

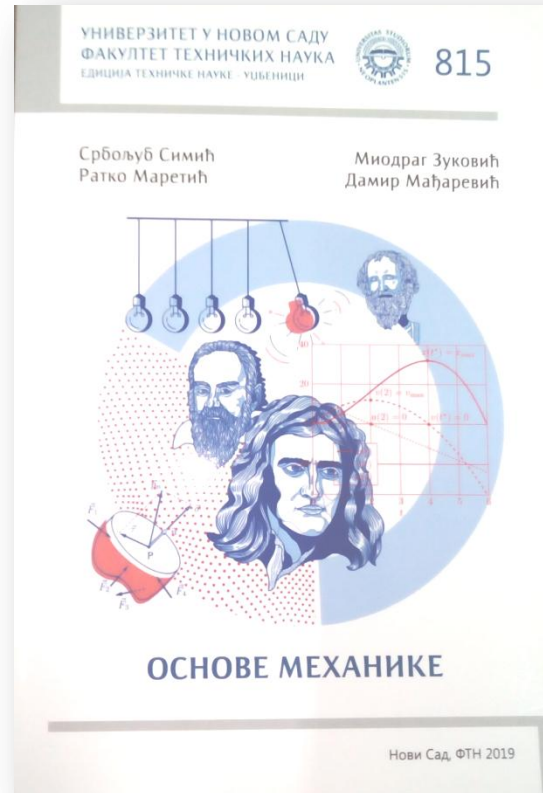
Динамика – II део

Енергија, рад, снага,... – 2. део

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



Шта ћемо научити?

- 40. Потенцијалне силе и потенцијална енергија. Закон о промени и одржању укупне механичке енергије.
- 41. Дисипација механичке енергије.
- 42. Стабилност положаја равнотеже.



$$E_K + \Pi = \text{const}$$

?

40. Потенцијалне силе и потенцијална енергија. Закон о промени и одржању укупне механичке енергије

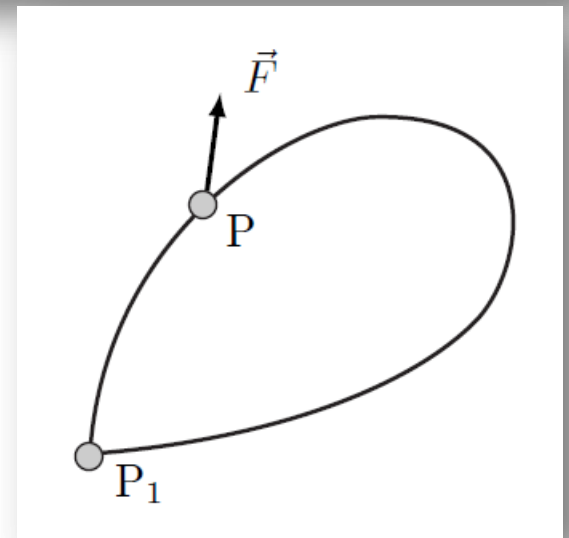
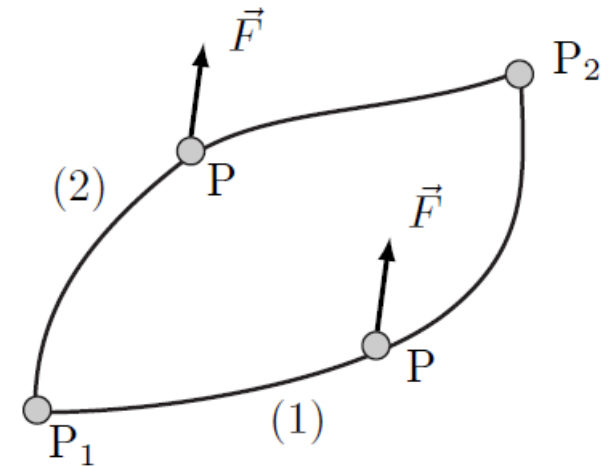
Потенцијалне силе

- Рад не зависи од путање

$$\begin{aligned} A_{12}^{(1)} &= \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{F}^{\Pi} \cdot d\vec{r}_1 \\ &= \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{F}^{\Pi} \cdot d\vec{r}_2 = A_{12}^{(2)} \end{aligned}$$

- Рад на затвореној путањи је 0

$$A^0 = \oint dA = \oint \vec{F}^{\Pi} \cdot d\vec{r} = 0$$



Потенцијална енергија

- Рад и потенцијална енергија

$$dA^{\Pi} = \vec{F}^{\Pi} \cdot d\vec{r} = -d\Pi$$

$$\Pi = -\int dA^{\Pi} = -\int \vec{F}^{\Pi} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} A_{12}^{\Pi} &= \int_{(P_1)}^{(P_2)} dA^{\Pi} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{F}^{\Pi} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_{(P_1)}^{(P_2)} d\Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1) = -\Delta\Pi \end{aligned}$$

Потенцијална енергија

- Сила тежине

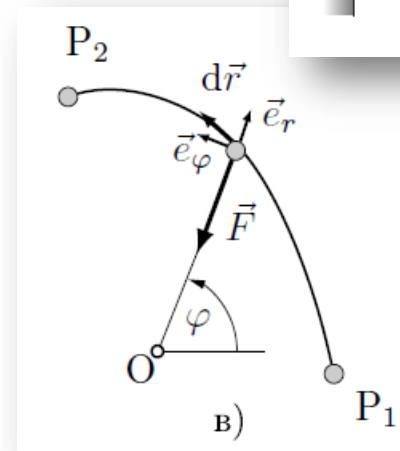
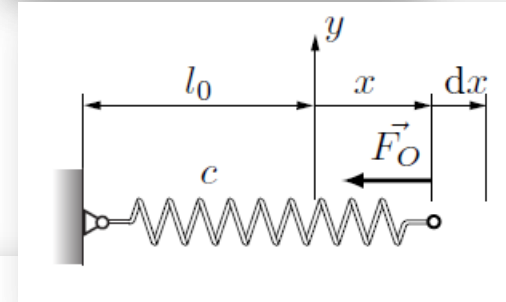
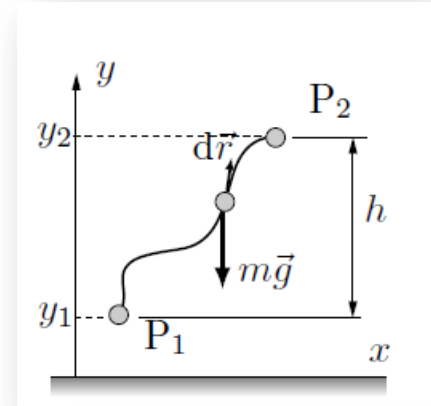
$$\Pi^g = mgy$$

- Сила у еластичној опрузи

$$\Pi^o = \frac{1}{2} cx^2 = \frac{1}{2} c(\Delta l)^2$$

- Њутнова гравитациона сила

$$\Pi = -\frac{\kappa}{r}$$



Укупна механичка енергија

- Кинетичка енергија – E_k
- Потенцијална енергија – Π
- Механичка енергија

$$E = E_k + \Pi$$

Закон о промени укупне механичке енергије

- Рад и снага:

$$\vec{F}_r = \vec{F}^\Pi + \vec{F}^*$$

$\vec{F}_r$ – резултанта свих сила

$\vec{F}^\Pi$ – резултанта потенцијалних сила

$\vec{F}^*$ – резултанта непотенцијалних сила

$$dA = \vec{F}^\Pi \cdot d\vec{r} + \vec{F}^* \cdot d\vec{r} = -d\Pi + dA^*$$

$$P = \frac{dA}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} + P^*$$

$$A_{12} = -\Delta\Pi + A_{12}^*$$

Закон о промени укупне механичке енергије

- Први облик

$$\frac{dE_k}{dt} = P \Rightarrow \frac{dE_k}{dt} = P^\Pi + P^* = -\frac{d\Pi}{dt} + P^*$$

$$\frac{dE_k}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = P^* \Rightarrow \frac{d}{dt}(E_k + \Pi) = P^*$$

$$\frac{dE}{dt} = P^*$$

Закон о промени укупне механичке енергије

- Други облик (диференцијални)

$$dE_k = dA \Rightarrow dE_k = dA^\Pi + dA^* = -d\Pi + dA^*$$

$$dE_k + d\Pi = dA^* \Rightarrow d(E_k + \Pi) = dA^*$$

$$dE = dA^*$$

Закон о промени укупне механичке енергије

- Трећи облик (интегрални)

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{12}$$

$$\Delta E_k = A_{12} \Rightarrow \Delta E_k = A_{12}^{\Pi} + A_{12}^* = -\Delta \Pi + A_{12}^*$$

$$\Delta E_k + \Delta \Pi = A_{12}^* \Rightarrow \Delta(E_k + \Pi) = A_{12}^*$$

$$\Delta E = A_{12}^*$$

$$E_2 - E_1 = A_{12}^*$$

$$(E_{k2} + \Pi_2) - (E_{k1} + \Pi_1) = A_{12}^*$$

Закон о одржању укупне механичке енергије

- Услов одржања механичке енергије

$$dA^* = \vec{F}^* \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{12}^* = 0$$

- Закон одржања

$$dE = d(E_k + \Pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E_k + \Pi = \text{const}$$

