2. Predavanje

October 4, 2016

1 Zakoni održanja

U fizici postoje nekoliko zakona održanja. Zakoni održanja su posledica neke osnovne simetrije kosmosa. Postoje zakoni održanja koji se odnose na energiju, impuls, moment impulsa, naelektrisanje, ukupan broj nukleona (konstituenti atomskog jezgra) itd.

1.1 Zakon održanja energije

Zakon održanja energije obuhvata pojmove kao što su kinetička energija, potencijalna energija i rad. Rad se definiše kao delovanje sile duž nekog puta. Stroga definicija ukupnog mehaničkog rada je data izrazom:

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{1}$$

Izraz pod integralom podrazumeva skalarni proizvod sile $\vec{F}$ i elementarnog puta $d\vec{s}$ u svakoj tački putanje (Slika 13). Vektor elementarnog dela putanje $d\vec{s}$ je u svakoj tački tangenta na trajektoriju čestice. U opštem slučaju sila može duž trajektorije da menja intenzitet, pravac i smer. Integral skalarnog proizvoda $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ govori da treba sabrati sve skalarne proizvode sile i elemente putanje duž cele trajektorije. Jedinica za rad označava se sa J i naziva se Džul.

Slika 13. Uz definiciju rada.

PRIMER 3.1:
Izračunati ukupan rad sile, koja se menja po zakonu $F(s) = ks$, gde je k konstanta i iznosi $k = 3,5N/m$, a s pređeni put, na pravolinijskoj putanji dužine $s_0 = 20m$. Sila duž celog puta deluje pod uglom $\alpha = 30°$ u odnosu pravac kretanja.
Rešenje
Prema definiciji rada:

$$A = \int_0^{s_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{s_0} F ds \cos\alpha = k\cos\alpha \int_0^{s_0} s ds = k\cos\alpha \frac{{s_0}^2}{2} = 121J. \tag{2}$$

Energija se u opštem smislu smatra veličinom koja kvantifikuje meru sposobnosti nekog tela da izvrši rad. U tom smislu promena energije sistema jednaka je izvršenom radu.

$$\Delta E = A \tag{3}$$

Pomoću ove defincije dolazimo do pojma kinetičke energije, odnosno energije koje telo ima pri kretanju. Radi jednostavnosti razmatramo pravolinijsko kretanje materijalne tačke mase m pod dejstvom sile $\vec{F}$ koja je kolinearna sa pravcem kretanja. Smatramno da je telo krenulo iz stanja mirovanja i pod dejstvom sile F steklo brzinu v. Ako izraz za silu u jednačini (1) zamenimo sa drugim Njutnovim zakonom, dobijamo:

$$A = \Delta E = \int_0^v F ds = \int_0^v m a ds = \int_0^v m \frac{dv}{dt} ds = \int_0^v m v dv = \frac{mv^2}{2} \tag{4}$$

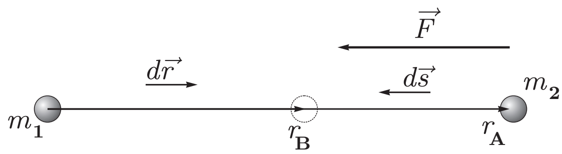
Ubrzanje je po definiciji $a = \frac{dv}{dt}$, a elementarni deo puta je $ds = vdt$. S obzirom da je telo krenulo iz stanja mirovanja ukupna energija koju je steklo prilikom ubrzavanja je $\frac{mv^2}{2}$ i naziva se kinetička energija ili energija kretanja. Ovu energiju tela imaju ukoliko im je brzina različita od nule. Kinetička energija se obično obeležava sa E_k:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \tag{5}$$

Jedinica za kinetičku energiju je ista kao i za rad, Džul. S obzirom na prvi Njutnov zakon, vidimo da ukoliko na telo ne deluje nikakva sila kinetička energija tela se ne menja, tj. kažemo da se kinetička energija održava.

Energiju mogu imati i tela koja miruju ali istovremeno interaguju sa drugim telima. Energija koja se javlja usled interakcije naziva se potencijalna energija. Na primer knjiga koja stoji na stolu interaguje sa gravitacionim poljem zemlje i ima potencijalnu energiju. Ukoliko izvučemo oslonac, knjiga pada i stiče brzinu. Ovde gravitaciona sila vrši rad, a potencijalna energija se transformiše u kinetičku. S obzirom da je poznat izraz za gravitacionu silu, možemo naći i izraz za rad gravitacione sile, gravitacionu potencijalnu energiju.

$$\Delta E = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{6}$$



Slika 14. Rad gravitacione sile pri premeštanju tela iz položaja A u položaj B

Razmatramo telo mase m_1 koje je nepomično i telo mase m_2 koje se nalazi na rastojanju r_A od tela m_1. Koliki rad izvrši gravitaciona sila ako telo m_2 pomeri sa rastojanja r_A na rastojanje r_B? S obzirom na izraz (1) i Njutnov zakon gravitacije, imao:

$$A = \int_{r_A}^{r_B} F dr = \int_{r_a}^{r_B} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \gamma m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} + \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} \tag{7}$$

Dobijeni izraz predstavlja rad gravitacione sile pri premeštanju tela mase m_2 iz položaja r_A u položaj r_B, ili promenu gravitacione potencijalne energije. Ako smatramo da se tačka A nalazi u beskonačnosti, izraz (7) se svodi na:

$$A = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} \tag{8}$$

Dobijeni izraz predstavlja gravitacionu potencijalnu energiju. Ako izostavimo indeks A, i uvedemo oznaku $U(r)$ za potencijalnu energiju, dobijamo:

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \tag{9}$$

U beskonačnosti sila gravitacije iščezava i nema energije interakcije. Na manjem rastojanju, gravitaciona potencijalna energija dobija na značaju. Primenićemo ovaj rezultat na telo mase m koje se nalazi na visini h u odnosu na površinu zemlje. Izraz za potencijalnu energiju postaje:

$$U(h) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}, \tag{10}$$

gde je M_Z masa, a R_Z poluprečnik zemlje. S obzirom da je $h << R_Z$ možemo naći približnu formulu za gravitacionu potencijalnu energiju koja je primenljiva na visinama koje su mnogo manje od poluprečnika zemlje. U tom cilju uvodimo oznaku $x = \frac{h}{R_Z}$. Sada izraz (10) postaje:

$$U(h) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z(1+x)} \tag{11}$$

Prema Tajlorovom obrascu, kada je x mnogo manje od 1, izraz $\frac{1}{1+x}$ svodi se na $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ (proveri na primer $\frac{1}{1+0{,}001} \approx 1 - 0.001$). Nalazimo:

$$U(h) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z} + \gamma \frac{M_Z m}{{R_Z}^2} h \tag{12}$$

Potencijalna energija je uvek određena do na konstantu. Odnosno, merljiva je samo promena potencijalne energije. Na primer promena potencijalne energije pri padu tela sa visine h je prema (12):

$$\Delta U = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z} + \gamma \frac{M_Z m}{{R_Z}^2} h + \gamma \frac{M_Z m}{R_Z} = \gamma \frac{M_Z m}{{R_Z}^2} h, \tag{13}$$

i ne zavisi od prvog člana u jednačini (12). Stoga je prikladan izraz za gravitacionu potencijalnu energiju u blizini površine zemlje:

$$U = \gamma \frac{M_Z m}{{R_Z}^2} h \tag{14}$$

Prepoznajemo iz Primera 1 u prethodnoj lekciji da je član $\gamma \frac{M_z}{{R_Z}^2} = g$, te se konačno dobija poznati izraz za gravitacionu potencijalnu energiju:

$$U_p = mgh \tag{15}$$

Ukupna energija nekog tela u gravitacionom polju zemlje je zbir kinetičke i potencijalne:

$$E = E_p + E_k = mgh + \frac{mv^2}{2} \tag{16}$$

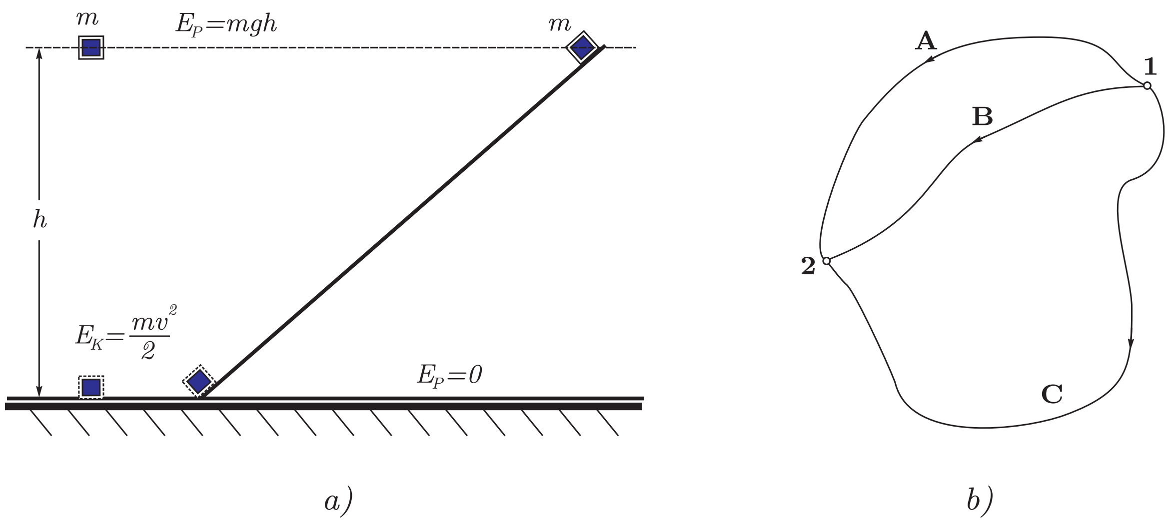
U odsusustvu sile trenja ova ukupna energija se održava. Na primer za telo koje sklizne niz strmu ravan (bez trenja) sa visine h može se napisati izraz:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \tag{17}$$

odakle nalazimo brzinu tela u podnožju strme ravni:

$$v = \sqrt{2gh} \tag{18}$$

Istu brzinu dobija i telo koje slobodno padne sa visine h (Slika 15.a). Ovo je rezultat toga što je gravitaciona sila tzv. konzervativna sila, tj. rad ove sile ne zavisi od oblika trajektorije. Gravitaciona sila izvrši isti rad ako telo pređe iz tačke 1 u tačku 2 putanjama A, B ili C(Slika 15.b).



Slika 15. a) Tela na visini h miruju pa imaju samo potencijalnu energiju. Na površini zemlje potencijalana energija se transformisala u kinetičku.b) Rad gravitacione sile ne zavisi od oblika trajektorije.

Primer nekonzervativne sile je sila trenja. Rad sile trenja zavisi od oblika trajektorije. Na primer, ako na slici 15.b) putanje leže u horizontalnoj ravni, sila trenja je svuda ista, jasno je da će rad sile trenja biti najveći na putanji C jer je to najduža trajektorija. Zakon održanja energije ima najopštiju važnost i kaže da se energija ne može stvoriti već se ona može samo transformisati iz jednog oblika u drugi. Na primeru kretanja tela niz strmu ravan (Slika 15.a) ako je prisutno trenje, očigledno u podnožju strme ravni telo neće imati kinetičku energiju kao što izraz (17) predviđa. Ali to ne znači da je energija nestala. U slučaju prisusutva sile trenja jedan deo energije se pretvara u toplotu, odnosno dolazi do zagrevanja samog tela i podloge strme ravni. Zakon održanja energije nije opovrgnuo ni jedan eksperiment. To je posledica toga što interakcije u prirodi ne zavise eksplicitno od vremena. Ni jedan eksperiment nije pokazao npr. da se gravitaciona konstanta menja sa vremenom.

1.2 Zakon održanja impulsa

Njutn je uveo fizičku veličinu koja se naziva impuls ili količina kretanja. Obično se ova veličina obeležava sa $\vec{p}$. To je vektorska veličina i definiše se izrazom:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{19}$$

Dakle jednaka je proizvodu mase tela i njegove brzine. Jedinica je $kg \cdot \frac{m}{s}$. Pretpostavimo da se sistem sastoji od n čestica pri čemu u jednom trenutku čestice imaju impulse $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ...\vec{p}_n$. Ukupan impuls je:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \tag{20}$$

Ukoliko nema spoljašnje sile, tj. čestice mogu samo međusobno da interaguju, onda je ukupan impuls veličina koja se održava:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const. \tag{21}$$

Ovo je zakon održanja impulsa i ima naročiti značaj pri rešavanju problema sa sudarima.
Zakon održanja impulsa može se dokazati pomoću III Njutnovog zakona. Posmatramo dve čestice sa impulsima $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ i $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$. Ukupan impuls je:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \tag{22}$$

Ako diferenciramo po vremenu ceo izraz, nalazimo;

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} \tag{23}$$

Ako nema spoljašnjih sila, tj. u sistemu je moguća samo uzajamna interakcija tela m_1 i m_2, onda prema II Njutnovom zakonu važi:

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}; \tag{24}$$

gde je $\vec{F}_{21}$ sila kojom drugo telo deluje na prvo, a $\vec{F}_{12}$ sila kojom drugo telo deluje na prvo. Međutim prema trećem Njutnovom zakonu $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, odakle sledi:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \tag{25}$$

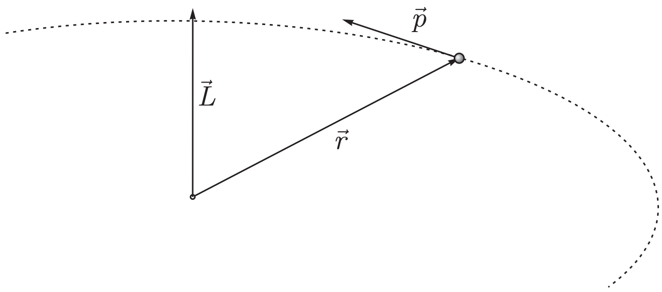
Zaključujemo da je zbir $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$, jer je prema pravilu diferenciranja $\frac{d}{dt}const. = 0$.

