

Динамика – II део

Закон промене количине кретања, Закон промене момента
количине кретања

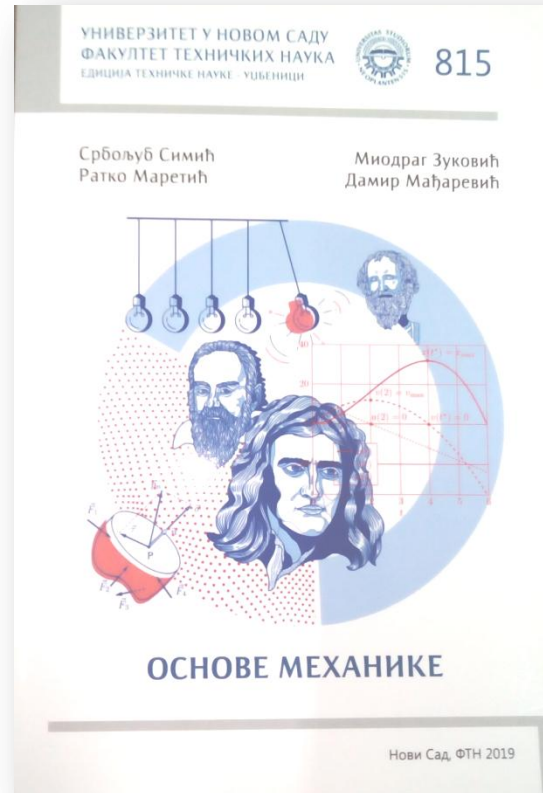
Основе механике

Инжењерство заштите на раду

Миодраг Зуковић

Литература

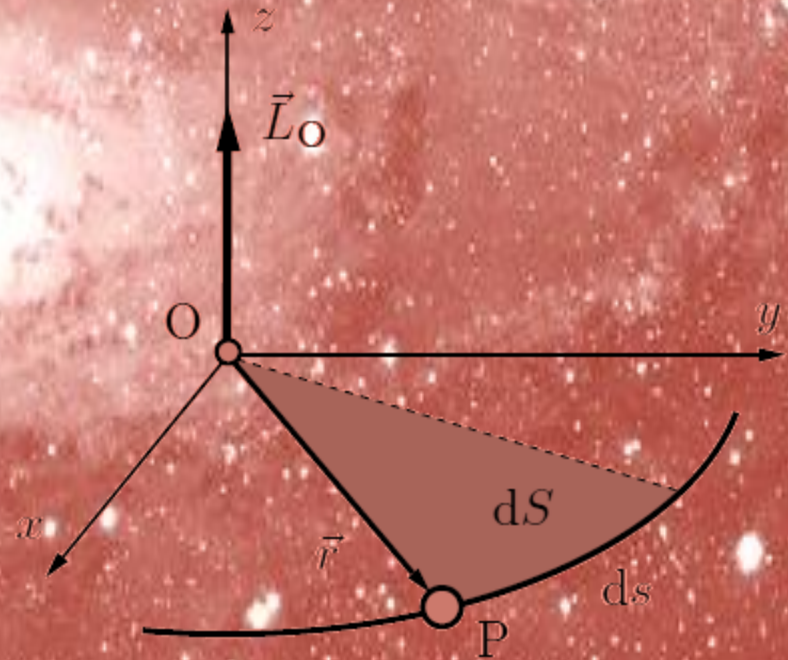
- Симић, Маретић, Зуковић, Мађаревић: **Основе механике**, ФТН издаваштво, Нови Сад, 2019.



Шта ћемо научити?

43. Закон о промени количине кретања.

44. Закон о промени момента количине кретања.