$$E_{k2} + \Pi_2 = E_{k1} + \Pi_1$$

Закон о одржању укупне механичке енергије

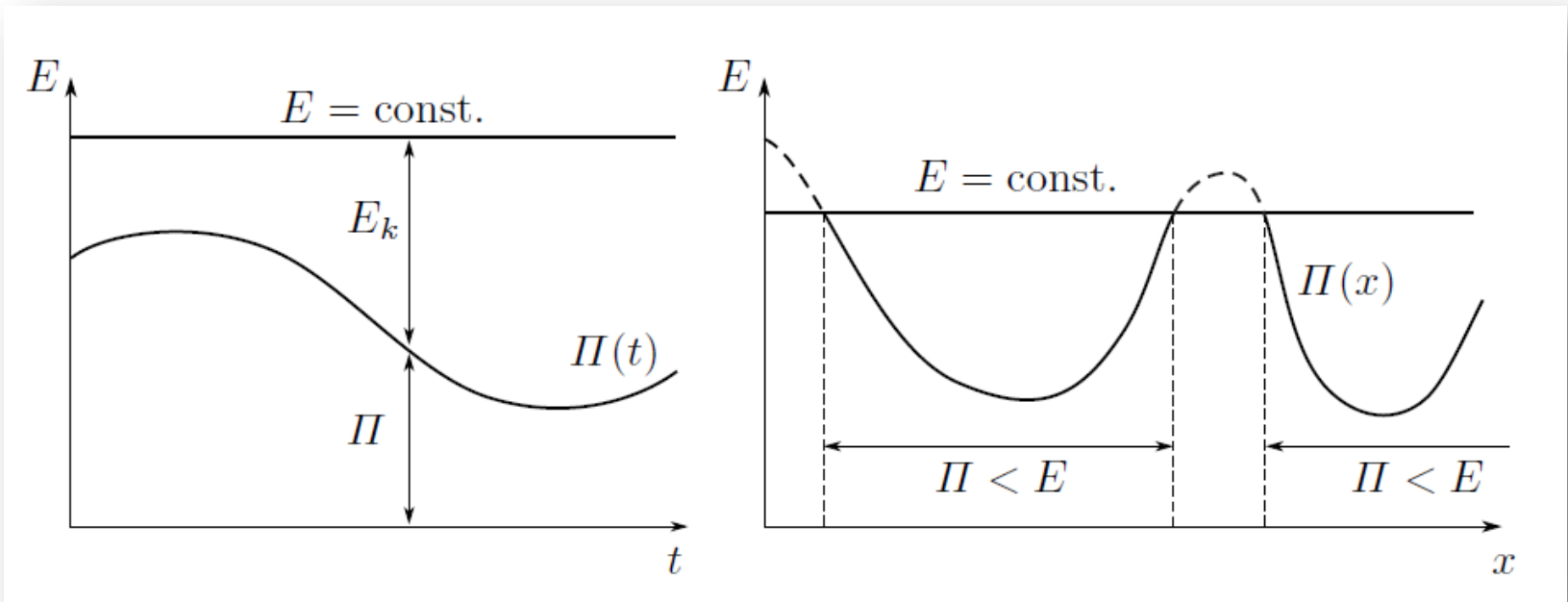
- Закон одржања

$$E_{k2} + \Pi_2 = E_{k1} + \Pi_1$$



Закон о одржању укупне механичке енергије

- Енергијски дијаграми

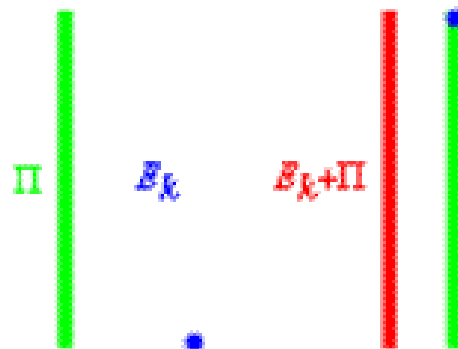
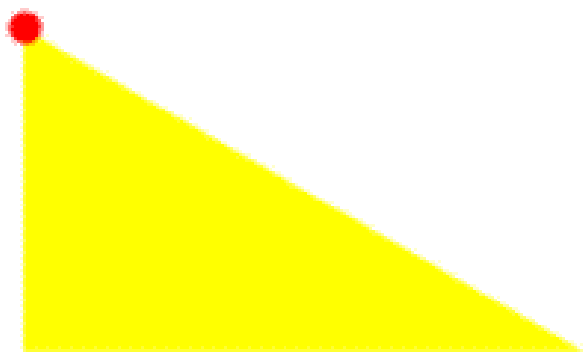


$$E_k + \Pi = E = \text{const.}$$

$$E - \Pi = E_k = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$$
$$E \geq \Pi$$

Пример

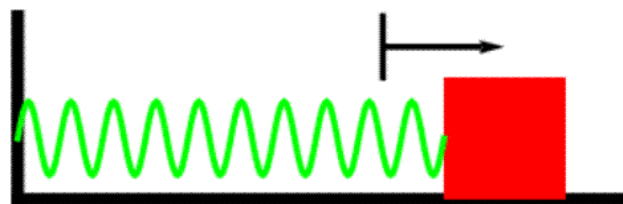
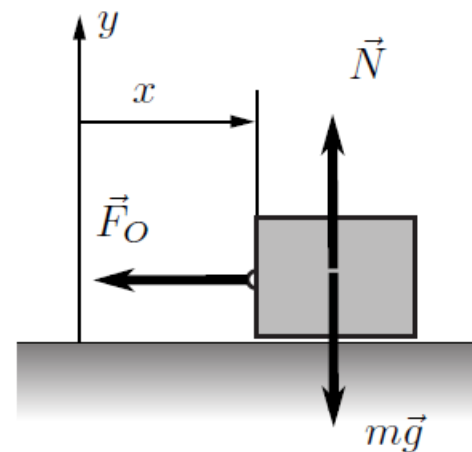
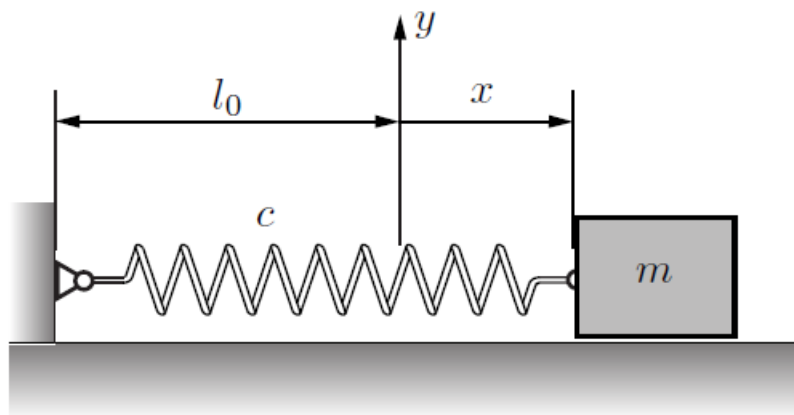
Терет масе m почиње да клизи, из стања мировања, са врха стрме равни која је нагнута под углом β према хоризонтали. Одредити брзину терета у подножју стрме равни које се налази на растојању d од почетног положаја. Показати да резултат не зависи од избора референтног нивоа за П.