1.3 Zakon održanja momenta količine kretanja

Važan pojam u mehanici je moment količine kretanja i definiše se izrazom:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{26}$$

gde je $\vec{p}$ impuls, a $\vec{r}$ vektor položaja. Jedinica za moment impulsa je kgm^2/s. S obzirom na definiciju momenta količine kretanja preko vektorskog proizvoda radijus vektora i impulsa, moment impulsa je vektor koji je normalan na ravan u kome leže vektor položaja i impuls (Slika 16).

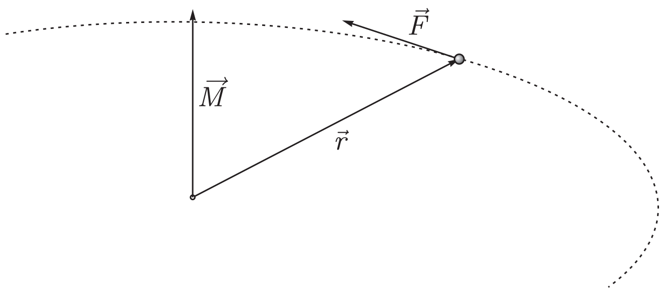


Slika 16. Definicija momenta količine kretanja.

Moment sile je definisan relacijom:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{27}$$

gde je $\vec{F}$ sila koja deluje na česticu (Slika 17).



Slika 17. Definicija momenta sile.

Ako diferenciramo relaciju (26) po vremenu, dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{28}$$

S obzirom da je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \tag{29}$$

sledi iz drugog Njutnovog zakoan

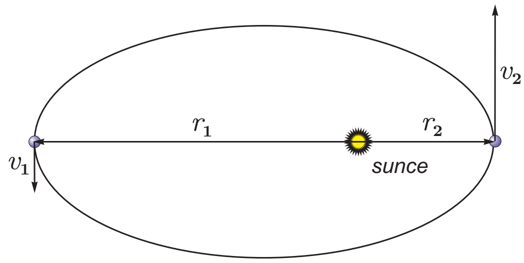
$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \tag{30}$$

Odnosno,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{31}$$

Vremenska promena momenta impulsa jednaka je momentu sile. Sledi zakon održanja moment impulsa, ako je zbir svih momenata impulsa jednak nuli $\vec{M} = 0$ onda je moment količine kretanja konstantna veličina $\vec{L} = const.$. Pri kretanju planeta oko sunca održava se moment količine kretanja. Ovo je zato što je sila uvek kolinerana sa radijus vektorom pa je prema definiciji (27) moment sile jednak nuli. Ako na eliptičnoj orbiti planete oko sunca uočimo dve tačke, gde je planeta najbliža i najudaljenija od sunca, možemo napisati pomoću zakona održanja momenta količine kretanja:

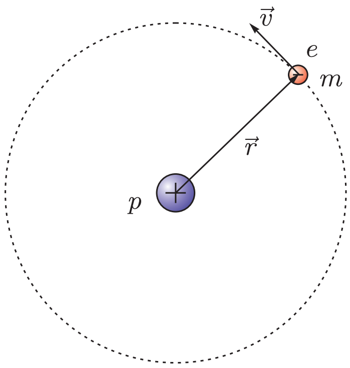
$$r_1 m v_1 = r_2 m v_2 \tag{32}$$



Slika 18. Očuvanje momenta količine kretanja pri kretanju planete oko sunca.

Vektorske oznake su izostavljene s obzirom da je u ovim tačkama radijus vektor normalan na vektore impulsa. Zaključujemo da planeta kada prolazi bliže suncu ima veću brzinu nego kada prolazi na daljem rastojanju od sunca. II Keplerov zakon nije ništa drugo nego zakon održanja momenta količine kretanja. Za telo koje se kreće po kružnici radijusa r stalnom brzinom v, na primer uprošćen model atoma vodonika gde elektron kruži oko protona, intenzitet momenta količine kretanja je:

$$L = rmv \tag{33}$$



Slika 19. Moment kolilčine kretanja tela koje se kreće po kružnici. Moment impulsa je ovde vektor normalan na ravan crteža, počinje u centru kružnice i usmeren je uvis.

2 Dva zadatka iz zakona održanja

PRVI ZADATAK

Telo mase $m_1 = 1kg$ krećući se brzinom $v = 8m/s$ naleće na telo mase $m_2 = 3kg$ koje miruje i čeono se sudari. Odrediti brzine tela i gubitak ukupne kinetičke energije nakon:

a) apsolutno elastičnog sudara;

b) apsolutno neelastičnog sudara.

REŠENJE:

a)

Situacija pre i posle apsolutno elastičnog sudara je prikazana na Slici 1.

Slika 1

Na osnovu zakona održanja impulsa:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{34}$$

Ako pretpostavimo da se nakon sudara telo mase m_1 kreće suprotno od smera x-ose, izostavljanjem vektorskih oznaka nalazimo:

$$p = -p_1 + p_2, \tag{35}$$

tj. s obzirom na definiciju impulsa:

$$m_1 v = -m_1 v_1 + m_2 v_2, \tag{36}$$

gde su v_1 i v_2 brzine tela mase m_1 i m_2 nakon sudara, respektivno. U apsolutno neelastičnom sudaru ne dolazi do gubitka ukupne kinetičke energije. Zbog toga važi:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \tag{37}$$

Ako iz (3) izvrstimo v_1 i zamenimo u (4) nalazimo:

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v = 4m/s \tag{38}$$

Ako dobijeni izraz za v_2 (5) zamenimo u (3) nalazimo:

$$v_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v = 4m/s \tag{39}$$

b)
Situacija pre i posle apsolutno neelastičnog sudara je prikazana na Slici 2.

Slika 2

Na osnovu zakona održanja impulsa

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V, \tag{40}$$

odakle sledi,

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v = 2m/s \tag{41}$$

Gubitak kinetičke energije je:

$$\Delta E_k = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} \tag{42}$$

Ako u (9) uvrstimo izraz (8) nalazimo gubitak kinetičke energije:

$$\Delta E_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v^2 = 24J \tag{43}$$

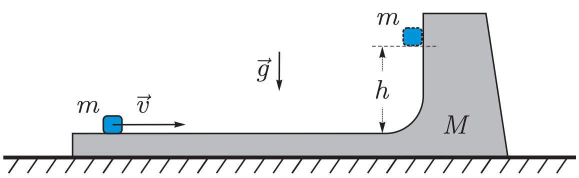
Energija koju je telo m_1 imalo pre sudara je:

$$E_{k1} = \frac{m_1 v^2}{2} = 32J \tag{44}$$

Ako nađemo količnik $\Delta E_k / E_{k1} = 0,75$, saznajemo da se čak 75% kinetičke energije pri sudaru transformisalo u energiju deformacije i toplotu!

DRUGI ZADATAK

Telo mase $m = 0,5kg$ kreće se brzinom $v = 2m/s$ po telu mase $M = 5kg$ koje stoji na horizontalnoj podlozi kao što je prikazano na Slici 3. Do koje visine h se telo mase m može popeti? Sva trenja zanemariti. Šta se dobija za $M \to \infty$? Za ubrzanje zemljine teže uzeti $g = 9,81m/s^2$.



Slika 3

REŠENJE:
Na osnovu zakona održanja impulsa možemo napisati:

$$mv = (m + M)V \tag{1}$$

Zakon održanja energije daje:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m + M)V^2}{2} + mgh \tag{2}$$

Ako pomoću (1) izrazimo brzinu V i uvrstimo u (2) nakon sređivanja nalazimo:

$$h = \frac{Mv^2}{2g(M + m)} = 0,185m = 18,5cm \tag{3}$$

U cilju nalaženja rezultata za slučaj $M \to \infty$ rešenje (3) ćemo napisati u drugačijem obliku:

$$h = \frac{v^2}{2g(1 + \frac{m}{M})} \simeq \frac{v^2}{2g} = 0,204m = 20,4cm \tag{4}$$

jer član $\frac{m}{M}$ teži nuli.

Zadaci za samostalni rad: 1.6; 1.7; 1.8; 1.9.

Literatura: Tehnička Fizika, Ana Kozmidis Petrović.
Zbirka zadataka iz fizike - mašinski odsek, Ljuba Budinski-Petković, Ana Kozmidis-Petrović, Milica Vučinić Vasić, Ivana Lončarević, Aleksandra Mihailović, Dušan Ilić, Robert Lakatoš.
FTN Izdavaštvo, Novi Sad.