

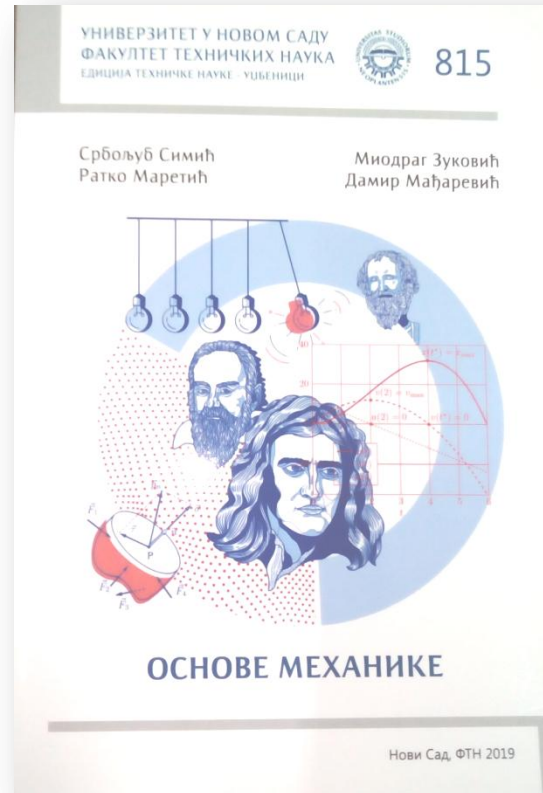
Динамика – 1. део

Динамика материјалне тачке – Њутнови закони – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



Динамика

Део механике који се бави изучавањем кретања материјалних тала и дејствима која том приликом настају.

Шта ћемо научити?

- 33. Основне динамичке величине: стање кретања, принцип одређености, маса, количина кретања.
- 34. Њутнови закони механике.
- 35. Структура сила у динамици. Основни задаци динамике. Други Њутнов закон за везано кретање.

Пример

5.1 Клип парне машине врши осцилаторно кретање у хоризонталном правцу по закону:

$$x(t) = R \left(\cos \omega t + \frac{R}{4L} \cos 2\omega t \right),$$

где је R дужина криваје, L дужина спојне полуге, а ω константна угаона брзина криваје. Ако је маса клипа m , одредити силу која дејствује на клип и показати да ће њен највећи интензитет бити:

$$P = mR\omega^2 \left(1 + \frac{R}{L} \right).$$

Задача 5.1.

$$x(t) = R \left(\cos \omega t + \frac{R}{4L} \cos 2\omega t \right)$$

$$P = ?$$

II. 3. $\vec{F} = m \vec{a}$

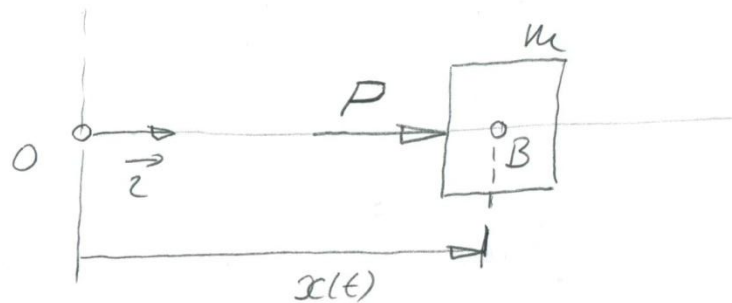
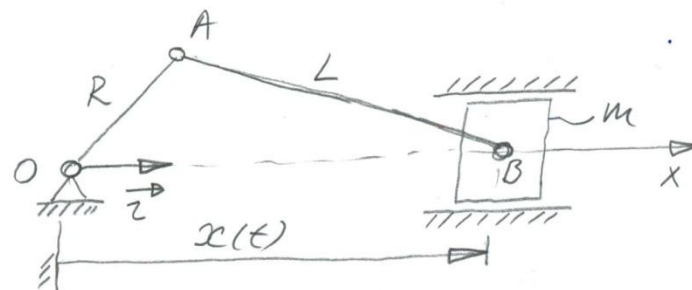
$$F_x = m a_x$$

