

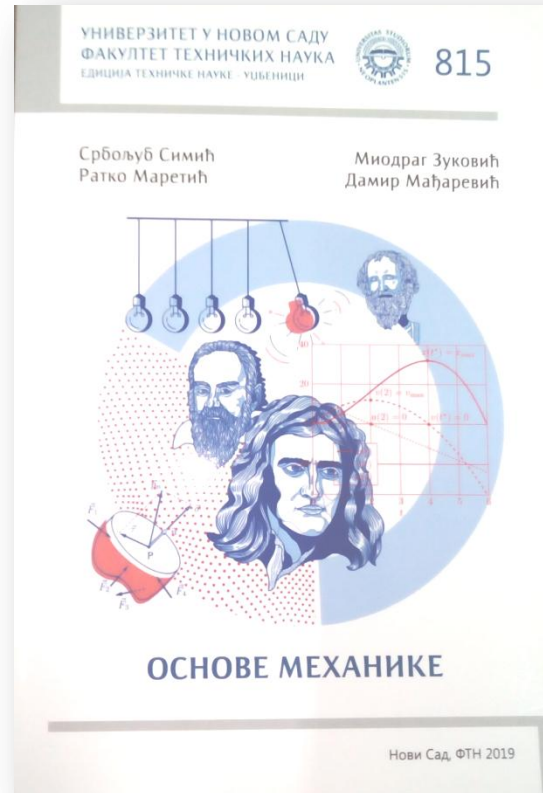
Динамика – 1. део

Кинематика тачке – 2. део

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић

Литература

- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.

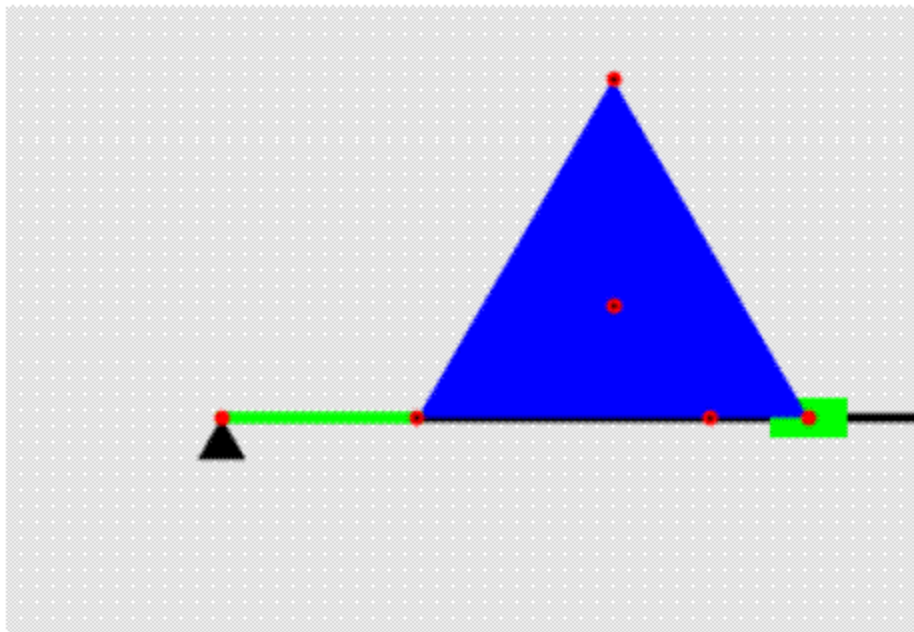


Шта ћемо научити?

- 30. Криволинијско кретање материјалне тачке. Брзина и убрзање тачке.
- 31. Брзина и убрзање тачке у Декартовом координатном систему.
- 32. Природне компоненте брзине и убрзања тачке. Полупречник кривине трајекторије.

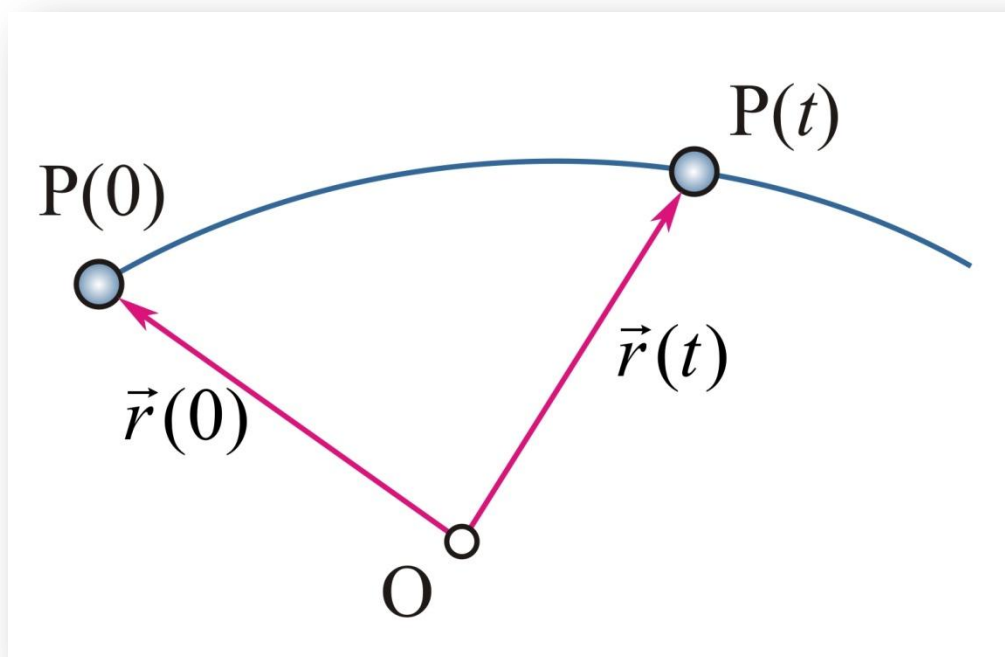
Кинематика

Део механике који се бави изучавањем кретања материјалних тала не узимајући у обзир дејства која утичу на њега.



30. Криволинијско кретање материјалне тачке. Брзина и убрзање тачке.

Криволинијско кретање

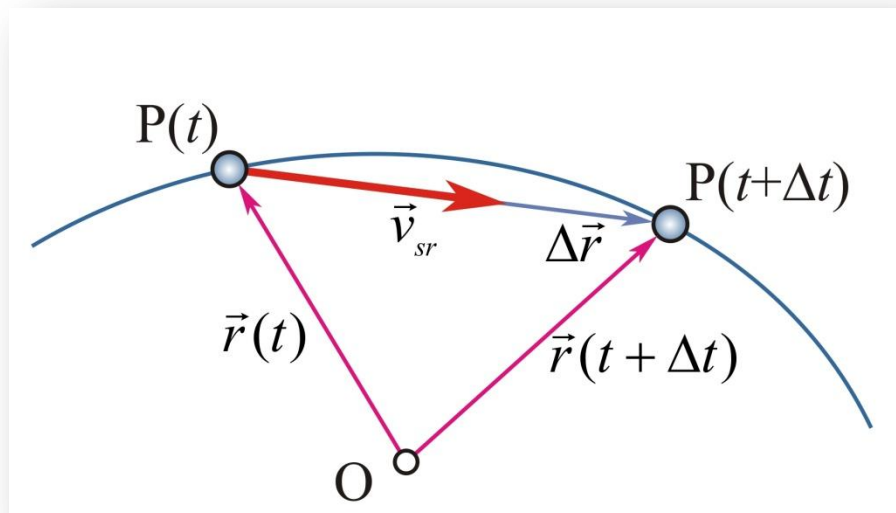


Трајекторија кретања тачке је крива линија.

Криволинијско кретање – брзина

- Средња брзина

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



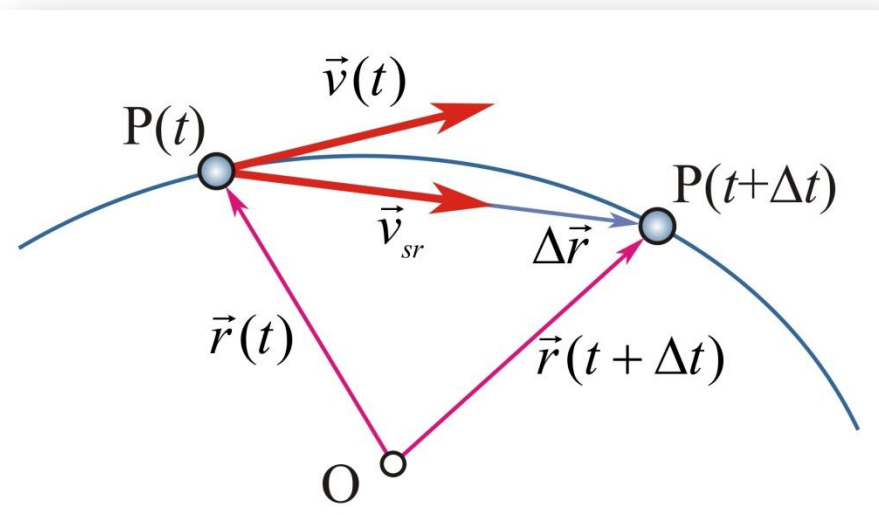
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Криволинијско кретање – брзина

- Тренутна брзина

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$



Брзина тачке је први извод вектора положаја по времену.