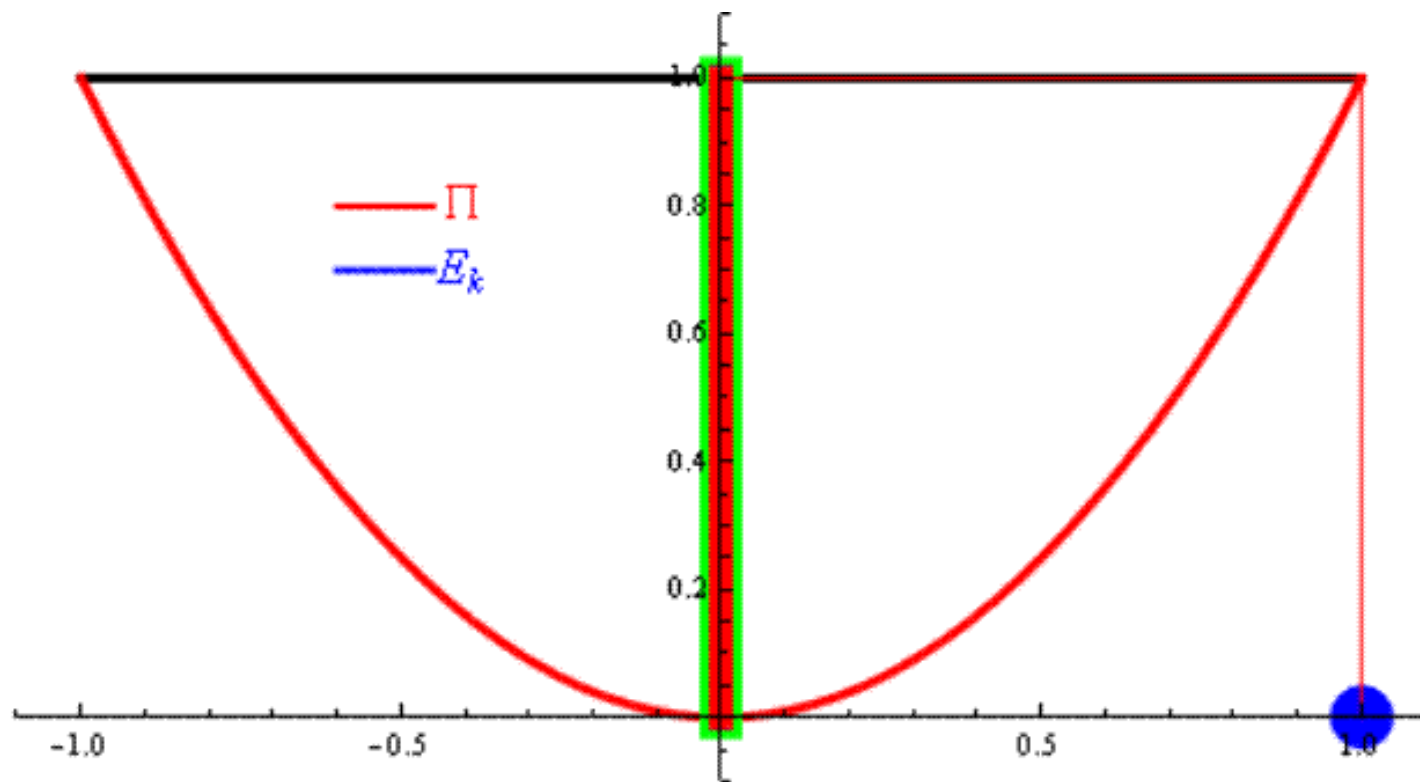


Пример

Пример 6.10. Терет масе m може да се креће по глаткој хоризонталној подлози. За терет је закачена опруга крутости c и дужине l_0 у ненапрегнутом стању. Други крај опруге је фиксиран. У почетном тренутку терет се налазио у положају одређеном координатом x_0 и имао је брзину v_0 .

- а) Одредити кретање терета и показати да ће његов период осциловања бити $T = 2\pi/\omega$, где је $\omega = \sqrt{c/m}$.
- б) Показати да за ово кретање важи закон одржања укупне механичке енергије.
- в) Помоћу енергијског дијаграма одредити амплитуду осциловања терета.





41. Дисипација механичке енергије

Дисипација механичке енергије

- Услов дисипације

$$\frac{dE}{dt} = P^* = \vec{F}^* \cdot \vec{v} \leq 0$$

- Дисипативне силе

$$P_D = \vec{F}_D \cdot \vec{v} \leq 0$$

Дисипација механичке енергије

- Везано кретање са силом вискозног трења

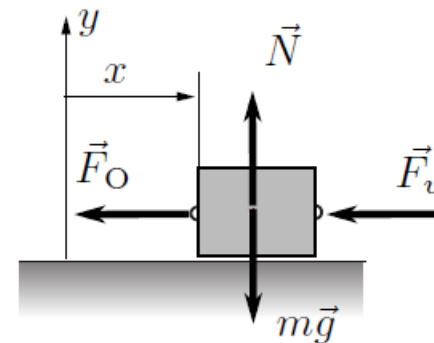
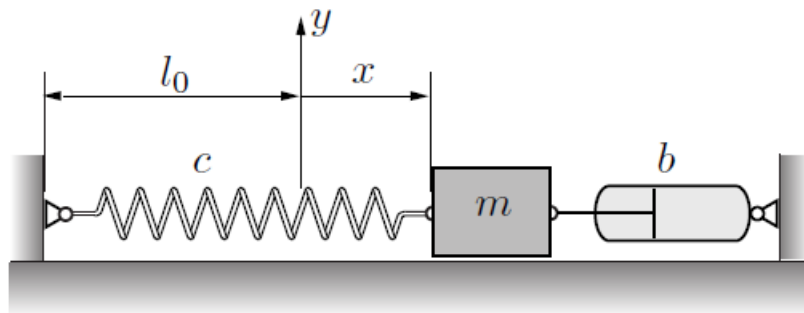
$$m \vec{a} = \vec{F}^{\Pi} + \vec{F}_w + \vec{R} \quad \vec{F}_w = -mk \vec{v}$$

$$\frac{dE}{dt} = P^* = \vec{F}_w \cdot \vec{v} + \vec{R} \cdot \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_w \cdot \vec{v} &= -mkv^2 \leq 0 \\ \vec{R} \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = -mkv^2 \leq 0$$

Пример

Пример 6.11. Показати да се код линеарних пригушених осцилација јавља дисипација механичке енергије и одредити закон промене енергије са временом за различите односе вредности параметара система.



► Најједноставнији механички модел који описује линеарне пригушене осцилације представља осцилатор, анализиран у Примеру 6.10, коме је додата пригушница (амортизер). Она се састоји од клипа који се креће кроз цилиндар испуњен флуидом. Њено присуство се манифестује силом отпора – вискозног трења – која је пропорционална првом степену брзине, $\vec{F}_v = -b\vec{v}$. На овај начин други Њутнов закон, који сада гласи $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_O + \vec{F}_v + \vec{N}$, даје следеће две једначине:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -cx - b\dot{x}; \\ m\ddot{y} &= -mg + N. \end{aligned} \tag{a}$$

Као и код хармонијског осцилатора, једначина (a)₂ је статичка једначина и из ње следи $N = mg$. Једначина (a)₁ се може трансформисати ако се поред кружне фреквенције $\omega = \sqrt{c/m}$ уведе и *коэффициент пригушења* $\beta = b/2m$:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 = 0. \tag{б}$$

Може се показати да једначина (б) има следећа решења у зависности од односа параметара ω и β :

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\beta t} \cos \Omega t + C_2 e^{-\beta t} \sin \Omega t & \text{за } \omega > \beta; \\ x(t) &= C_1 e^{-(\beta+\kappa)t} + C_2 e^{-(\beta-\kappa)t} & \text{за } \omega < \beta; \\ x(t) &= e^{-\omega t} (C_1 + C_2 t) & \text{за } \omega = \beta. \end{aligned} \tag{в}$$

У једначинама (в)_{1,2} искоришћене су ознаке:

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad \text{и} \quad \kappa = \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Ако се искористе почетни услови:

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

добиајају се следеће вредности за интеграционе константе:

$$\begin{aligned} \omega > \beta : \quad C_1 &= x_0; & C_2 &= \frac{x_0\beta + v_0}{\Omega}; \\ \omega < \beta : \quad C_1 &= \frac{x_0\kappa - (x_0\beta + v_0)}{2\kappa}; & C_2 &= \frac{x_0\kappa + x_0\beta + v_0}{2\kappa}; \\ \omega = \beta : \quad C_1 &= x_0; & C_2 &= x_0\omega + v_0. \end{aligned} \quad (\Gamma)$$

Укупна механичка енергија у овом проблему ће бити иста као код хармонијског осцилатора:

