)(1+4x)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+ \\
& 18x-91x^2+110x^3+175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+ \\
& 175x^7+25x^8)(-1+8x+14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+ \\
& 302x^4+65x^5-120x^6-62x^7+4x^8+7x^9+x^{10}))+
\end{aligned}$$

$$\frac{20x(1+11x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)} + \frac{4x}{1-4x^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,4}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{10,6}^{TG}(x) = \\
&2x(76 - 1394x - 238925x^2 + 1712406x^3 + 326860329x^4 - 862982509x^5 - 248411745750x^6 + 598148325518x^7 + \\
&112441361628130x^8 - 425819187134586x^9 - 31635562487737893x^{10} + 169069561363732747x^{11} + \\
&5783691389458258347x^{12} - 38091262241469735960x^{13} - 730642369070520564440x^{14} + \\
&5327668007688979504782x^{15} + 70288034693143851128732x^{16} - 509546186173135832171883x^{17} - \\
&5771491712553417562186101x^{18} + 37476694985740526040381412x^{19} + 426520647639540583956084441x^{20} - \\
&2394527171196445018361375072x^{21} - 27402020733527879719989268251x^{22} + \\
&141136895183253856958991863440x^{23} + 1450862846642585378107875741569x^{24} - \\
&7444174317678966677583089116935x^{25} - 61683086368986780465239430705782x^{26} + \\
&332198399812433110497570224897246x^{27} + 2101497319878504023127929342494062x^{28} - \\
&12153254849021617265465509221458271x^{29} - 57912172911174653508468879074566763x^{30} + \\
&361836547950576663098760835207121634x^{31} + 1308355368877520625301526566676180541x^{32} - \\
&8804053584283913860310509427431464812x^{33} - 24590770259974391554844046897898644771x^{34} + \\
&176434024844834939178014726972824636048x^{35} + 390287084413688337049722688100400508143x^{36} - \\
&2935186122993845950713753256757764268399x^{37} - 5306696728085749119312546111212846451945x^{38} + \\
&40810342651099464351201530222713836042606x^{39} + 62606471606168801679124998218538268952943x^{40} - \\
&476738700918722768304386203447296161619916x^{41} - \\
&646848537132358507328709256432653115721028x^{42} + \\
&4697350268576585848415782065392731630659506x^{43} + \\
&5878123961351749019488759929893251993494134x^{44} - \\
&39143484028413651276167897193179764877714039x^{45} - \\
&46933361068140037553087882726792512609720694x^{46} + \\
&276360871711679782276177858874509336982250173x^{47} + \\
&327592952368208058058088146654034419643522404x^{48} - \\
&1655064448725583660687122054021505759823194011x^{49} - \\
&1985215294592474362037047404736373394191841777x^{50} + \\
&8414819399798759720560063649514813552892229525x^{51} + \\
&10375260782719129180429583424945415362164619921x^{52} - \\
&36350096990699504999959936062822761621670954072x^{53} - \\
&46518462354728614824593740508832595146020775943x^{54} + \\
&133533393159687830120045743391792592660572254024x^{55} + \\
&178319885580967893892594122423718671080978292069x^{56} - \\
&417635817334154005985422845341612823138229587688x^{57} - \\
&583425601257625126505595124801107684320884357631x^{58} + \\
&1113684240256620739851068019122582421187927676336x^{59} + \\
&1628735690589529547953291272424292377586016996407x^{60} - \\
&2536602330197671386302658849342221370873986788932x^{61} - \\
&3882437915630040535920218874228791855792830975785x^{62} + \\
&4944971527505951275279982350658309133061036522519x^{63} + \\
&7913208682713515236429634503313428145676899492567x^{64} - \\
&8269823681172962541385972174627064439473704021060x^{65} - \\
&13815960884029107987010015833749181748861763839202x^{66} + \\
&11893897770309070649683730328407223225603955215904x^{67} + \\
&20704756341764314299375228398387445612641453212552x^{68} - \\
&14748679350809389969308266947292317747796024252546x^{69} - \\
&26688877241098479365608979092500557183344009914693x^{70} + \\
&15807268115015427684697139892919836865274053567057x^{71} + \\
&29652229323814775402516150246858150718351979024217x^{72} - \\
&14675334568210423353994402813558829931174670818482x^{73} - \\
&28451300686238204279380701744794806806882323641285x^{74} + \\
&11821034941255061396192636512044022909676194504702x^{75} + \\
&23618661404044406404798541598983651217489452136937x^{76} - \\
&8267255590608315234052788237465396648388984326346x^{77} - \\
&16992121061482092504276982101774320632220211093257x^{78} + \\
&5016389933986179051313427690359939827483300200858x^{79} + \\
&10611295309042114464879898796386974065677715729747x^{80} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2633550703523053101113823181467305993344840449642x^{81} - \\
& 5761093827250612814897835052167120505360981310358x^{82} + \\
& 1189419782155923876489992102023186439928475245605x^{83} + \\
& 2723981960856611974747984431336012590583428956372x^{84} - \\
& 457493952713815687953531557425810062810172958509x^{85} - \\
& 1123967308448762999510235882985712485296419123970x^{86} + \\
& 147269529489891609894138126193531231986872854316x^{87} + \\
& 405755632936043957961653240435723137701647173442x^{88} - \\
& 38417552558907475986677891182403036871439639836x^{89} - \\
& 128563608983293213699169429875481149397754243467x^{90} + \\
& 7563145550394346658488192781417045244836404514x^{91} + \\
& 35884085865245716127244213136328680445926691459x^{92} - \\
& 882666413044803609991000460700186874654968951x^{93} - \\
& 8854096496047569190227693378871773065496863996x^{94} - \\
& 49266355189601144549968883561878755469658194x^{95} + \\
& 1935483345476653378590186722481035716374714252x^{96} + \\
& 54832009208749471094266164144249878293484376x^{97} - \\
& 374537294662737761444773263350566879864890579x^{98} - \\
& 15197877462053260192509989827651046875351759x^{99} + \\
& 63827967357861685014207745625989528826307943x^{100} + \\
& 2599514922475714022597387201846620111204908x^{101} - \\
& 9482984520097272492139509105890097184405693x^{102} - \\
& 279499137274335659814865699584689453690378x^{103} + \\
& 1210630428324895124436659545625520837440287x^{104} + \\
& 11414403382052752814491991871795511356328x^{105} - \\
& 130484285370157915640919297896303996709769x^{106} + \\
& 2086752952950718685863717367609941712828x^{107} + \\
& 11642555818084990833433691590209735778677x^{108} - \\
& 508083546585748888780571116785682580146x^{109} - 841974685513335569359381708398195541952x^{110} + \\
& 59956376536143910347860239305084744825x^{111} + 48245552099801569047183180378163613500x^{112} - \\
& 4695491493539315967387460794962554015x^{113} - 2137046734722587785930242557254552700x^{114} + \\
& 259349893739981348471330658408540600x^{115} + 71224314031485062607717954605759400x^{116} - \\
& 10193681207823594729100365539024400x^{117} - 1734972463112469632851268537303200x^{118} + \\
& 281724021719971135665504399056000x^{119} + 30032941647402517402033777104000x^{120} - \\
& 5341786411150276941306571480000x^{121} - 362732666908249569673396320000x^{122} + \\
& 67117115638337759921096000000x^{123} + 3078865576388639154720000000x^{124} - \\
& 534402916425858334864000000x^{125} - 18809994434686683648000000x^{126} + 2540231345489337600000000x^{127} + \\
& 77102666216724480000000x^{128} - 6426991539712000000000x^{129} - 160153693388800000000x^{130} + \\
& 59747778560000000000x^{131} + 143327232000000000x^{132}) / \\
& ((-1+x)(1+x)(1+2x)(-1+4x)(1+4x)(1-8x+4x^2)(1+5x+5x^2)(1+7x+8x^2)(1+18x+63x^2+50x^3+13x^4+ \\
& x^5)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+18x-91x^2+110x^3+ \\
& 175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+175x^7+25x^8)(-1+ \\
& 121x-3901x^2+49003x^3-293115x^4+896942x^5-1381585x^6+970100x^7-264304x^8+15552x^9)(-1+8x+ \\
& 14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+302x^4+65x^5-120x^6- \\
& 62x^7+4x^8+7x^9+x^{10})(1-36x+504x^2-3603x^3+14416x^4-33263x^5+44489x^6-34794x^7+16069x^8-4345x^9+ \\
& 653x^{10}-47x^{11}+x^{12})(1+53x+951x^2+7589x^3+32774x^4+84127x^5+133734x^6+133056x^7+81936x^8+ \\
& 30215x^9+6265x^{10}+650x^{11}+25x^{12})(1+92x+3048x^2+50453x^3+483576x^4+2928888x^5+11832412x^6+ \\
& 32949126x^7+64377394x^8+88750186x^9+85833700x^{10}+57206921x^{11}+25441290x^{12}+7182529x^{13}+ \\
& 1203428x^{14}+111956x^{15}+5340x^{16}+120x^{17}+x^{18})(1-66x+1833x^2-28651x^3+283174x^4-1881547x^5+ \\
& 8719340x^6-28859906x^7+69342834x^8-122339404x^9+159752386x^{10}-155169581x^{11}+112318552x^{12}- \\
& 60476870x^{13}+24066800x^{14}-6990095x^{15}+1450676x^{16}-207780x^{17}+19365x^{18}-1050x^{19}+25x^{20})) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 10x^2(-517 + 676787x^2 + 774317814x^4 - 2419714399691x^6 + 2564483665392264x^8 - 1627769273521566449x^{10} + \\
& 715691075642214615863x^{12} - 233906029848566006481854x^{14} + 59313351407358200830787539x^{16} - \\
& 12013328363705595847784537069x^{18} + 1984349884196736665101768128147x^{20} - \\
& 271463193781361220249645795491528x^{22} + 31115900105736469009127132399005036x^{24} - \\
& 3014933108824719813854145977709201724x^{26} + 248640108435949101007074334182548536845x^{28} - \\
& 17546939243467420889827947318016441956491x^{30} + \\
& 1064228669269128709654342038483829542056933x^{32} - \\
& 55663639427111526948746996248843075135705834x^{34} + \\
& 2517670156066476423918462780149718178364412756x^{36} - \\
& 98674239084542259941612965935587414996253484214x^{38} + \\
& 3355389702977370331088633569058611403520556514950x^{40} - \\
& 99028855474319474897458266938217942777364845505712x^{42} + \\
& 2534182412216439254014009046352331358356861372119239x^{44} - \\
& 56064257828215371971529618834775015607207629223982885x^{46} + \\
& 1065542465729307899206344732852213131176346924691696406x^{48} - \\
& 17179471589186357312301912827347484445450205448364639213x^{50} + \\
& 228781292956823863871533607554331597212638823865025962512x^{52} - \\
& 2354397326393522209327470619321442417343364899214897758669x^{54} + \\
& 14539969280002673502059996633145336114372231684718352090463x^{56} + \\
& 63031428368363696051800695948107508580692826559424890331014x^{58} - \\
& 3609481034048246752102564165390454663110709570892611643192157x^{60} + \\
& 66892295189246125747800725065410245287285736846372719868073431x^{62} - \\
& 890721530969234818961963195859532226310150733060254600073007594x^{64} + \\
& 961532687964775277396780233245607751411304632503726365754153107x^{66} - \\
& 87811561099147692718399662391819540560958837209147319780001788555x^{68} + \\
& 692103978495189213254721898306828193738807454540671576516415098168x^{70} - \\
& 4758915738658339330332941039748917752113368762591419582664808924429x^{72} + \\
& 28726958092288839503995360296910447771046246573265060286369714258737x^{74} - \\
& 152804853567875457564079247173840993454818797085033824662347599674526x^{76} + \\
& 717737200775214988598847699882150518690757586134539908900291236725001x^{78} - \\
& 2979759548111045598827821158263085129987950557399984407134500477184602x^{80} + \\