43. Закон о промени количине кретања

Закон о промени количине кретања

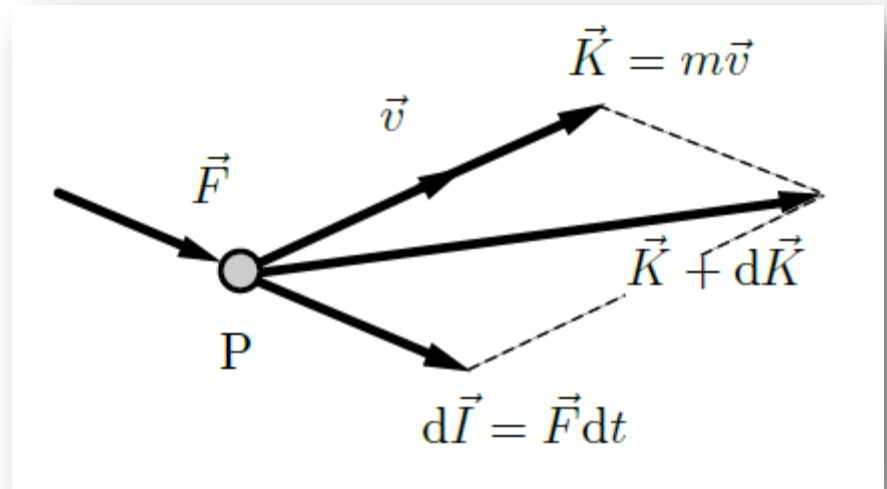
- Елементарни импулс силе

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad d\vec{K} = \vec{F} dt$$

$$d\vec{I} = \vec{F} dt$$

- 1. облик закона (диференцијални)

$$d\vec{K} = d\vec{I}$$



Закон о промени количине кретања

- Импулс силе и прираштај количине кретања

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} d\vec{K} &= \vec{K}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \vec{K}(t_2) - \vec{K}(t_1) \\ &= \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \Delta\vec{K}\end{aligned}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{I} = \vec{I}_{12}$$

- 2. облик закона (интегрални)

$$\Delta\vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}_{12}$$

Закон о промени количине кретања

- Када се импулс силе може израчунати унапред?

- константна сила $\vec{F} = \text{const}$

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F} \Delta t$$

- сила која је функција времена $\vec{F} = \vec{F}(t)$

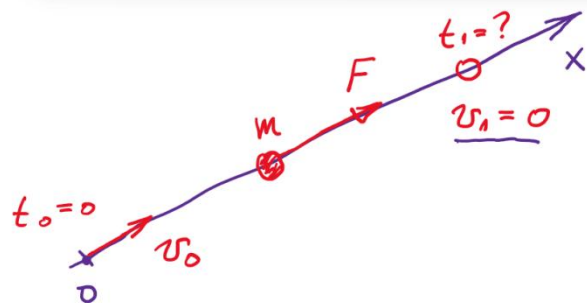
$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

Закон о промени количине кретања

- Пример

7.1. Материјална тачка масе $m = 1 \text{ kg}$ креће се праволинијски под дејством силе $\vec{F}(t) = 10(1 - t)\vec{i} \text{ N}$, где је време t изражено у секундама. Ако се зна да је тачка започела кретање из положаја $x(0) = 0$ почетном брзином $\dot{x}(0) = v_0 = 20 \text{ m/s}$, применом закона о промени количине кретања одредити тренутак t_1 у ком ће тачка променити смер кретања.

7.1. Материјална тачка масе $m = 1 \text{ kg}$ креће се праволинијски под дејством силе $\vec{F}(t) = 10(1 - t)\vec{i} \text{ N}$, где је време t изражено у секундама. Ако се зна да је тачка започела кретање из положаја $x(0) = 0$ почетном брзином $\dot{x}(0) = v_0 = 20 \text{ m/s}$, применом закона о промени количине кретања одредити тренутак t_1 у ком ће тачка променити смер кретања.



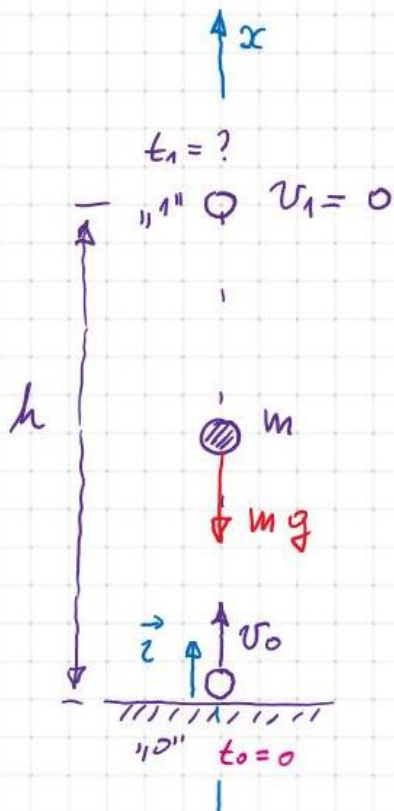
$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{I}_{01}$$

$$\cancel{m \vec{v}_1} - m \vec{v}_0 = \int_{t_0=0}^{t_1} \vec{F} \cdot dt$$

$$- m(v_0 \vec{e}) = \int_0^{t_1} 10(1-t) \vec{e} dt \quad / \cdot \vec{e}$$

$$\cancel{-1} \cancel{20} = 10 \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{t_1}$$

$$\left[-20 = 10 \left(t_1 - \frac{t_1^2}{2} \right) \right] \rightarrow \frac{t_1 = 1 + \sqrt{5} \text{ s}}{t_1 = 1 - \sqrt{5} < 0 \quad \times}$$



$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{I}_{01}$$

$$m \vec{v}_1 - m \vec{v}_0 = \int_{t_0=0}^{t_1} m \vec{g} \cdot dt$$

$$-m(v_0 \vec{z}) = \int_0^t (-mg \vec{z}) dt$$

$$-m v_0 = -mg t \Big|_0^{t_1}$$

$$-v_0 = -g \cdot t_1$$

$$\underline{t_1 = \frac{v_0}{g}}$$

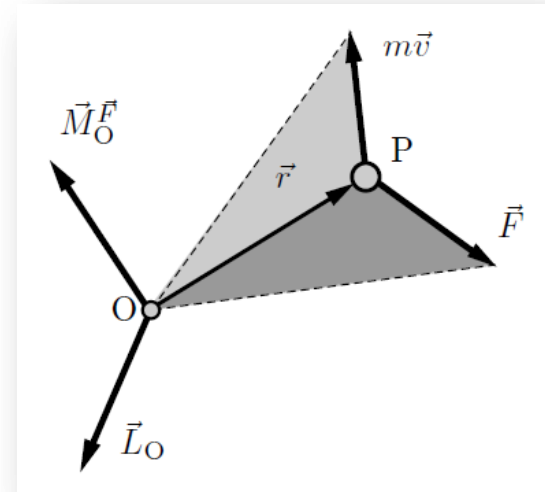
44. Закон о промени момента количине кретања

Закон о промени момента количине кретања

- Момент силе и момент количине кретања

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



- Закон о промени момента количине кретања

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

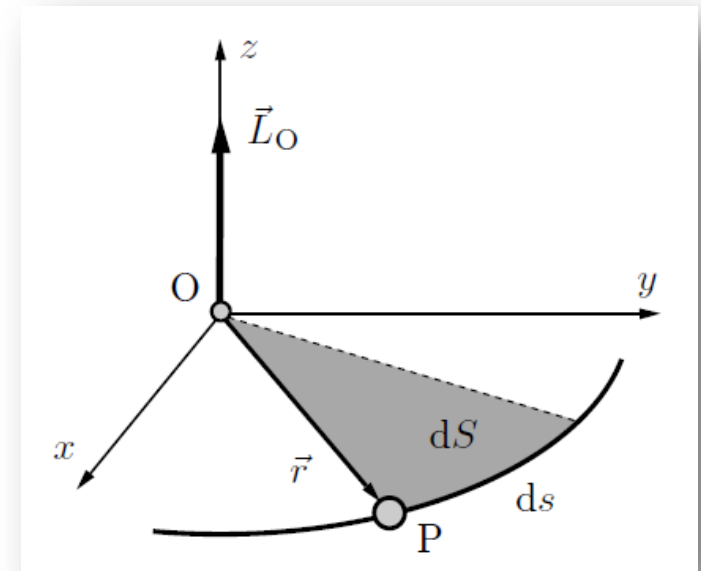
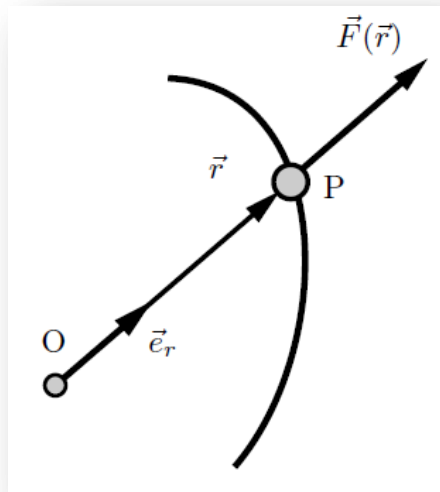
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{F}}$$

Закон о промени момента количине кретања

• Пример 7.1

Материјална тачка масе m креће се под дејством централне силе. Показати да за ово кретање важи закон одржања момента количине кретања. На основу овог резултата показати следеће:

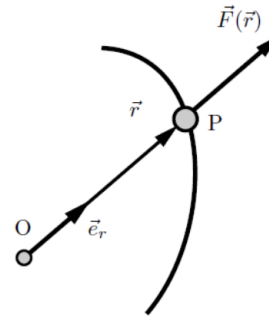
- а) тачка врши кретање у једној равни;
- б) тачка обилази центар дејства сила крећући се увек у истом смеру;
- в) секторска брзина тачке је константна.



Закон о промени момента количине кретања

- Пример 7.1

Пример 7.1. Материјална тачка масе m креће се под дејством централне силе $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, где је r растојање тачке од центра дејства силе, а $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ јединични вектор радијалног правца. Показати да за ово кретање важи закон одржања момента количине кретања, $\vec{L}_O = \text{const}$. На основу овог резултата показати следеће:

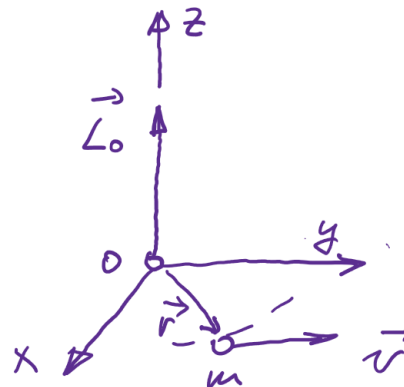


$$\left| \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{F}} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}_O^{\vec{F}} &= \vec{r} \times \vec{F} = 0 \\ \vec{r} &\parallel \vec{F} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \text{const}}$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$$



Закон о промени момента количине кретања

- **Пример 7.1**

► Други Њутнов закон за кретање тачке у пољу дејства централне силе гласи:

$$m\vec{a} = \vec{F} = F(r)\vec{e}_r. \quad (\text{а})$$

Векторским множењем ове једначине вектором положаја $\vec{r}$ са леве стране добија се закон о промени момента количине кретања (7.7). У овом случају момент централне силе за референтну тачку О ће бити једнак нули све време кретања зато што правац силе пролази кроз њу. То се може доказати и коришћењем тврђења да је векторски производ колинеарних вектора једнак нули:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times F(r)\vec{e}_r = \vec{r} \times F(r)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{F(r)}{r}(\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}. \quad (\text{б})$$

Закон о промени момента количине кретања

- Пример 7.1

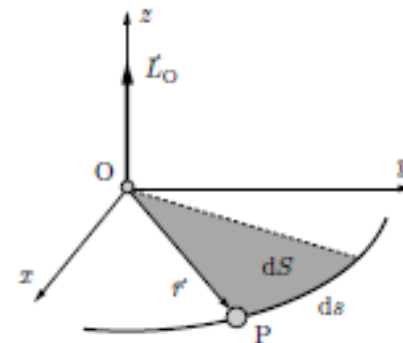
У сваком случају добија се да важи закон одржања момента количине кретања за референтну тачку О:

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{const.} \quad (\text{в})$$

Једначина (в) представља векторски први интеграл диференцијалних једначина кретања, односно другог Њутновог закона. Стога вектор момента количине кретања $\vec{L}_O$ мора бити константан у свим аспектима који карактеришу један вектор, а то су правац, смер и интензитет. Погледајмо какве ће нам информације то пружити.

Ако је правац вектора $\vec{L}_O$ константан, онда компоненте векторског производа које чине овај вектор, а то су $\vec{r}$ и $\vec{K} = m\vec{v}$, морају све време кретања припадати равни која је нормална на тај правац. Другим речима, материјална тачка се креће у равни нормалној на вектор $\vec{L}_O$. Ту раван зовемо *Лапласова инваријабилна раван*.

Пошто се смер вектора момента количине кретања не мења, однос вектора $\vec{r}$ и $\vec{v}$, односно $\vec{K}$, мора бити такав да се посматрано из врха вектора $\vec{L}_O$ ротација првог вектора до поклапања са другим, најкраћи путем, врши увек у истом смеру. То значи да се смер обилажења материјалне тачке око центра дејства силе не мења. Ако би се смер обилажења тачке око центра дејства променио, онда би се променио и смер вектора $\vec{L}_O$, што је у контрадикцији са векторским првим интегралом.



Слика 7.3: Лапласова инваријабилна раван

Закон о промени момента количине кретања

- Пример 7.1

Претпоставимо да се кретање врши у Oxy -равни. Будући да је тада $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ и $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$, добија се следећи израз за момент количине кретања:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k}. \quad (\text{г})$$

Пошто интензитет овог вектора мора бити константан, а знамо да је $m = \text{const.}$, важиће:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.} \quad (\text{д})$$

Елементарна површ dS коју вектор положаја “пребрише” током бесконачно малог временског интервала dt једнака је:

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|dt,$$

одакле због резултата (д) следи да је секторска брзина dS/dt константна:

Закон о промени момента количине кретања

- **Пример 7.1**

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const.}$$

Овај резултат представља други Кеплеров закон који тврди да вектор положаја у једнаким временским интервалима пребрише једнаке површине.

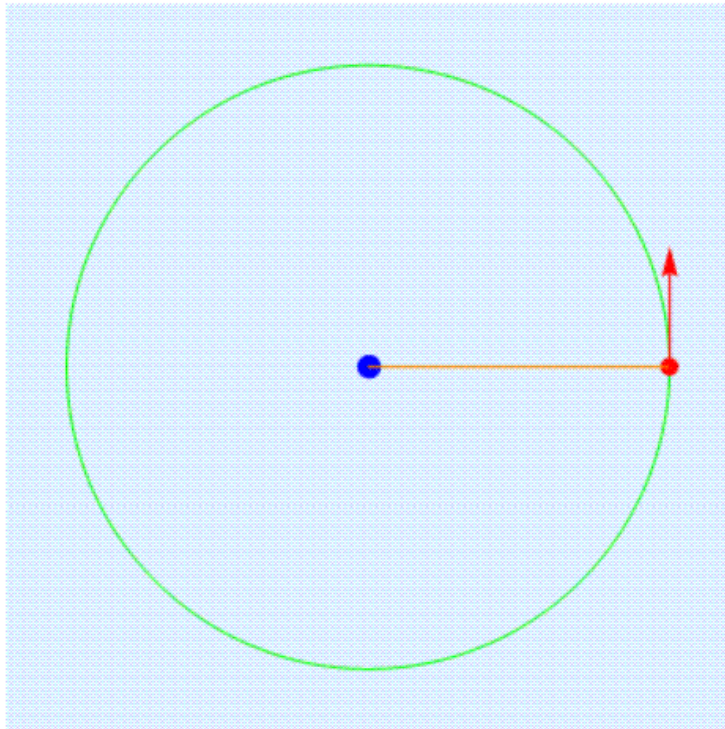
Анализа закона одржања момента количине кретања открила нам је општа својства кретања материјалне тачке у пољу дејства централне силе. Само кретање тачке, међутим, зависи од карактера централне силе. Може се показати, што овде неће бити учињено, да се под дејством Њутнове гравитационе силе $F(r) = \kappa/r^2$, $\kappa = \text{const.}$, материјална тачка може кретати по трајекторији која има облик конусног пресека². ◀

² Конусни пресеци су круг, елипса, парабола и хипербола.

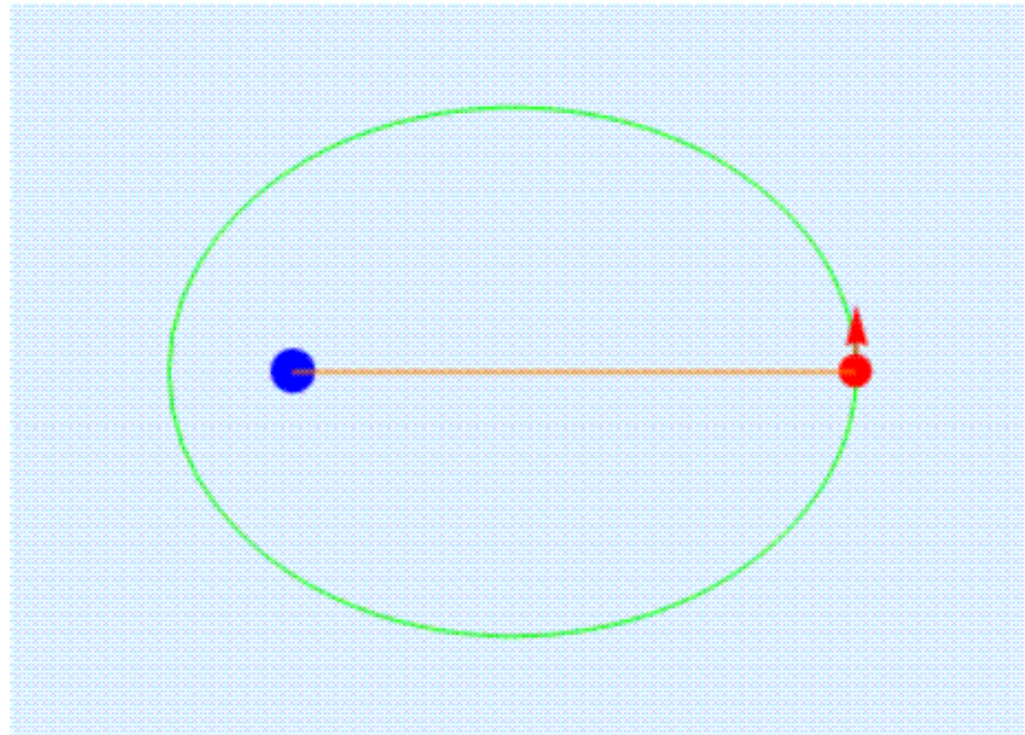
Закон о промени момента количине кретања

- Пример 7.1 – Њутнова гравитациона сила

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



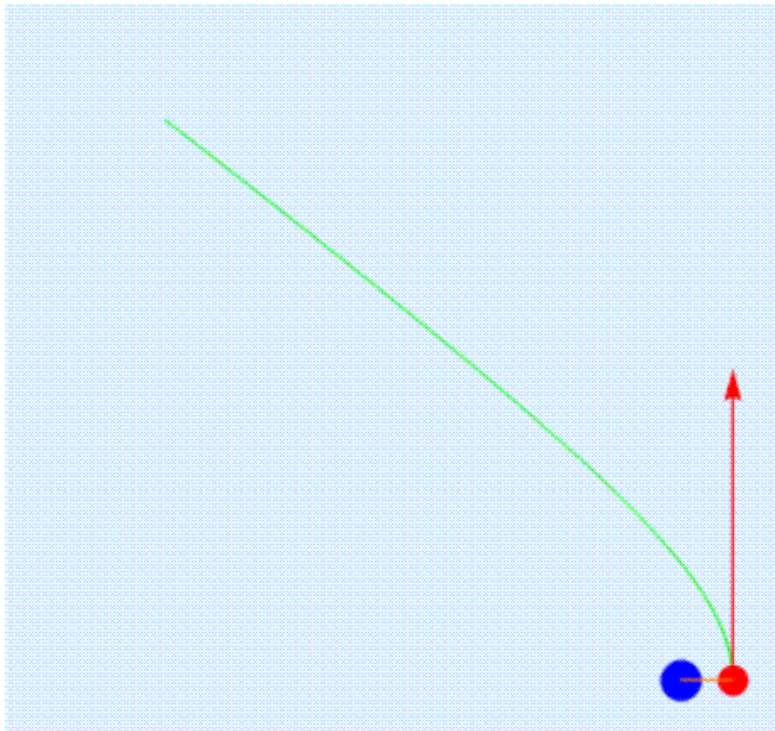
Кружница



Елипса

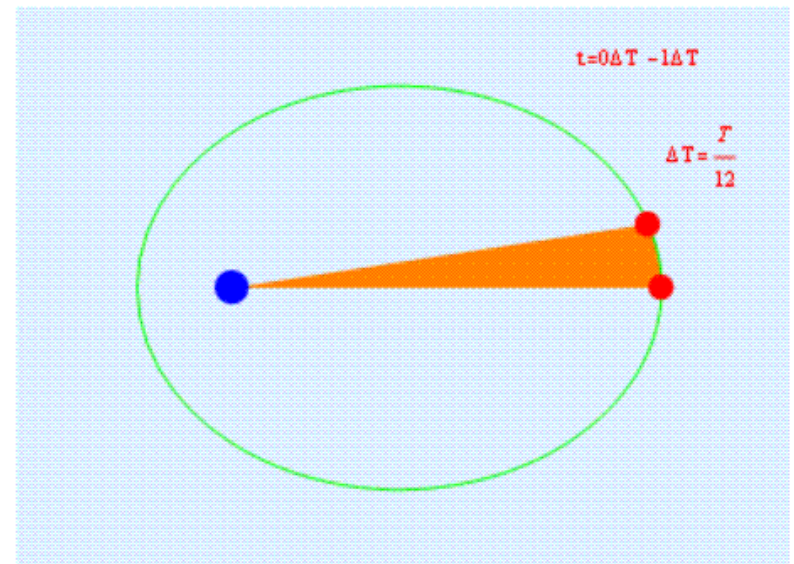
Закон о промени момента количине кретања

- Пример 7.1 – Њутнова гравитациона сила



Хипербола

Елипса – секторска брзина



Шта смо научили?

43. Закон о промени количине кретања.

44. Закон о промени момента количине кретања.

Динамика – II део

Закон промене количине кретања, Закон промене момента
количине кретања

Основе механике

Инжењерство заштите на раду

Миодраг Зуковић