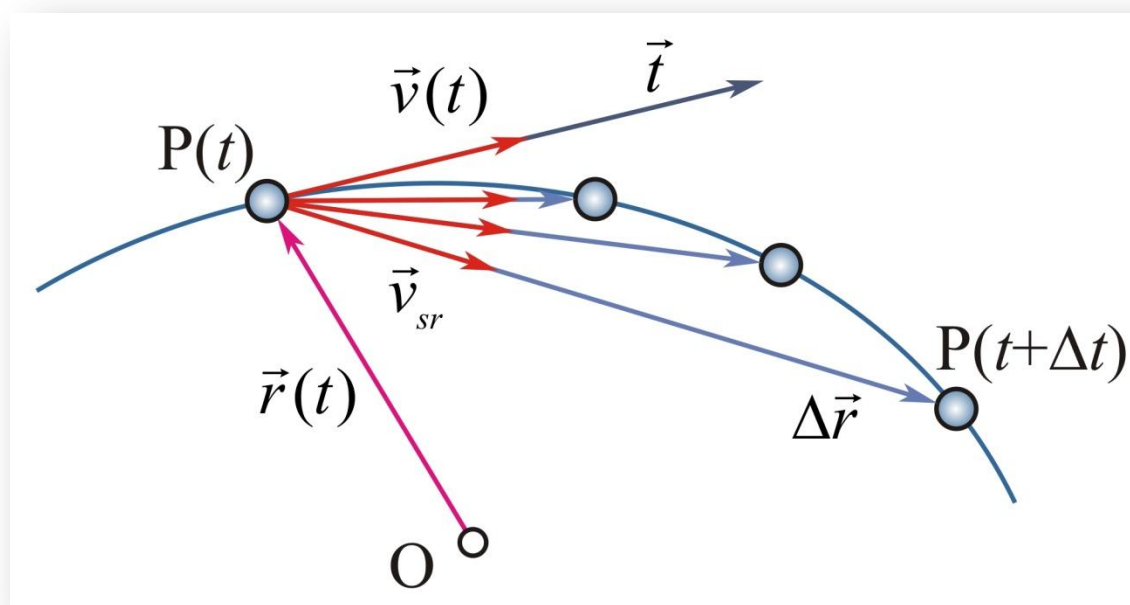
Криволинијско кретање – брзина

- Средња брзина

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- Тренутна брзина

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

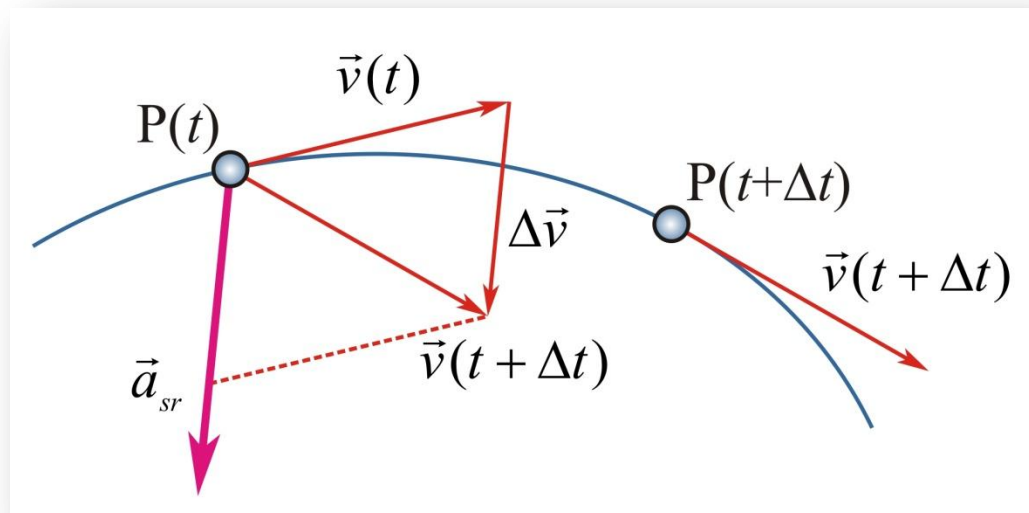


Вектор брзине тачке има правац тангенте на трајекторију.

Криволинијско кретање – убрзање

- Средње убрзање

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

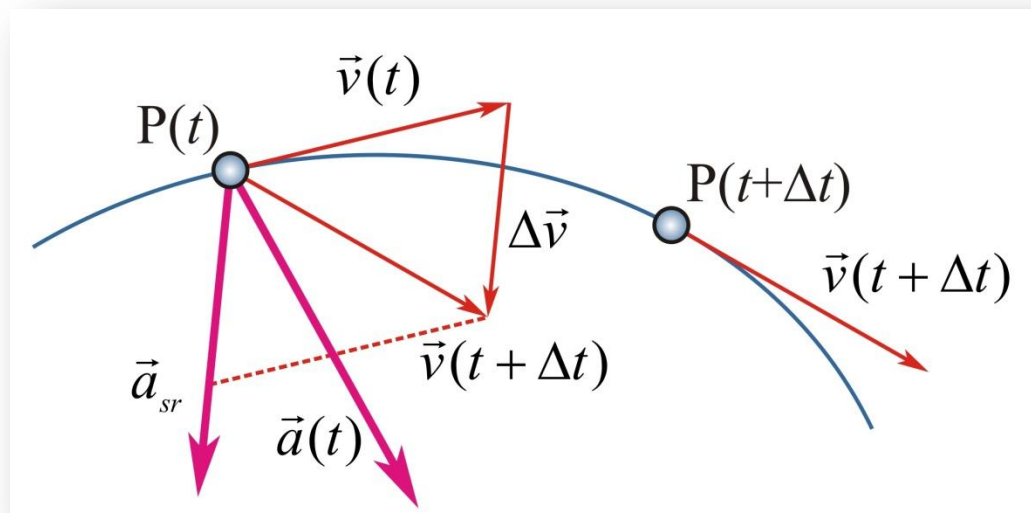


$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

Криволинијско кретање – убрзање

- Тренутно убрзање

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{sr} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}\end{aligned}$$



$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Убрзање тачке је први извод вектора брзине, односно,
други извод вектора положаја по времену.

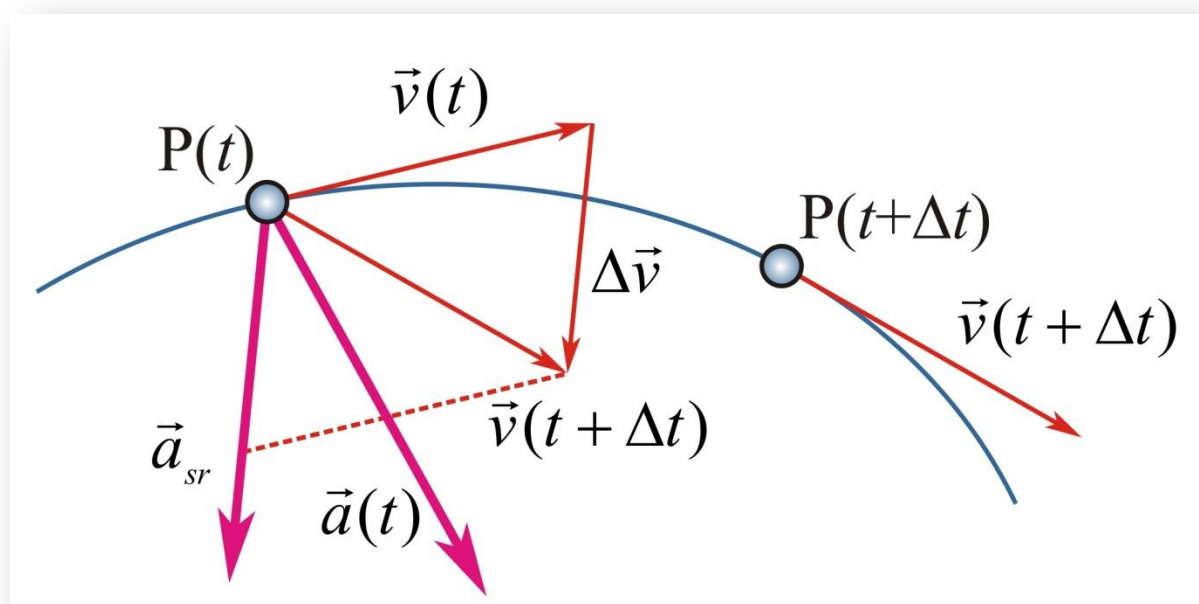
Криволинијско кретање – убрзање

- Средње убрзање

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- Тренутно убрзање

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$



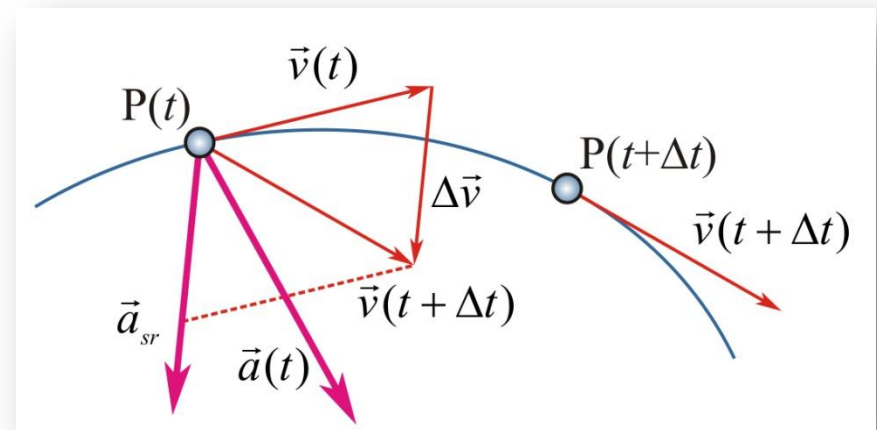
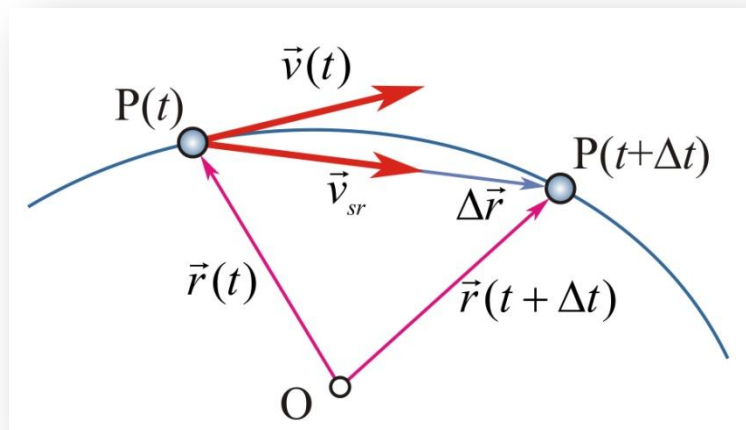
Криволинијско кретање

- Брзина

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

- Убрзање

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$



31. Брзина и убрзање тачке у Декартовом координатном систему.