& 10933799801730220822313162735837648378557201697985073399843106380626761x^{82} - \\
& 35425400102155758904127878877252456577206157039628123555467147935227139x^{84} + \\
& 101140301640890902315796938026303539825737895434982874835711332669449506x^{86} - \\
& 253560622552322329431496562726098658039458858257099400575486998786665135x^{88} + \\
& 555002161803252600721471908466808338028784660227855535132110020881893243x^{90} - \\
& 1050405451878301255709545442953843166523830296707434832022116868411211567x^{92} + \\
& 1688945935033053153294708365108480074990825589713020133901434589832402584x^{94} - \\
& 2223928698281681848620119804409356220774990171203421486842984677012308772x^{96} + \\
& 2173206655352974054019773238297536609204426630698877852326153102985170408x^{98} - \\
& 948526227314467419228209777792585361771448273778582244132509903987249153x^{100} - \\
& 1819405291715479863854490605473807612283378137526808434984763180722069553x^{102} + \\
& 5914900965923269044217147939270892463829271258748985705262973630118104872x^{104} - \\
& 10416690207964498527299758498674794734734889989423408235821808303584525753x^{106} + \\
& 14010742070784830839481950415107870696148334621764385925222081862148541737x^{108} - \\
& 15609103795965286858771307668622258361517326240758088646934974906536593234x^{110} + \\
& 14879449869511137596437078740188048716292007756804706137729405940739185701x^{112} - \\
& 12336935018847273215707626891668537571697475808797879475396011518789695457x^{114} + \\
& 8981607212369400548331996086614247140399127470468225835655293202105694594x^{116} - \\
& 577598517412864112266087049075166869871111770859584018189690236860073161x^{118} + \\
& 3294327006800819725815703239752429419383940363053123768811695637334584765x^{120} - \\
& 1671064785123669497559692016090338632775473625887639662338486759447398868x^{122} + \\
& 755397565263833758818117414273373006675509005695508881680921738616024592x^{124} - \\
& 304746405413598009974214883288266050125946011080100317086397887414187270x^{126} + \\
& 109830824435795266668488877080951242412566422994203326560147320358159074x^{128} - \\
& 35385817942772152173244389799694846384093263005738301338599534955876512x^{130} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 10195963470962056542321130168809353773125912823984231841369144407736431x^{132} - \\
& 2627772217304815569409509481934061109329211077260681625563310472475007x^{134} + \\
& 605721231548127516355254034749868517133632187599075698752570592375403x^{136} - \\
& 124838923271262970341354668239667848405296684020390995127992207020396x^{138} + \\
& 22992489661714434573877468047125611931742317752726782297564561184472x^{140} - \\
& 3781320349645477844159059688171641456843873628540698757620280649226x^{142} + \\
& 554721178934607551355764084012846112562389887364988872441121202072x^{144} - \\
& 72495830600074202591519099804026189802278176043187127398527899758x^{146} + \\
& 8426777421654188849524142099987110840932439370522550822675376121x^{148} - \\
& 869521307107100566353899390036614754720031483886138357021802307x^{150} + \\
& 79463941688496938462022923368185041153855619840008314567766514x^{152} - \\
& 641436988222424872323948455688066106533776281070574928462367x^{154} + \\
& 455883144081545801239127682848756077407859558760079770147511x^{156} - \\
& 28422396251765368521950078941036612211682050372535075968090x^{158} + \\
& 1547755864730391360029960397861110841405620564010689580640x^{160} - \\
& 73248084749928349307293551920039573229339009685655937550x^{162} + \\
& 2994974405577175271483623843522625474634959200032957100x^{164} - \\
& 105076126893820753837645834960442509335769712953130500x^{166} + \\
& 3137649227238363072797095736357465767042554172967125x^{168} - \\
& 78978181583617961146235033839521487328507712751875x^{170} + \\
& 1656510163756245191787512797504180508693473846875x^{172} - \\
& 28548758185185238788280858041609023773725781250x^{174} + \\
& 397404504169696759271639127292496611097512500x^{176} - \\
& 4373743081799402562302972385084301879000000x^{178} + \\
& 37040848022637890072412679239613365000000x^{180} - \\
& 23301835364350993856842708067950000000x^{182} + \\
& 1037991667026054240268223080000000000x^{184} - 3055249507560388630652960000000000x^{186} + \\
& 5329343649197877196800000000000x^{188} - 4581595294645248000000000000x^{190} + \\
& 14512627712000000000000000x^{192}) / \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-13x+11x^2)(1-8x+ \\
& 11x^2)(1+8x+11x^2)(1+13x+11x^2)(1-12x^2+8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(-1+104x-2661x^2+24090x^3- \\
& 91993x^4+158236x^5-121128x^6+44736x^7-7808x^8+512x^9)(1+104x+2661x^2+24090x^3+91993x^4+ \\
& 158236x^5+121128x^6+44736x^7+7808x^8+512x^9)(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6- \\
& 4525x^7+1975x^8+2500x^9-875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+ \\
& 4525x^7+1975x^8-2500x^9-875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+ \\
& 60858x^6-12548x^7-46005x^8+16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+ \\
& 22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}- \\
& 329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})(1-82x+2898x^2-59227x^3+789803x^4-7334275x^5+49339066x^6- \\
& 246611784x^7+930982131x^8-2681675595x^9+5927069364x^{10}-10071216252x^{11}+13140900495x^{12}- \\
& 13114381556x^{13}+9943609371x^{14}-5673467839x^{15}+2404556811x^{16}-744137999x^{17}+164387022x^{18}- \\
& 25156085x^{19}+2562619x^{20}-164923x^{21}+6260x^{22}-125x^{23}+x^{24})(1+82x+2898x^2+59227x^3+789803x^4+ \\
& 7334275x^5+49339066x^6+246611784x^7+930982131x^8+2681675595x^9+5927069364x^{10}+10071216252x^{11}+ \\
& 13140900495x^{12}+13114381556x^{13}+9943609371x^{14}+5673467839x^{15}+2404556811x^{16}+744137999x^{17}+ \\
& 164387022x^{18}+25156085x^{19}+2562619x^{20}+164923x^{21}+6260x^{22}+125x^{23}+x^{24})(1-104x+4410x^2- \\
& 104155x^3+1561045x^4-15952817x^5+116275468x^6-623060570x^7+2507306175x^8-7693787635x^9+ \\
& 18199448138x^{10}-33436393552x^{11}+47933912805x^{12}-53730741510x^{13}+47072037995x^{14}-32132854819x^{15}+ \\
& 16992690151x^{16}-6899340865x^{17}+2123302560x^{18}-486469225x^{19}+80870375x^{20}-9387875x^{21}+715250x^{22}- \\
& 31875x^{23}+625x^{24})(1+104x+4410x^2+104155x^3+1561045x^4+15952817x^5+116275468x^6+623060570x^7+ \\
& 2507306175x^8+7693787635x^9+18199448138x^{10}+33436393552x^{11}+47933912805x^{12}+53730741510x^{13}+ \\
& 47072037995x^{14}+32132854819x^{15}+16992690151x^{16}+6899340865x^{17}+2123302560x^{18}+486469225x^{19}+ \\
& 80870375x^{20}+9387875x^{21}+715250x^{22}+31875x^{23}+625x^{24})) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 20x^2(-200 + 227916x^2 - 143551403x^4 + 59211315220x^6 - 16142031622757x^8 + 2969830066234826x^{10} - \\
& 382316360665224398x^{12} + 35837872496861650216x^{14} - 254060962438285166222x^{16} + \\
& 140719723738727589263020x^{18} - 6240897926592956227508870x^{20} + 225110747310805357924668587x^{22} - \\
& 6660003556830916437940838306x^{24} + 162316996807451927964671963118x^{26} - \\
& 3267946859388856477882995178581x^{28} + 54493764903682874405492471627164x^{30} - \\
& 754789802562258606954295438398849x^{32} + 8710176876759175625256794912961703x^{34} - \\
& 83989518933713520276164333277158768x^{36} + 678505684233084242086224307311267018x^{38} - \\
& 4601764678039844186832082418971747224x^{40} + 26240719568124896297495730614578776603x^{42} - \\
& 125903131018368341627896237780865814549x^{44} + 508281831518302655864553118546026906843x^{46} - \\
& 1725160967673831404953340074839046824676x^{48} + 4914668126336719731191653826957898875950x^{50} - \\
& 11721438310525470355701848796246166224313x^{52} + 23318763826921005472092418225977577162806x^{54} - \\
& 38501353487038504567462207122619591221944x^{56} + 52383095686232443740810703571776810527083x^{58} - \\
& 58099509084138454101188067620615958952530x^{60} + \\
& 51588786896859944335736004046101956105347x^{62} - \\
& 35381369534232697774012939619635963807182x^{64} + \\
& 17086474080826697413137462259606256611900x^{66} - \\
& 3732276831071734850539593958403700936191x^{68} - \\
& 2428464355862983472585526141316516903263x^{70} + \\
& 3402759123520154411139768160944204589088x^{72} - 2304421600133270558446524057938225180967x^{74} + \\
& 1110964046270048178462688556794423253747x^{76} - 415574896533491847214751261049715583078x^{78} + \\
& 124686048231164214848295403120327799844x^{80} - 30477610844808149564938260498044727792x^{82} + \\
& 6116007349863691739549892718238204983x^{84} - 1010800363747704400662293867440045524x^{86} + \\
& 137603507223062562818735957731904073x^{88} - 15393297838937611452367754688486335x^{90} + \\
& 1408354506935192832661126658966870x^{92} - 104616848382664188424922025675350x^{94} + \\
& 6244804624327547674469167153425x^{96} - 295326823427544973498457436875x^{98} + \\
& 10851627741004024944060042625x^{100} - 301485415137407502901657500x^{102} + \\
& 6087466710598138314937500x^{104} - 84022542585257538800000x^{106} + 713242643294985600000x^{108} - \\
& 2979936064864000000x^{110} + 2771248480000000x^{112})/ \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(-1+9x-6x^2+x^3)(1+9x+6x^2+x^3)(1-12x^2+ \\
& 8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(1-59x+402x^2-863x^3+572x^4)(1+59x+402x^2+863x^3+572x^4)(1-18x+93x^2- \\
& 195x^3+164x^4-37x^5+x^6)(1+18x+93x^2+195x^3+164x^4+37x^5+x^6)(1-33x+375x^2-1922x^3+5192x^4- \\
& 7883x^5+6797x^6-3252x^7+834x^8-105x^9+5x^{10})(1+33x+375x^2+1922x^3+5192x^4+7883x^5+6797x^6+ \\
& 3252x^7+834x^8+105x^9+5x^{10})(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6-4525x^7+1975x^8+2500x^9- \\
& 875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+4525x^7+1975x^8-2500x^9- \\
& 875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+60858x^6-12548x^7-46005x^8+ \\
& 16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+ \\
& 2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}-329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})) \\
& 10x^2(141-20317x^2+1769412x^4-106602114x^6+4065572659x^8-95245006503x^{10}+1370793580650x^{12}- \\
& 12092519738638x^{14}+65574984909135x^{16}-226307435369999x^{18}+515543092515601x^{20}- \\
& 794633284937229x^{22}+841939662220809x^{24}-617434377175313x^{26}+310358521797465x^{28}- \\
& 101785469424327x^{30}+17785066908763x^{32}+757211048985x^{34}-1348937563312x^{36}+382686538032x^{38}- \\
& 59462965440x^{40}+5491199040x^{42}-281600000x^{44}+6144000x^{46})/ \\
& ((-1+4x)(1+4x)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+ \\
& 18x-91x^2+110x^3+175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+ \\
& 175x^7+25x^8)(-1+8x+14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+ \\
& 302x^4+65x^5-120x^6-62x^7+4x^8+7x^9+x^{10}))+
\end{aligned}$$

$$\frac{240x^2}{(-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)} + \frac{8x^2}{1-4x^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,5}^{TG}(x) = & -2x(-51 - 2531x + 346545x^2 + 6281569x^3 - 626107154x^4 - 6720852191x^5 + 557692878360x^6 + \\
& 3924628100007x^7 - 303896690325215x^8 - 1203141163993754x^9 + 110385064013034818x^{10} + \\
& 129738487704458173x^{11} - 27731403108413092267x^{12} + 34160159071697768285x^{13} + \\
& 4912263037693206222860x^{14} - 15954779864093857882007x^{15} - 623281892861255956436402x^{16} + \\
& 3097145780008994257521933x^{17} + 57632783639522368138374201x^{18} - 377934991774510513575939182x^{19} - \\
& 3952158907346024732403779791x^{20} + 32460308118041603852559150442x^{21} + \\
& 203786575810957015978655619471x^{22} - 2077813633463470867265288726055x^{23} - \\
& 7948961501060129247409085221049x^{24} + 102802217882332666430474733354935x^{25} + \\
& 232622429206461224171013982875562x^{26} - 4034402051064428138538406384326721x^{27} - \\
& 4900682055953589557666106815753572x^{28} + 128060859092710534391335093622529141x^{29} + \\
& 63051543270494126746830832945671583x^{30} - 3338490507604724111102033951338547814x^{31} + \\
& 26788511188693114060249776800215459x^{32} + 72356721471260820357813632619322970952x^{33} - \\
& 2513388076030218523548415691876946199x^{34} - 1316599417966012079962043281074495545073x^{35} + \\
& 742495978080795122963703947179610357632x^{36} + 20269576331788360890752199000142043677074x^{37} - \\
& 13862824906131506810766699016256900960915x^{38} - 265607493352496242359856362940910711915736x^{39} + \\
& 193104389804418555043447324391809895693127x^{40} + \\
& 2975216590177302257886759045720008372793261x^{41} - \\
& 2111817918355102371185068791194960721452202x^{42} - \\
& 28570645331934163623948593487911673599500336x^{43} + \\
& 18487694709094661432907887261184552837124826x^{44} + \\
& 235581468114998519645838461855224488305073809x^{45} - \\
& 130156394689861484366232451128499870990468851x^{46} - \\
& 1668989256110220098195946316866546797554529153x^{47} + \\
& 731417562602339275971261625262436986942402381x^{48} + \\
& 10158855568490050874446218127772793907793908546x^{49} - \\
& 3198253249786663176802047271684130146636834688x^{50} - \\
& 53108779145386981783564979650152383616566550465x^{51} + \\
& 10128033086120794207566571571046105705526451654x^{52} + \\
& 238382059576456471861910521774034716007311766422x^{53} - \\
& 17221109780482571116786192851239191587398123757x^{54} - \\
& 918635161824208359247552665162981432872785417134x^{55} - \\
& 33195366068704491758994589883688270853002940664x^{56} + \\
& 3040577629649310776598270380203292039919688800658x^{57} + \\
& 400196059547950418222174462590664705515435620391x^{58} - \\
& 8652537823786096071652322353673649787183678251881x^{59} - \\
& 1839752907314622571026734469523168083989405111807x^{60} + \\
& 21202716809862237156822487730685535276278991654367x^{61} + \\
& 5903523420339799260371399837261110215036855209930x^{62} - \\
& 44834552043335708954505705972482347114055469684559x^{63} - \\
& 14744682581002030836899333703692875295653926228962x^{64} + \\
& 82014457953943649674965051178817460289536021215555x^{65} + \\
& 29863060596899002266660546446251805386332824925422x^{66} - \\
& 130137466567016964377506206069967536159477001537059x^{67} - \\
& 50053627002770222166627376101885876440432458356957x^{68} + \\
& 179612493443689814186527356422746942236647246072246x^{69} + \\
& 70235891648446344107801479915893386405663885576028x^{70} - \\
& 216173911972664059606906981717451566757458755155447x^{71} - \\
& 83076701121466780717363057720697280259747943692692x^{72} + \\
& 227380374071409807308921118593306719565945503226892x^{73} + \\
& 83137577281686798107796684139729872757623656114015x^{74} - \\
& 209365843407986573894358246160972068370712087311012x^{75} - \\
& 70461316925701078941006771908989977332975544991382x^{76} + \\
& 168926823594511366682206960322103657949050819207126x^{77} + \\
& 50480700674821294557379787438558260881230116262837x^{78} - \\
& 119467885941242496991002033696268682672607206171073x^{79} - \\
& 30396677030912213570439085714643100882979411593462x^{80} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 74020463837949215696205173175300374984605142344152x^{81} + \\
& 15197881227364908605675007638412617172581757209863x^{82} - \\
& 40128862392750652022136897009811599005073308003030x^{83} - \\
& 6152878805987423805276211517166965970667420375242x^{84} + \\
& 18997536394461918549664063346870105159076338828474x^{85} + \\
& 1900388850847166181951675437482252296274290069450x^{86} - \\
& 7832191839678246919734677017867495833467141242296x^{87} - \\
& 365399651689524059728343699524403419774914588397x^{88} + \\
& 2802193964815597934939014943380747326366064960001x^{89} - \\
& 16835332987879145552417242317924585488588957143x^{90} - \\
& 866308406412822132399069201881506931370442990979x^{91} + \\
& 49888904500015272960502242118186671756572892776x^{92} + \\
& 230212846577582644227486528608136047856559439351x^{93} - \\
& 24906031147133352566492345138371357002782063214x^{94} - \\
& 52250179636338263131907344309120893625441147691x^{95} + \\
& 8277699145310025749463885476605039347697929953x^{96} + \\
& 10048398217541402857728024267494891772275023944x^{97} - \\
& 2105984461825530959671151172262247224745299426x^{98} - \\
& 1620900014269096181173400651490200441434643381x^{99} + \\
& 427865890582649419864944018613027239279086942x^{100} + \\
& 216372606893901948914468519952550532201294652x^{101} - \\
& 70480627023716470610346842862468964051941617x^{102} - \\
& 23445919611481704609414636889112228678067462x^{103} + \\
& 9450269499593860084876826613561231502792428x^{104} + \\
& 1999939004828987307604697849230729911169432x^{105} - \\
& 1029122034653812682572137628192624648134651x^{106} - \\
& 126594218202456922523147996987918621162003x^{107} + \\
& 90440776236817384538157776269938860389718x^{108} + \\
& 5052589819186147732132437936795903137926x^{109} - 6351553952451503074249343839812369826573x^{110} - \\
& 22664819101711128318447084542557984040x^{111} + 351830496887428666123569104723733957290x^{112} - \\
& 13435814835754352840124128090090275660x^{113} - 15117410702244283319581825228861246020x^{114} + \\
& 1094813438728454165994918549559584000x^{115} + 493311516515768181121201093952770000x^{116} - \\
& 50036189966890691796258300544529600x^{117} - 11896752290285081874041038063833200x^{118} + \\
& 1512543300338047970724655575772000x^{119} + 204555449167210073548457376448000x^{120} - \\
& 30942312932846690051739107360000x^{121} - 2391993570434141288613123280000x^{122} + \\
& 418664918044319757870120800000x^{123} + 18006370964198364023608000000x^{124} - \\
& 3538686190756713370448000000x^{125} - 85470368056527605120000000x^{126} + \\
& 16891388123502675200000000x^{127} + 293197981277634560000000x^{128} - 38145542748876800000000x^{129} - \\
& 730539005542400000000x^{130} + 25023176704000000000x^{131} + 525533184000000000x^{132})/ \\
& ((-1+x)(1+x)(1+2x)(-1+4x)(1+4x)(1-8x+4x^2)(1+5x+5x^2)(1+7x+8x^2)(1+18x+63x^2+50x^3+13x^4+ \\
& x^5)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+18x-91x^2+110x^3+ \\
& 175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+175x^7+25x^8)(-1+ \\
& 121x-3901x^2+49003x^3-293115x^4+896942x^5-1381585x^6+970100x^7-264304x^8+15552x^9)(-1+8x+ \\
& 14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+302x^4+65x^5-120x^6- \\
& 62x^7+4x^8+7x^9+x^{10})(1-36x+504x^2-3603x^3+14416x^4-33263x^5+44489x^6-34794x^7+16069x^8-4345x^9+ \\
& 653x^{10}-47x^{11}+x^{12})(1+53x+951x^2+7589x^3+32774x^4+84127x^5+133734x^6+133056x^7+81936x^8+ \\
& 30215x^9+6265x^{10}+650x^{11}+25x^{12})(1+92x+3048x^2+50453x^3+483576x^4+2928888x^5+11832412x^6+ \\
& 32949126x^7+64377394x^8+88750186x^9+85833700x^{10}+57206921x^{11}+25441290x^{12}+7182529x^{13}+ \\
& 1203428x^{14}+111956x^{15}+5340x^{16}+120x^{17}+x^{18})(1-66x+1833x^2-28651x^3+283174x^4-1881547x^5+ \\
& 8719340x^6-28859906x^7+69342834x^8-122339404x^9+159752386x^{10}-155169581x^{11}+112318552x^{12}- \\
& 60476870x^{13}+24066800x^{14}-6990095x^{15}+1450676x^{16}-207780x^{17}+19365x^{18}-1050x^{19}+25x^{20}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -20x(2 + 5659x^2 - 14484607x^4 + 1623166223x^6 + 19612453184950x^8 - 25320534081702041x^{10} + \\
& 17091892743121647834x^{12} - 7655837232974703848604x^{14} + 2492277605569640395833581x^{16} - \\
& 620099827786773705171611869x^{18} + 121885949780878818966486500169x^{20} - \\
& 19384309001900158601675819590310x^{22} + 2540186001434970800443884399355721x^{24} - \\
& 278235840580135809493641738709226336x^{26} + 25765384988114400513290639323578465316x^{28} - \\
& 2035553668877659915082716579609632578913x^{30} + \\
& 138196312427301076159723996151208851675079x^{32} - \\
& 8109230896031867918266410848377817689640924x^{34} + \\
& 413161160550946548074386128305818536822648499x^{36} - \\
& 18344103322200841094903263044635009064943799154x^{38} + \\
& 711816904534000358494914943635275294850195464896x^{40} - \\
& 24195185649666128001631263025120708673126477249290x^{42} + \\
& 721678280050024769218969825405647420558142476056042x^{44} - \\