$$P = m \ddot{x}$$

$$x(t) = R \cos(\omega t) + \frac{R^2}{4L} \cos(2\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -R\omega \sin(\omega t) - \frac{R^2\omega}{2L} \sin(2\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t) - \frac{R^2\omega^2}{L} \cos(2\omega t)$$



$$P = -mR\omega^2 \left(\cos(\omega t) + \frac{R}{L} \cos(2\omega t) \right)$$

$$P_{\max} = mR\omega^2 \left(1 + \frac{R}{L} \right)$$

Пример

5.2 Материјална тачка масе $m = 1\text{kg}$ креће се праволинијски под дејством силе $\mathbf{F} = 10(1 - t)\mathbf{i}\text{N}$, где је време t изражено у секундама. Одредити кретање тачке (параметарску једначину) ако се зна да је оно започето из положаја $x(0) = 0$ почетном брзином $\dot{x}(0) = v_0 = 20\text{m/s}$. Одредити тренутак t_1 у ком тачка мења смер кретања и упоредити га са тренутком у ком сила мења смер свога дејства.

Ovaj zadatak spada u grupu "inverznih zadataka dinamike" ili "drugih zadataka dinamike". Zadana je sila, a treba odrediti kretanje materijalne tačke. Sila u opštem slučaju može biti funkcija vremena, položaja i brzine, odnosno $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$. Po pravilu ova grupa zadataka je teža od prve grupe, jer se svodi na rešavanje, integraciju, diferencijalnih jednačina kretanja.

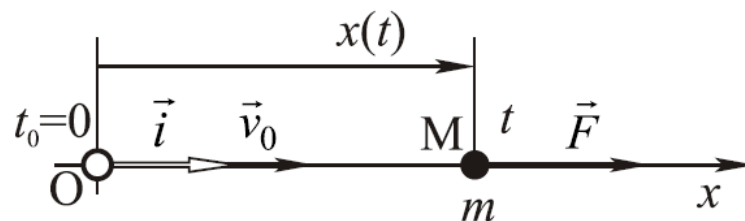
Da bi se zadatak rešio potrebno je prvo formirati diferencijalnu jednačinu kretanja. Ako se tačka premesti u proizvoljan položaj i on definiše koordinatom x , Slika 1.7, vektor

položaja tačke, brzina u ubrzanje su dati sa:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{l}, \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{l}, \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{l}$$

Na tačku deluje jedna sila, pa je ona ujedno i rezultanta

$$\vec{F} = \vec{F}(t) = 10(1 - t)\vec{l}[\text{N}].$$



Slika 1.7

Iz drugog Njutnovog zakona

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

sledi vektorska diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke

$$m\ddot{x}(t)\vec{i} = 10(1-t)\vec{i}$$

Projektovanjem ove jednačine, odnosno vektora koji u njoj figurišu, na osu x , skalarnim množenjem jediničnim vektorom $\vec{i}$, dobija se skalarna diferencijalna jednačina kretanja

$$m\ddot{x}(t) = 10(1-t)$$

koja kada se, po uslovu zadatka, uzme da je $m = 1$, konačno ima oblik

$$\ddot{x} = 10(1-t) \quad (1)$$

Kretanje tačke je jednoznačno određeno početnim uslovima, (početnim stanjem kretanja tačke: položajem i brzinom), definisanim za početni trenutak vremena $t_0 = 0$. Njihov vektorski oblik je

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}(0) = x(0)\vec{i} = 0\vec{i}$$

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}(0) = \dot{x}(0)\vec{i} = v_0\vec{i} = 20\vec{i}$$

Skalarni početni uslovi su

$$x(0) = 0 \quad (2)$$

$$\dot{x}(0) = 20 \quad (3)$$

Kada se uzme u obzir da je $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ diferencijalna jednačina kretanja (1) ima oblik

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 10(1-t)$$

Množenjem ove jednačine sa dt promenjive, x - zavisno promenjiva i t - nezavisno promenjiva, bivaju razdvojene

$$d\dot{x} = 10(1-t)dt$$

Ova jednačina se dalje rešava integracijom, leve i desne strane

$$\int d\dot{x} = \int 10(1-t)dt$$

odakle sledi

$$\dot{x}(t) = 10t - 5t^2 + c_1 \quad (4)$$

Dobijena je diferencijalna jednačina prvog reda kod koje se opet mogu razdvojiti promenjive. Zamenom $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ i množenjem ove jednačine sa dt , ona dobija oblik

$$dx = (10t - 5t^2 + c_1)dt$$

Integracijom ove jednačine

$$\int dx = \int (10t - 5t^2 + c_1)dt$$

dobija se

$$x(t) = 5t^2 - 5\frac{t^3}{3} + c_1t + c_2 \quad (5)$$

što je opšte rešenje diferencijalne jednačine kretanja.

Iz početnih uslova (2) i (3) i jednačina (4) i (5), u koje je zamenjen početni trenutak $t_0 = 0$, sledi

$$x(0) = \underline{c_2 = 0}$$

$$\dot{x}(0) = \underline{c_1 = 20}$$

što su dve algebarske jednačine iz kojih se određuju integracione konstante c_1 i c_2 . Njihove vrednosti su

$$c_1 = 20 \text{ i } c_2 = 0$$

Zamenom integracionih konstanti u opšte rešenje (4), odnosno (5), određeni su brzina

$$\dot{x}(t) = 10t - 5t^2 + 20 \quad (6)$$

i kretanje tačke, odnosno parametarska jednačina kretanja

$$x(t) = 5t^2 - 5\frac{t^3}{3} + 20t \quad (7)$$

Sledi određivanje trenutka t_1 u kome tačka menja smer kretanja. U tom trenutku brzina tačke jednaka je nuli (da bi promenila smer kretanja tačka se mora zaustaviti; matematički rečeno, funkcija $x(t)$ u trenutku t_1 menja monotonost, pa je njen prvi izvod tada jednak nuli) i važi uslov

$$v(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0$$

Iz poslednjeg uslova i jednačine (6), zamenom $t = t_1$, dobija se

$$\dot{x}(t_1) = 10t_1 - 5t_1^2 + 20 = 0$$

što je kvadratna jednačina po t_1 .

Ona ima dva realna rešenja, $t_1 = 1 + \sqrt{5}$ i $t_1 = 1 - \sqrt{5}$. Drugo rešenje je negativno, a samim tim i

nemoguće, jer je parametar t nenegativan realan parametar. Prema tome, trenutak kada tačka menja smer kretanja je

$$t_1 = 1 + \sqrt{5} = 3.236$$

Ostaje još da se odredi pređeni put tačke S do trenutka t_1 . Kako je do tog trenutka $x(t)$ monotonno rastuća funkcija pređeni put je jednak koordinati tačke u datom trenutku ($x(0) = 0$). Iz parametarske jednačine kretanja (7) sledi

$$\begin{aligned} S = x(t_1) &= 5t_1^2 - 5\frac{t_1^3}{3} + 20t_1 \\ &= 60.601[\text{m}] \end{aligned}$$

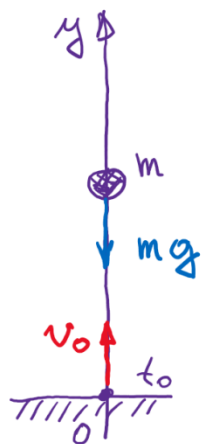
Interesantno je još primetiti da sila menja smer dejstva u trenutku $t^* = 1$, a tačka tek u trenutku $t_1 = 1 + \sqrt{5}$ menja smer kretanja. U pitanju je svojstvo inercije, odnosno opiranja dejstvu sile, a čija je mera masa tačke.

Пример

5.3 Лопта је бачена вертикално увис брзином 30m/s . Један секунд касније је из истог почетног положаја вертикално увис бачена друга лопта. Одреди-ти колика треба да буде почетна брзина друге лопте да би се сударила са првом кад ова доспе у највиши положај. Претпоставити да се лопте крећу само под дејством константне силе тежине ($g \approx 9.8\text{m/s}^2$).

Задача 5.3

ХИТАЦ НАВИШЕ



II БЗ

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\ddot{y}\vec{f} = -mg\vec{f} / \cdot \vec{f}$$

$$\boxed{\ddot{y} = -g}^*$$

у у t_0

$$y(t_0) = 0$$

$$\dot{y}(t_0) = v_0$$

$$* \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \rightarrow \int_{\dot{y}(t_0)=v_0}^{\dot{y}} d\dot{y} = -g \int_{t_0}^t dt$$

$$\dot{y} \Big|_{v_0}^{\dot{y}} = -g t \Big|_{t_0}^t \rightarrow \dot{y} - v_0 = -g(t - t_0)$$

$$\underline{\dot{y}(t) = v_0 - g(t - t_0)} \quad (A)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - g(t - t_0) \rightarrow \int_{y(t_0)=0}^y dy = v_0 \int_{t_0}^t dt - g \int_{t_0}^t t dt + g t_0 \int_{t_0}^t dt$$

$$\underline{y(t) = v_0 \cdot (t - t_0) - g \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} \right) - g t_0 (t - t_0)} \quad (B)$$

Задаток 5.3

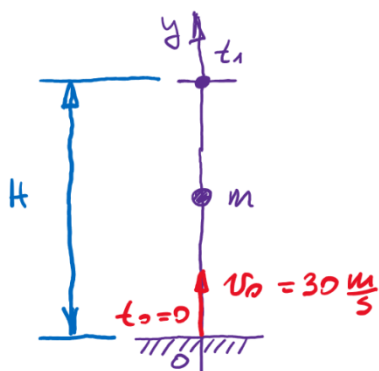
ХИТАЦ НАВУЧЕ

$$(A) \dot{y}(t) = v_0 - g(t - t_0)$$

$$(B) y(t) = v_0(t - t_0) - g\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}\right) + g t_0(t - t_0)$$

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}$$

ТАЧКА А



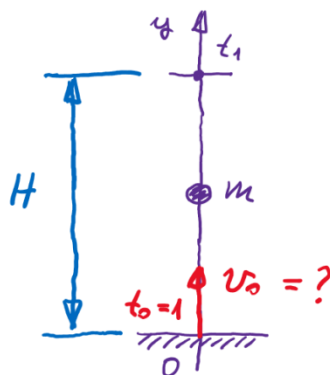
$$t_0 = 0$$

$$v_0 = 30 \frac{m}{s}$$

$$(A) \dot{y}_A(t) = 30 - g t$$

$$(B) y_A(t) = 30 t - g \frac{t^2}{2}$$

ТАЧКА В



$$t_0 = 1$$

$$v_0 = ?$$

$$(A) \dot{y}_B(t) = v_0 - g(t - 1)$$

$$(B) y_B(t) = v_0(t - 1) - g\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + g(t - 1)$$

" t_1 "

$$\dot{y}_A(t_1) = 30 - g t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{30}{g}$$

$$H = y_A(t_1) = 30 t_1 - g \frac{t_1^2}{2} =$$

$$= 30 \cdot \frac{30}{g} - \frac{g}{2} \frac{30^2}{g^2} = \frac{30^2}{2g}$$

$$y_B(t_1) = H$$

$$v_0(t_1 - 1) - g\left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - g(t_1 - 1) = \frac{30^2}{2g}$$

$$v_0 = 32,38 \frac{m}{s}$$

$t=0.$



Пример

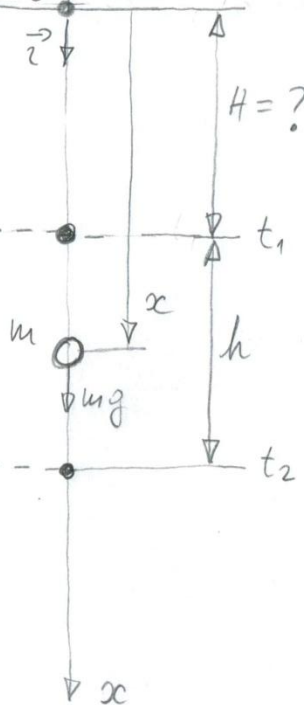
5.4 Посматрач који седи у просторији и гледа кроз прозор висине $2m$ угледао је камен који пада вертикално. Камен се у оквиру прозора могао видети током $0.1s$. Занемарујући све друге силе осим константне гравитационе силе ($g \approx 9.8m/s^2$), одредити висину, мерену од доње ивице прозора, са које је испуштен камен (без почетне брзине).

Задаток 5.4

$$h = 2 \text{ м}, g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad t_0 = 0$$

$$T = t_2 - t_1 = 0,15 \quad v_0 = 0$$

$$H = ?$$



II 16.3.

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

$$m \ddot{\vec{r}} = m g \vec{z}$$

$$\ddot{x} = g$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = g$$

$$\int_{\dot{x}(0)=0}^{\dot{x}} d\dot{x} = g \int_0^t dt$$

$$\dot{x}(t) = g t \quad (a)$$

$$\frac{dx}{dt} = g t$$

$$\int_{x(0)=0}^x dx = g \int_0^t t dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad (b)$$

$$x(t_1) = \frac{1}{2} g t_1^2 = H \quad (1)$$

$$x(t_2) = \frac{1}{2} g t_2^2 = H + h \quad (2)$$

$$t_2 - t_1 = T \quad (3)$$

$$H, t_1, t_2 = ?$$

$$(1) - (2) \rightarrow \frac{1}{2} g (t_1^2 - t_2^2) = -h \rightarrow t_2^2 = \frac{2h}{g} + t_1^2 \quad *$$

$$(3) \rightarrow t_2 = t_1 + T \rightarrow t_2^2 = t_1^2 + 2t_1 T + T^2 \quad **$$

$$*, ** \rightarrow t_1^2 + 2t_1 T + T^2 = \frac{2h}{g} + t_1^2 \rightarrow$$

$$t_1 = \frac{1}{2T} \left(\frac{2h}{g} - T^2 \right) = \frac{h}{gT} - \frac{T}{2}$$

$$(1) \rightarrow H = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{h}{gT} - \frac{T}{2} \right)^2$$

$$H = 19,42 \text{ м}$$

Пример

5.14 *Коси хитац у безваздушном простору.* Материјална тачка масе m креће се у вертикалној равни под дејством силе сопствене тежине mg . Започела је кретање брзином v_0 која је образовала угао α са хоризонталним правцем. Усвајајући да се тачка у почетном тренутку налазила у координатном почетку одредити параметарске једначине кретања $x(t)$ и $y(t)$ и показати да трајекторија описана кривом $y(x)$ има облик параболе.

Prvi korak u rešavanju zadatka je formiranje diferencijalnih jednačina kretanja. Položaj tačke biće definisan Dekartovim koordinatama. Koordinatni početak je usvojen u početnom položaju tačke, Slika 1.9.

Vektor položaja, brzina i ubrzanje dati su sa

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j},$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

Pošto se otpor vazduha zanemaruje, jedina sila koja tokom kretanja deluje je sila težine $\vec{G} = m\vec{g}$. Ona ima pravac ose y , a suprotan smer, pa je rezultanta sila koje deluju na materijalnu tačku $\vec{F} = \vec{G} = -mg\vec{j}$.

Iz drugog Njutnovog zakona, $m\vec{a} = \vec{F}$, sledi vektorska diferencijalna jednačina kretanja

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) = -mg\vec{j} \quad (1)$$

Projektovanjem ove jednačine na x i y osu, Dekartovog koordinatnog sistema, skalarnim množenjem jediničnim vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$, dobijaju se skalarne jednačine kretanja