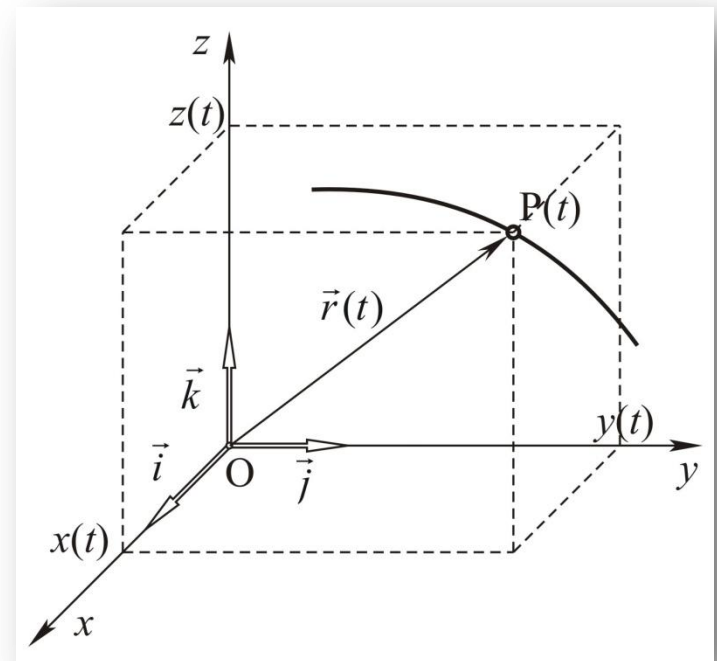
Декартов координатни систем – вектор положаја

- Вектор положаја

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

- Параметарске једначине кретања:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$



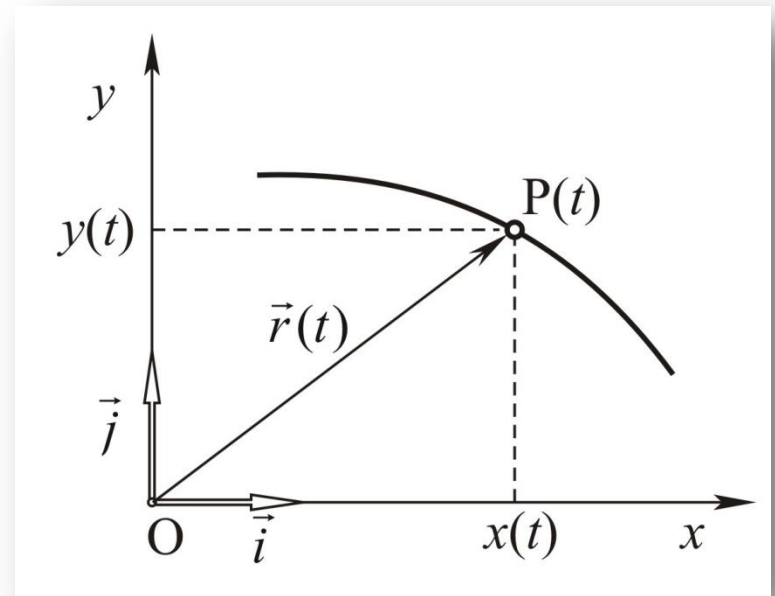
Декартов координатни систем – вектор положаја

- Вектор положаја

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

- Параметарске једначине кретања:

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$



Декартов координатни систем – брзина

- Вектор брзине

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

$$= v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}$$

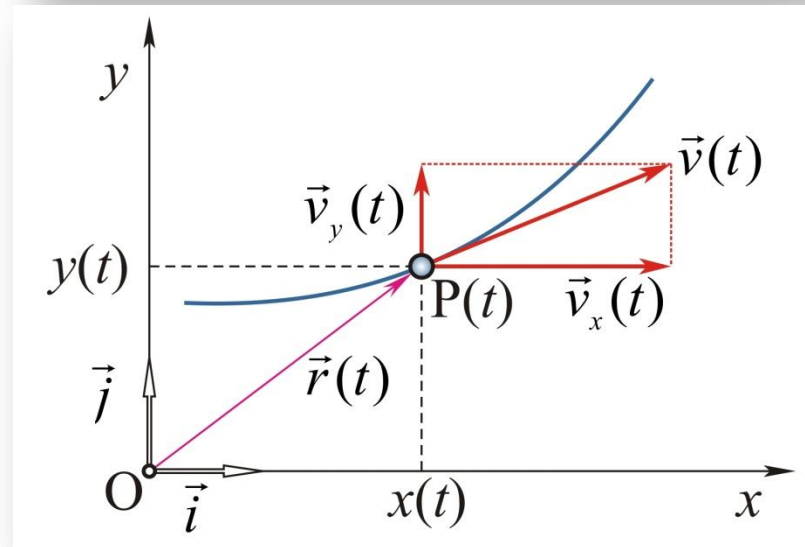
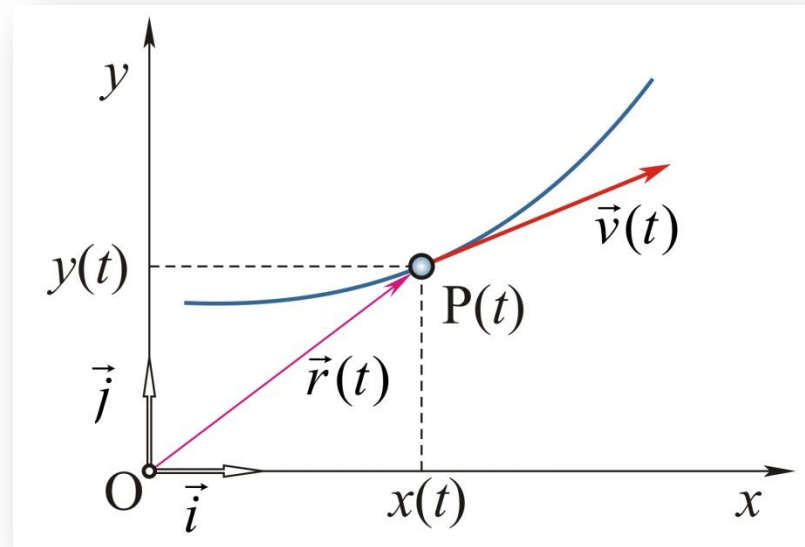
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

- Пројекције вектора брзине:

$$v_x(t) = \dot{x}(t) \quad , \quad v_y(t) = \dot{y}(t)$$

- Интензитет вектора брзине

$$|\vec{v}(t)| = v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$



Декартов координатни систем – убрзање

- Вектор убрзања

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_x(t) + \vec{a}_y(t)$$

$$= a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j}$$

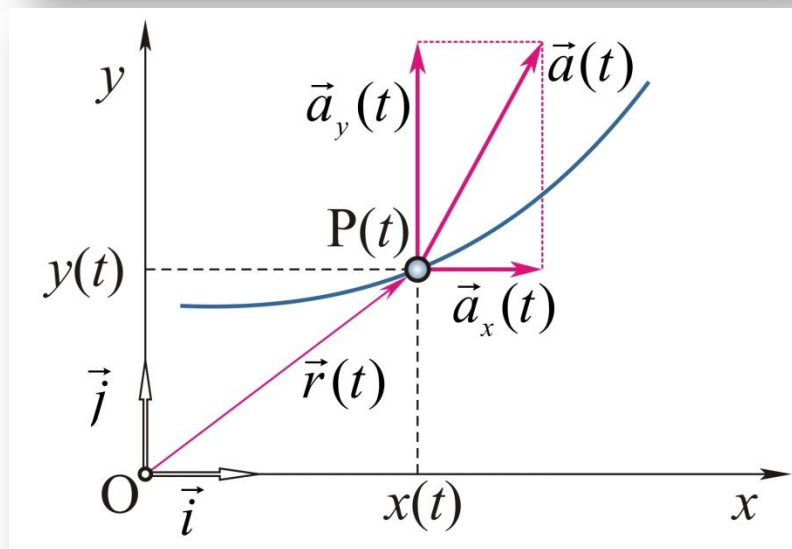
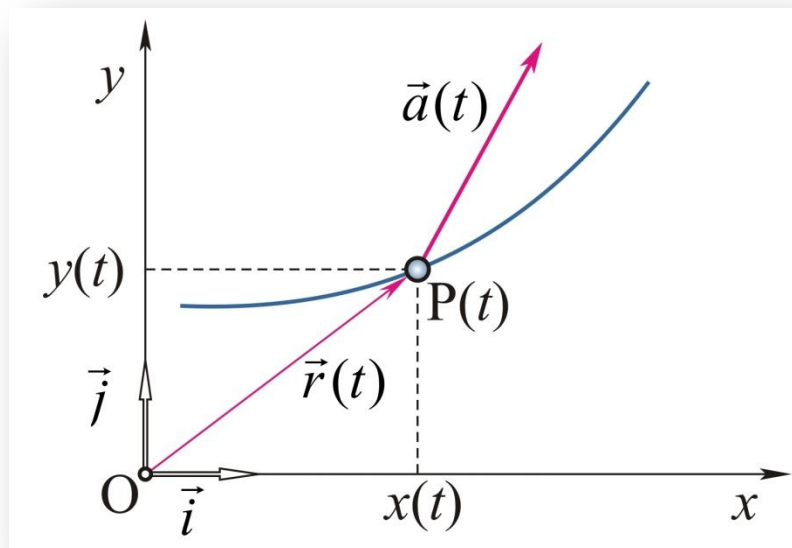
$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$

- Пројекције вектора убрзања:

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) \quad , \quad a_y(t) = \ddot{y}(t)$$

- Интензитет вектора убрзања

$$|\vec{a}(t)| = a(t) = \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2}$$



Декартов координатни систем

- Положај

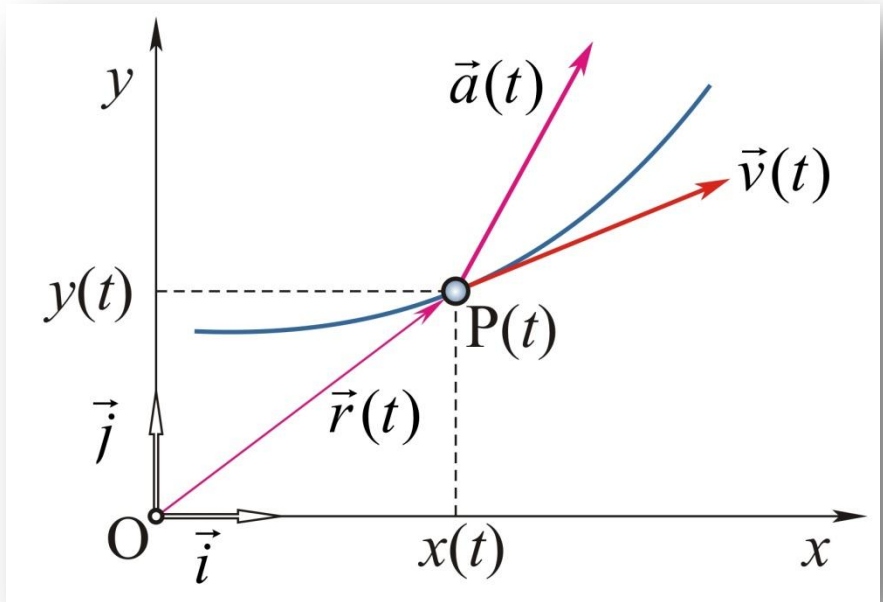
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

- Брзина

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

- Убрзање

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$



Пример

Пример 4.3 *Кретање материјалне тачке је описано параметарским једначинама кретања:*

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - t; \quad y(t) = \frac{t}{2}.$$

Одредити:

- а) трајекторију материјалне тачке;*
- б) тренутак $t^* > 0$ у ком ће се тачка наћи на y -оси;*
- в) векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у произвољном тренутку времена t ;*
- г) векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у тренутку t^* .*

а) трајекторија

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{t^2}{2} - t \\ y = \frac{t}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{t^2}{2} - t \\ t = 2y \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{1}{2}(2y)^2 - (2y) \rightarrow x = 2y^2 - 2y$$

$$y(t) = \frac{t}{2} \quad t \geq 0 \rightarrow y \geq 0$$

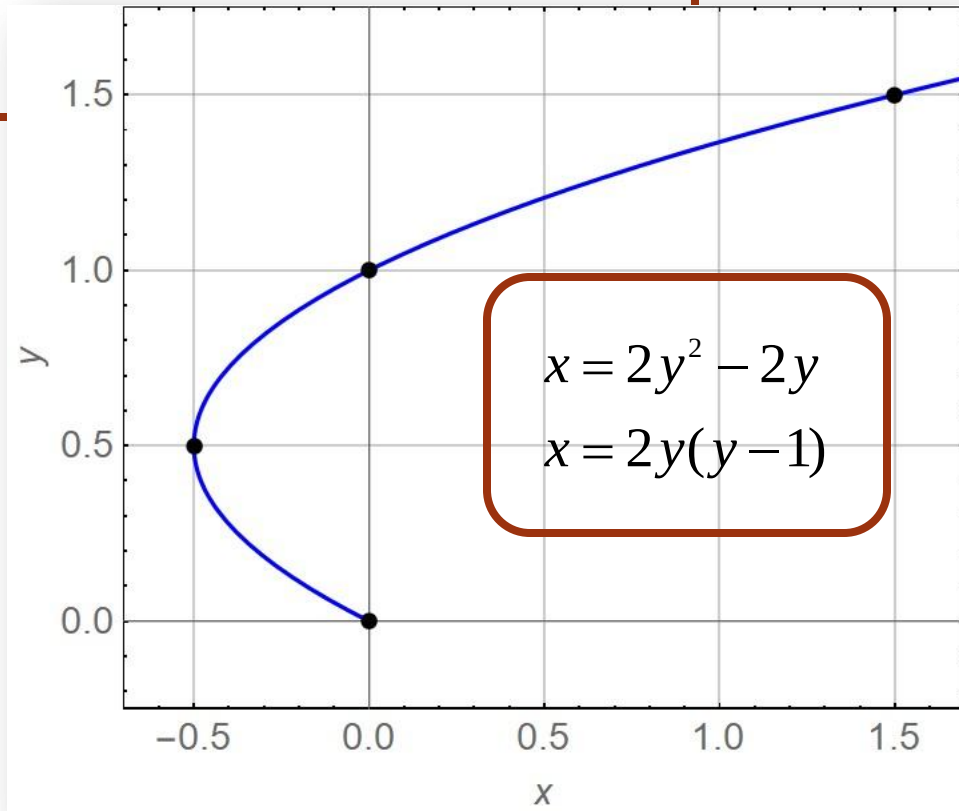
$$\underbrace{x(t) = \frac{t^2}{2} - t \quad y(t) = \frac{t}{2}}_{\downarrow}$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

$$x(1) = -\frac{1}{2} \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

$$x(2) = 0 \quad y(2) = 1$$

$$x(3) = \frac{3}{2} \quad y(3) = \frac{3}{2}$$

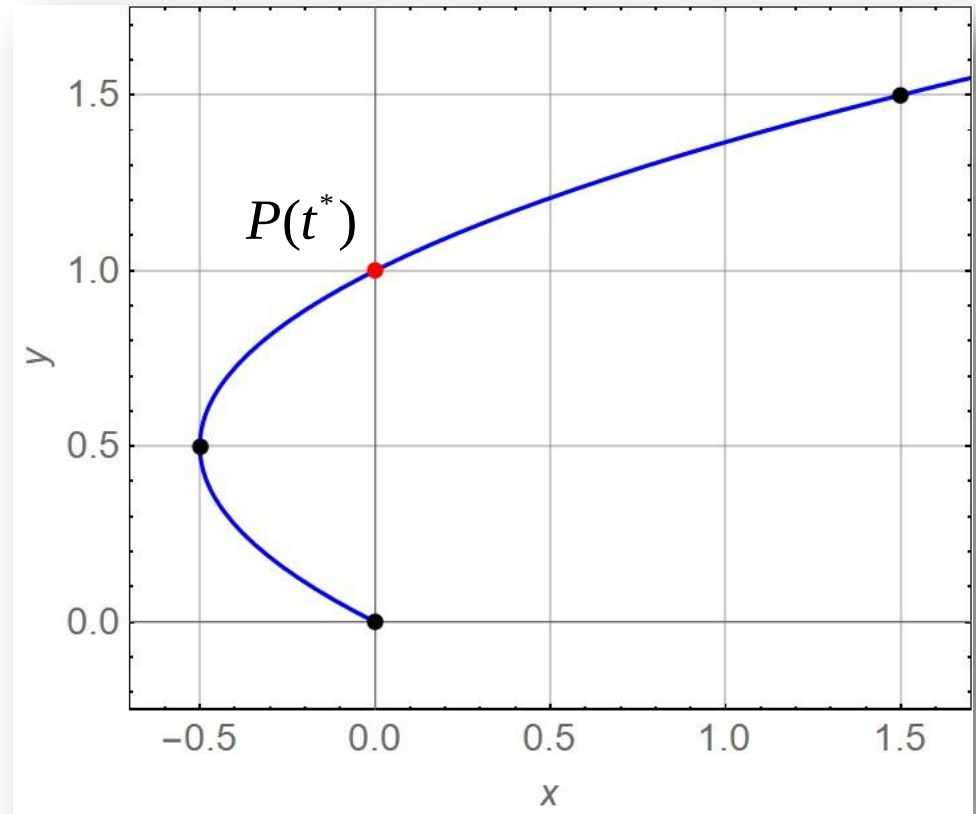


б) тренутак $t^* > 0$ у коме ће се тачка наћи на оси y

$$\begin{aligned}x(t^*) &= 0 \\ \frac{(t^*)^2}{2} - t^* &= 0 \\ t^* \left(\frac{t^*}{2} - 1 \right) &= 0 \\ t^* &= 2\end{aligned}$$

$$\underbrace{x(t) = \frac{t^2}{2} - t \quad y(t) = \frac{t}{2}}_{\downarrow}$$

$$x(t^*) = x(2) = 0 \quad y(t^*) = y(2) = 1$$



в) брзина и убрзање

$$\underbrace{x(t) = \frac{t^2}{2} - t \quad y(t) = \frac{t}{2}}_{\downarrow}$$

$$\dot{x}(t) = t - 1 \quad \dot{y}(t) = \frac{1}{2}$$

$$\ddot{x}(t) = 1 \quad \ddot{y}(t) = 0$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = 1\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$|\vec{a}(t)| = a(t) = \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2}$$

$$a(t) = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (t - 1)\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$|\vec{v}(t)| = v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

$$v(t) = \sqrt{(t - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

г) брзина и убрзање у тренутку t^*

$$t^* = 2$$

$$\vec{v}(t) = (t-1)\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \rightarrow \vec{v}(2) = 1\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$v(t) = \sqrt{(t-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow v(2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\vec{a}(t) = 1\vec{i} \rightarrow \vec{a}(2) = 1\vec{i}$$

$$a(t) = 1 \rightarrow a(2) = 1$$

г) брзина и убрзање у тренутку t^*

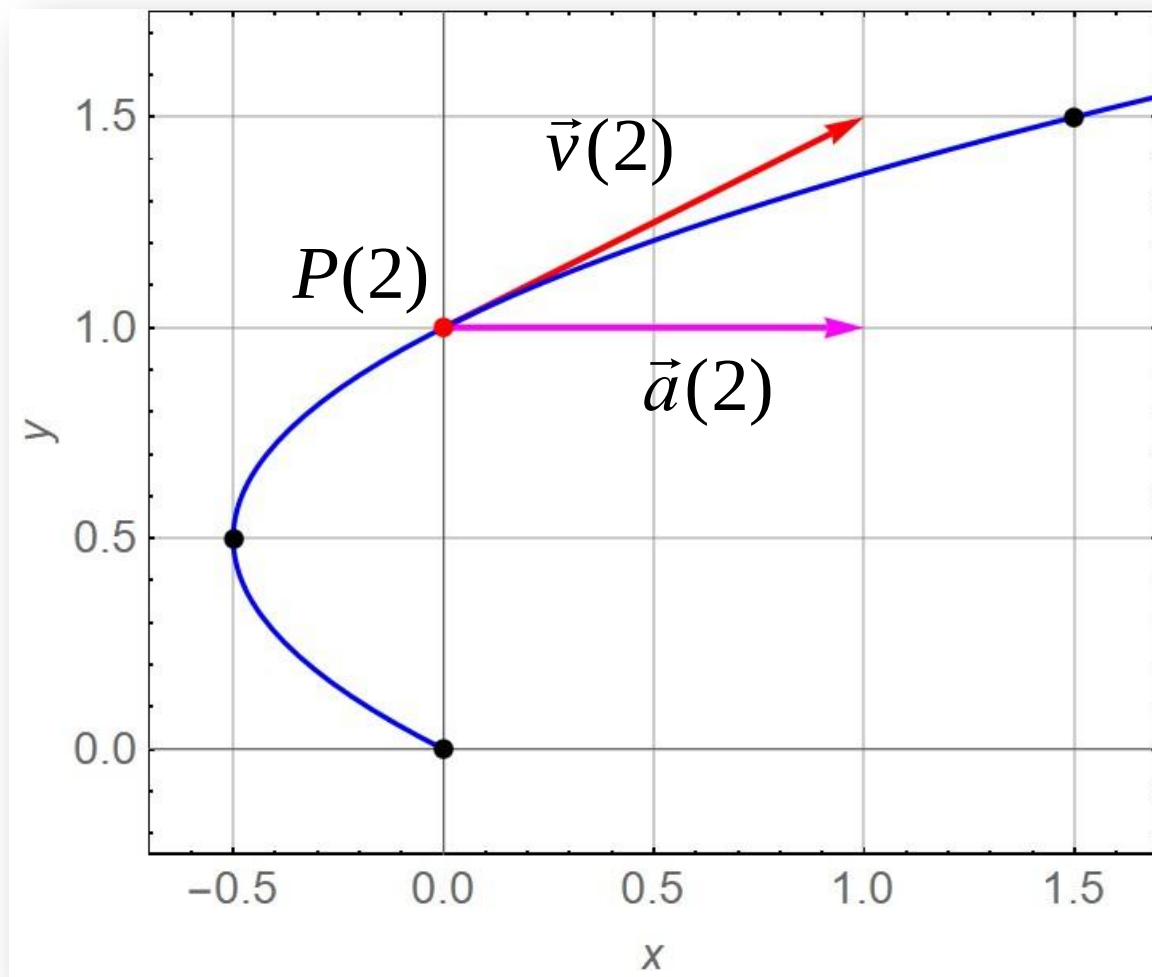
$$t^* = 2$$

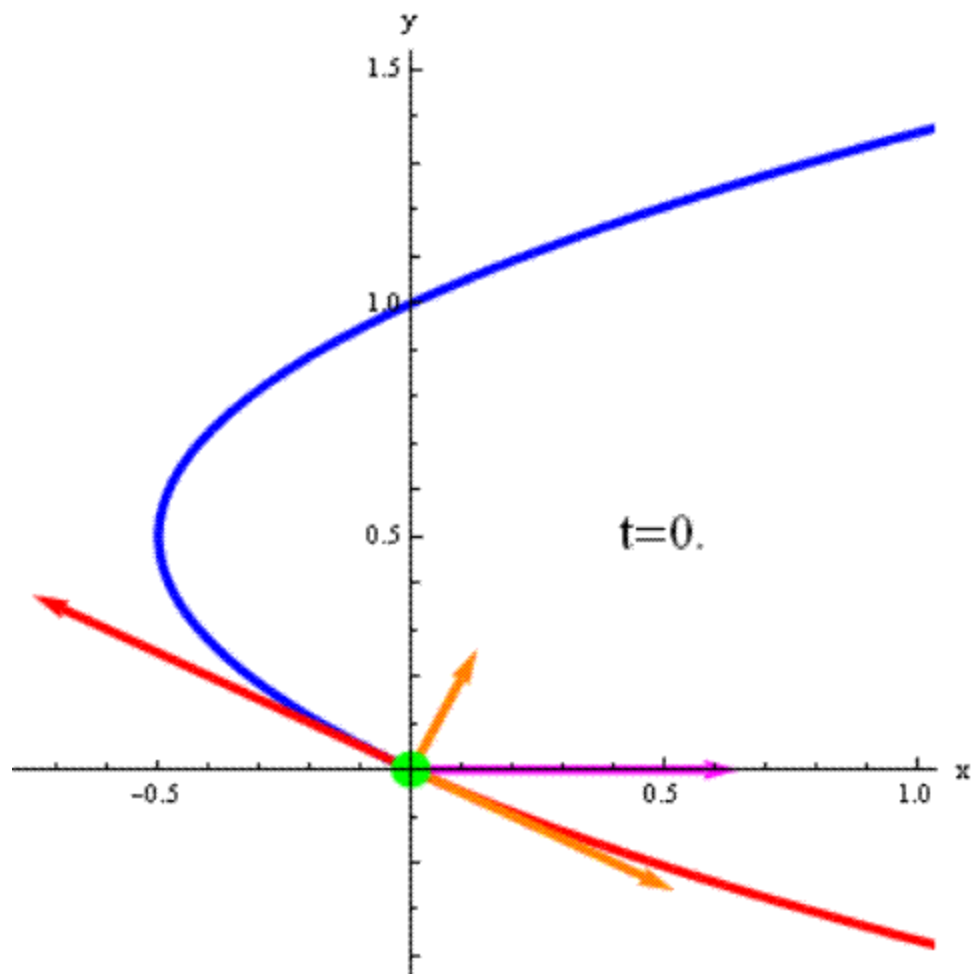
$$\vec{v}(2) = 1\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$v(2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\vec{a}(2) = 1\vec{i}$$

$$a(2) = 1$$





32. Природне компоненте брзине и убрзања тачке. Полупречник кривине трајекторије.

Пример

Пример 4.4 Материјална тачка врши кретање по кругу полупречника R сагласно следећим параметарским једначинама:

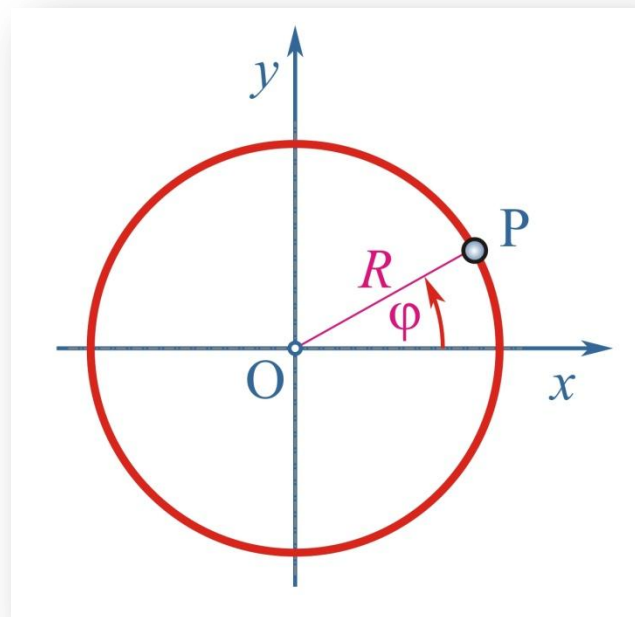
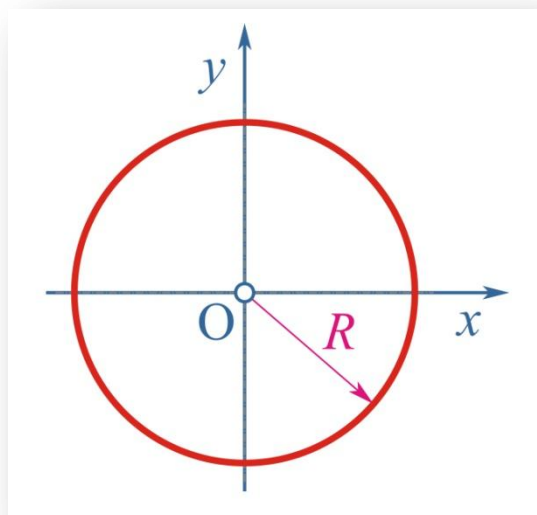
$$x(t) = R \cos \varphi(t); \quad y(t) = R \sin \varphi(t),$$

где је $\varphi(t)$ два пута диференцијабилна функција времена t . Одредити векторе брзине и убрзања у произвољном тренутку времена и одредити њихове пројекције на правац тангенте и правац нормале на круг.

Трајекторија

$$\left. \begin{array}{l} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 = R^2 \cos^2 \varphi \\ y^2 = R^2 \sin^2 \varphi \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

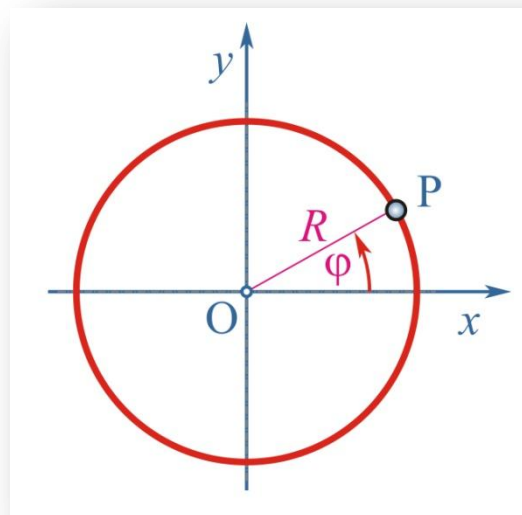


Брзина и убрзање

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= R \cos \varphi(t) \\ y(t) &= R \sin \varphi(t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -R \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \\ \dot{y}(t) &= R \cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \\ \ddot{x}(t) &= -R \cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}^2(t) - R \sin \varphi(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) \\ \ddot{y}(t) &= -R \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}^2(t) + R \cos \varphi(t) \cdot \ddot{\varphi}(t) \end{aligned}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$



Брзина

$$\vec{v}(t) = (-R \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)) \vec{i} + (R \cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)) \vec{j}$$
$$\vec{v}(t) = (-\sin \varphi(t) \vec{i} + \cos \varphi(t) \vec{j}) R \dot{\varphi}(t)$$

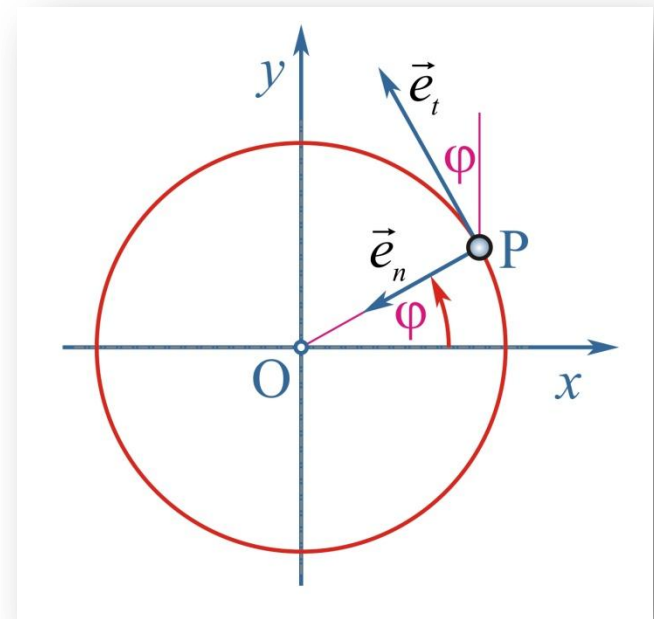
$$\vec{e}_t(t) = -\sin \varphi(t) \vec{i} + \cos \varphi(t) \vec{j}$$

$$\vec{e}_n(t) = -\cos \varphi(t) \vec{i} - \sin \varphi(t) \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = R \dot{\varphi}(t) \cdot \vec{e}_t(t)$$

$$\vec{v}(t) = v_t(t) \cdot \vec{e}_t(t)$$

$$v_t(t) = R \dot{\varphi}(t)$$



Убрзање

$$\vec{a}(t) = (-R \cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}^2(t) - R \sin \varphi(t) \cdot \ddot{\varphi}(t))\vec{i} + (-R \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}^2(t) + R \cos \varphi(t) \cdot \ddot{\varphi}(t))\vec{j}$$
$$\vec{a}(t) = (-R \sin \varphi(t)\vec{i} + \cos \varphi(t)\vec{j})R\ddot{\varphi}(t) + (-\cos \varphi(t)\vec{i} - \sin \varphi(t)\vec{j})R\dot{\varphi}^2(t)$$

$$\vec{e}_t(t) = -\sin \varphi(t)\vec{i} + \cos \varphi(t)\vec{j}$$

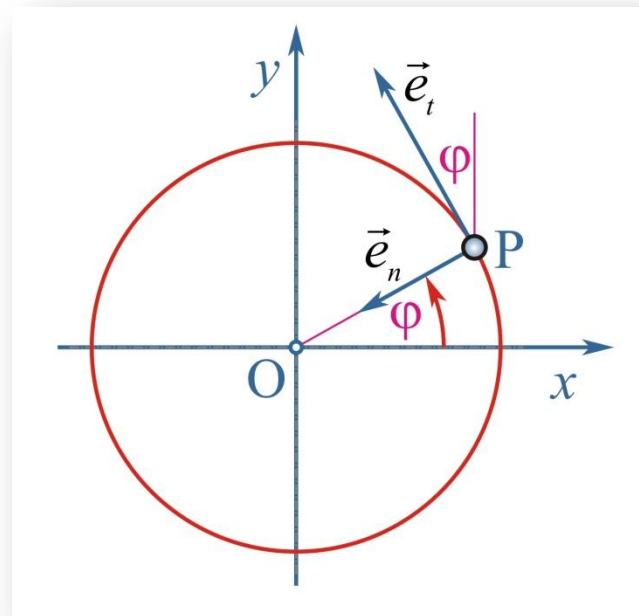
$$\vec{e}_n(t) = -\cos \varphi(t)\vec{i} - \sin \varphi(t)\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = (R\ddot{\varphi}(t)) \cdot \vec{e}_t(t) + (R\dot{\varphi}^2(t)) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$\vec{a}(t) = a_t(t) \cdot \vec{e}_t(t) + a_n(t) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$a_t(t) = R\ddot{\varphi}(t)$$

$$a_n(t) = R\dot{\varphi}^2(t)$$



Брзина и убрзање

$$\vec{v}(t) = R\dot{\phi}(t) \cdot \vec{e}_t(t)$$

$$\vec{v}(t) = v_t(t) \cdot \vec{e}_t(t)$$

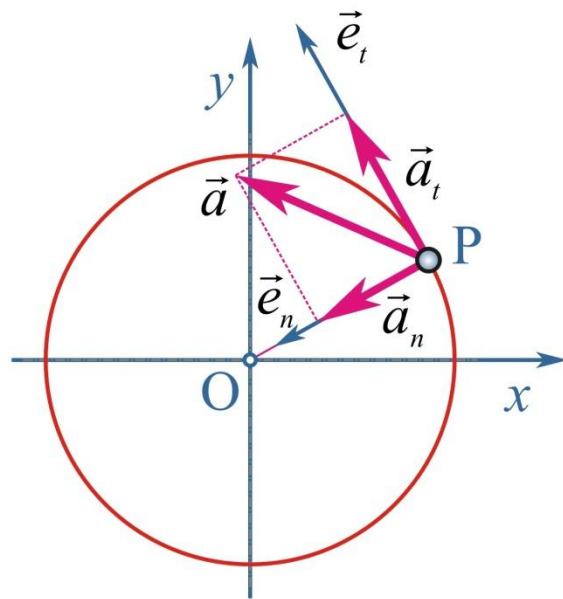
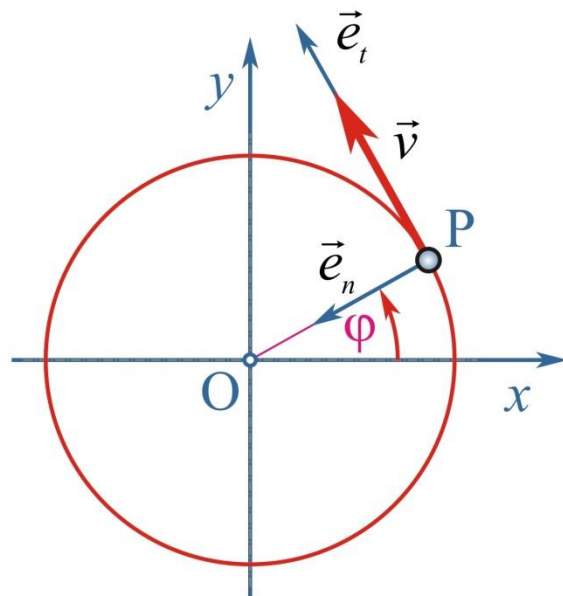
$$v_t(t) = R\dot{\phi}(t)$$

$$\vec{a}(t) = (R\ddot{\phi}(t)) \cdot \vec{e}_t(t) + (R\dot{\phi}^2(t)) \cdot \vec{e}_n(t)$$

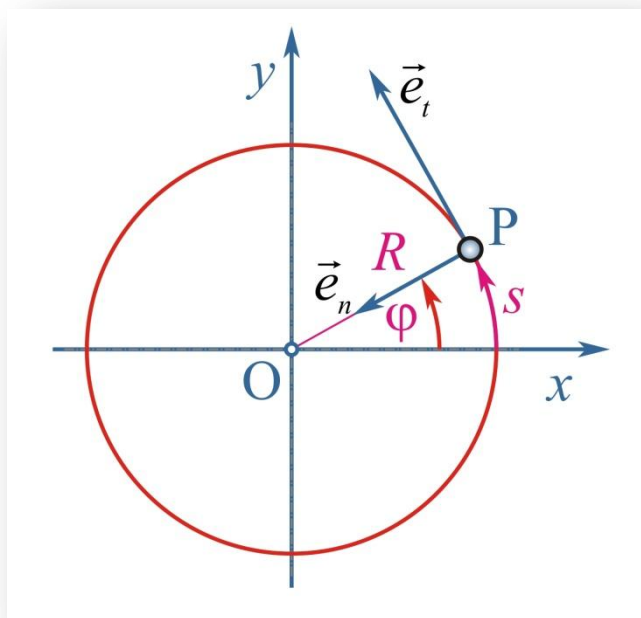
$$\vec{a}(t) = a_t(t) \cdot \vec{e}_t(t) + a_n(t) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$a_t(t) = R\ddot{\phi}(t)$$

$$a_n(t) = R\dot{\phi}^2(t)$$



Брзина и убрзање – природни координатни систем



$$s(t) = R\varphi(t)$$

$$\dot{s}(t) = R\dot{\varphi}(t)$$

$$\ddot{s}(t) = R\ddot{\varphi}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \vec{e}_t(t)$$

$$\vec{v}(t) = v_t(t) \cdot \vec{e}_t(t)$$

$$v_t(t) = \dot{s}(t)$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{s}(t)) \cdot \vec{e}_t(t) + \left(\frac{\dot{s}^2(t)}{R} \right) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$\vec{a}(t) = a_t(t) \cdot \vec{e}_t(t) + a_n(t) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$a_t(t) = \ddot{s}(t)$$

$$a_n(t) = \frac{\dot{s}^2(t)}{R} = \frac{v^2(t)}{R}$$

Природне компоненте брзине и убрзања тачке

- Параметарска једначина кретања

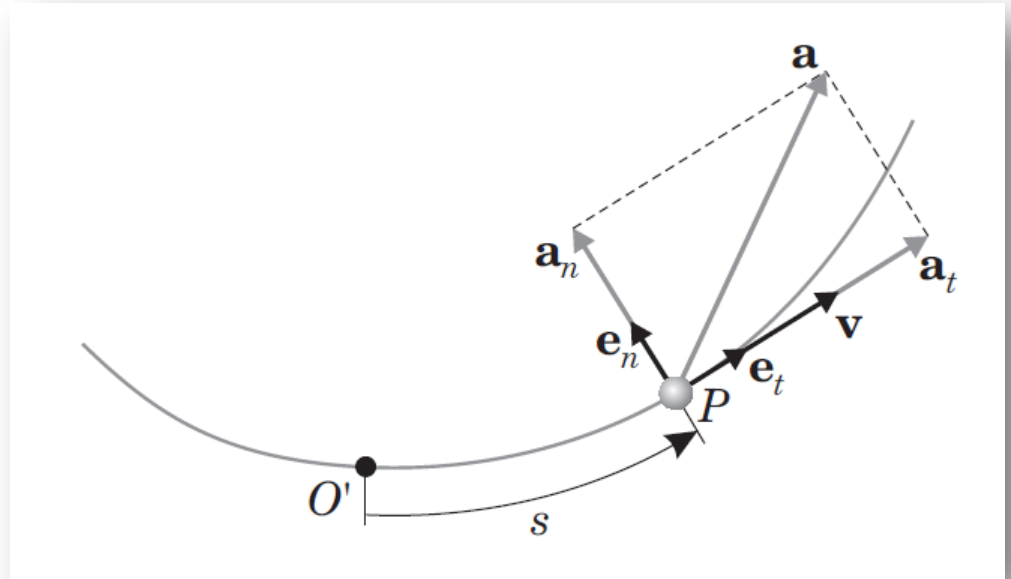
$$s = s(t)$$

- Брзина

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \vec{e}_t$$

$$\vec{v}(t) = v_t(t) \cdot \vec{e}_t$$

$$v_t(t) = \dot{s}(t)$$



Природне компоненте брзине и убрзања тачке

- Убрзање – тангентно и нормално убрзање

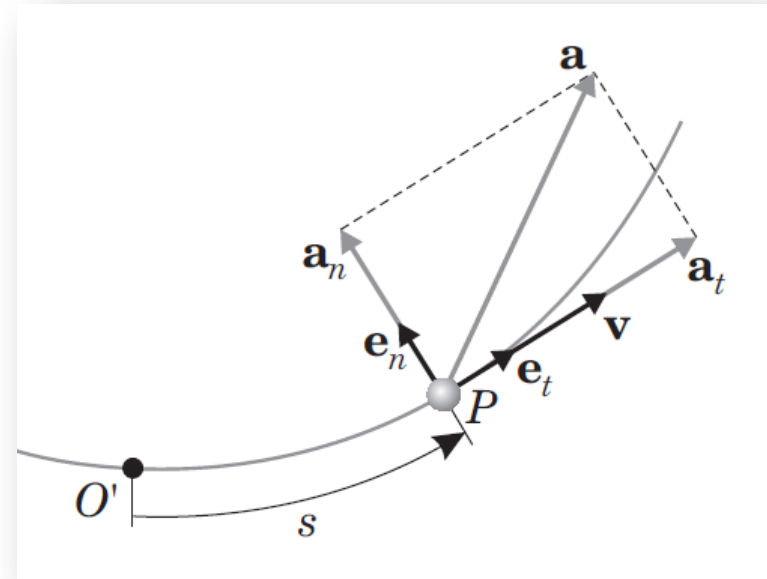
$$\vec{a}(t) = (\ddot{s}(t)) \cdot \vec{e}_t(t) + \left(\frac{\dot{s}^2(t)}{R_K} \right) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$\vec{a}(t) = a_t(t) \cdot \vec{e}_t(t) + a_n(t) \cdot \vec{e}_n(t)$$

$$a_t(t) = \ddot{s}(t)$$

$$a_n(t) = \frac{\dot{s}^2(t)}{R_K} = \frac{v^2(t)}{R_K}$$

$$|\vec{a}(t)| = a(t) = \sqrt{(a_t(t))^2 + (a_n(t))^2}$$



Природне компоненте брзине и убрзања тачке

- Полупречник кривине трајекторије

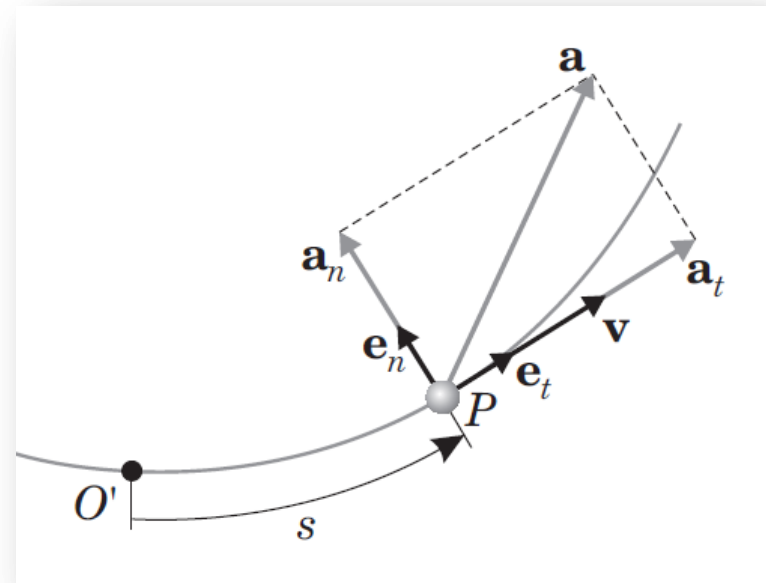
$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a_t = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R_k} \Rightarrow R_k = \frac{v^2}{a_n}$$



Пример

Пример 4.5 *За кретање материјалне тачке описано у Примеру 4.3 одредити природне компоненте убрзања и полупречник кривине трајекторије у тренутку t^* у ком се тачка нашла на y –оси.*

► На основу резултата добијених у Примеру 4.3 знамо да пројекције брзине и убрзања и њихови интензитети у тренутку $t^* = 2s$ гласе:

$$\begin{aligned}v_x(t^*) &= 1 \frac{m}{s}; & v_y(t^*) &= \frac{1}{2} \frac{m}{s}; & |\mathbf{v}(t^*)| &= \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{m}{s}; \\a_x(t^*) &= 1 \frac{m}{s^2}; & a_y(t^*) &= 0; & |\mathbf{a}(t^*)| &= 1 \frac{m}{s^2}.\end{aligned}$$

Тада се лако показује да је тангентно убрзање:

$$a_t(t) = \frac{v_x(t^*)a_x(t^*) + v_y(t^*)a_y(t^*)}{|\mathbf{v}(t^*)|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{m}{s^2}.$$

Сада се из једначине (4.29) може одредити нормално убрзање:

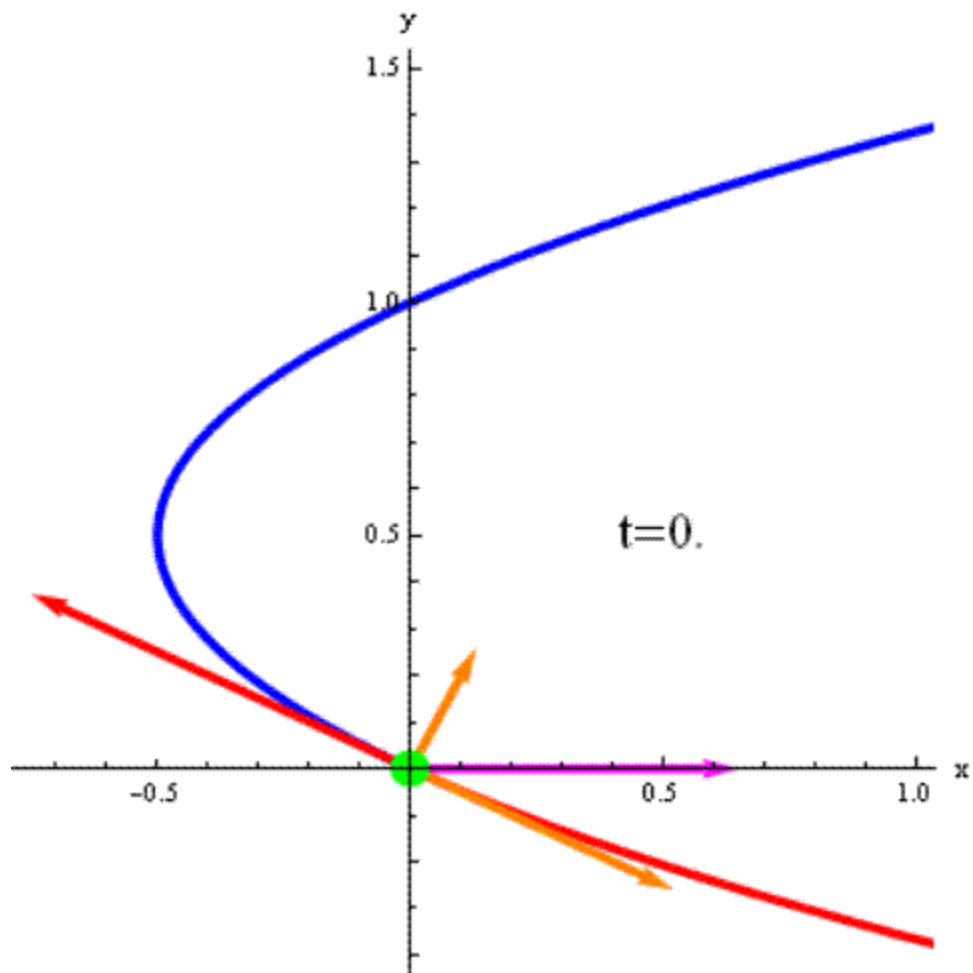
$$a_n(t^*) = \sqrt{|\mathbf{a}(t^*)|^2 - a_t^2(t^*)} = \left[1^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{m}{s^2}.$$

Најзад, помоћу једначине (4.30) се израчунава полупречник кривине:

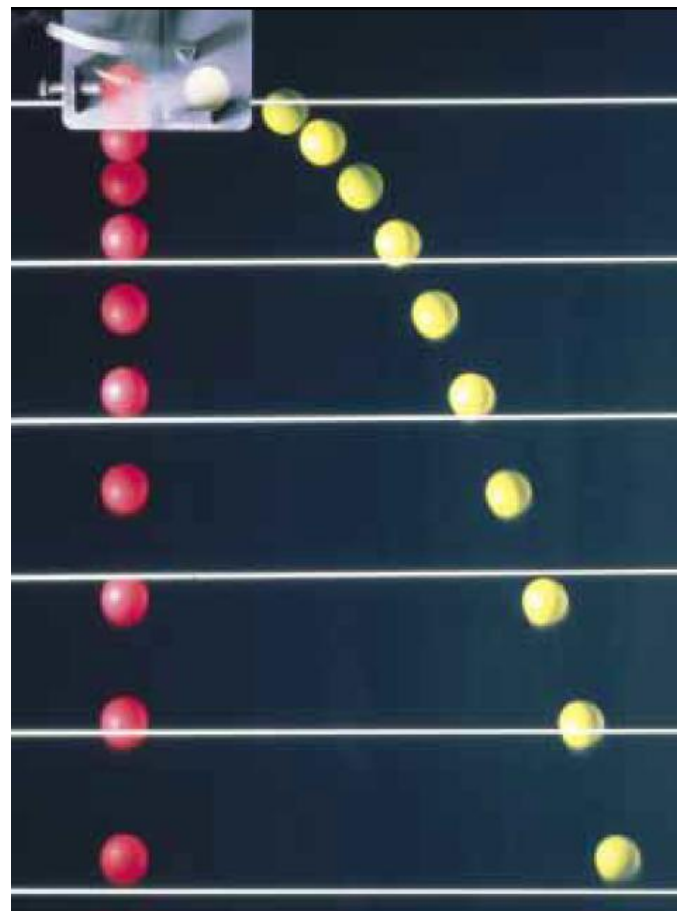
$$R_k(t^*) = \frac{v^2(t^*)}{a_n(t^*)} = \frac{5\sqrt{5}}{4} m.$$

Смисао полупречника кривине је следећи: он одређује полупречник круга чији се центар налази на правцу нормале на трајекторију, има заједничку тангенту са трајекторијом и најбоље апроксимира криву у околини посматране тачке²⁰.

²⁰Зато је полупречник кривине круга једнак самом полупречнику круга, а полупречник кривине праве линије је бесконачно велик (односно кривина κ је једнака нули).



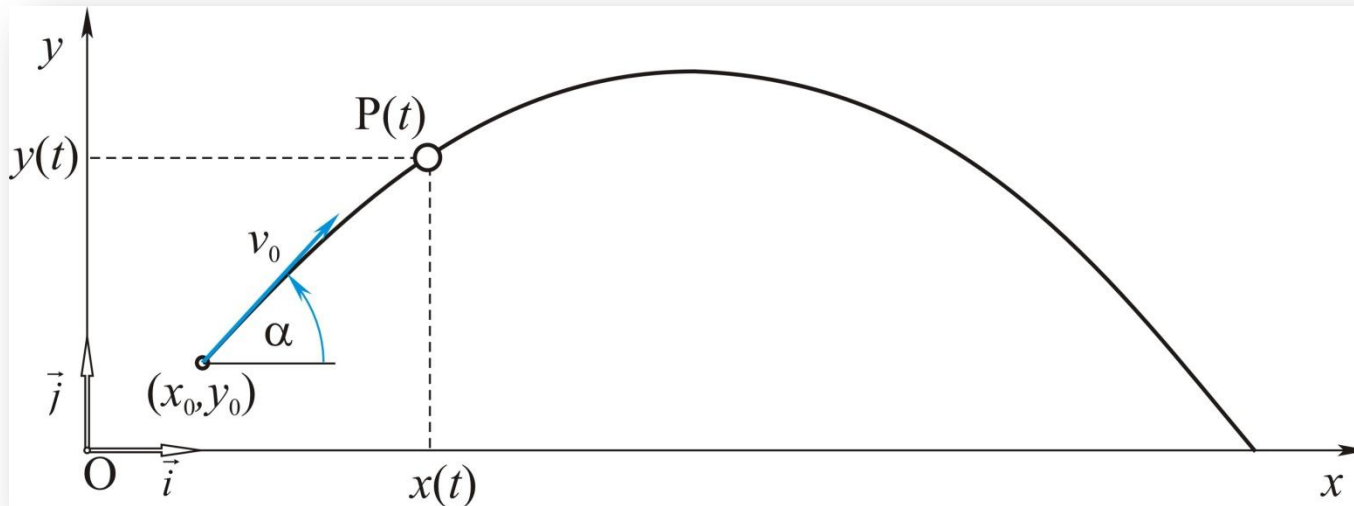
Пример – коси хитац



35. Kosi hitac



<http://www.mech-in-ns.ftn.uns.ac.rs/projects/35-kosi-hitac/>



- параметарске једначине

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha + y_0$$

- трајекторија ($x_0=0, y_0=0$)

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha$$

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$\dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$\ddot{y}(t) = -g$$

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

- домет хица

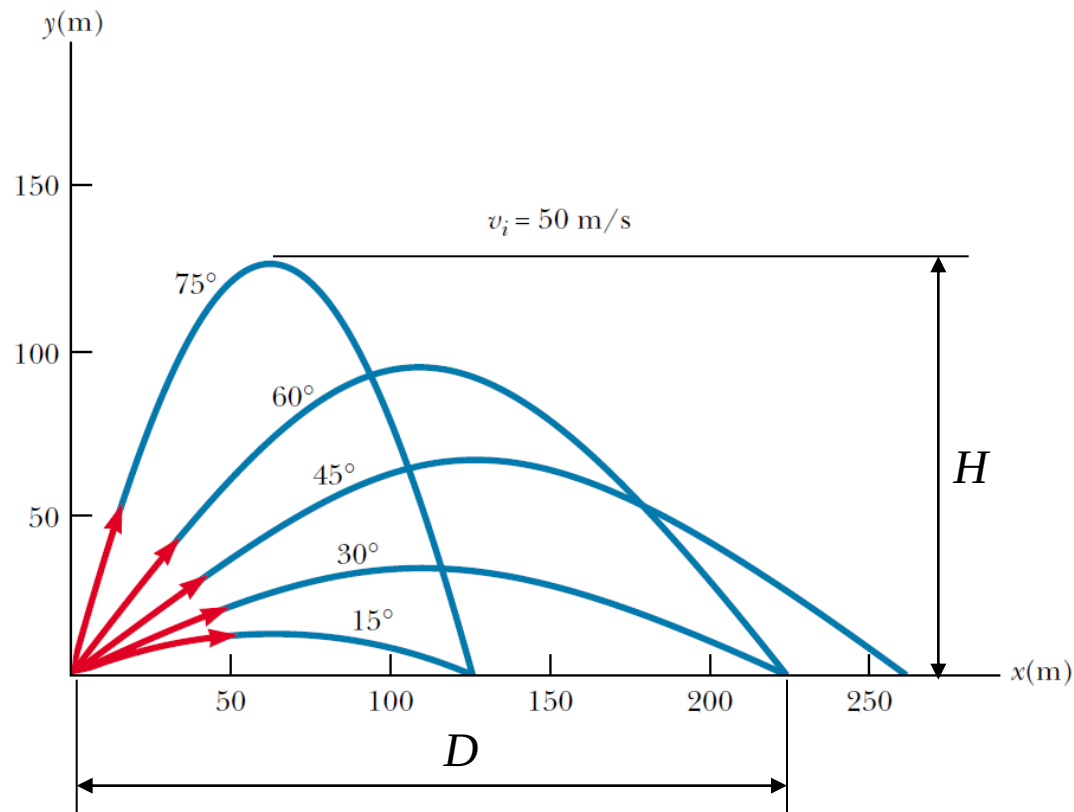
$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

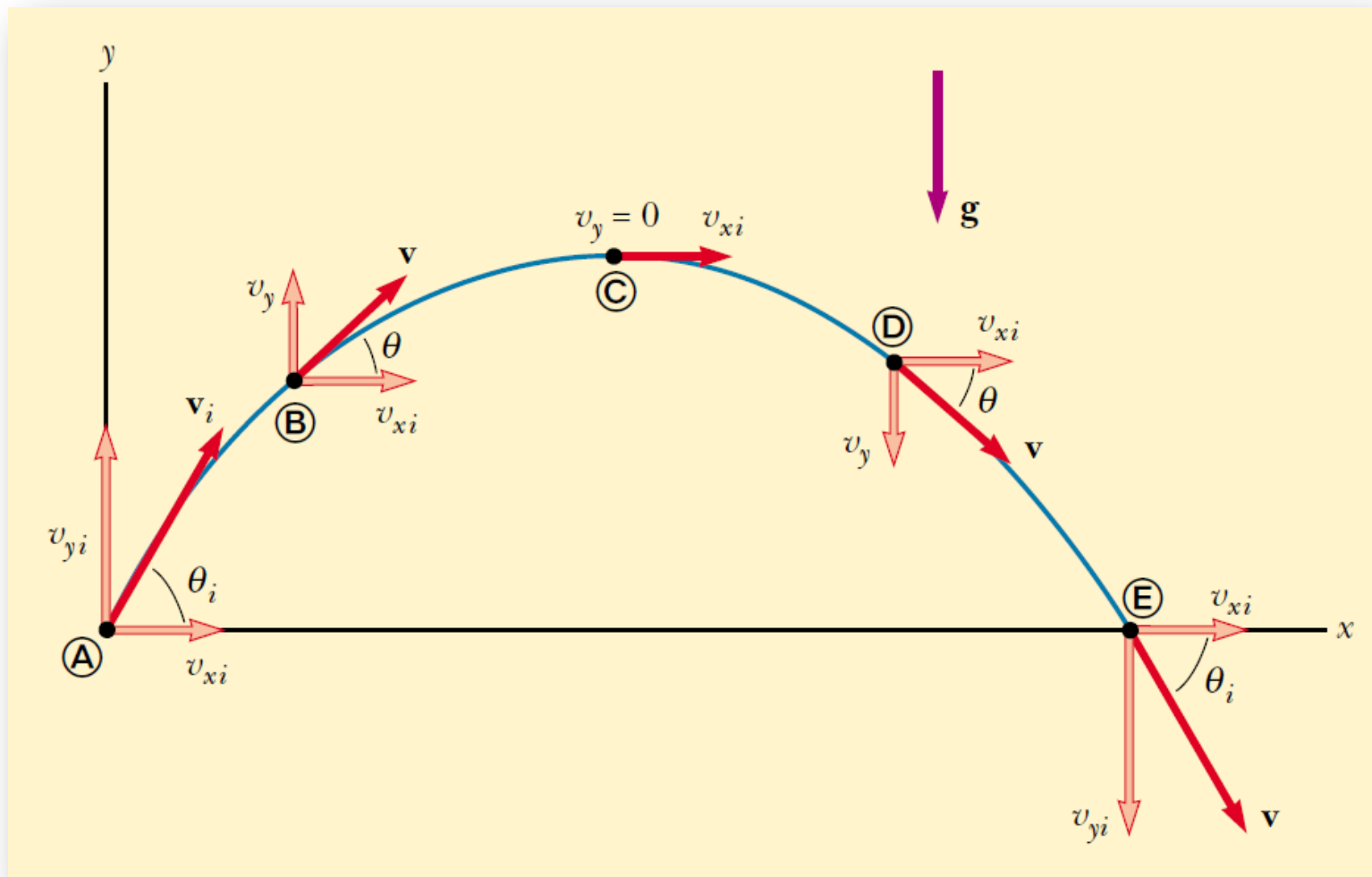
$$D_{\max} = \frac{v_0^2}{g}, \text{ за } \alpha = 45^\circ$$

- висина лета

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}, \text{ за } \alpha = 90^\circ$$





Шта смо научили?

- 30. Криволинијско кретање материјалне тачке. Брзина и убрзање тачке.
- 31. Брзина и убрзање тачке у Декартовом координатном систему.
- 32. Природне компоненте брзине и убрзања тачке. Полупречник кривине трајекторије.

Динамика – 1. део

Кинематика тачке – 2. део

Основе механике
Инжењерство заштите на раду
Миодраг Зуковић