& 18912930409545443103034473780503465060418810796183341x^{46} + \\
& 435799785917531445698829869799646400409340297457680583x^{48} - \\
& 8830009741753543163707469435200664569445824112203405647x^{50} + \\
& 157198076496313230975646610274296281597109849037468640802x^{52} - \\
& 2454070354971455070662305063780743901748713735246305422475x^{54} + \\
& 33466538141352151499532582791125094139455921443680209782438x^{56} - \\
& 395888331472760042299157128136911216502274641086632905513340x^{58} + \\
& 4009750831589993497127268562617739272447604308340131540444385x^{60} - \\
& 33870841213004933871120926511210614898252679704449832033744953x^{62} + \\
& 223949855657319688350878425976362530338378085000502022678755621x^{64} - \\
& 921462875839575071588591369463043652525707048884121111528853893x^{66} - \\
& 1826548520005609845984665795401945905775154499722805743624353842x^{68} + \\
& 83758280051599460787091479473116770318079299843494501711550277584x^{70} - \\
& 1027285931910734858099310457561751998235691256560572904464524259553x^{72} + \\
& 8967259351220872011077153767668367595881327758325251306097559852159x^{74} - \\
& 63440246962823249673909165117689191400102893653392948841586588496283x^{76} + \\
& 380384157549626783130849524646317509227080629068121575223467875015497x^{78} - \\
& 1973537580869792683021248989352069132562510658842050140032004708090884x^{80} + \\
& 8960729858891577905811008572630611446854911253463679456211189028525753x^{82} - \\
& 35848741085864395698132749891629191767962513604165732992920437683415716x^{84} + \\
& 126925097405552838886235621891701363852352059062130769008765810973825210x^{86} - \\
& 398901092418377304241414075486889280864766490675190442602637215961593763x^{88} + \\
& 1115199542594761854173624748910849443271658042502312675256644724618461325x^{90} - \\
& 2777758819899025882861031133251130097920398385094901405394695927895270173x^{92} + \\
& 6171887585950640536233308481583175532091448408576743626905910740115368920x^{94} - \\
& 12244596800927822083598399274736287470567787812362881446247930723254806073x^{96} + \\
& 21708232524582362102676634194012784749853509218702418772935430042276040782x^{98} - \\
& 34415982695758774633026344840956657057525423661143543963251323713314712788x^{100} + \\
& 48822557794320119578058943135929592376719383814702632017318845864117288957x^{102} - \\
& 62008403932388029294187629828840491036045386323342349790841473402349574011x^{104} + \\
& 70546739103255702476981855502474574737702669144117262038726367295574409817x^{106} - \\
& 71930122894272438404689062583654889655419194490842537760804817565863844620x^{108} + \\
& 65757961617815612723189915581298198503277898335401690937775529211300226786x^{110} - \\
& 53922515483442644598178634993747162301831435258703657746483489403389384211x^{112} + \\
& 39677049034669816206409587991332018712017565179790995825177198211744995613x^{114} - \\
& 26205908355603413844990105210820784914073418978699979154361605255412437523x^{116} + \\
& 15540677047625759529182462703868548821497238359929159199774257668121505601x^{118} - \\
& 8276473889891497546477408617044943555339968243037682846407369535837002808x^{120} + \\
& 3959033754799320453893164823280523335270054179615956238265142793264080238x^{122} - \\
& 1701105518674175574551493647766236493409926136158119733621370896727046445x^{124} + \\
& 656542990989592417348625741487879377319426258958781570243093578803916784x^{126} - \\
& 22758010377549506068084641880256490019659457087714061253774872963800848x^{128} + \\
& 70834884842512314536778258043118786548266175539893877638807925806556672x^{130} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 19790330194890916651534968542711581210369213927725727755747964390504682x^{132} + \\
& 496074254438566075805040906625217551608500599980936006227765109072555x^{134} - \\
& 1114965408252275546691711366971472827850362369177808569751457148704719x^{136} + \\
& 224524125026871302328965147855176330086721432772721002344692680641782x^{138} - \\
& 40470954750979642753538174797600193341865930262582203299880325752531x^{140} + \\
& 6522484527368778953449973284479582692866856074217892707007561374018x^{142} - \\
& 938623824921590972669146517068697112311254760684888308613488469202x^{144} + \\
& 120419567092177406591038675265056473432666809078090186644227888884x^{146} - \\
& 13747766293669092745250547824255227917032348835795909324767440930x^{148} + \\
& 1393691287672287850081556830889435116855420688327049013385687843x^{150} - \\
& 125145452427006640167902103013205097232068982381428059224080893x^{152} + \\
& 9924495724138899418787178708185784388161228130689225107867703x^{154} - \\
& 692717654611336590835950467233870863314381823699368983990018x^{156} + \\
& 42383548518450024305013765537116171849144635477753961710730x^{158} - \\
& 2262213418454639456479373460003381347256055513386909318425x^{160} + \\
& 104722440678757379322071746661202509907487401907861926350x^{162} - \\
& 4174807247219310825397505396455503773664774258173953600x^{164} + \\
& 142070795170315335896284229860216232653265539388845500x^{166} - \\
& 4081335488728972215084901266311623117500995827927500x^{168} + \\
& 97542596542325886160901390409841083590895138256875x^{170} - \\
& 1901115576372506933834356905953362581345663705625x^{172} + \\
& 29342359742088281927166003690771020937903218750x^{174} - \\
& 341588812305336986413471889238776928586228125x^{176} + \\
& 2709785456016506931219420585932164975125000x^{178} - \\
& 10151850504867281490674504538905811250000x^{180} - \\
& 52202370660679192022575858760375000000x^{182} + 972298069735283950652233953000000000x^{184} - \\
& 5928705592980063547455520000000000x^{186} + 17784983723555471913600000000000x^{188} - \\
& 242511685638984960000000000000x^{190} + 10543094200320000000000000x^{192})/ \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-13x+11x^2)(1-8x+ \\
& 11x^2)(1+8x+11x^2)(1+13x+11x^2)(1-12x^2+8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(-1+104x-2661x^2+24090x^3- \\
& 91993x^4+158236x^5-121128x^6+44736x^7-7808x^8+512x^9)(1+104x+2661x^2+24090x^3+91993x^4+ \\
& 158236x^5+121128x^6+44736x^7+7808x^8+512x^9)(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6- \\
& 4525x^7+1975x^8+2500x^9-875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+ \\
& 4525x^7+1975x^8-2500x^9-875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+ \\
& 60858x^6-12548x^7-46005x^8+16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+ \\
& 22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}- \\
& 329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})(1-82x+2898x^2-59227x^3+789803x^4-7334275x^5+49339066x^6- \\
& 246611784x^7+930982131x^8-2681675595x^9+5927069364x^{10}-10071216252x^{11}+13140900495x^{12}- \\
& 13114381556x^{13}+9943609371x^{14}-5673467839x^{15}+2404556811x^{16}-744137999x^{17}+164387022x^{18}- \\
& 25156085x^{19}+2562619x^{20}-164923x^{21}+6260x^{22}-125x^{23}+x^{24})(1+82x+2898x^2+59227x^3+789803x^4+ \\
& 7334275x^5+49339066x^6+246611784x^7+930982131x^8+2681675595x^9+5927069364x^{10}+10071216252x^{11}+ \\
& 13140900495x^{12}+13114381556x^{13}+9943609371x^{14}+5673467839x^{15}+2404556811x^{16}+744137999x^{17}+ \\
& 164387022x^{18}+25156085x^{19}+2562619x^{20}+164923x^{21}+6260x^{22}+125x^{23}+x^{24})(1-104x+4410x^2- \\
& 104155x^3+1561045x^4-15952817x^5+116275468x^6-623060570x^7+2507306175x^8-7693787635x^9+ \\
& 18199448138x^{10}-33436393552x^{11}+47933912805x^{12}-53730741510x^{13}+47072037995x^{14}-32132854819x^{15}+ \\
& 16992690151x^{16}-6899340865x^{17}+2123302560x^{18}-486469225x^{19}+80870375x^{20}-9387875x^{21}+715250x^{22}- \\
& 31875x^{23}+625x^{24})(1+104x+4410x^2+104155x^3+1561045x^4+15952817x^5+116275468x^6+623060570x^7+ \\
& 2507306175x^8+7693787635x^9+18199448138x^{10}+33436393552x^{11}+47933912805x^{12}+53730741510x^{13}+ \\
& 47072037995x^{14}+32132854819x^{15}+16992690151x^{16}+6899340865x^{17}+2123302560x^{18}+486469225x^{19}+ \\
& 80870375x^{20}+9387875x^{21}+715250x^{22}+31875x^{23}+625x^{24}))+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 20x(-6 + 14439x^2 - 17489877x^4 + 10330737178x^6 - 3512457670994x^8 + 773557628972348x^{10} - \\
& 118933118809202657x^{12} + 13402180795603772620x^{14} - 1143041824743722405247x^{16} + \\
& 75376256735760762870682x^{18} - 3900527153583558378830705x^{20} + 160213298841044278614369934x^{22} - \\
& 5275838401562286712534526324x^{24} + 140573690871732227718948395990x^{26} - \\
& 3056564285047841048567283322908x^{28} + 54652048844038774281403989770261x^{30} - \\
& 808942158731857921215515356108750x^{32} + 9967824187962503734284150480450070x^{34} - \\
& 102713732787270231411347953780078248x^{36} + 888250051092651001524860349740227677x^{38} - \\
& 6463166125218437400006981086907240411x^{40} + 39637978009471883546636305098439043760x^{42} - \\
& 205093971569105754927653524287955415546x^{44} + 895558787922679427854424612410673676432x^{46} - \\
& 3299173638099044870816627640048666130399x^{48} + 10245759838971553289794103842671422631885x^{50} - \\
& 26791934850374230320125306109278203915108x^{52} + 58906881739110815316562407273388595784955x^{54} - \\
& 108732542853795198593390914574744834434822x^{56} + 168239497159962925035017673451545751094463x^{58} - \\
& 217918473564650058361147962867208485475654x^{60} + \\
& 236057112081995121270869493572868735267898x^{62} - \\
& 213713512024068312432499578346861834335878x^{64} + \\
& 161683023301512813895399355837769391093165x^{66} - \\
& 102240860333144345801548115647872150591455x^{68} + \\
& 54074149795443535376039142140102406234500x^{70} - \\
& 23943838634669362984469311992864393210682x^{72} + 8888700912481564685277221760614738560233x^{74} - \\
& 2771661455629275371014154547049255338390x^{76} + 727812657222702963167793555355730851828x^{78} - \\
& 161515258511255951877862805319023890021x^{80} + 30434257302491488042949030650375486214x^{82} - \\
& 4897312431601779726470344199863622918x^{84} + 676980041265615812866269278365661863x^{86} - \\
& 80737687927639046123515583011360482x^{88} + 8307477110059593202867794291904440x^{90} - \\
& 732682938604928561415945411279575x^{92} + 54623727635868006340062845596200x^{94} - \\
& 3372640551227980849360364652650x^{96} + 168032171870938912863676561625x^{98} - \\
& 6543238298083022807536718750x^{100} + 191057651766096466508155625x^{102} - \\
& 3932802250774791278810000x^{104} + 50816150733187918900000x^{106} - 287935206776374600000x^{108} - \\
& 1266111061732000000x^{110} + 20349020120000000x^{112})/ \\
& ((-1+x)(1+x)(-1+2x)(1+2x)(-1+11x)(1+11x)(-1+9x-6x^2+x^3)(1+9x+6x^2+x^3)(1-12x^2+ \\
& 8x^3)(-1+12x^2+8x^3)(1-59x+402x^2-863x^3+572x^4)(1+59x+402x^2+863x^3+572x^4)(1-18x+93x^2- \\
& 195x^3+164x^4-37x^5+x^6)(1+18x+93x^2+195x^3+164x^4+37x^5+x^6)(1-33x+375x^2-1922x^3+5192x^4- \\
& 7883x^5+6797x^6-3252x^7+834x^8-105x^9+5x^{10})(1+33x+375x^2+1922x^3+5192x^4+7883x^5+6797x^6+ \\
& 3252x^7+834x^8+105x^9+5x^{10})(-1+5x+45x^2-305x^3+65x^4+2175x^5-1800x^6-4525x^7+1975x^8+2500x^9- \\
& 875x^{10}-375x^{11}+125x^{12})(-1-5x+45x^2+305x^3+65x^4-2175x^5-1800x^6+4525x^7+1975x^8-2500x^9- \\
& 875x^{10}+375x^{11}+125x^{12})(1-22x-214x^2+4230x^3-15001x^4-2783x^5+60858x^6-12548x^7-46005x^8+ \\
& 16340x^9+10377x^{10}-5171x^{11}-329x^{12}+413x^{13}-27x^{14}-9x^{15}+x^{16})(1+22x-214x^2-4230x^3-15001x^4+ \\
& 2783x^5+60858x^6+12548x^7-46005x^8-16340x^9+10377x^{10}+5171x^{11}-329x^{12}-413x^{13}-27x^{14}+9x^{15}+x^{16})) - \\
& 20x(-1 - 1084x^2 + 181865x^4 - 12397664x^6 + 428673097x^8 - 7910965080x^{10} + 75885327537x^{12} - \\
& 318421450140x^{14} + 6099467709x^{16} + 4470956945320x^{18} - 14829354664352x^{20} + 17943936244558x^{22} - \\
& 69992659920x^{24} - 23219650776430x^{26} + 28103414048922x^{28} - 16901971862574x^{30} + 5633156135784x^{32} - \\
& 787531780908x^{34} - 143356906659x^{36} + 93059619780x^{38} - 20683860360x^{40} + 2506426400x^{42} - 164601600x^{44} + \\
& 4608000x^{46})/ \\
& ((-1+4x)(1+4x)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+ \\
& 18x-91x^2+110x^3+175x^4-515x^5+455x^6-175x^7+25x^8)(-1-18x-91x^2-110x^3+175x^4+515x^5+455x^6+ \\
& 175x^7+25x^8)(-1+8x+14x^2-194x^3+302x^4-65x^5-120x^6+62x^7+4x^8-7x^9+x^{10})(-1-8x+14x^2+194x^3+ \\
& 302x^4+65x^5-120x^6-62x^7+4x^8+7x^9+x^{10}))) + \\
& \frac{20x(1+11x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)} + \frac{4x}{1-4x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{10}^{TG(0)}(x) = & 2x + 61098x^2 + 308906x^3 + 129930354x^4 + 2720543472x^5 + 566597492178x^6 + 18309402983496x^7 + \\ & 2938658810744994x^8 + 116306062547543522x^9 + 16178049740086515288x^{10} + 727292183495663026276x^{11} + \\ & 91590416197626458526954x^{12} + 4527128914550355698742952x^{13} + 527348632328247714223605228x^{14} + \\ & 28141085352317875290219968916x^{15} + 3073522709863650496508014495554x^{16} + \\ & 174855430602649847342302412927922x^{17} + 18089455293271238139140477649903078x^{18} + \\ & 1086333235497369435947818692121108606x^{19} + 107351220767799919507571884996197429624x^{20} + \\ & 6748862185028459643138579976924602126462x^{21} + 64162704375874548485270830799949553720888x^{22} + \\ & 41926930850273492461849597562327593977489946x^{23} + \\ & 3858618823943394269588240386686529017468650634x^{24} + \\ & 260467820671447474586174871336823947674324860272x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{10,1}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{10,9}^{TG}(x) = & 1026x + 4180x^2 + 2051592x^3 + 33170592x^4 + 8069846256x^5 + 229045565290x^6 + 40115886558012x^7 + \\ & 1469214784114372x^8 + 216667625165910036x^9 + 9215230392687922900x^{10} + 1213567945794537846582x^{11} + \\ & 57414193981276811657742x^{12} + 6936778336725145347923466x^{13} + 356991726966366474382847320x^{14} + \\ & 40203601288654536608812622292x^{15} + 2218365210472271764159039832272x^{16} + \\ & 235526781691019196909383559047676x^{17} + 13782502354487762058634737982846660x^{18} + \\ & 1392191406729627260322579497951111622x^{19} + 85624673105717668604962699191914961602x^{20} + \\ & 8292493355622907262095650027980986669206x^{21} + 531939763587101129312734951569991372135300x^{22} + \\ & 49721834351877446556402146041368458726569482x^{23} + \\ & 3304637053185180117384485662627188290697276482x^{24} + \\ & 299841100528605106367555529876308008440746424306x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{10,2}^{TG}(x) = \mathcal{F}_{10,8}^{TG}(x) = & 92x + 25218x^2 + 471806x^3 + 110135304x^4 + 2969143592x^5 + 544738148268x^6 + 18733804343896x^7 + \\ & 2906989357241034x^8 + 117074541545912732x^9 + 16126806424226575248x^{10} + 728717355076106649356x^{11} + \\ & 91503347671376455645554x^{12} + 4529796151476687283889602x^{13} + 527196799037450133481167468x^{14} + \\ & 28146094047791596217660650356x^{15} + 3073253455025125282943152429464x^{16} + \\ & 174864847843926862804318201550242x^{17} + 18088971857265650432893838691621708x^{18} + \\ & 1086350949490490741420195237197194316x^{19} + 107350344291239934770621956346509474854x^{20} + \\ & 6748895510691261530775791790843301575812x^{21} + 641625442244345393621045340731115667345458x^{22} + \\ & 41926993550049337813771587624911437784823556x^{23} + \\ & 3858615879222609487264258597095126866880206724x^{24} + \\ & 260467938638858687027343013376015523986867164442x^{25} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,3}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{10,7}^{TG}(x) = \\
&216x + 7720x^2 + 1359522x^3 + 41326692x^4 + 7224846606x^5 + 244339052710x^6 + 38872336271472x^7 + \\
&1497584405532272x^8 + 214663386349476186x^9 + 9268212962888129850x^{10} + 1210186806711127350552x^{11} + \\
&57513573632708543746002x^{12} + 6930923246121002208627546x^{13} + 357178488377886900023024160x^{14} + \\
&40193282071127277218839333842x^{15} + 2218716446757381095251745042372x^{16} + \\
&235508351491935853471352363887656x^{17} + 13783163096442342022306579828853140x^{18} + \\
&1392158139647409982133567021284313112x^{19} + 85625916211959364159888583860255390652x^{20} + \\
&8292432789495082787047256034690725994066x^{21} + 531942102426568280941249248546221193046250x^{22} + \\
&49721723315230444674700433893953054270083442x^{23} + \\
&3304641453646815273059373950532468477928520782x^{24} + \\
&299840895821602146325432803809692855748240378556x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,4}^{TG}(x) &= \mathcal{F}_{10,6}^{TG}(x) = \\
&152x + 16248x^2 + 624686x^3 + 93066714x^4 + 3290759442x^5 + 516152502498x^6 + 19364483660936x^7 + \\
&2859302099969304x^8 + 118279367322734672x^9 + 16045905490331081598x^{10} + 730996931066814837346x^{11} + \\
&91363659130860668507844x^{12} + 4534093898798572924420242x^{13} + 526951852599307829987691948x^{14} + \\
&28154186172061642466142676106x^{15} + 3072818241097287491246726066634x^{16} + \\
&174880077107369071228724241445472x^{17} + 18088189923998590847682978221505078x^{18} + \\
&1086379605861572895343307027610902516x^{19} + 107348926301965169450150269026412094304x^{20} + \\
&6748949429080552776832015805855025487462x^{21} + 641622851054722146910701255125556753513288x^{22} + \\
&41927094997964750458643481040889762138737366x^{23} + \\
&3858611114638599162347547786075041230010339874x^{24} + \\
&260468129512499412268673475355192713041040718692x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{10,5}^{TG}(x) &= \\
&306x + 10570x^2 + 1211262x^3 + 45545722x^4 + 6849153816x^5 + 252828385030x^6 + 38186186511492x^7 + \\
&1514324450538202x^8 + 213473030558695386x^9 + 9300371737211057120x^{10} + 1208126218216126646952x^{11} + \\
&57574580612326159255702x^{12} + 6927322391997258224033496x^{13} + 357293629161430374920263960x^{14} + \\
&40186915480643390114180558472x^{15} + 2218933329755178601233759183642x^{16} + \\
&235496967927647912670879570947646x^{17} + 13783571327298277992609557533586710x^{18} + \\
&1392137583848052715245251761256984922x^{19} + 85626684406466871629751060858520922032x^{20} + \\
&8292395360373738613387480674093825919686x^{21} + 531943547850287795263052296745922204885900x^{22} + \\
&49721654692613685201224263885906336633095402x^{23} + \\
&3304644173242482973584919641678295907935508182x^{24} + \\
&299840769306885738263268533595957733529298131316x^{25} + \dots
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{10,0}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,4}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,6}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,8}^{KB}(x) =$$

$$\begin{aligned} & -2x(51 - 831x - 153498x^2 + 3494142x^3 + 35737210x^4 - 978785019x^5 + 2181225858x^6 + 40625932692x^7 - \\ & 169809854157x^8 - 539171574110x^9 + 3248646540326x^{10} + 1733979403674x^{11} - 24220044711174x^{12} + \\ & 8425813503548x^{13} + 71539494759240x^{14} - 35544483302528x^{15} - 100136791120288x^{16} + 44771106019392x^{17} + \\ & 71841831791616x^{18} - 24300161941120x^{19} - 26998071010176x^{20} + 5807215608832x^{21} + 5044113799168x^{22} - \\ & 464409133056x^{23} - 381171302400x^{24} - 9920315392x^{25} + 3439853568x^{26})/ \\ & ((1+x)(-1+4x)(1+4x)(1+18x+63x^2+50x^3+13x^4+x^5)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+ \\ & 160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+121x-3901x^2+49003x^3-293115x^4+896942x^5-1381585x^6+970100x^7- \\ & 264304x^8+15552x^9))- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x(-45 + 71778x^2 - 17369136x^4 + 2188805644x^6 - 76349085123x^8 + 1009862205436x^{10} - 6106521487546x^{12} + \\ & 16764122743590x^{14} - 19163012747207x^{16} + 12803644578280x^{18} - 3806262284672x^{20} + 530610371584x^{22} - \\ & 33432641536x^{24} + 733872128x^{26})/ \\ & ((-1+2x)(1+2x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-13x+11x^2)(1+13x+11x^2)(-1+104x-2661x^2+24090x^3- \\ & 91993x^4+158236x^5-121128x^6+44736x^7-7808x^8+512x^9)(1+104x+2661x^2+24090x^3+91993x^4+ \\ & 158236x^5+121128x^6+44736x^7+7808x^8+512x^9))+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x(-30 + 17253x^2 - 1654579x^4 + 77516864x^6 - 668471522x^8 + 969635693x^{10} + 811800760x^{12} - 988086913x^{14} + \\ & 106897934x^{16})/ \\ & ((-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)(-1+9x-6x^2+x^3)(1+9x+6x^2+x^3)(1-59x+402x^2-863x^3+572x^4)(1+ \\ & 59x+402x^2+863x^3+572x^4))- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 12x(-5 + 316x^2 - 10552x^4 + 58592x^6 - 55552x^8 + 12288x^{10})/ \\ & ((-1+4x)(1+4x)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5))+ \end{aligned}$$

$$\frac{20x(1+11x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)} - \frac{4x}{(-1+2x)(1+2x)}$$

$$\mathcal{F}_{10,0}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,2}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,4}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,6}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,8}^{KB}(x) =$$

$$\begin{aligned} & 486x + 8742x^2 + 1555326x^3 + 40278270x^4 + 7448028216x^5 + 241043236914x^6 + 39200186604960x^7 + \\ & 1490511381690590x^8 + 215200380276792594x^9 + 9254216356840123792x^{10} + 1211105179284264511656x^{11} + \\ & 57486654067588797857634x^{12} + 6932526989474806983345204x^{13} + 357127332503295826122106028x^{14} + \\ & 40196121488251463309195643576x^{15} + 2218619758316902730081288019678x^{16} + \\ & 235513434522519195050742272384802x^{17} + 13782980800175828110273507021038930x^{18} + \\ & 1392167325142261666969798765433806674x^{19} + 85625572900721260086625938902471959360x^{20} + \\ & 8292449521724293420373158586932502245554x^{21} + 531941456216739020475250879088873942922380x^{22} + \\ & 49721753998437283054794227398187548320126318x^{23} + \\ & 3304640237580311820148409462658325632228709634x^{24} + \\ & 299840952395743492141155881299266273849675986916x^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{10,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,5}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,7}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,9}^{KB}(x) =$$

$$\begin{aligned} & 2x(-81 + 4743x + 18000x^2 - 2761290x^3 - 4824904x^4 + 619528503x^5 - 2779817376x^6 - 20740283688x^7 + \\ & 138457535763x^8 + 160243309118x^9 - 2194640836178x^{10} + 1013957190534x^{11} + 13884435328872x^{12} - \\ & 14282346936560x^{13} - 35197752351024x^{14} + 37740167279168x^{15} + 45100692942928x^{16} - 40565360679360x^{17} - \\ & 31522265045184x^{18} + 20159309425792x^{19} + 12193598770560x^{20} - 4556866880512x^{21} - 2441348405248x^{22} + \\ & 361003155456x^{23} + 203458510848x^{24} + 4195090432x^{25} - 1911029760x^{26})/ \\ & ((1+x)(-1+4x)(1+4x)(1+18x+63x^2+50x^3+13x^4+x^5)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+ \\ & 160x^2+248x^3+152x^4+32x^5)(-1+121x-3901x^2+49003x^3-293115x^4+896942x^5-1381585x^6+970100x^7- \\ & 264304x^8+15552x^9))- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 8x^2(-1413 + 1562003x^2 - 366965421x^4 + 24987288639x^6 - 585637285790x^8 + 6113962085337x^{10} - \\ & 30911433420511x^{12} + 73580273791090x^{14} - 71815424338881x^{16} + 29488786410400x^{18} - 5860745339328x^{20} + \\ & 585340968960x^{22} - 27329642496x^{24} + 444071936x^{26})/ \\ & ((-1+2x)(1+2x)(1-3x+x^2)(1+3x+x^2)(1-13x+11x^2)(1+13x+11x^2)(-1+104x-2661x^2+24090x^3- \\ & 91993x^4+158236x^5-121128x^6+44736x^7-7808x^8+512x^9)(1+104x+2661x^2+24090x^3+91993x^4+ \\ & 158236x^5+121128x^6+44736x^7+7808x^8+512x^9))) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x^2(1434 - 580778x^2 + 52255635x^4 - 1208428990x^6 + 7871937815x^8 - 17833483893x^{10} + 14395777753x^{12} - \\ & 3147975204x^{14} + 178151688x^{16})/ \\ & ((-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)(-1+9x-6x^2+x^3)(1+9x+6x^2+x^3)(1-59x+402x^2-863x^3+572x^4)(1+ \\ & 59x+402x^2+863x^3+572x^4))- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 24x^2(-71 + 3736x^2 - 39920x^4 + 82624x^6 - 48640x^8 + 8192x^{10})/ \\ & ((-1+4x)(1+4x)(-1+34x-160x^2+248x^3-152x^4+32x^5)(1+34x+160x^2+248x^3+152x^4+32x^5))- \end{aligned}$$

$$\frac{4x^2(-61 + 121x^2)}{(-1+x)(1+x)(-1+11x)(1+11x)} - \frac{8x^2}{(-1+2x)(1+2x)}$$

$$\mathcal{F}_{10,1}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,3}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,5}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,7}^{KB}(x) = \mathcal{F}_{10,9}^{KB}(x) =$$

$$\begin{aligned} & 162x + 26034x^2 + 547254x^3 + 105829506x^4 + 3087139472x^5 + 536544694458x^6 + 18933459082308x^7 + \\ & 2893320662340498x^8 + 117429397122323214x^9 + 16103929942562306184x^{10} + 729366115378484886684x^{11} + \\ & 91464255048323099506626x^{12} + 4530999924945274114423212x^{13} + 527128666585524788535089424x^{14} + \\ & 28148344110178105135600193324x^{15} + 3073132790947505523051236159154x^{16} + \\ & 174869068437238729059725316725722x^{17} + 18088755416815791020200633182335238x^{18} + \\ & 1086358879418462870325386565743428290x^{19} + 107349952098484950244056428392192616856x^{20} + \\ & 6748910421312067944031536548102249714502x^{21} + 641624725830162415536581332117994094315744x^{22} + \\ & 41927021596188944275645891032533653726633426x^{23} + \\ & 3858614562134145244469089962988617292496409666x^{24} + \\ & 260467991400549291223901340714858394942974085272x^{25} + \dots \end{aligned}$$

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Структура 2-фактор трансфер диграфа мрежних графова фиксне ширине
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Факултет техничких наука, Нови Сад
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
Истраживање је вршено у оквиру докторских студија на студијском програму Математика у техници.
1. Опис података
1.1 Врста студије <i>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</i>
1.2 Врсте података а) квантитативни б) квалитативни
1.3. Начин прикупљања података а) анкете, упитници, тестови б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи

в) генотипови: навести врсту _____

г) административни подаци: навести врсту _____

д) узорци ткива: навести врсту _____

ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____

е) текст, навести врсту _____

ж) мапа, навести врсту _____

з) остало: описати _____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

а) Excel фајл, датотека _____

б) SPSS фајл, датотека _____

в) PDF фајл, датотека _____

г) Текст фајл, датотека _____

д) JPG фајл, датотека _____

е) Остало, датотека _____

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли _____

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _____

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак измедју поновљених мера је _____

б) варијабле које се више пута мере односе се на _____

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип _____

б) корелационо истраживање, навести тип _____

ц) анализа текста, навести тип _____

д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? _____

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у _____ репозиторијум.

3.1.2. URL адреса _____

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

- а) Да
- б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____
- в) Не

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? _____

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- а) Подаци нису у отвореном приступу
 - б) Подаци су анонимизирани
 - ц) Остало, навести шта
-
-

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

- а) јавно доступни
- б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области
- ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима