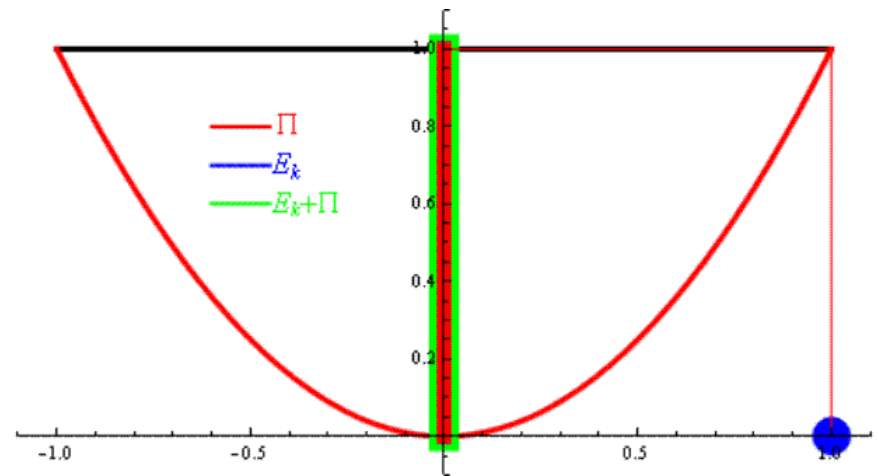
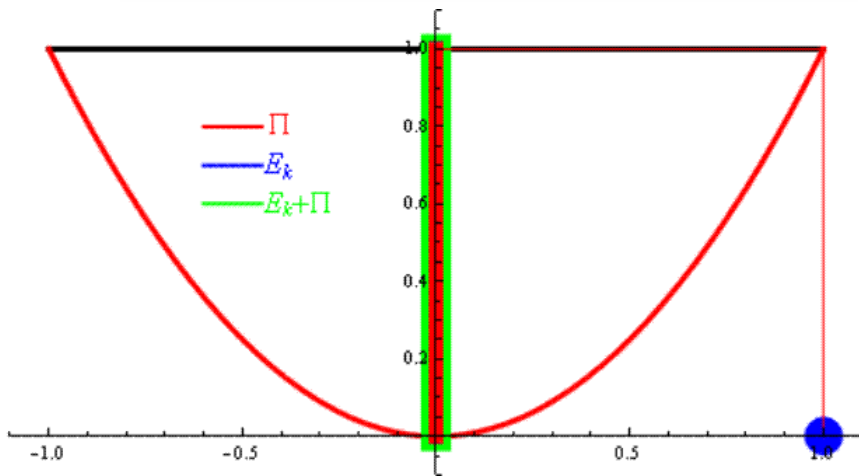
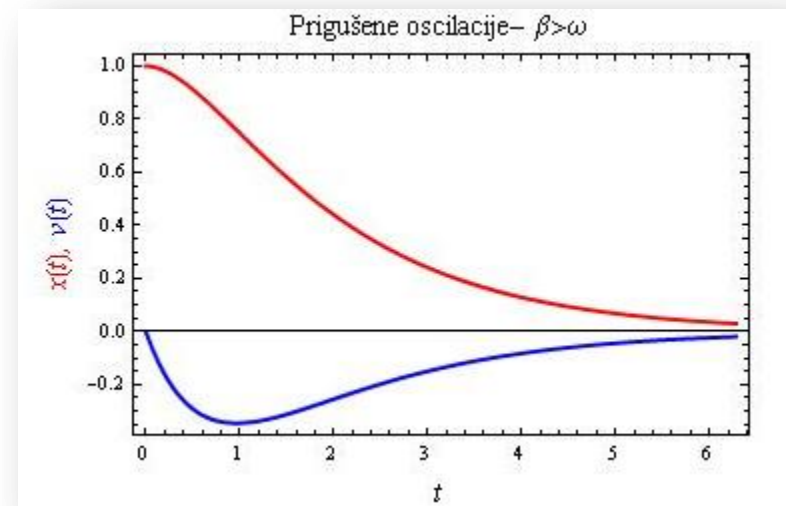
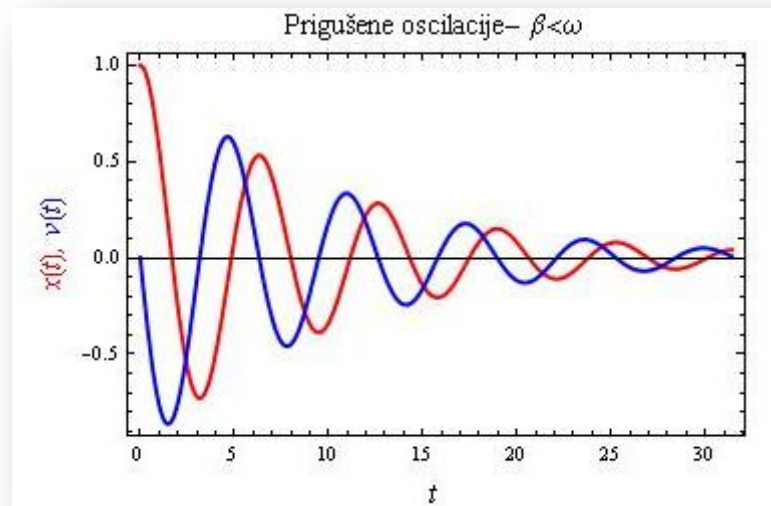
$$E = E_k + \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2, \quad (\text{д})$$

али ће овог пута њен извод по времену, који је једнак снази непотенцијалних сила, бити једнак снази силе отпора $\vec{F}_v$:

$$\frac{dE}{dt} = P^* = \vec{F}_v \cdot \vec{v} = -bv^2 \leq 0. \quad (\text{ђ})$$

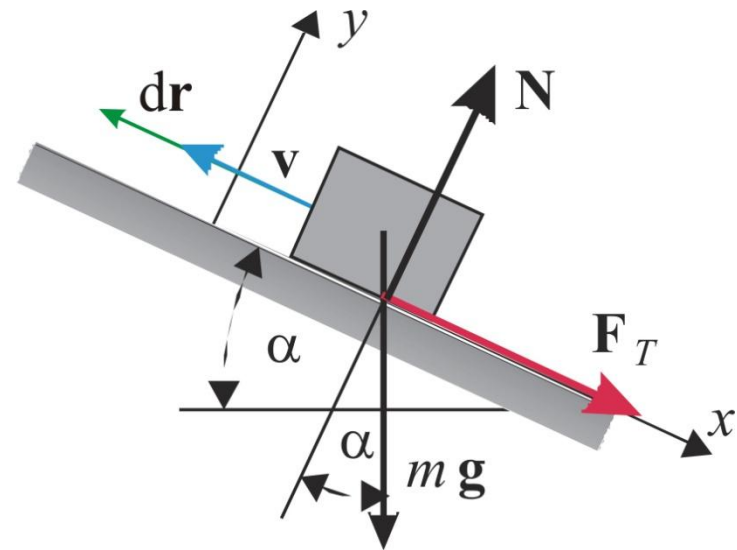
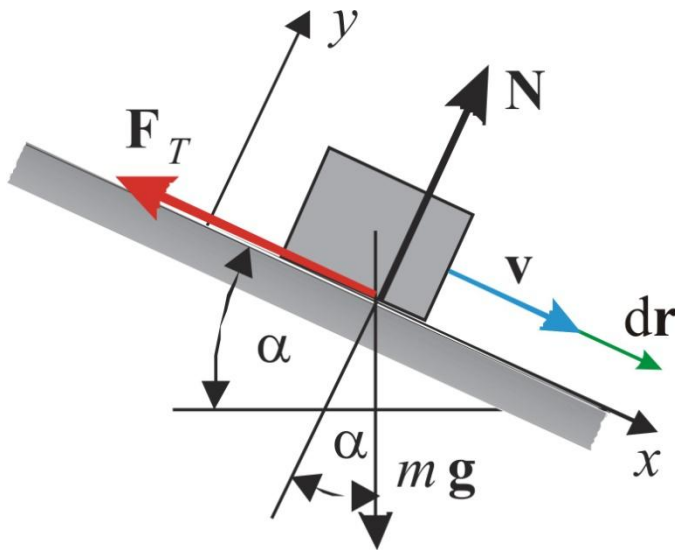
Коришћењем резултата (в) и (г) добијају се закони промене енергије током времена:

$$\begin{aligned} \omega > \beta : \quad \frac{dE}{dt} &= -2\frac{m\beta}{\Omega^2}e^{-2\beta t} (v_0\Omega \cos \Omega t - (v_0\beta + x_0\omega^2) \sin \Omega t)^2; \\ \omega < \beta : \quad \frac{dE}{dt} &= -2m\beta \left(\frac{\beta + \kappa}{2\kappa}(v_0 + x_0\beta - x_0\kappa)e^{-(\beta+\kappa)t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta - \kappa}{2\kappa}(v_0 + x_0\beta + x_0\kappa)e^{-(\beta-\kappa)t} \right)^2; \\ \omega = \beta : \quad \frac{dE}{dt} &= -2m\omega e^{-2\omega t} (x_0\omega^2 t + v_0(\omega t - 1))^2. \blacktriangleleft \end{aligned} \quad (\text{е})$$



Дисипација механичке енергије

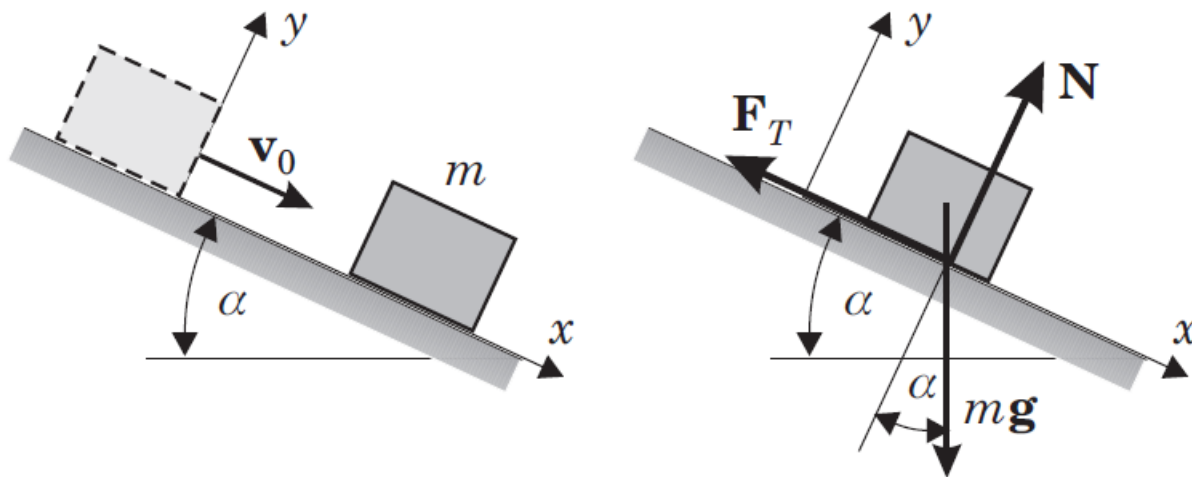
- Сила Кулоновог (сувог) трења је дисипативна сила



$$dA^T = \vec{F}_T \cdot d\vec{r} < 0$$

Пример

Пример 6.9 Материјална тачка масе m мирује на храпавој стрмој равни угла нагиба α ($\tan \alpha < \mu_S$). У почетном тренутку саопштена јој је брзина v_0 усмерена ка подножју стрме равни. Одредити кретање тачке ако је коефицијент динамичког трења између тачке и стрме равни μ_D . Колики ће пут l прећи тачка док се поново не заустави? Који услов треба да задовољи коефицијент трења μ_D да би овакво кретање било могуће? Колики је губитак механичке енергије током овог кретања?



42. Стабилност положаја равнотеже

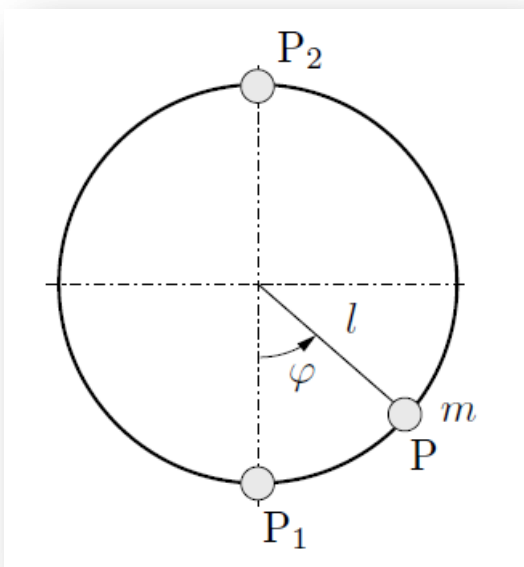
Стабилност положаја равнотеже математичког клатна

- Једначина кретања

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

- Положаји равнотеже



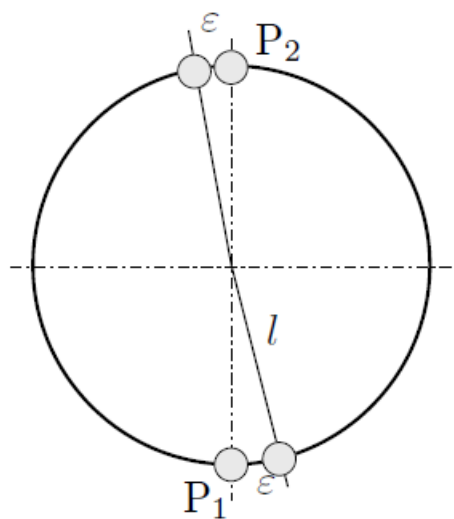
$$\varphi = \text{const.} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0, \ddot{\varphi} = 0$$

$$\sin \varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = \pi \end{cases}$$

Стабилност положаја равнотеже математичког клатна

- Анализа стабилности – увођење поремећаја

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_1 + \varepsilon_0 \\ \dot{\varphi}(0) &= \dot{\varphi}_1 + \dot{\varepsilon}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(t) = \varphi_1 + \varepsilon(t) = \varepsilon(t) \\ \dot{\varphi}(t) = \dot{\varepsilon}(t), \quad \ddot{\varphi}(t) = \ddot{\varepsilon}(t) \end{cases}$$



$$P_1 : \quad \ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0 \quad \text{стабилан}$$

$$P_2 : \quad \ddot{\varepsilon} - \omega^2 \varepsilon = 0 \quad \text{нестабилан}$$

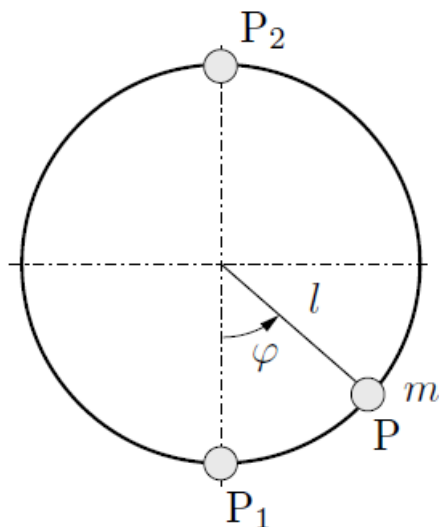
Стабилност положаја равнотеже математичког клатна

- Принцип минимума потенцијалне енергије

$$\Pi(\varphi) = -mgl \cos \varphi$$

Положај равнотеже:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}(\varphi^*) = mgl \sin \varphi^* = 0 \Rightarrow \varphi^* = 0, \pi$$



Стабилност положаја равнотеже:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi_1) = mgl > 0 \Rightarrow \Pi(\varphi_1) = \Pi_{\min}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi_2) = -mgl < 0 \Rightarrow \Pi(\varphi_2) = \Pi_{\max}$$

Стабилност положаја равнотеже математичког клатна

$$\varphi_1 = 0$$



$$\varphi_2 = \pi$$



Анализа система у простору стања

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} F(t, x, \dot{x}) \end{aligned}$$

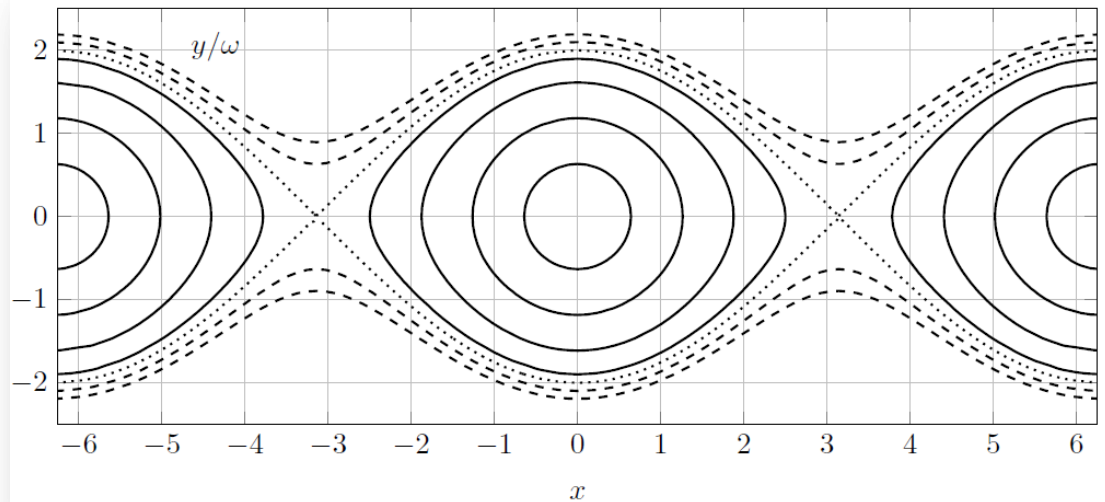
- Математичко клатно – фазни портрет

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$



$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\omega^2 \sin x$$



Шта смо научили?

- 40. Потенцијалне силе и потенцијална енергија. Закон о промени и одржању укупне механичке енергије.
- 41. Дисипација механичке енергије.
- 42. Стабилност положаја равнотеже.

Динамика – II део

Енергија, рад, снага,... – 2. део

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић