

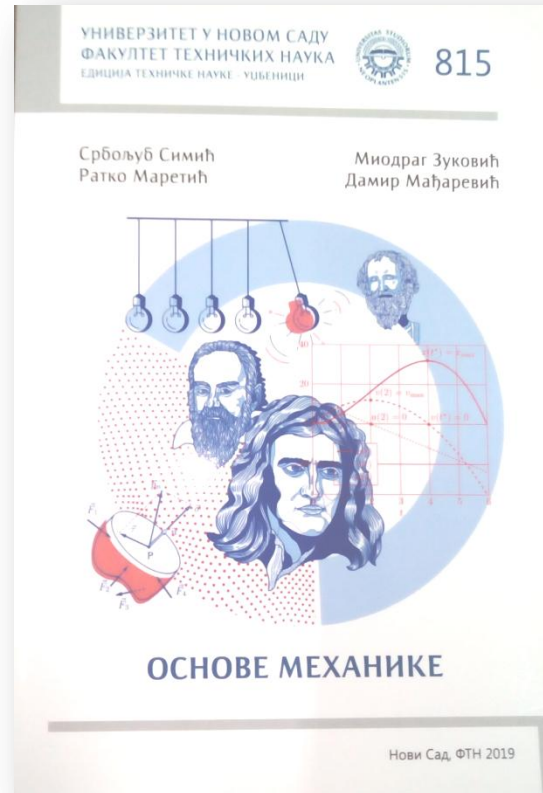
Динамика – II део

Енергија, рад, снага,... – 1. део – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



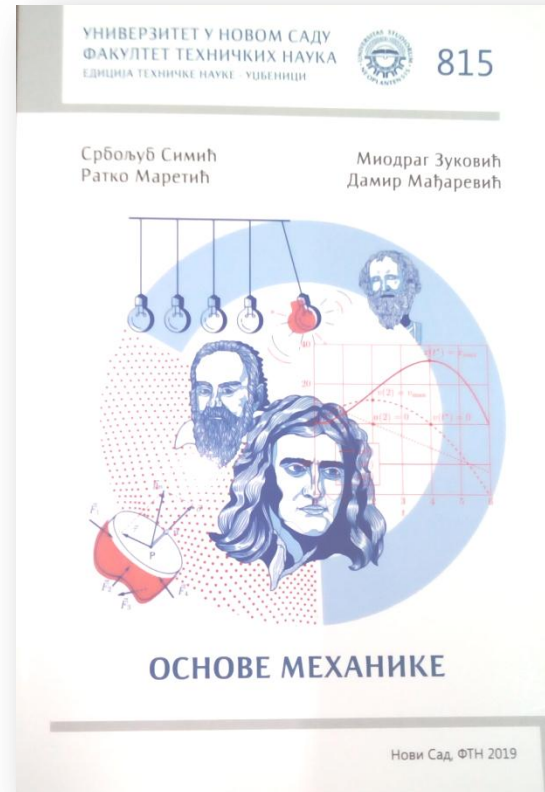
Динамика – II део

Енергија, рад, снага,... – 2. део – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



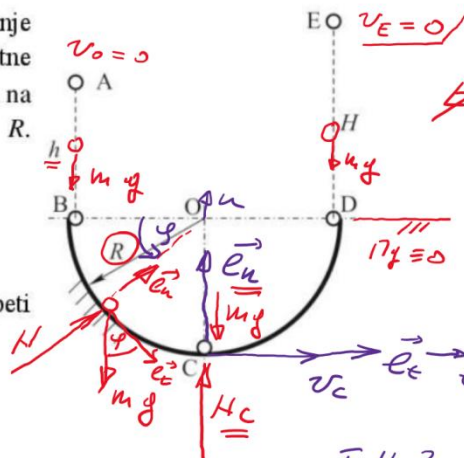
Шта ћемо научити?

- 40. Потенцијалне силе и потенцијална енергија. Закон о промени и одржању укупне механичке енергије.
- 41. Дисипација механичке енергије.
- 42. Стабилност положаја равнотеже.

10. Materijalna tačka, mase m , započinje kretanje naniže iz položaja A bez početne brzine. U položaju B ($\overline{AB} = h$) dospeva na glatku cilindričnu površinu, radijusa R . Vezu napušta u položaju D.

Odrediti:

- brzinu tačke u položajima B, C i D,
- reakciju veze u položaju C,
- visinu H do koje će se tačka popeti nakon napuštanja veze.



$$\cancel{EKE} + \cancel{P_E} = \cancel{EKA} + \cancel{P_A}$$

$$mghH = mghh$$

$$B-D''$$

$$v_C = \dots$$

II lb. 3. $m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}$

$$m(\vec{a}_T + \vec{a}_N) = m \vec{g} + \vec{N}$$

$$m(\vec{a}_T + \vec{a}_N) = m \vec{g} + \vec{N} \quad / \cdot \vec{e}_N$$

$$m a_{NC} = -mg + H_C$$

$$H_C = mg + a_{NC} = mg + \frac{v_C^2}{R} = \dots$$

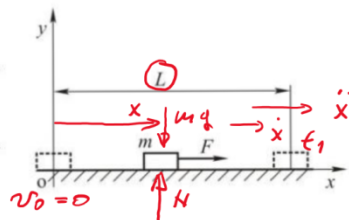
1. Materijalna tačka mase m započinje kretanje po glatkoj horizontalnoj ravni, u homogenom polju sile zemljine teže, iz stanja mirovanja. Na nju deluje i horizontalna sila F , konstantnog intenziteta. Odrediti:

a) diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke,

b) parametarsku jednačinu kretanja tačke ($x(t)$),

c) trenutak t_1 do kog je tačka prešla put dužine L ,

d) brzinu tačke u trenutku t_1 .



II H. 3

$$m \vec{a} = \vec{F} + m \vec{g} + \vec{L} \quad / \cdot \vec{e}$$

$$m \ddot{x} = F$$

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}$$

$$F = \text{const}$$

$$\text{Ny} \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$x(t) = ?$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{F}{m} t$$

$$\int d\dot{x} = \frac{F}{m} \int dt$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$\dot{x} \Big|_0^x = \frac{F}{m} t \Big|_0^t$$

$$\dot{x} = \frac{F}{m} t \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t$$

$$c) \quad t_1 = ? \rightarrow x(t_1) = L \rightarrow t_1 =$$

$$d) \quad v_1 = v(t_1) = \dot{x}(t_1) = \frac{F}{m} t_1 = \dots$$

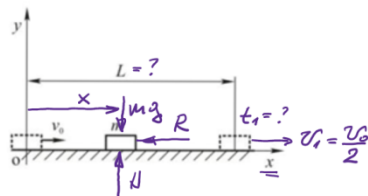
5. Materijalna tačka mase m započinje kretanje po glatkoj horizontalnoj ravni, u homogenom polju sile zemljine teže, početnom brzinom v_0 . Na nju deluje i sila otpora kretanju, proporcionalna brzini $R=k v$ ($k=\text{const}>0$, v - brzina tačke). Odrediti:

a) diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke,

b) parametarsku jednačinu kretanja tačke $(x(t))$,

c) trenutak t_1 u kome je brzina tačke dva puta manja od početne,

d) pređeni put tačke L do trenutka t_1 .



$$c) t_1 = ? \rightarrow \underbrace{\dot{x}(t_1)}_{v_1} = \frac{v_0}{2}$$

$$\cancel{v_0} e^{-\frac{k}{m} t_1} = \frac{\cancel{v_0}}{2}$$

$$-\frac{k}{m} t_1 = \ln \frac{1}{2}$$

$$t_1 = -\frac{m}{k} \ln \frac{1}{2}$$

$$\underline{t_1 = \frac{m}{k} \ln 2}$$

$$d) L = x(t_1) = \dots$$

$$a) m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{R}$$

$$m(\ddot{x} \vec{e}) = -mg \vec{e} + N \vec{e} - \underbrace{R \vec{e}}_{k v = k \dot{x}} \quad | \cdot \vec{e} / \cdot \vec{e}$$

$$(1) m \ddot{x} = -k \dot{x}$$

$$(2) 0 = -mg + N$$

$$b) \ddot{x} = -\frac{k}{m} \dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{k}{m} \dot{x} \rightarrow \int_{\dot{x}(0)=v_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt \rightarrow$$

$$\ln \dot{x} \Big|_{v_0}^{\dot{x}} = -\frac{k}{m} t \Big|_0^t$$

$$\ln \dot{x} - \ln v_0 = -\frac{k}{m} t$$

$$\ln \frac{\dot{x}}{v_0} = -\frac{k}{m} t$$

$$\frac{\dot{x}}{v_0} = e^{-\frac{k}{m} t}$$

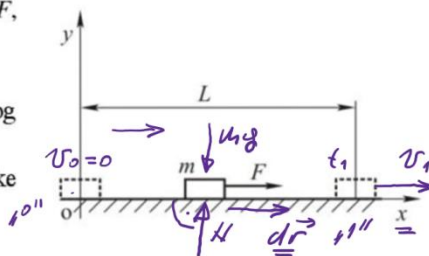
$$\underline{\dot{x} = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m} t} \rightarrow x(t) =$$

13. Materijalna tačka mase m započinje kretanje po glatkoj horizontalnoj ravni, u homogenom polju sile zemljine teže, iz stanja mirovanja. Na nju dejstvuje i horizontalna sila F , konstantnog intenziteta.

Odrediti:

- a) bizinu tačke u položaju do kog je prešla put dužine L ,
b) priraštaj ukupne mehaničke energije tokom ovog kretanja.



$$a) \quad E_{k1} - E_{k0} = \cancel{A_{01}^{mg}} + \cancel{A_{01}^N} + \underline{A_{01}^F}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = F \cdot L$$

$$v_1^2 = \frac{2FL}{m} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2FL}{m}}$$

$$\underline{F = \text{const}}$$

$$\begin{aligned} dA_{01}^{\vec{F}} &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F\vec{e}_x) \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y) = F dx \\ A_{01}^{\vec{F}} &= \int_0^L dA_{01}^{\vec{F}} = \int_{x_0}^{x_1} F dx = F x \Big|_{x_0=0}^{x_1=L} = F(L-0) = FL \end{aligned}$$

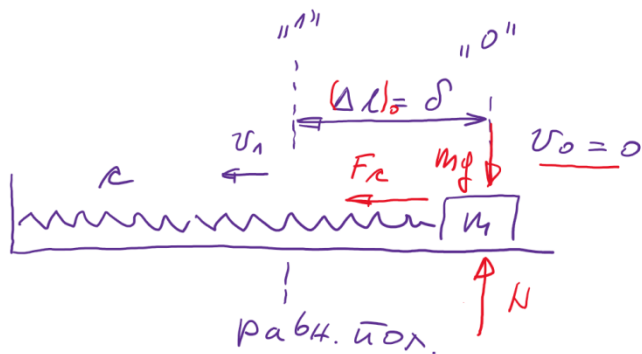
$$b) \quad \Delta E = \Delta E_{01} = ?$$

$$\Delta E_{01} = E_1 - E_0 = (E_{k1} + \Pi_1) - (E_{k0} + \Pi_0) = \dots$$

$$\underline{\Delta E_{01} = A_{01}^*}$$

* - мехот. сила

$$\underline{\Delta E_{01} = A_{01}^{\vec{F}} = FL}$$



$m \vec{g}, \vec{F}_k$ - ПОТ. СИЛЕ

$$E_{k1} + \Pi_1 = \cancel{E_{k0}} + \Pi_0$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} k \delta^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k \delta^2}{m}}$$

$$m, (\Delta l)_0 = \delta, v_0 = 0 \quad \underline{(\Delta l)_1 = 0}$$

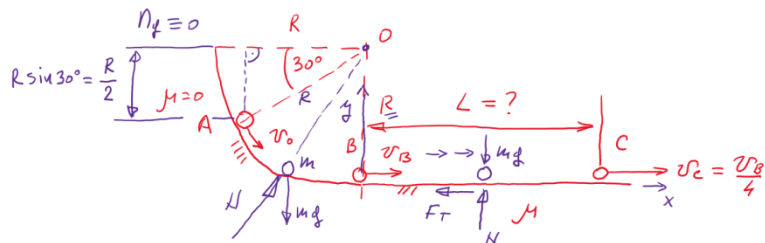
$$\frac{k}{v_1 = ?}$$

$$\Pi = \Pi_k = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} k ((\Delta l)_0)^2 = \frac{1}{2} k \delta^2$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} k (\cancel{(\Delta l)_1})^2 = 0$$

$$\underline{\Pi_g \equiv 0}$$



"A-B"

$$E_{kB} + \Pi_B = E_{kA} + \Pi_A$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \mu m g \cdot R = \frac{1}{2} m v_0^2 - \mu m g \cdot \frac{R}{2} \quad | : 1/2$$

$$v_B^2 - 2 g R = v_0^2 - g R$$

$$v_B^2 = v_0^2 + g R$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + g R}$$

"B-C"

$$E_{kC} + \Pi_C \neq E_{kB} + \Pi_B$$

$$E_{kC} - E_{kB} = A_{BC}^{\vec{m}g} + A_{BC}^{\vec{N}} + A_{BC}^{\vec{F}_T}$$

$$\left| \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -F_T \cdot L \right| *$$

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T \quad | : \vec{f}$$

$$0 = -m g + N \rightarrow N = m g \rightarrow \underline{F_T = \mu N = \mu m g = \text{const}}$$

$$* \quad \frac{1}{2} m \left(\frac{v_B}{4} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -\mu m g \cdot L$$

$$\frac{1}{32} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -\mu m g L$$

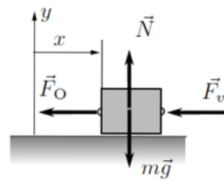
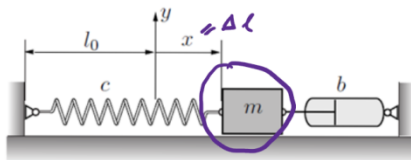
$$-\frac{15}{16} m v_B^2 = -\mu m g L$$

$$\underline{L = \frac{15}{16} \frac{v_B^2}{\mu g} = \frac{15}{16} \frac{1}{\mu g} (v_0^2 + g R)}$$

$$\Delta E = A_{BC}^{\vec{F}_T}$$

$$\Delta E = -\mu m g L = \dots$$

Пример 6.11. Показати да се код линеарних пригушених осцилација јавља дисипација механичке енергије и одредити закон промене енергије са временом за различите односе вредности параметара система.



$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_O + \vec{F}_v \quad / \cdot \vec{z}$$

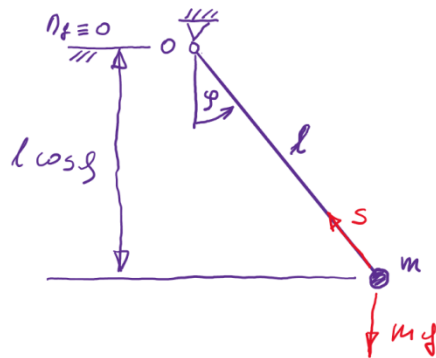
$$m \ddot{x} = -F_O - F_v \quad / \quad \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\underline{m \ddot{x} = -c x - b \dot{x}} \quad / : m \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad 2\delta = \frac{b}{m}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad \delta < \omega, \quad x(t) = \underline{\underline{e^{-\delta t} A \cos(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + \alpha)}} \\ \text{II} \quad \delta = \omega \\ \text{III} \quad \delta > \omega \end{array}$$

Стабилност положаја равнотеже математичког клатна

$$\Pi = \Pi(\varphi) = -m g \cdot l \cos \varphi$$



- ПОЛОЖ. РАВН. :

$$\left. \frac{d\Pi}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_r} = 0$$

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = +m g l \sin \varphi \rightarrow m g l \sin \varphi_r = 0$$

$$\sin \varphi_r = 0 \rightarrow \varphi_{r1} = 0 \rightarrow$$

$$\varphi_{r2} = \pi$$

- СТАБИЛНОСТ :

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_r} > 0 \rightarrow \underline{\Pi_{min}} \rightarrow \text{СТАБ. ПОЛ. РАВН.}$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = m g l \cos \varphi$$

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_{r1}=0} = m g l \cos 0 > 0 \rightarrow \text{СТАБ.}$$

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_{r2}=\pi} = m g l \overset{-1}{\cos \pi} = -m g l < 0 \rightarrow \text{НЕСТ.}$$



Шта смо научити?

- 40. Потенцијалне силе и потенцијална енергија. Закон о промени и одржању укупне механичке енергије.
- 41. Дисипација механичке енергије.
- 42. Стабилност положаја равнотеже.

Динамика – II део

Енергија, рад, снага,... – 2. део – вежбе

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић