3. Predavanje

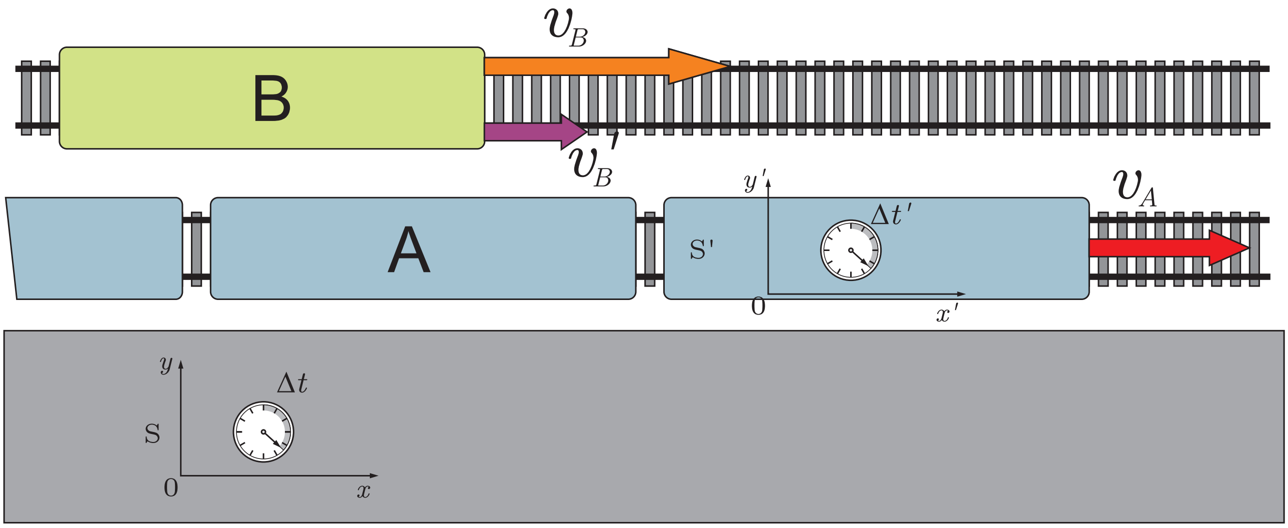
October 11, 2016

1 Predavanje o specijalnoj relativnosti

Ajnštajnovoj specijalnoj teoriji relativnosti (1905.) prethodila su dva važna otkrića: Maksvelova teorija elektrodinamike i Michelson-Morley-ev eksperiment. James Clerk Maxwell (1831-1879), formulisao je jedinstvenu teoriju elektromagnetizma na osnovu ranijih radova Majkla Faradeja, Andrea Ampera i drugih.
Maxwell-ov skup diferencijalnih jednačina elektromagnetnog polja mogao je dati rešenja koja predviđaju postojanje elektromagnetnih talasa. Brzina prostiranja ovih talasa odgovarala je izmerenoj brzini prostiranja svetlosti. Na osnovu Maksvelove teorije brzina elektromagnetnih talasa u vakuumu je $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, gde je ε_0 dielektrična permitivnost vakuuma, a μ_0 apsolutna permeabilnost vakuuma. Dielektrična permitivnost je mera suprotstavljanja određene sredine da kreira električno polje. Permeabilnost je mera sposobnosti da određena sredina kreira magnetno polje. Konstante μ_0 i ε_0 su bile poznate, pa se iz njih mogla izračunati brzina elektromagnetnih talasa. Na osnovu jednakosti brzine svetlosti i brzine prostiranja elektromagnetnih talasa, moglo se nagovestiti da svetlost i elektromagnetni talasi imaju istu prirodu. Odnosno Maxweel-ova teorija je adekvatna za objašnjavanje i svetlosnih pojava.
U vreme otkrića Maksvelove teorije bio je prihvaćen koncept apsolutnog prostora i vremena, tj. smatralo se da je moguće definisati jedan univerzalni kordinanti sistem u odnosu na koji se određuju položaji svih objekata u kosmosu. Takođe ovom kordinatnom sistemu se mogao pripisati i jedan univerzalni časovnik kojim se meri vreme. Takav sistem koji apsolutno miruje, nevidljiv je, prožima ceo kosmos i "scena" je za sve događaje, ali ima sposobnost da prenosi elektromagnetne talase. Ovaj sistem je nazvan etar. Međutim rezultati eksperimenta koje su objavili Michelson i Morley (1887.) doveli su ovaj koncept u pitanje.

1.1 Galilejeve transformacije

Galilejeve transformacije čine skup jednačina po kojima se transformišu kordinate pri prelasku iz jednog inercijalnog sistema u drugi. Do ovih transformacija najlakše možemo doći razmatrajući jednostavan primer relativnog kretanja vozova u železničkoj stanici (Slika 1).



Slika 1 Relativno kretanje vozova.

Neka se voz A kreće brzinom v_A u odnosu na železničku stanicu. Pokretni kordinatni sistem vezan za voz A označićemo sa S'. Sa druge strane kordinatni sistem koji miruje vezan je za stanicu i označen je sa S. Smatramo da vremenski intervali mereni u oba kordinatna sistema imaju iste vrednosti $\Delta t = \Delta t'$, tj. vreme protiče jednako, nezavisno od kretanja voza, što je u saglasnosti sa svakodnevnim opažanjima. Pretpostavimo da se i voz B kreće u istom smeru kao i voz A, ali nešto većom brzinom v_B. Putnik u vozu A ako meri brzinu voza B, neće se složiti sa brzinom koju je izmerio posmatrač na stanici. Zbog relativnog kretanja voza A i B, putnik meri nešto manju brzinu, koju smo označili sa v'_B. Šta više ako bi se vozovi A i B u odnosu na staniocu kretali istim brzinama, putnik u vozu A mogao bi reći da voz B miruje u odnosu na njega, tj. miruje u sistemu S'. Brzina voza B merena u sistemu S' umanjena je za brzinu voza A merena u sistemu S. Ovo se može zapisati kao:

$$v'_B = v_B - v_A \tag{1}$$

Pretpostavimo da želimo da odredimo i udaljenost voza B u odnosu na kordinatni početak sistema S i S'. Sa x_B označićemo položaj voza B u kordinatnom sistemu S, a sa x'_B položaj voza B u sistemu S'. Pretpostavimo da su se u trenutku kada smo počeli da merimo vreme kordinatni počeci sistema S i S' poklapali. To znači da je u trenutku $t = 0$ udaljenost voza B od oba kordinatna početka jednaka. Položaje voza B u sistemima S i S' u proizvoljnom trenutku t nalazimo ako pomnožimo relaciju (1) sa vremenom t:

$$v'_B t = v_B t - v_A t \tag{2}$$

Proizvod $v'_B t = x'_B$ je kordinata voza B u sistemu S'. Sa druge strane proizvod $v_B t = x_B$ je kordinata voza B u sistemu S. Dakle:

$$x'_B = x_B - v_A t \tag{3}$$

Ako izostavimo indekse u jednačini (3) i napišemo da je vremenski trenutak u sistemu S i S'jednak, dolazimo do standardne forme Galilejevih transformacija:

$$t' = t \tag{4}$$

$$x' = x - vt \tag{5}$$

1.2 Michelson-Morley-ev eksperiment

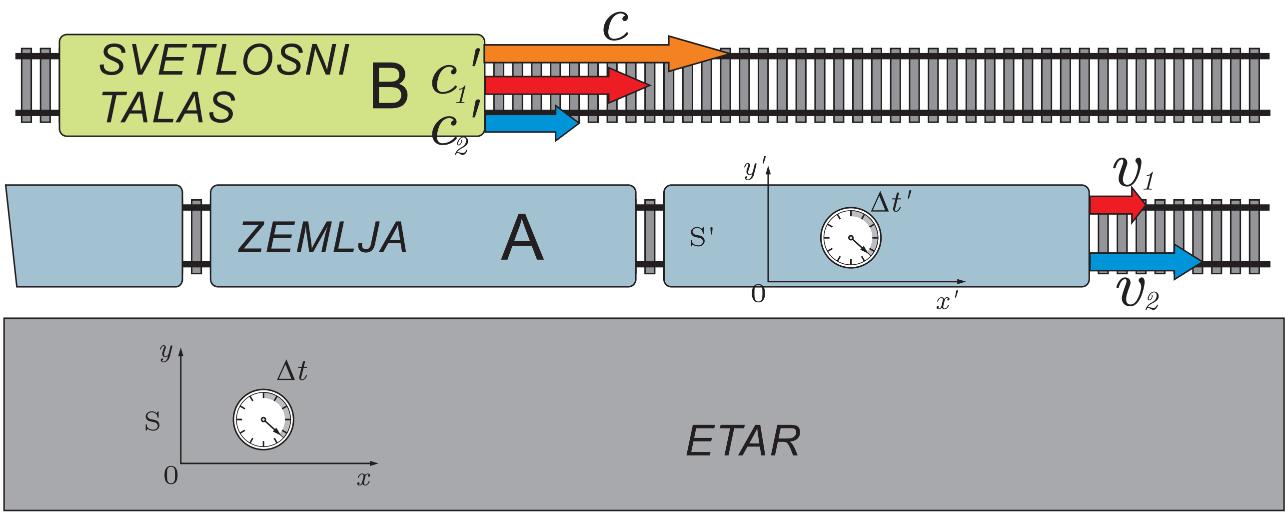
Cilj eksperimenta bio je da se utvrdi kretanje zemlje u odnosu na sistem koji prenosi elektromagnetne talase, tzv. etar. Radi ilustracije ideje i ishoda eksperimenta ponovo ćemo razmotriti prethodni primer ali u drugačijem kontekstu. Neka je etar sada vezan za železničku stanicu, tj. nepokretni sistem S. Zemlja je voz A koji sada može da se kreće kroz etar dvema različitim brzinama v_1 i v_2. U praksi, dve različite brzine zemlje postižu se konstatacijom da usled rotacije zemlje oko svoje ose možemo definisati dva pravca istok-zapad, i sever-jug, u odnosu na koje je brzina zemlje različita u odnosu na etar. Voz B je svetlosni talas koji se kreće brzinom c u odnosu na etar. Prema Galilejevim transformacijama, ako se voz kreće u odnosu na etar brzinom v_1, kako je to naznačeno na Slici 2, brzina svetlosti merena iz voza A je:

$$c_1' = c - v_1 \tag{6}$$

Ako se voz A kreće brzinom v_2, brzina svetlosti u odnosu na voz A je:

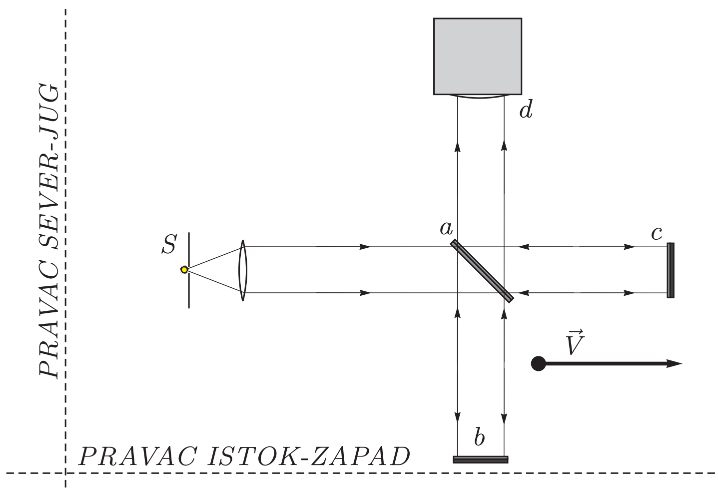
$$c_2' = c - v_2 \tag{7}$$

Međutim iako su brzine v_1 i v_2 različite, eksperiment je pokazao da nema razlike u brzinama svetlosti c_1' i c_2', što je kontradiktorno Galilejevim transformacijama.



Slika 2 Ideja Michelson-Morley-evog eksperimenta.

Principijalna šema stvarnog eksperimenta prikazana je na Slici 3.



Slika 3 Principijalna šema Michelson-Morley-ve aparature. S-izvor monohromatske svetlosti, a-polupropustljivo ogledalo, b,c-regularna ogledala, d-detektor.

Iz izvora svetlosti S i pomoću sočiva kreira se paralelean snop monohromatske svetlosti koji pada na polupropustljivo ogledalo a. Ovo ogledalo ima svojstvo da delimično propušta i reflektuje zrake.

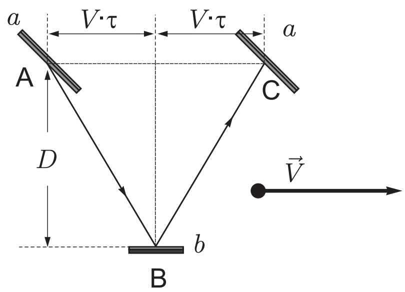
Zbog toga jedan deo snopa svetlosti se reflektuje od ogledala a i pada na regularno ogledalo b. Drugi deo snopa prolazi kroz ogledalo a i pada na regularno ogledalo c. Pri odbijanju snopa svetlosti od ogledala b on delimično prolazi kroz ogledalo a i pada na detektor d. Svetlost reflektovana sa ogledala c delimiočno se reflektuje na ogledalu a i takođe pada na detektor d. U detektoru d kreira se slika od dva snopa, reflektovana od ogledala b i reflektovana od ogledala c. Ta dva snopa interferiraju, tj. s obzirom na talasnu prirodu svetlosti ukoliko su rastojanja a-c i a-d različita može doći do slabljenja ili jačanja intenziteta svetlosti u detektoru d. Neka su rastojanja a-b i a-c jednaka. Međutim ukoliko se zemlja, a zajedno sa zemljom kreće i aparatura kroz etar brzinom V vremena potrebna da svetlost pređe rstojanja a-c i a-d prema Galilejevim transformacijama biće različita.
Razmotrimo put svetlosti a-c, c-a. Ako se aparatura kreće brzinom V u odnosu na etar u naznačenom smeru ukupno vreme potrebno da svetlost pređe rastojanje a-c-a je:

$$t_{aca} = t_{ac} + t_{ca} = \frac{ac}{c-V} + \frac{ca}{c+V}, \tag{8}$$

gde je c brzina svetlosti u odnosu na etar.
Ako rastojanje a-b obeležimo sa D nalazimo koliko rastojanja pređe svetlosni zrak u odnosu na etar, na pravcu a-c-a:

$$D_1 = c \cdot (t_{ac} + t_{ca}) = cD\left(\frac{1}{c-V} + \frac{1}{c+V}\right) = 2D\frac{c^2}{c^2 - v^2} \cong 2D\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) \tag{9}$$

Rastojanje između a i b jednako je rastojanju a-c, obeleženo sa D. Sa druge strane putanja, koju svetlost pređe u etru pri odbijanju od ogledala b, ima oblik jednakokrakog trougla ABC (Slika 4).



Slika 4 Izgled putanje svetlosti pri odbijanju od sistema ogledala a-b-a.

Ako izdelimo ovaj truogao na dva pravougla nalazimo ukupnu dužinu puta koju svetlost pređe na putanji a-b-a u sistemu vezanom za etar:

$$D_2 = 2\sqrt{D^2 + (V\tau)^2} \tag{10}$$

gde je τ vreme potrebno da svetlost pređe rastojanje D i iznosi $\tau = \frac{D}{c}$. Konačno:

$$D_2 = 2D\sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}} \cong 2D\left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right) \tag{11}$$

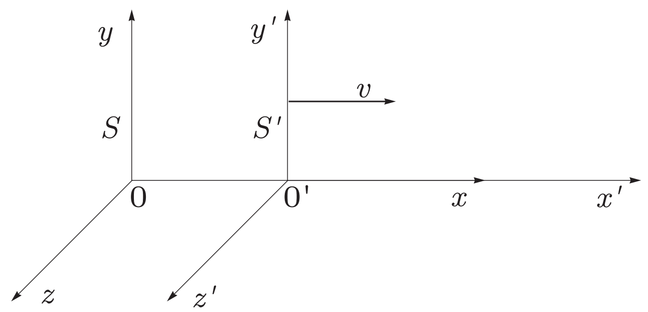
Putna razlika iznosi:

$$\Delta D = D_1 - D_2 = D\frac{V^2}{c^2} \tag{12}$$

Očigledno, ako pretpostavimo da se brzine transformišu prema Galilejevim transformacijama i da postoji etar, u detektoru d bi trebao da se vidi pomak u inteferencionim linijama. Međutim eksperiment je pokazao da ukoliko se uređaj zaokrene i za 90° nema pomaka u ineterferencionoj slici. Ovaj ogled nije dokazao postojanje kretanja zemlje u odnosu na etar, tj. postojanje samog etra.

1.3 Lorencove transformacije u Ajnštajnovoj teoriji specijalne relativnosti

Pravilnu interperetaciju Michelson-Morley-evog eksperimenta dao je Ajnštajn postulirajući da brzina svetlosti ima istu vrednost nezavisno od kretanja izvora ili posmatrača. Brzina svetlosti je u svim inercijalnim sistemima ista. Ovo znači da ako se elektromagnetni talas u sistemu koji miruje prostire u vidu sfere čiji se poluprečnik povećava brzinom svetlosti c, onda i u proizvoljnom sistemu koji se kreće u odnosu na nepokretni sistem brzinom v, elektromagnetni talas opet prostire u vidu sfere čiji poluprečnik raste brzinom c. Ukoliko uvedemo pretpostavku da svi zakoni fizike imaju isti oblik nezavisno od inercijalnog sistema, dobija se Ajnštajnova teorija specijalne relativnosti. Polazna tačka specijalne teorije relativnosti je izvođenje novih kordinatnih transformacija koje ne protivreče rezultatima Michelson-Moreley-evog eksperimenta. Ove transformacije prvi je dao Hendrik Lorentz, a pravilno interpretirao Ajnštajn.
U cilju izvođenja Lorencovih transformacija uvodimo dva kordinatna sistema S i S'pri čemu se S' kreće konstantnom brzinom v u odnosu na kordinatni sistem S u prvacu x-ose (Slika 5).



Slika 5 Kordinatni sistemi S i S', pri čemu se S' kreće brzinom v u odnosu na S u pravcu x-ose.

Radi jednostavnosti uvodimo pretpostavku da su se u trenutku $t = 0$ kordinatni počeci oba sistema poklapala. Zahtevamo da su veze između kordinata S i S' linearne, jer u suprotnom fizički zakoni nebi imali isti oblik. Linearnost transformacija obezbeđuje da je uniformno kretanje u sistemu S takođe uniformno i u S'. S obzirom na ove postavke, u najopštijem slučaju veze između S i S' kordinata su date relacijama:

$$t' = At + Bx \tag{13}$$

$$x' = Dt + Ex, \tag{14}$$

a s obzirom da y i y' i z i z' kordinate nemaju relativno kretanje, važi:

$$y' = y \tag{15}$$

$$z' = z \tag{16}$$

Nepoznate veličine A, B, E i D treba odrediti. Ako se S' kreće brzinom v u odnosu na S u pozitivnom pravcu x-ose, onda važi za kordinatni početak $x' = 0$:

$$x = vt \tag{17}$$

Ako (17) zamenimo u (14), nalazimo:

$$0 = Dt + Evt \tag{18}$$

odakle sledi $D = -Ev$. Sada se (14) svodi na:

$$x' = E(x - vt) \tag{19}$$

Slično, posmatraču is sistema S' izgleda kao da se sistem S kreće u negativnom smeru x' ose brzinom v, pa se može napisati za $x = 0$:

$$x' = -vt' \tag{20}$$

Ako (20) zamenimo u (14) i poredimo sa (13), s obzirom da je sada $x = 0$, imamo

$$t' = At \tag{21}$$

i

$$-vt' = -Evt \tag{22}$$

odakle sledi $E = A$. S obzirom na ova razmatranja (13) i (14) se svode na:

$$t' = Et + Bx, \tag{23}$$

$$x' = E(x - vt) \tag{24}$$

Ako smatramo da je vreme apsolutno, tj. $t' = t$ sledi da je $E = 1$ i $B = 0$ i (23) i (24) se svode na Galilejeve transformacije:

$$t' = t \tag{25}$$

$$x' = x - vt \tag{26}$$

$$y' = y \tag{27}$$

$$z' = z \tag{28}$$

koje su primenljive za brzine mnogo manje od brzine svetlosti.
Sa druge strane ako uzmemo u obzir Ajnštajnov postulat da je brzina svetlosti u svim inercijalnim sistemima jednaka, elektromagnetni talas ima oblik sfere koji se širi brzinom svetlosti c u oba sistema S i S', pa stoga važi:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \tag{29}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{30}$$

Jednačina sfere u Dekartovim kordinatama je $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gde je R poluprečnik sfere. U slučaju elektromagnetnog talasa poluprečnik sfere raste brzinom c, odnosno$R = ct$.
Formule (29) i (30) se mogu povezati:

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \tag{31}$$

odnosno, s obzirom da je $y' = y$ i $z' = z$,

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2 \tag{32}$$

Ako izraze (23) i (24) zamenimo u (32), nalazimo:

$$c^2 (Et + Bx)^2 - E^2 (x - vt)^2 = c^2 t^2 - x^2 \tag{33}$$

tj. nakon kvadriranja i grupisanja članova, nalazimo:

$$E^2 (c^2 - v^2) t^2 + 2EBc^2 tx + 2E^2 vtx + c^2 (B^2 - E^2) x^2 = c^2 t^2 - x^2 \tag{34}$$

Poređenjem leve i desne strane jednakosti (34), nalazimo:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{35}$$

i

$$B = -E \frac{v}{c^2} \tag{36}$$

S obzirom na dobijene vrednosti za B i E, uvrštavanjem (35) i (36) u (23) i (24), slede Lorencove transformacije:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{37}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{38}$$

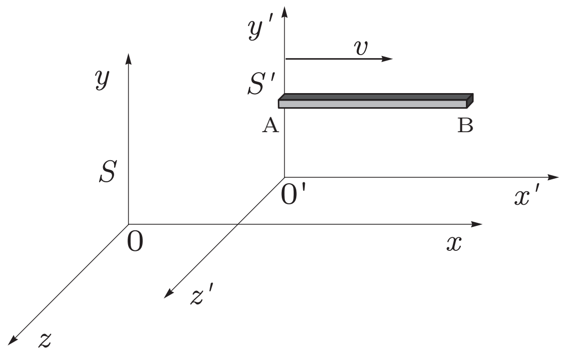
$$y' = y \tag{39}$$

$$z' = z \tag{40}$$

Za razliku od Galilejevih transformacija u Lorencovim transformacijama vremenski trenutak nekog događaja u sistemu S' ne zavisi samo od trenutka u sistemu S, već i od položaja tog događaja u S. Slično je i za položaj događaja u S'. Koncept apsolutnog vremena i prostora ovde više nije na značaju. Treba reći da je matematički oblik Lorencovih transformacija u potpunosti konzistentan sa Maksevolom teorijom elektrodinamike, jer se pomoću njih pravilno transformišu takozvane jednačine elektromagnetnog polja, i zadržava se važnost da fizički zakoni imaju isti oblik bez obzira na izbor kordinatnog sistema. Interesantno je da je Ajnštajn prepoznao potrebu za novim transformacijama u Maksvelovoj teoriji elektromagnetnog polja, a ne u rezultatima Michelson-Morley-ovog eksperimenta. Ajnštajn je tvrdio da eksperiment Michelson-Morley-a nije bio relevantan za formulaciju specijalne teorije relativnosti. Bez obzira na istorijski sled događaja, prostor i vreme više nisu mogli biti shvaćeni kao odvojeni entiteti. Na primer iz teorije specijalne relativnosti sledi da ukoliko se neki objekat brže kreće kroz prostor, on sporije ide kroz vreme.

1.3.1 Neke posledice Lorencovih transformacija

Posmatrajmo štap AB koji se nalazi u pokretnom sistemu S' (Slika 6).



Slika 6 Štap paralelan x-osi koji se nalazi u pokretnom sistemu S'.

Saglasno Lorencovim transformacijama možemo napisati vezu kordinata krajnjih ivica ovog štapa u sistemima S i S'.

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{41}$$

$$x'_B = \frac{x_B - vt_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{42}$$

Dužina štapa u sistemu S' je:

$$x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A + v(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{43}$$

S obzirom da posmatrač istovremeno meri dužinu u sistemu S ($t_B = t_A$), sledi:

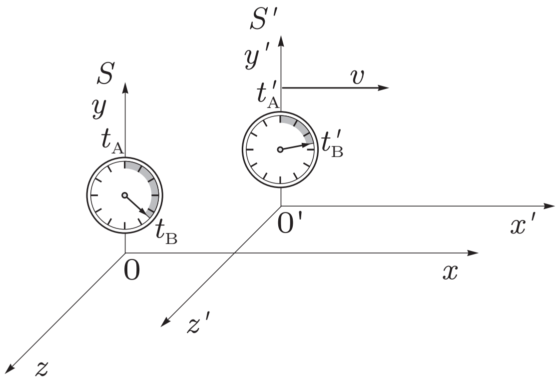
$$x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{44}$$

Ako uvedemo pojam sopstvene dužine $\ell_0 = x'_B - x'_A$, koja predstavlja dužinu štapa u sistemu vezanom za štap, nalazimo:

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{45}$$

gde smo sa ℓ označili dužinu štapa koju vidi posmatrač u sistemu S. S obzirom na dobijeni rezultat, saznajemo da za posmatrača u sistemu S štap izgleda kraći. Ovaj efekat naziva se kontrakcija dužine. Naravno uočljiv je samo pri brzinama bliskim brzinama svetlosti.

Pretostavimo da se u kordinatnim počecima sistema S i S' nalaze časovnici čije su se kazaljke u trenutku $t = t' = 0$ poklapale.



Slika 7 Časovnici u sistemima S i S'.

To znači da u momentu kada su se kordinanti počeci poklapali, kazaljke satova pokazuju isto vreme. Potražićemo vezu između vremenskih intervala u sistemima S i S' (Slika 7). Saglasno Lorencovim transformacijama za dva trenutka t'_A i t'_B, sledi:

$$t'_A = \frac{t_A - \frac{v}{c^2}x_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{46}$$

i

$$t'_B = \frac{t_B - \frac{v}{c^2}x_B}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{47}$$

Vremenski interval u sistemu S' $\Delta t' = t'_B - t'_A$, je:

$$\Delta t' = \frac{t_B - t_A - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{48}$$

S obzirom da se u sistemu S časovnik pomerio za rastojanje;

$$x_B - x_A = v(t_B - t_A) = v\Delta t \tag{49}$$

Na osnovu (48) i (49), sledi:

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{50}$$

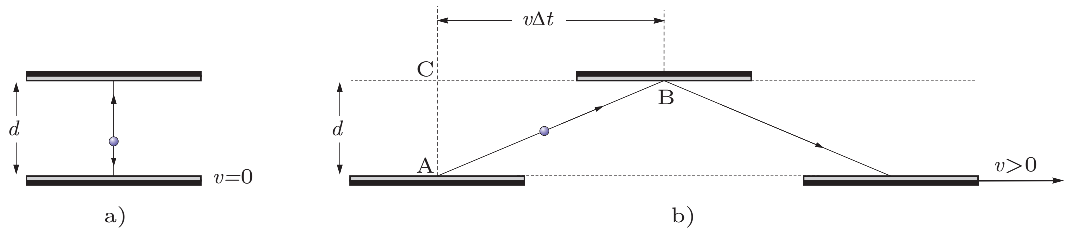
odnosno:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{51}$$

Vremenski interval u sistemu vezanom za časovnik $\Delta t'$ se obično naziva sopstevim vremenskim intervalom i obeležava se sa τ. Sledi:

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{52}$$

Za posmatrača u sistemu S, s obzirom na (52) vreme teče brže u odnosu na pokretni časovnik. Na primer, ako je u S' protekla $\tau = 1s$ pri brzini $v = 0.9c$, u sistemu S je prošlo već $\Delta t = 2,3s$
Izraz za dilataciju vremena (51) može se izvesti i misaonim eksperimentom gde razmatramo tzv. fotonski časovnik (Slika 8).



Slika 8 Fotonski časovnik a) kako ga vidi putnik u svemirskom brodu; b) kako ga vidi posmatrač svemirskog broda pored koga on prolazi brzinom v.

Fotonski časovnik sastoji se od dva paralelna ogledala na međusobnom rastojanju d između kojih se nalazi jedan foton koji se neprestano kreće gore-dole. Neka se taj fotonski časovnik nalazi u kabini svemirskog broda koji se kreće velikom brzinom. Putnik u kabini broda vidi foton koji se kreće gore-dole brzinom svetlosti kako je to naznačeno na Slici 8.a. Vremenski interval $\Delta t'$ potreban da foton stigne od jednog ogledala do drugog za putnika u svemirskom brodu iznosi:

$$\Delta t' = \frac{d}{c} \tag{53}$$

Pretpostavimo sada da pored nekog posmatrača svemirski brod prolazi brzinom v. Za njega se fotonski časovnik takođe kreće brzinom v kao što je naznačeno na Slici 8.b. Međutim za posmatrača svemirskog broda, putanja fotona izgleda kao na Slici 8.b). S obzirom da je brzina svetlosti konstantna, foton se za posmatrača svemirskog broda i po dijagonalnoj putanji kreće brzinom svetlosti c. Ako uočimo pravougli trougao ABC, možemo napisati:

$$d = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (v\Delta t)^2} \tag{54}$$

gde vremesnki interval Δt označava vreme potrebno da foton stigne od donjeg do gornjeg ogledala koji meri posmatrač svemirskog broda. Ako pomoću (53) eliminišemo rastojanje između ogledala d iz (54), dobijamo:

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{55}$$

odnosno:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{56}$$

što je u saglasnosti sa relacijma (51) ili (52). Dakle za posmatrača vremenski interval u svemirskom brodu izgleda duži, tj. on konstatuje da u svemirskom brodu vreme teče sporije. Ova pojava naziva se dilatacija vremena i eksperimentalno je dokazana.

1971. godine Cezijumski časovnik je stavljen u kabinu aviona koji je leteo brzinom 1200km/h odnosno 0.0001% brzine svetlosti. Nakon 15 sati leta časovnik je kasnio za $4{,}7{\cdot}10^{-8}$ sekundi u odnosu na identičan časovnik na tlu. Mereno zakašnjenje je u potpunoj saglasnosti sa teorijom specijalne relativnosti. Drugi primer je srednje vreme života čestice π^+ mezona u sistemu koji miruje i u pokretnom sistemu, tj. kada nailazi u vidu kosmičkog zračenja. Sopstveno vreme života π^+ mezona iznosi $\tau = 2,5\times10^{-8}s$. Međutim ako se kreće brzinom $v = 0,9c$ sledi da je vreme života oko $\Delta t = 5,7\times10^{-8}s$ omogućavajući im da prevale veće rastojanje u atmosferi, što se i opaža. Za sinhronizaciju časovnika u satelitima za globalno pozicioniranje nije dovoljno uzeti u obzir ovu dilataciju već se mora uzeti u obzir i efekat gravitacionog polja.

Bez izvođenja navodimo nekoliko važnih relacija koje slede iz specijalne teorije relativnosti. Ukupna energija slobodne čestice ili objekta je:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{57}$$

Ako čestica miruje $v = 0$, iz (57) sledi:

$$E_0 = m_0c^2 \tag{58}$$

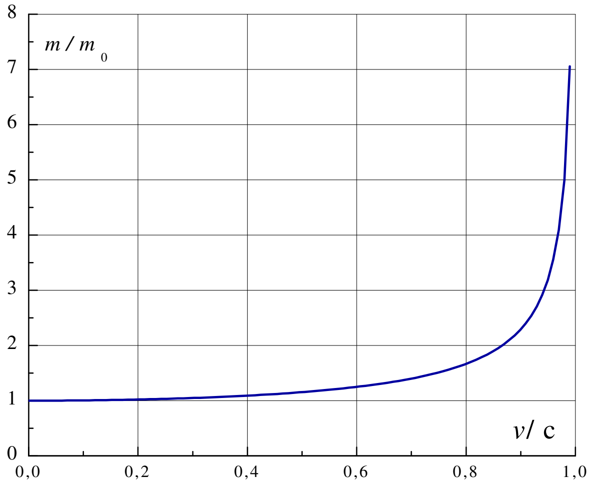
i naziva se energija mirovanja. Izraz (58) izražava ekvivalentnost između mase i energije i smatra se najvažnijom relacijom iz teorije specijalne relativnosti. Efekat ekvivalntnosti mase i energije nije merljiv pri hemijskim reakcijama pa nije relevantan u hemiji. Međutim pri nuklearnim reakcijama efekat ekvivalentnosti energije i mase je merljiv. Ukupna masa reaktanata pri nuklearnim reakcijama je različita od ukupne mase proizvoda reakcije. Takođe poznat je efekat da foton ukoliko ima energiju veću od dvostruke energije mirovanja elektrona, pri interakciji sa atomskim jezgrom, može da se pretvori u par čestica antičestica (pozitron-elektron par). To je primer pretvaranja energije u materiju.
S obzirom na (58) i (59) kinetička energija slobodnog objekta ili čestice je:

$$E_k = E - E_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \tag{59}$$

Masa koja figuriše u gornjim relacijama m_0 naziva se masa mirovanja. Porastom brzine, masa čestice raste:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{60}$$

što predstavlja ograničenje da se nijedna čestica ili objekat ne može ubrzati do brzine koja je veća od svetlosne, jer mera inertnosti raste u beskonačnost.



Slika 9 Zavisnost relativističke mase od brzine saglasno relaciji (60).

Kao što se vidi na grafiku prikazanom na Slici 9 masa tela drastično raste tek pri brzinama iznad 0,8c. Ograničenje da se ništa ne može kretati brže od brzine svetlosti u vakuumu dovodi u veliko pitanje međuzvezdana putovanja i komunikaciju sa eventualnom vanzemaljskom inteligencijom. Brzina svetlosti u vakuumu iznosi $c = 2,9979 \cdot 10^8 m/s$.

1.4 Relativističko sabiranje brzina (*Dodatno gradivo*)

Komponente brzina materijalne tačke u bilo kom trenutku u sistemu S koji miruje su date definicijama:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{61}$$

Dok su u sistemu S', koji se kreće brzinom v duž x-ose u pozitivnom smeru za istu materijalnu tačku, analogno:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'} \qquad v'_z = \frac{dz'}{dt'} \tag{62}$$

Treba naći veze između komponenata brzina u S' i S sistemu. Diferencirajući Lorencove transformacije (37-40), nalazimo:

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad dy' = dy \qquad dz' = dz \tag{63}$$

Ako sada uvrstimo dogovarajuće izraze iz (63) u (62), nakon sređivanja nalazimo:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \qquad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \qquad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \tag{64}$$

Skup jednačina (64) predstavlja način za relativističko sabiranje brzina kada se pokretni sistem S' kreće u paralelno x-osi u smeru kao i x-komponenta brzine materijalne tačke u sistemu S. Ako je

smer kretanja sistema S' suprotan, znak - ispred brzine v treba zameniti sa znakom +. Za razliku od klasičnog sabiranja brzina, kao što je diskutovano u odeljku 1.1, relativističko sabiranje postavlja ograničenje da ni relativno kretanje ne može biti veće od brzine svetlosti.
Na primer, uzmimo da se materijalna tačka u sistemu S kreće brzinom $v_x = 0,8c$, a sistem S' u susret toj tački brzinom $v = 0,9c$. Brzina materijalne tačke u sistemu S' bi bila prema klasičnom poimanju $v'_x = (0,8 + 0,9)c = 1,7c$, što je veće od brzine svetlosti c. Međutim ako se primeni relativistički način sabiranja brzina, prema prvoj formuli u skupu (64), nalazimo $v'_x = \frac{0,8c+0,9c}{1+\frac{0,9c\cdot 0,8c}{c^2}} = 0,988c$, što je manje od brzine svetlosti c. Odnosno u brojiocu figuriše zbir dva broja, a u imeniocu proizvod ista ta dva broja. Očigledno za bilo koje brzine sistema S' i materijalne tačke, ne može se dobiti brzina veća od svetlosne.

2 Tri zadatka iz specijalne relativnosti

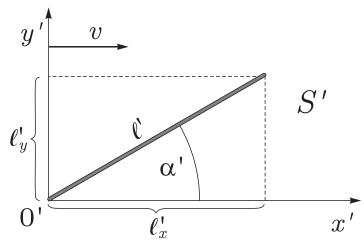
PRVI ZADATAK
U pokretnom sistemu S', štap ima dužinu $\ell' = 1m$ pri čemu obrazuje ugao $\alpha' = 30°$ sa x'-osom. Naći dužinu ℓ i ugao α u sistemu koji miruje. Relativna brzina kordinatnih sistema je $v = 0,5c$.
REŠENJE
Projekcija dužine štapa na x'-osu u sistemu S' je:

$$\ell'_x = \ell' \cos\alpha', \quad (1)$$

a na y' osu:

$$\ell'_y = \ell' \sin\alpha' \quad (2)$$

kao što je prikazano na Slici 10.



Slika 10 Štap u pokretnom sistemu S'.

Koristeći izraz za kontrakciju dužine, nalazimo projekciju na x-osu u sistemu S:

$$\ell_x = \ell'_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \ell'\cos\alpha'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (3)$$

Projekcija dužine štapa na y-osu u sistemu S je ista kao i u S' jer je prema Lorencovim transformacijama $y' = y$:

$$\ell_y = \ell'_y = \ell' \sin\alpha' \quad (4)$$

Sledi da je dužina štapa u S sistemu:

$$\ell = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2} = \ell'\sqrt{(\cos\alpha')^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + (\sin\alpha')^2} = 0,9m \quad (5)$$

Ugao koji štap zahvata sa x-osom u sistemu S nalazimo preko relacije:

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{\ell_y}{\ell_x}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\alpha'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = 33,7° \quad (6)$$

DRUGI ZADATAK

Štap se kreće konstantnom brzinom u pravcu lenjira koji miruje. Dužina štapa izmerena lenjirom u referentnom sistemu lenjira iznosi $\Delta x_1 = 5m$. Međutim kada se dužina štapa izmeri istim lenjirom (koji još uvek miruje) u referentnom sistemu vezanom za štap, ona iznosi $\Delta x_2 = 8m$. Odrediti sopstevnu dužinu štapa i njegovu brzinu u odnosu na lenjir.

REŠENJE

S obzirom na izraz za kontrakciju dužine imamo:

$$\Delta x_1 = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Sa druge strane, kada se dužina meri u sistemu vezanom za štap, tada je lenjir pokretan, pa je merena dužina:

$$\ell_0 = \Delta x_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2}$$

Deljenjem izraza (1) i (2) nakon sređivanja, nalazimo:

$$\ell_0 = \sqrt{\Delta x_1 \Delta x_2} = 6,3m \tag{3}$$

Zamenom (3) na primer u (1), nalazimo:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}} = 1,8 \cdot 10^8 m/s \tag{4}$$

TREĆI ZADATAK

Nepomična čestica mase M raspada se na dve identične čestice mase mirovanja $m = 0,45M$. Naći brzine ovih čestica.

REŠENJE

Energija mirovanja čestice M transformiše se u energiju (ukupna energija) čestica koje su nastale pri raspadu. S obzirom na održanje impulsa, obe čestice moraju imati iste brzine koje su suprotno usmerene, odnosno imaju jednake energije. Dakle:

$$E_0 = 2E_m \tag{1}$$

$$Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

Ako (2) rešimo po nepoznatoj brzini, dolazimo do rešenja:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{2m}{M}\right)^2} = 1,31 \cdot 10^8 m/s \tag{3}$$

Zadaci za samostalni rad: 2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 2.5; 2.6

Literatura: Zbirka zadataka iz fizike - mašinski odsek, Ljuba Budinski-Petković, Ana Kozmidis-Petrović, Milica Vučinić Vasić, Ivana Lončarević, Aleksandra Mihailović, Dušan Ilić, Robert Lakatoš.
FTN Izdavaštvo, Novi Sad.