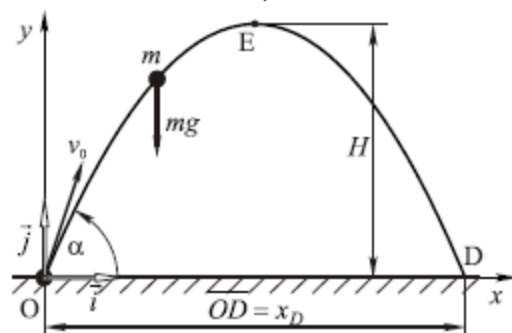
$$m\ddot{x} = 0,$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

odnosno

$$\ddot{x} = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{y} = -g \quad (3)$$



Slika 1.9

Vektorski početni uslovi kretanja,
 $t_0 = 0$, su

$$\begin{aligned}\vec{r}(0) &= x(0)\vec{i} + y(0)\vec{j} = 0 \\ \vec{v}(0) &= \dot{x}(0)\vec{i} + \dot{y}(0)\vec{j} \\ &= v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{j}\end{aligned}$$

Iz njih slede, potrebna, četiri skalarna početna uslova

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha \quad (4)$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha \quad (5)$$

Diferencijalne jednačine kretanja (2) i (3) govore da su projekcije ubrzanja na obe ose konstantne. Jednačine nisu spregnute i svaka od njih se može nezavisno rešiti.

Iz jednačine (2) sledi da je

$$\dot{x}(t) = c_1 = \text{const} \quad (6)$$

Nakon zamene $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ i razdvajanja promenljivih, množenjem ove jednačine sa dt , dobija se

$$\int dx = c_1 \int dt$$

odakle sledi

$$x(t) = c_1 t + c_2 \quad (7)$$

Iz početnih uslova (4) i jednačina (6) i (7) dobijaju se jednačine

$$\begin{aligned}\dot{x}(0) &= \underline{c_1 = v_0 \cos \alpha} \\ x(0) &= \underline{c_2 = 0}\end{aligned}$$

iz kojih se, direktno, određuju prve dve integracione konstante:

$$c_1 = v_0 \cos \alpha \text{ i } c_2 = 0$$

Sada su određene projekcija brzine tačke na osu x

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha = \text{const} \quad (8)$$

i prva konačna jednačina kretanja

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha)t \quad (9)$$

Druga diferencijalna jednačina kretanja (3), nakon zamene $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ i razdvajanja promenljivih, množenjem sa dt , daje

$$\int dy = -g \int dt$$

Njenim rešavanjem se dobija:

$$\dot{y}(t) = -gt + c_3 \quad (10)$$

Nakon zamene $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ i razdvajanja promenljivih, množenjem ove jednačine sa dt , dobija se

$$\int dy = \int (-gt + c_3) dt$$

odakle sledi

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 \quad (11)$$

Iz početnih uslova (5) i jednačina (10) i (11) dobijaju se jednačine

$$\begin{aligned}\dot{y}(0) &= \underline{c_3 = v_0 \sin \alpha} \\ y(0) &= \underline{c_4 = 0}\end{aligned}$$

iz kojih se određuju i preostale dve integracione konstante:

$$c_3 = v_0 \sin \alpha \text{ i } c_4 = 0$$

Sada su, iz (10) i (11), određene projekcija brzine tačke na osu y

$$\dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \quad (12)$$

i druga konačna jednačina kretanja

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t \quad (13)$$

Ovim je integracija diferencijalnih jednačina kretanja gotova, a samim tim i određivanje kretanja tačke izvršeno.

Kada su poznate konačne jednačine kretanja tačke, onda se trajektorija (linija putanje) određuje eliminisanjem parametra t iz njih. Iz jednačine (9) može se izraziti vreme, $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$, i njegovom zamenom u (13) dobija se trajektorija

$$y = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + (\tan \alpha)x \quad (14)$$

Sada je jasno da se tačka u homogenom polju sile zemljine teže, uz zanemarivanje sile otpora vazduha, kreće po paraboli.

Шта смо научили?

- 33. Основне динамичке величине: стање кретања, принцип одређености, маса, количина кретања.
- 34. Њутнови закони механике.
- 35. Структура сила у динамици. Основни задаци динамике. Други Њутнов закон за везано кретање.

Динамика – 1. део

Динамика материјалне тачке – Њутнови закони – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић